

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA



UNIVERSITÀ  
DI PAVIA

**Ottimizzazione Stocastica Multistadio per la  
Gestione del Rischio nel Mercato Energetico Italiano**

**Tesi di Laurea Magistrale in Matematica**

Relatore:

**Prof. Stefano Gualandi**

Correlatore:

**Dott. Ambrogio Maria Bernardelli**

Tesi di Laurea di:

**Silvia Maria Teresa Stimolo**

Matricola 557441

Anno Accademico 2025-2026



# Abstract

The Italian Energy Market is characterized by high volatility and a complex sequential structure. In this context, defining an optimal bidding strategy is particularly challenging, especially for renewable energy producers subject to the high uncertainty of weather forecasts. To address this complexity, this work develops a multistage stochastic optimization model based on a scenario tree, capable of representing the probabilistic evolution of market prices and determining optimal trading decisions, in order to maximize profit.

The contribution of this research is twofold. On the applied front, the objective function has been extended to include risk minimization through the Conditional Value at Risk (CVaR) metric. This approach allows the operator to limit exposure to catastrophic losses, sacrificing a portion of the expected profit, favoring a more robust and secure strategy in adverse scenarios.

In addition, to improve computational efficiency, this work proposes an innovative formulation to model the market acceptance rules without relying on standard Mixed Integer Linear Programming (MILP) binary variables. Instead, market logic is ensured through the dynamic addition of disjunctive cuts. Whenever the solver identifies an optimal solution that violates the market rules, a new inequality capable of separating the infeasible solutions is iteratively generated. These cuts are computed by solving a Cut Generating Linear Program (CGLP), a methodology that has completely eliminated integer variables, reducing the main model into a pure Linear Program (LP).

Numerical results confirm the validity and efficiency of this alternative formulation, which effectively closes the relaxation gap in the initial iterations. Furthermore, the proposed architecture has shown high flexibility, successfully adapting to more operationally complex structures, such as the Spanish energy market.



# Riassunto

Il Mercato Energetico Italiano è caratterizzato da un'elevata volatilità e da una complessa struttura sequenziale. In questo contesto, definire una strategia di offerta ottimale risulta particolarmente sfidante, specialmente per i produttori di energia da fonti rinnovabili soggetti alla forte incertezza delle condizioni meteorologiche. Per gestire tale complessità, questo lavoro sviluppa dei modelli di ottimizzazione stocastica multistadio basati su un albero degli scenari, in grado di rappresentare l'evoluzione probabilistica dei prezzi di mercato e di determinare le decisioni ottimali di trading, al fine di massimizzare il profitto.

Il contributo della ricerca si articola su due fronti. Sotto il profilo applicativo, la funzione obiettivo è stata estesa per includere la minimizzazione del rischio tramite la metrica Conditional Value at Risk (CVaR). Questo approccio permette all'operatore di limitare l'esposizione alle perdite catastrofiche, sacrificando una quota di profitto atteso in favore di una strategia più robusta e sicura negli scenari sfavorevoli.

Sotto il profilo modellistico, il lavoro propone una formulazione innovativa per formalizzare le regole di accettazione del mercato. Anziché ricorrere a formulazioni MILP standard, basate sull'introduzione di variabili binarie, la logica di mercato viene garantita attraverso l'aggiunta dinamica di tagli disgiuntivi. Ogniqualvolta il solutore individua una soluzione ottima che viola le regole di mercato, viene iterativamente generata una nuova disuguaglianza in grado di separare le soluzioni inammissibili. Tali tagli vengono calcolati risolvendo un Cut Generating Linear Program (CGLP), metodologia che ha consentito di rimuovere integralmente le variabili intere, riducendo il modello principale alla sola programmazione lineare.

I risultati numerici confermano la validità e l'efficienza di questa formulazione alternativa, capace di chiudere il gap di rilassamento fin dalle prime iterazioni algoritmiche. Infine, l'architettura proposta mostra un'elevata flessibilità, adattandosi con successo anche a strutture operativamente più complesse, come il mercato energetico spagnolo.



# Indice

|          |                                                                              |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>                                                          | <b>9</b>  |
| 1.1      | Il Mercato Energetico Italiano . . . . .                                     | 11        |
| 1.1.1    | Il Mercato del Giorno Prima . . . . .                                        | 11        |
| 1.1.2    | Il Mercato Infragiornaliero . . . . .                                        | 12        |
| 1.1.3    | Il Mercato per il Servizio di Dispacciamento . . . . .                       | 13        |
| 1.1.4    | Il Mercato delle Capacità . . . . .                                          | 14        |
| <b>2</b> | <b>Modelli di Ottimizzazione</b>                                             | <b>17</b> |
| 2.1      | Programmazione stocastica multistadio e a due stadi . . . . .                | 17        |
| 2.2      | Ottimizzazione di un portafoglio . . . . .                                   | 19        |
| 2.3      | Misure di rischio e CVaR . . . . .                                           | 21        |
| 2.4      | CVaR e mercati energetici . . . . .                                          | 24        |
| <b>3</b> | <b>Formulazione del Modello di Ottimizzazione Stocastica</b>                 | <b>27</b> |
| 3.1      | Primo caso studio . . . . .                                                  | 27        |
| 3.2      | Secondo caso studio . . . . .                                                | 30        |
| 3.3      | Creazione dell'albero degli scenari . . . . .                                | 32        |
| <b>4</b> | <b>Rafforzamento della Formulazione mediante Tagli Disgiuntivi</b>           | <b>35</b> |
| 4.1      | Analisi del rilassamento continuo . . . . .                                  | 35        |
| 4.2      | I tagli disgiuntivi . . . . .                                                | 36        |
| 4.2.1    | Esempio semplice di taglio . . . . .                                         | 38        |
| 4.3      | Tagli disgiuntivi e CGLP . . . . .                                           | 43        |
| 4.3.1    | Esempio di taglio generato con il CGLP . . . . .                             | 46        |
| 4.4      | Rafforzamento con CGLP . . . . .                                             | 48        |
| 4.4.1    | Prima Formulazione: Separazione sul rilassamento continuo del MILP . . . . . | 49        |
| 4.4.2    | Seconda Formulazione: Modello semplificato . . . . .                         | 50        |
| 4.4.3    | Integrazione di vincoli aggiuntivi . . . . .                                 | 52        |
| <b>5</b> | <b>Test Numerici e Risultati Computazionali</b>                              | <b>57</b> |
| 5.1      | Analisi parametrica del modello . . . . .                                    | 57        |
| 5.1.1    | Test al variare del numero di scenari . . . . .                              | 57        |
| 5.1.2    | Test al variare dei parametri $\eta, \beta$ . . . . .                        | 59        |
| 5.1.3    | Confronto con e senza Mercato Infragiornaliero . . . . .                     | 65        |
| 5.2      | Test tagli disgiuntivi . . . . .                                             | 69        |
| 5.2.1    | Confronto numerico tra i due modelli . . . . .                               | 69        |

|          |                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.2.2    | Analisi della prima e della seconda chiusura . . . . .     | 73        |
| 5.2.3    | Applicazione e confronto con il Mercato Spagnolo . . . . . | 75        |
| <b>6</b> | <b>Conclusioni</b>                                         | <b>81</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>                                        | <b>83</b> |
| <b>A</b> | <b>Indice delle abbreviazioni</b>                          | <b>85</b> |

# Capitolo 1

## Introduzione

I mercati dell'energia ricoprono un ruolo centrale nel garantire l'affidabilità della fornitura elettrica, dovendo costantemente bilanciare l'efficienza economica con la sostenibilità ambientale. Il settore dell'energia elettrica è caratterizzato da un'elevata volatilità dei prezzi e da una complessa struttura sequenziale. Il mercato italiano, strutturato in fasi temporali successive che spaziano dal Mercato del Giorno Prima (MGP) fino alle diverse sessioni del Mercato Intra-giornaliero (MI) e al Mercato per il Servizio di Dispacciamento (MSD), impone agli operatori un continuo riallineamento delle proprie posizioni commerciali. In questo panorama, definire una strategia di offerta ottimale risulta un problema decisionale particolarmente sfidante, specialmente per i produttori di energia da fonti rinnovabili non programmabili, come l'eolico e il fotovoltaico. La produzione di tali impianti è, infatti, intrinsecamente soggetta alla forte aleatorietà legata all'aggiornamento continuo delle condizioni meteorologiche, esponendo gli agenti al rischio di subire pesanti penalità finanziarie nella fase di bilanciamento in caso di squilibri tra l'energia contrattualizzata e quella fisicamente immessa in rete. Fino a pochi anni fa, tali impianti operavano al riparo dai rischi commerciali grazie a tariffe incentivanti fisse, che li esentavano dai costi di sbilanciamento. Attualmente, la progressiva maturità tecnologica impone ai produttori rinnovabili di competere direttamente sul libero mercato, assumendosi per intero il rischio legato alle proprie previsioni.

Per mitigare questa esposizione finanziaria e garantire la flessibilità necessaria per partecipare al dispacciamento, la tendenza operativa è aggregare fonti diverse (come eolico e solare) all'interno di centrali elettriche virtuali (VPP). L'esigenza di ottimizzare in modo centralizzato le offerte di un simile portafoglio ibrido costituisce la motivazione applicativa dei modelli sviluppati nel presente lavoro.

Il presente lavoro di tesi sviluppa due diversi modelli di ottimizzazione stocastica multistadio. In entrambe le formulazioni, l'incertezza viene schematizzata attraverso la generazione di un albero degli scenari, uno strumento matematico capace di catturare l'evoluzione probabilistica dei prezzi zonali.

L'esigenza di confrontare due approcci distinti nasce dall'analisi delle criticità ancora presenti nella letteratura recente. Da un lato, numerosi studi tendono a semplificare eccessivamente il problema omettendo le sessioni intermedie dei

mercati infragiornalieri, rinunciando così al principale spazio di rinegoziazione fisica a disposizione degli operatori. Dall'altro, i modelli stocastici più completi che integrano l'intera sequenza dei mercati, come la formulazione di riferimento proposta da Silva e coautori [15], si concentrano prevalentemente sulla pura massimizzazione del profitto atteso, assumendo un decisore neutrale e ignorando l'implementazione di metriche per l'avversione al rischio.

Per superare queste limitazioni, il contributo di questa ricerca si articola su due fronti: uno di natura applicativa e uno di natura modellistica. Sotto il profilo applicativo, inizialmente viene ripresa e riadattata l'architettura proposta da Silva [15], che funge da baseline per il problema. Successivamente viene introdotto il secondo modello, che rappresenta il contributo originale e il fulcro della tesi: esso integra strutturalmente l'intera sequenza dei mercati con la metrica *Conditional Value at Risk* (CVaR). L'inclusione di tale parametro nella funzione obiettivo consente di quantificare e minimizzare l'entità delle perdite collocate nella coda sinistra della distribuzione statistica. In questo modo, l'operatore può limitare consapevolmente l'esposizione a perdite estreme, accettando di sacrificare una porzione dei ricavi in favore di una strategia più robusta e sicura di fronte alle fluttuazioni avverse del mercato. Quest'ultima formulazione avanzata costituisce, inoltre, l'ambiente matematico di riferimento su cui si innesta il contributo di natura modellistica e algoritmica. Sotto questo secondo profilo, il lavoro propone una formulazione alternativa per modellare le regole logiche di accettazione e rifiuto delle offerte imposte dal gestore. Tradizionalmente, la letteratura affronta questo ostacolo ricorrendo a formulazioni *Mixed Integer Linear Programming* (MILP), appesantite dall'introduzione di numerose variabili binarie e costanti di penalizzazione Big-M, le quali generano rilassamenti continui deboli e dilatano i tempi di convergenza alla soluzione intera. Per ovviare a tali criticità, il presente elaborato propone due soluzioni. Inizialmente, si analizza il modello MILP standard sottoponendolo a rilassamento continuo: in questo approccio le variabili binarie che assumono valori frazionari costituiscono le violazioni fornite in input a un *Cut Generating Linear Program* (CGLP), il quale genera iterativamente piani di taglio disgiuntivi per rafforzare il poliedro originario.

Tuttavia, per ovviare alle instabilità numeriche legate alla presenza delle costanti Big-M, il lavoro propone una formulazione matematica alternativa e "semplificata", che rappresenta il principale contributo originale della ricerca. In questo secondo approccio, la coerenza logica delle decisioni di mercato viene garantita escludendo a priori l'utilizzo di variabili binarie e formulando il problema tramite una quadrupla disgiunzione che rappresenta le quattro possibili situazioni valide di mercato. Ogniquale volta il solutore individua una soluzione ottima frazionaria che viola le regole strutturali di accettazione del mercato, viene generata una nuova disuguaglianza valida tramite un CGLP riadattato, capace di recidere la porzione inammissibile dello spazio.

Questa architettura ha consentito di ricondurre il modello decisionale principale alla pura programmazione lineare continua. I test computazionali hanno dimostrato la validità di questa formulazione alternativa, la quale, lavorando su una matrice meglio condizionata, si è rivelata capace di chiudere efficacemente il *gap* di rilassamento fin dalle prime iterazioni e di adattarsi con successo

anche a strutture operative ad alta dimensionalità, come il mercato energetico spagnolo.

In questo capitolo, si propone un'analisi approfondita dei quattro mercati principali che costituiscono il Mercato Energetico Italiano, con lo scopo di delineare il contesto operativo e definire le logiche strutturali che verranno integrate nel modello matematico. Successivamente, nel Capitolo 2, si introdurrà la cornice teorica dell'ottimizzazione stocastica multistadio e le sue principali applicazioni pratiche. Verrà inoltre definita in modo rigoroso la metrica di rischio CVaR, spiegando nel dettaglio i metodi necessari per integrarla all'interno di un modello di ottimizzazione.

Il Capitolo 3 sarà dedicato alla formulazione del modello matematico, che verrà contestualizzato al caso studio in esame, adattandone i vincoli e le variabili per rispondere alle regole logiche del problema energetico considerato.

Nel Capitolo 4 si proporrà la formulazione alternativa del problema basata sui tagli disgiuntivi; partendo dalle basi teoriche che giustificano la validità di questi iperpiani, si descriverà l'architettura matematica che conduce all'implementazione del CGLP.

Infine, nel Capitolo 5 si valuterà numericamente quanto affrontato da un punto di vista teorico nei capitoli precedenti. In una prima fase, si analizzerà il comportamento del modello al variare del numero di rami dell'albero stocastico e dei parametri che modulano la metrica CVaR. Nella seconda fase, si valuterà l'impatto computazionale dell'introduzione dei tagli disgiuntivi, esaminando i risultati della loro applicazione sia al modello MILP rilassato, sia alla nuova formulazione semplificata governata dal CGLP tramite l'imposizione di una quadrupla disgiunzione.

## 1.1 Il Mercato Energetico Italiano

### 1.1.1 Il Mercato del Giorno Prima

Il Mercato del Giorno Prima (MGP) è la piattaforma principale per lo scambio di energia elettrica in Italia. È il mercato nel quale si effettua la maggior parte delle transazioni di compravendita di energia e opera su base zonale, suddiviso in 7 zone dal sud al nord Italia. Fino al 2024, l'MGP è stato un mercato orario. Tuttavia, a partire dal 2025, in adeguamento alle normative europee, il mercato ha subito una profonda trasformazione passando a una risoluzione quartoraria. Questo significa che le negoziazioni non avvengono più per blocchi di 60 minuti, ma per intervalli di 15 minuti. È opportuno precisare fin da ora che, sebbene le nuove normative impongano prodotti quartorari sull'intera filiera dei mercati, ai fini della trattazione matematica e per preservare la trattabilità computazionale del problema, nei capitoli successivi il modello di ottimizzazione verrà formulato e testato aggregando convenzionalmente i dati su base oraria.

La sessione dell'MGP apre alle 8:00 del nono giorno antecedente il giorno di consegna e chiude alle 12:00 del giorno precedente il giorno considerato. I risultati dell'MGP vengono comunicati entro le 12:55 del giorno precedente il giorno di consegna. L'MGP è un mercato ad asta e non un mercato a contrattazione continua, e segue la regola del “pay as cleared”, ovvero il prezzo è uguale per

tutti. Gli operatori partecipano presentando offerte in cui indicano quantità e prezzo, in particolare le offerte di vendita indicano la quantità da vendere sul mercato e il prezzo minimo al quale gli operatori sono disposti a vendere. Le offerte di acquisto invece indicano la quantità da comprare sul mercato e il prezzo massimo al quale gli operatori sono disposti ad acquistare. Una volta ricevute le offerte, il Gestore dei Mercati Energetici (GME) le ordina come segue: le offerte di vendita in ordine crescente di prezzo, le offerte di acquisto in ordine decrescente di prezzo.

L'intersezione tra le curve di offerta e domanda determina il prezzo di equilibrio (detto prezzo zonale). Tutte le offerte di acquisto con prezzo superiore al prezzo di equilibrio vengono accettate; tutte le offerte di vendita con prezzo inferiore al prezzo di equilibrio vengono accettate. Fino al 2024, il prezzo zonale si applicava solo alle offerte di vendita. Le offerte di acquisto, invece, erano soggette al Prezzo Unico Nazionale (PUN). Il PUN era un prezzo orario calcolato come media dei prezzi zionali dell'MGP, ponderata per i volumi totali di acquisto delle offerte soggette a PUN. Era un prezzo di acquisto applicato a tutti i clienti, indipendentemente dalla loro zona di mercato. Tuttavia, a partire dal 1° gennaio 2025, il meccanismo del PUN è stato eliminato. Di conseguenza, sia le offerte di acquisto sia quelle di vendita vengono scambiate al corrispondente prezzo zonale.

### 1.1.2 Il Mercato Infragiornaliero

Il Mercato Infragiornaliero (MI) è il mercato che si apre dopo la chiusura del MGP e rappresenta la seconda fase del mercato spot. È utilizzato principalmente dagli operatori che hanno partecipato all'MGP per modificare i propri programmi commerciali, in risposta a variazioni nelle previsioni di produzione o di consumo, le cui offerte possono essere presentate fino a un'ora prima della consegna fisica dell'energia.

È suddiviso in due fasi: il mercato continuo e tre aste. Nel mercato continuo gli operatori possono presentare offerte di acquisto e di vendita in modo continuativo dal giorno prima fino a un'ora prima della consegna, ad eccezione dei periodi in cui si svolgono le sessioni d'asta. Le offerte sono abbinate immediatamente se i prezzi lo consentono e se è disponibile capacità di trasporto tra le zone; in caso contrario, vengono raccolte in un book ordini secondo un criterio di merito prezzo-tempo, seguendo la regola del "primo arrivato, primo servito". Non esiste un unico prezzo di mercato: ogni transazione infatti ha un proprio prezzo specifico. Nelle aste, le offerte indicano la quantità e il prezzo minimo (per le vendite) o massimo (per gli acquisti). Durante la sessione d'asta, il GME raccoglie le offerte e dispone le proposte di vendita in ordine crescente di prezzo e quelle di acquisto in ordine decrescente. L'intersezione tra le curve di offerta e domanda determina l'equilibrio del sistema. In generale, il mercato continuo è utilizzato principalmente nelle ultime ore della sessione.

Coerentemente con le nuove direttive valide dal 2025, anche le sessioni di contrattazione del MI sono transitate verso una risoluzione quartoraria. Inoltre, analogamente all'MGP, nelle sessioni d'asta infragiornaliere è stato definitiva-

mente abolito il PUN, sostituito dall'applicazione di un prezzo specifico di zona in zona sia per le offerte di acquisto che per quelle di vendita.

### 1.1.3 Il Mercato per il Servizio di Dispacciamento

Il Mercato per il Servizio del Dispacciamento (MSD) è il meccanismo attraverso il quale il Gestore della Rete (Terna) mira a garantire la sicurezza del sistema elettrico e la qualità del servizio. L'MSD è strutturato in due fasi: MSD ex-ante e Mercato del Bilanciamento (MB).

Nell'MSD ex-ante, dopo aver verificato i risultati dei mercati dell'energia (MGP e MI), Terna si approvvigiona dei margini di riserva necessari e risolve eventuali congestioni intrazonali, tramite la presentazione di offerte per rendere disponibile la propria energia in caso di emergenze.

L'MB è il mercato finale, dove gli operatori di mercato abilitati possono ripresentare le offerte. Terna lo attiva effettivamente in tempo reale per garantire l'equilibrio tra immissioni e prelievi.

Per mantenere la frequenza di rete intorno ai 50 Hz, le immissioni e i prelievi devono essere sempre bilanciati. Gli squilibri possono derivare da fluttuazioni della domanda, fuori servizio dei generatori o produzione rinnovabile variabile. Per correggerli, Terna utilizza riserva a salire per aumentare le immissioni o ridurre i prelievi in caso di cali di produzione o aumenti di carico, oppure riserva a scendere per ridurre le immissioni o aumentare i prelievi in caso di picchi di produzione o diminuzioni di carico.

Una volta approvvigionati i margini di riserva necessari, Terna può attivarli in tempo reale per bilanciare continuamente la produzione e il consumo di energia elettrica.

L'MSD ex-ante è diviso in sei sottofasi. Le offerte per ciascuna ora del giorno di riferimento (D) possono essere presentate solo durante l'MSD1, aperto dalle 12:55 alle 17:00 del giorno D-1. I risultati dell'MSD1 sono comunicati entro le 21:45 del D-1, mentre i risultati delle restanti cinque sessioni sono comunicati nel giorno D.

L'MB consente di presentare offerte in modo continuo per ciascuna ora del giorno D, a partire dalle 22:30 del D-1 e fino a un'ora prima dell'ora a cui l'offerta si riferisce.

Da settembre 2021, l'Italia partecipa al progetto europeo *Cross-Border Intraday* (XBID), che consente la negoziazione infragiornaliera continua fino a un'ora prima della consegna, permettendo agli operatori di aggiornare le proprie previsioni di produzione e consumo. Ciò può entrare in conflitto con l'MSD ex-ante, dove i margini di riserva vengono calcolati prima della chiusura delle sessioni continue del MI, influenzando potenzialmente le riserve approvvigionate dal Gestore del Sistema di Trasmissione (TSO). Per far fronte a ciò, il TSO stabilisce degli intervalli di fattibilità per le unità abilitate, definendo i limiti di potenza attiva entro i quali i setpoint delle unità devono rimanere anche dopo eventuali rinegoziazioni sulla piattaforma XBID.

Le offerte nell'MSD sono remunerate secondo un meccanismo pay-as-bid: le offerte accettate ricevono esattamente il prezzo che hanno offerto. Pertanto, nel

mercato MSD si osservano prezzi differenti per ciascun servizio e per ciascuna sessione di mercato.

Le offerte a salire comportano generalmente un costo per il TSO, mentre le offerte a scendere possono determinare una riduzione dei costi di dispacciamento o un corrispettivo a favore del TSO, a seconda della tipologia di servizio fornito.

A partire dalle transazioni che avvengono in queste sessioni, Terna definisce il prezzo di sbilanciamento, ovvero il valore economico applicato per penalizzare o remunerare le differenze (sbilanciamenti) tra l'energia promessa dall'operatore e quella effettivamente immessa in rete.

A seguito del recente aggiornamento del quadro regolatorio italiano, il meccanismo di valorizzazione è transitato verso un sistema a prezzo singolo. A differenza dei precedenti meccanismi a doppio prezzo, in cui le penalità variavano in modo asimmetrico a seconda del segno dello sbilanciamento, in questo assetto viene determinato un unico prezzo di regolazione per ogni intervallo temporale. Tale valore viene applicato indistintamente sia per remunerare le immissioni in eccesso, sia per addebitare i deficit di produzione dell'operatore.

L'estrema volatilità di questo prezzo unico espone costantemente gli operatori al rischio di subire pesanti perdite finanziarie.

#### 1.1.4 Il Mercato delle Capacità

Oltre all'MSD, l'Italia gestisce anche un Mercato della Capacità, volto a garantire l'adeguatezza del sistema elettrico, ovvero la capacità strutturale di soddisfare la domanda di energia in ogni istante. Il Mercato della Capacità nasce per fornire segnali economici di lungo periodo agli investimenti e garantire la disponibilità di risorse sufficienti a coprire il fabbisogno elettrico futuro. Gli operatori che desiderano partecipare al Mercato della Capacità devono prendere parte a un'asta gestita e coordinata da Terna, nella quale offrono una certa quantità di capacità di generazione elettrica (MW).

La capacità può essere offerta volontariamente da unità di produzione e da unità di consumo e può essere esistente o di nuova costruzione.

Uno dei principali requisiti di ammissibilità è che un'unità di produzione debba avere un indice di emissione non superiore a 550 gCO<sub>2</sub>/kWh.

Gli impianti selezionati nell'asta ricevono un pagamento in €/MW di capacità impegnata all'anno. Per gli impianti esistenti, il contratto con Terna ha una durata di 1 anno, mentre per gli impianti di nuova costruzione questo periodo può estendersi fino a 15 anni.

Il Mercato della Capacità è diviso in due parti: le aste e un mercato secondario, con negoziazione continua a frequenza mensile. Per ciascuna asta, l'Autorità di Regolazione per Energia Reti e Ambiente definisce i parametri economici. In particolare, determina il premio massimo di remunerazione, tenendo conto dei costi fissi della tecnologia a ciclo combinato per la capacità esistente e di quelli della tecnologia delle turbine a gas a ciclo aperto per la nuova capacità.

D'altra parte, la quantificazione dell'adeguatezza a lungo termine del sistema elettrico è stabilita da Terna. Questa si basa sulla *Loss Of Load Expectation* (LOLE), ovvero il numero stimato di ore all'anno in cui è probabile la

disconnessione del carico a causa di risorse insufficienti o congestioni. Generalmente, un sistema elettrico è considerato adeguato quando la LOLE è inferiore a 3 ore.

I partecipanti offrono capacità in base alla loro rispettiva Capacità Disponibile in Probabilità (CDP). La CDP rappresenta la capacità di ciascuna risorsa considerata disponibile per il Mercato della Capacità, espressa in MW. Le CDP sono valutate ex-ante applicando fattori di de-rating alla capacità installata qualificata, calcolata come:

$$\text{capacità installata} \times (1 - \text{fattore di de-rating}).$$

Le fonti energetiche rinnovabili non programmabili sono obbligate a presentare offerte per la loro capacità contrattualizzata nei mercati MGP, MI e MSD per ciascuna ora delle ore di picco di carico settimanali definite da Terna (6 ore al giorno). Si ritiene che tali risorse abbiano violato l'obbligo di offerta se la capacità media offerta durante le ore di picco risulta inferiore alla capacità contrattualizzata, mitigando così il rischio derivante dall'intermittenza della generazione rinnovabile.



## Capitolo 2

# Modelli di Ottimizzazione

### 2.1 Programmazione stocastica multistadio e a due stadi

La programmazione stocastica multistadio è uno strumento matematico progettato per modellare processi decisionali sequenziali in condizioni di incertezza. Invece di prendere tutte le decisioni in una singola fase, le scelte vengono effettuate attraverso una sequenza finita di stadi temporali. Nell'evoluzione temporale da uno stadio al successivo, nuove informazioni riguardo ai parametri incerti (come la disponibilità di fonti rinnovabili o i prezzi di mercato) vengono progressivamente rivelate.

Per rappresentare l'evoluzione dell'incertezza, il modello si affida alla struttura di un albero degli scenari. Sia  $\Omega$  l'insieme dei nodi dell'albero e  $\mathcal{L}$  l'insieme dei percorsi degli scenari. Per ogni nodo  $\omega \in \Omega$ ,  $t(\omega)$  indica lo specifico stadio temporale associato e  $\psi_\omega$  l'effettiva realizzazione dei dati aleatori in quel nodo. Ogni foglia  $l \in \mathcal{L}$  ha una probabilità  $\mathbb{P}(l) > 0$  e rappresenta un percorso completo  $(\omega_1, \dots, \omega_T)$  nell'albero. In ogni nodo  $\omega$ , il modello deve prendere una decisione, rappresentata dal vettore delle variabili decisionali  $x_\omega$ . In questo contesto entra in gioco il fondamentale principio di non-anticipatività: le decisioni prese prima che l'incertezza si sia rivelata non possono dipendere da informazioni future e ancora sconosciute. Matematicamente, se due nodi distinti condividono lo stesso passato e le stesse informazioni fino allo stadio corrente (ovvero derivano dallo stesso nodo genitore), le decisioni prese in quei nodi devono essere obbligatoriamente identiche.

Un modello di programmazione multistadio assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \min_{(x_\omega)_{\omega \in \Omega}} \quad & \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) c_\omega^\top x_\omega \\ \text{s.t.} \quad & A_r x_r = b_r, \\ & A_\omega x_\omega + B_\omega x_{\mathcal{P}(\omega)} = b_\omega(\psi_\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \setminus \{r\}, \\ & x_\omega \in X_\omega(\psi_\omega) \quad \forall \omega \in \Omega, \\ & x_{\omega'} = x_{\omega''}, \quad \forall \omega', \omega'' : \mathcal{P}(\omega') = \mathcal{P}(\omega''). \end{aligned}$$

dove  $r$  è il nodo radice,  $X_\omega(\psi_\omega)$  è l'insieme delle decisioni ammissibili al nodo  $\omega$  data la realizzazione  $\psi_\omega$ ,  $\mathcal{P}(\omega)$  denota il nodo genitore di  $\omega$ ,  $\mathbb{P}(\omega)$  è la probabilità assegnata al nodo  $\omega$  e  $c_\omega$  è il vettore dei costi specifico dello stadio.

Il primo vincolo definisce le condizioni iniziali alla radice. Il secondo vincolo, applicato a tutti i nodi eccetto la radice, funge da “ponte”, collegando la decisione presa al nodo corrente ( $x_\omega$ ) con la decisione presa al suo nodo genitore ( $x_{\mathcal{P}(\omega)}$ ). L'ultimo vincolo formalizza esplicitamente la condizione di non-anticipatività: imponendo l'uguaglianza  $x_{\omega'} = x_{\omega''}$  per i nodi figli aventi lo stesso genitore  $\mathcal{P}$ , si garantisce che il decisore intraprenda la medesima azione a fronte della stessa storia informativa, indipendentemente dallo scenario futuro che si realizzerà.

Un caso particolare della programmazione stocastica multistadio si ha quando  $T = 2$ . Il modello si riduce alla formulazione, a due stadi:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x + \mathbb{E}_\psi[Q(x, \psi)], \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

con  $Q(x, \psi) = \min_y \left\{ q(\psi)^\top y : W(\psi)y = h(\psi) - T(\psi)x, y \in Y(\psi) \right\}$ .

Seguendo la notazione introdotta in [1], il vettore  $x$  rappresenta le decisioni del primo stadio, ovvero l'insieme delle decisioni da prendere in modo definitivo prima che l'incertezza venga svelata. In seguito, l'informazione completa sulla realizzazione del vettore aleatorio  $\psi$  diviene nota. A questo punto, vengono intraprese le decisioni del secondo stadio  $y$ , che assumono il ruolo di azioni correttive o di ricorso. Il termine  $\mathbb{E}_\psi[Q(x, \psi)]$  rappresenta il costo atteso del “ricorso”, ovvero il valore medio delle azioni correttive necessarie una volta rivelata l'incertezza  $\psi$ . Le restanti grandezze matematiche sono così identificate:

- $c$ : vettore dei costi deterministici associato alle decisioni di primo stadio  $x$ .
- $A$  e  $b$ : rispettivamente, la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti che definiscono i vincoli strutturali del primo stadio, essendo parametri noti a priori e indipendenti dall'aleatorietà.
- $q(\psi)$ : vettore dei costi (o ricavi) associato alle decisioni di ricorso  $y$ , dipendente dalla realizzazione dello scenario  $\psi$ .
- $W(\psi)$ : matrice di ricorso, che quantifica e definisce le condizioni operative a cui sono soggette le azioni correttive del secondo stadio.
- $T(\psi)$ : matrice tecnologica, che funge da “ponte” temporale tra i due stadi, traducendo l'impatto che le decisioni irrevocabili  $x$  hanno sullo stato del sistema nel secondo stadio.
- $h(\psi)$ : vettore aleatorio dei termini noti, che rappresenta tipicamente il fabbisogno, la domanda di mercato o la disponibilità di risorse nello scenario  $\psi$ .

- $Y(\psi)$ : regione di ammissibilità che racchiude ulteriori restrizioni (come limiti di capacità o vincoli di segno) applicate alle variabili decisionali di ricorso  $y$ .

Alla luce di quanto definito, l'espressione  $h(\psi) - T(\psi)x$  assume un significato fisico ed economico ben preciso: quantifica lo scostamento (o sbilanciamento) tra le condizioni imposte dallo scenario stocastico e quanto è già stato preventivamente garantito (o consumato) dalle decisioni di primo stadio  $x$ . Di conseguenza, la minimizzazione della funzione di ricorso  $Q(x, \psi)$  consiste nel ricercare le azioni correttive ottime  $y$  che, al minimo costo  $q(\psi)^T y$ , vadano esattamente a compensare questo fabbisogno netto, rispettando al contempo la struttura tecnologica  $W(\psi)$  e i limiti operativi definiti dall'insieme  $Y(\psi)$ .

Grazie a questa netta separazione temporale e informativa, i modelli a due stadi risultano strutturalmente più semplici da trattare numericamente e si prestano a efficienti tecniche di decomposizione.

## 2.2 Ottimizzazione di un portafoglio

Uno dei campi applicativi più naturali e di maggiore diffusione per la programmazione stocastica a due stadi è l'ottimizzazione di portafoglio. Nella sua formulazione generale, questo problema consiste nel decidere come allocare un ammontare limitato di risorse (tipicamente capitale) tra diverse opzioni di investimento (azioni, obbligazioni, asset energetici, ecc.) al fine di massimizzare un rendimento atteso. Poiché i rendimenti futuri delle diverse attività sono intrinsecamente incerti, il decisore deve compiere una scelta prima di conoscere l'effettiva evoluzione del mercato.

Nel secondo stadio, una volta che l'incertezza si è risolta e i rendimenti sono noti, l'esito della strategia viene misurato attraverso funzioni di ricorso: queste penalizzano il mancato raggiungimento di un obiettivo prefissato (ad esempio un rendimento minimo desiderato) e valorizzano gli eventuali superamenti di tale soglia. Modelli più avanzati di tipo multistadio estendono questo concetto, permettendo all'operatore di ribilanciare attivamente il portafoglio in più istanti temporali, adattando l'allocazione man mano che si percorrono le diramazioni dell'albero degli scenari.

Per comprendere in modo intuitivo il funzionamento di questi modelli, un esempio è il problema del contadino (*The farmer's problem*), riportato da Birge e Louveaux [1]. In questo caso, la risorsa limitata da allocare non è il capitale monetario, ma la terra agricola, e gli "asset" su cui investire il proprio spazio sono diverse colture.

Si consideri un agricoltore che possiede un appezzamento di terreno di dimensioni fisse e deve decidere quanta superficie destinare a tre diverse colture: grano, mais e barbabietole da zucchero. L'agricoltore ha un fabbisogno minimo di grano e mais per nutrire il proprio bestiame. Se il raccolto non dovesse essere sufficiente a coprire tale fabbisogno, sarà costretto ad acquistare le quantità mancanti sul mercato a un prezzo maggiorato. Al contrario, l'eventuale raccolto in eccesso (così come l'intera produzione di barbabietole) potrà essere venduto per generare profitto.

La difficoltà decisionale risiede nel fatto che la resa agricola è un parametro aleatorio, poiché dipende dalle future condizioni meteorologiche. Il processo decisionale si divide esattamente nei due stadi previsti dalla programmazione stocastica:

1. Decisioni di primo stadio ( $x$ ): Prima che la stagione inizi, il decisore deve stabilire l'allocazione degli ettari. Questa decisione è irrevocabile: una volta effettuata la semina, non è possibile modificare la destinazione del suolo.
2. Azioni di ricorso o di secondo stadio ( $y$ ): Al termine della stagione, l'incertezza meteorologica si risolve (si osserva la realizzazione del parametro aleatorio  $\psi$ ) e la quantità effettiva del raccolto diventa nota. A questo punto, l'agricoltore intraprende le azioni correttive: calcola le quantità esatte da acquistare per compensare i deficit o da immettere sul mercato per massimizzare i ricavi.

I costi di acquisto sul mercato o i ricavi derivanti dalla vendita costituiscono la funzione di ricorso  $Q(x, \psi)$  del modello matematico.

Per illustrare la differenza concettuale tra un approccio deterministico e uno stocastico, si ipotizzi che il decisore debba fronteggiare tre possibili scenari meteorologici: un'annata media, una favorevole (caratterizzata da rese abbondanti) e una sfavorevole di siccità.

Adottando un approccio deterministico, l'allocazione delle risorse verrebbe calcolata basandosi esclusivamente sui valori medi attesi delle rese. In tale circostanza, il modello allocherebbe le superfici in modo del tutto privo di cautela, determinando l'esatta estensione necessaria a soddisfare il fabbisogno interno nell'ipotesi che le condizioni climatiche si allineino perfettamente alla media. Tuttavia, qualora si verificasse lo scenario avverso, il raccolto risulterebbe insufficiente a coprire la domanda interna. L'agricoltore sarebbe pertanto costretto ad approvvigionarsi sul mercato a prezzi fortemente penalizzanti, subendo ingenti perdite finanziarie. Il limite strutturale dell'approccio deterministico risiede proprio in questo: basando la pianificazione sulla sola media, ignora totalmente il costo asimmetrico e non lineare associato agli eventi estremi.

Di contro, la programmazione stocastica ottimizza il problema integrando simultaneamente l'intero set di scenari, ciascuno ponderato per la rispettiva probabilità di occorrenza. In questa formulazione, il solutore quantifica preventivamente la penalizzazione economica associata allo scenario di siccità, adeguando le decisioni del primo stadio di conseguenza. La strategia ottima risultante si rivela intrinsecamente più robusta: il modello suggerisce di rinunciare a una frazione della coltura puramente commerciale e più redditizia (le barbabietole) per destinare preventivamente maggiore superficie alle colture necessarie al fabbisogno interno (grano e mais).

Questo semplice esempio dimostra l'inefficacia dell'approccio deterministico: se l'agricoltore ottimizzasse il suo "portafoglio" basandosi unicamente sulla resa agricola media attesa, si esporrebbe a rischi di perdite catastrofiche in caso di siccità. La programmazione stocastica, ottimizzando il valore atteso su tutti gli scenari ponderati per la rispettiva probabilità, suggerisce invece un'allocazione

iniziale robusta, capace di bilanciare la ricerca del profitto con una naturale copertura (hedging) contro gli scenari avversi.

## 2.3 Misure di rischio e CVaR

Sebbene l'ottimizzazione del puro valore atteso offra una prima forma di protezione, essa assume implicitamente che il decisore sia neutrale al rischio. In contesti reali fortemente volatili, come i mercati finanziari o quelli dell'energia, eventi rari ma economicamente disastrosi potrebbero comunque generare perdite insostenibili. Per questo motivo, necessitiamo di strumenti matematici capaci di quantificare e limitare esplicitamente l'esposizione alle perdite estreme. Tali strumenti prendono il nome di misure di rischio.

Una delle metriche più diffuse per quantificare l'esposizione al rischio è la *Value at Risk* (VaR). Dato un livello di confidenza  $\beta \in (0, 1)$ , la  $\beta$ -VaR di un portafoglio è la soglia  $\alpha$  tale per cui vi è una probabilità pari a  $1 - \beta$  di registrare perdite di entità superiore. Tuttavia, la VaR presenta limitazioni strutturali e matematiche significative, che la rendono uno strumento difficile da inserire all'interno di problemi di ottimizzazione.

Per superare queste criticità, un approccio più solido ed efficiente per l'ottimizzazione e l'hedging di un portafoglio è stato formalizzato da Rockafellar e Uryasev [12]. Il loro lavoro si concentra sulla minimizzazione della *Conditional Value at Risk* (CVaR). Mentre la VaR si limita a indicare la soglia massima di perdita per un dato livello di confidenza, la  $\beta$ -CVaR rappresenta il valore atteso delle perdite superiori all'importo  $\alpha$ . Oltre a quantificare in modo più severo l'impatto degli scenari peggiori, la CVaR costituisce una misura di rischio matematicamente molto più facile da ottimizzare all'interno dei modelli stocastici.

Per visualizzare intuitivamente la differenza e l'utilità di queste due metriche, si ritorni all'esempio del contadino introdotto nella sezione precedente. Fissando un livello di confidenza  $\beta = 0.95$  (ovvero considerando il 95% degli scenari meteorologici più probabili e ordinari), la  $\beta$ -VaR rappresenta la soglia tale che la probabilità di eccedenza sia pari a  $1 - \beta$ . Indica, ad esempio, che nel 95% dei casi le spese extra per acquistare il mangime mancante sul mercato non supereranno i 10.000 euro. Tuttavia, la VaR non fornisce alcuna informazione su cosa accada nel restante 5% dei casi, ovvero negli scenari di siccità estrema. In quelle circostanze, la spesa imprevista potrebbe ammontare a 11.000 euro così come a 100.000 euro, spingendo l'agricoltore a una situazione estremamente negativa, senza che il modello matematico lo abbia previsto. Valutando la distribuzione di probabilità delle perdite economiche derivanti dalla decisione presa, l'attenzione si sposta sugli scenari estremi. Proprio nella coda di tale distribuzione interviene la CVaR, che calcola esattamente il valore medio delle perdite che si verificano in quel 5% di scenari peggiori. Di conseguenza, ottimizzare un modello basato sulla CVaR costringe l'algoritmo a modificare la decisione del primo stadio (ad esempio, destinando preventivamente una quota maggiore di ettari a colture resistenti alla siccità) per mitigare attivamente i danni finanziari medi qualora si verifichi lo scenario catastrofico.

Il contributo fondamentale introdotto nell'articolo [12] risiede nella formulazione di una metodologia innovativa per i modelli stocastici. Nello specifico, qualora l'incertezza venga modellata mediante una discretizzazione in un numero finito di scenari, la complessità del problema originale viene abbattuta, riducendosi a un modello di programmazione lineare.

Questa metodologia si affida all'introduzione di una funzione ausiliaria, denotata come  $F_\beta(x, \alpha)$ , che caratterizza contemporaneamente entrambe le misure di rischio. Per un dato vettore decisionale  $x$ , un livello di probabilità  $\beta$  e una variabile di soglia  $\alpha$ , la funzione da minimizzare è definita come:

$$F_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_{y \in \mathbb{R}^m} [f(x, y) - \alpha]^+ p(y) dy$$

dove  $y$  è il vettore dell'incertezza che modella le fonti di incertezza (come i prezzi di mercato), mentre  $p(y)$  denota la sua funzione di densità di probabilità,  $f(x, y)$  è la funzione di perdita associata alla decisione  $x$  sotto una specifica realizzazione dell'incertezza  $y$ . Come dimostrato in [12], la minimizzazione della funzione ausiliaria  $F_\beta(x, \alpha)$  rispetto al solo parametro  $\alpha$  restituisce la  $\beta$ -CVaR come valore ottimo, mentre l'argomento minimizzante  $\alpha^*$  coincide esattamente con la  $\beta$ -VaR. Da tale risultato discende una proprietà fondamentale per i problemi di ottimizzazione di portafoglio: la minimizzazione della  $\beta$ -CVaR sullo spazio delle decisioni ammissibili  $x \in X$  è matematicamente equivalente alla minimizzazione congiunta della funzione  $F_\beta(x, \alpha)$  rispetto a entrambe le variabili  $x$  e  $\alpha$ . Per rendere questa minimizzazione congiunta computazionalmente trattabile, l'integrale all'interno della funzione continua  $F_\beta(x, \alpha)$  viene approssimato in modo discreto attraverso la generazione di scenari (campionando la distribuzione di probabilità delle incertezze  $y$ ). Generando un insieme campionario di  $q$  scenari, la funzione continua viene sostituita dalla sua versione discreta:

$$\tilde{F}_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{q(1 - \beta)} \sum_{k=1}^q [f(x, y_k) - \alpha]^+$$

Questa funzione approssimata,  $\tilde{F}_\beta(x, \alpha)$ , mantiene la convessità ma diventa lineare a tratti rispetto ad  $\alpha$ . Il principale vantaggio di questa formulazione discreta è che la sua minimizzazione congiunta rispetto a  $x$  e  $\alpha$  può essere facilmente convertita in un problema di programmazione lineare standard introducendo variabili ausiliarie, consentendo l'ottimizzazione efficiente di portafogli su larga scala. Tuttavia, il limite principale di questo approccio risiede nel costo computazionale. Per garantire un'approssimazione accurata della coda della distribuzione, è necessario campionare un numero di scenari  $q$  molto elevato. Poiché la linearizzazione richiede l'aggiunta di una variabile ausiliaria e di un vincolo per ogni singolo scenario, le dimensioni della matrice del problema crescono in modo direttamente proporzionale a  $q$ . Ciò costringe il decisore a ricercare un compromesso tra l'affidabilità statistica della misura di rischio e i tempi fisici di risoluzione del modello.

A livello modellistico, è opportuno sottolineare che l'integrazione della CVaR all'interno di un problema di ottimizzazione può essere formulata secondo due approcci, a seconda della prospettiva economica che si intende adottare: quella

dei profitti o quella delle perdite.

Nel primo approccio, ragionando rigorosamente nello spazio dei profitti, la CVaR viene interpretata come il profitto medio atteso nel  $(1 - \beta)\%$  degli scenari peggiori. Trattandosi di una metrica di rendimento (seppur circoscritta ai casi sfavorevoli), l'obiettivo del decisore è la sua massimizzazione; pertanto, in un problema di *max*, la CVaR entra nella formulazione obiettivo mantenendo il segno positivo.

Alternativamente, è possibile impostare l'analisi focalizzandosi in modo esplicito sulle perdite finanziarie, approccio adottato nel presente lavoro per integrare la metrica all'interno del modello di ottimizzazione. Definendo  $\text{Profit}_\omega$  come il profitto generato in un dato scenario  $\omega \in \Omega$ , la funzione  $f$  viene definita come perdita, ponendo  $f(x, y_\omega) = -\text{Profit}_\omega$ . Di conseguenza, la metrica CVaR quantifica il deficit economico medio che si verifica nella coda estrema della distribuzione.

Poiché l'intento operativo è chiaramente quello di minimizzare tali perdite, se si inserisce questa metrica all'interno di un problema generale volto alla massimizzazione (come la massimizzazione dei ricavi sui mercati energetici), il termine associato alla CVaR deve essere preceduto dal segno meno. Massimizzare l'opposto delle perdite equivale matematicamente a minimizzarle: la CVaR agisce così come un fattore di penalizzazione algebrica, scalato in base al parametro di avversione al rischio  $\eta$ .

Parallelamente, in questa formulazione la soglia ottimale  $\alpha$  assume il significato statistico di VaR, ovvero il valore di perdita soglia che separa gli scenari ordinari da quelli strutturalmente sfavorevoli. Infine, il termine non lineare  $[f(x, y_\omega) - \alpha]^+$ , che seleziona esclusivamente le perdite eccedenti la soglia, viene linearizzato introducendo per ogni scenario una variabile ausiliaria continua e non negativa, denotata con  $\xi_\omega$ . Sostituendo la media campionaria uniforme  $\frac{1}{q}$  con la probabilità discreta  $\pi_\omega$  associata a ciascun nodo dell'albero, la minimizzazione della CVaR può essere incorporata direttamente nella funzione obiettivo di massimizzazione. Regolando il *trade-off* tra rendimento atteso e rischio tramite il parametro di avversione  $\eta$  con una combinazione lineare convessa, il problema assume la seguente formulazione lineare:

$$\max_{x, \alpha, \xi} \quad (1 - \eta) \sum_{\omega \in \Omega} \pi_\omega \text{Profit}_\omega + \eta \left( -\alpha - \frac{1}{1 - \beta} \sum_{\omega \in \Omega} \pi_\omega \xi_\omega \right)$$

soggetta al sistema di vincoli per le variabili ausiliarie:

$$\begin{aligned} \xi_\omega &\geq -\text{VaR} - \text{Profit}_\omega, & \forall \omega \in \Omega, \\ \xi_\omega &\geq 0, & \forall \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

L'espressione racchiusa tra parentesi nella funzione obiettivo corrisponde esattamente all'opposto della metrica di rischio, ovvero  $-CVaR$ . Se in un determinato scenario il profitto supera il valore del VaR ( $\text{Profit}_\omega > -\text{VaR}$ ), il termine a destra del primo vincolo risulta negativo e poiché l'algoritmo spinge per massimizzare la funzione obiettivo (e quindi per minimizzare la penalità sottratta), la variabile  $\xi_\omega$  verrà forzata al suo limite inferiore, assumendo valore

nullo ( $\xi_\omega = 0$ ). Al contrario, qualora si verifichi uno scenario sfavorevole in cui il profitto si riduce al di sotto della soglia ( $\text{Profit}_\omega < -\text{VaR}$ ), la variabile ausiliaria sarà matematicamente costretta ad attivarsi, assumendo un valore strettamente positivo pari al valore della perdita ( $\xi_\omega = -\text{VaR} - \text{Profit}_\omega > 0$ ). In questo modo, l'ottimizzatore quantifica e controlla in modo puramente lineare l'entità degli eventi estremi.

## 2.4 CVaR e mercati energetici

Dopo aver definito il fondamento teorico della CVaR, in questa sezione si esamina come tale misura di rischio trovi un'applicazione pratica nel settore dell'energia. I mercati energetici moderni sono infatti caratterizzati da un'elevata volatilità dei prezzi e dall'incertezza legata alla generazione non programmabile da fonti rinnovabili. In un contesto così aleatorio, la CVaR si rivela uno strumento decisionale utile.

In molti studi, infatti, la gestione dell'incertezza nei mercati dell'energia si fonda sul bilanciamento tra la massimizzazione del profitto atteso e la minimizzazione del rischio di perdite, misurato tramite la CVaR. Questo compromesso è regolato dal parametro di avversione al rischio  $\eta$ . Modulando questo parametro, diversi autori hanno dimostrato come la protezione dagli scenari peggiori comporti inevitabilmente una rinuncia a strategie di offerta più aggressive e redditizie.

In questo contesto, Sedzro e coautori [14] introducono un mercato a breve termine per le risorse rinnovabili, applicato nello specifico a un impianto per la produzione di energia dal moto ondoso, utilizzando la CVaR per gestire l'incertezza nell'MI. Attraverso un'analisi di sensibilità, gli autori evidenziano che per valori bassi di  $\eta \in [0, 1]$ , l'impianto ottiene un notevole miglioramento della sicurezza subendo un calo del profitto atteso quasi trascurabile; tuttavia, per livelli estremi di avversione al rischio, il profitto atteso crolla molto rapidamente.

Risultati analoghi sono confermati in [17], nel quale si è proposto un modello stocastico per una *Virtual Power Plant* (VPP), ovvero una centrale che aggrega e coordina in modo centralizzato diverse risorse energetiche, in cui la funzione obiettivo è una combinazione lineare convessa tra profitto e CVaR. Anche in questo caso, per  $\eta = 1$ , ovvero portando l'avversione al rischio al suo limite massimo, il profitto atteso coincide con il valore della CVaR, portando a una discesa dei ricavi complessivi. Un comportamento ottimale viene individuato per valori intermedi del parametro (tra 0 e 0.5), dove è possibile incrementare il livello di sicurezza senza abbattere drasticamente i ricavi medi.

L'efficacia della CVaR nel ridurre la volatilità è inoltre validata da Pousinho e coautori [10], che dimostrano come un produttore "neutrale al rischio" ottenga il profitto massimo ma con un'elevata deviazione standard, mentre l'imposizione di una forte avversione al rischio (tramite CVaR) riduca leggermente il profitto atteso ma comprima in modo significativo la deviazione standard, garantendo stabilità finanziaria.

Un secondo aspetto critico che differenzia i vari approcci in letteratura è la scelta dei mercati in cui far operare il modello. Sebbene l'ottimizzazione

stocastica sia ampiamente utilizzata per l'MGP e l'MB, si osserva una tendenza diffusa a semplificare il problema omettendo le sessioni intermedie.

Ad esempio, in [11] gli autori sviluppano un modello basato esclusivamente sulla minimizzazione della CVaR (optando per una pura avversione al rischio) considerando solo contratti bilaterali, MGP e servizi ancillari, ignorando del tutto le opportunità di rinegoziazione offerte dall'MI. Allo stesso modo, Fazlalipour e coautori [4] propongono modelli stocastici avanzati per la gestione dell'incertezza eolica e solare, ma limitano il campo d'azione all'MGP e al mercato in tempo reale.

La mancanza di un'integrazione completa dell'MI in questi modelli rappresenta una lacuna significativa. L'MI, strutturato in sessioni multiple, è lo strumento principale con cui un operatore reale può correggere progressivamente la propria posizione commerciale man mano che le previsioni meteorologiche diventano più accurate, mitigando le pesanti penalità del mercato di bilanciamento.

L'obiettivo sarà dunque generare un modello di ottimizzazione multistadio completo, capace di integrare simultaneamente l'intera sequenza dei mercati (MGP e MI a più sessioni) e la successiva valorizzazione degli sbilanciamenti, gestendo l'avversione al rischio attraverso la metrica CVaR.



## Capitolo 3

# Formulazione del Modello di Ottimizzazione Stocastica

### 3.1 Primo caso studio

Il punto di partenza del presente studio è costituito dal modello proposto da Silva e coautori [15]. Tale lavoro presenta un modello di ottimizzazione stocastica multistadio applicato al mercato energetico iberico per definire la strategia di offerta ottimale di un VPP composto da eolico, fotovoltaico e accumulo di batteria. Il suo contributo consiste nell'aver incluso tutti e tre i mercati (MGP, MI con 6 sessioni e la successiva fase di bilanciamento) integrando l'incertezza e cercando di massimizzare il profitto atteso.

L'obiettivo generale è minimizzare la funzione costo  $Q$  che include: costi/ricavi delle decisioni  $x_t$  prese allo stadio  $t$ , le incertezze  $\epsilon_t$ , e una serie di valori attesi annidati che riflettono le decisioni future condizionate alle informazioni disponibili fino a quel momento. Risolvere il problema continuo è molto complesso, si semplifica dunque la distribuzione di probabilità originale, sostituendola con una distribuzione discreta approssimata, così che le informazioni nel tempo possano essere rappresentate da un albero di scenari, dove ogni nodo rappresenta uno stato possibile.

Introduciamo le componenti del modello. Siano  $s \in S$  le differenti sessioni dell'MI,  $I^*$  i ricavi del mercato  $*$ ,  $q^*(t)$  sono i vettori contenenti le decisioni di offerta ottimale per ogni ora  $t$  di ogni mercato,  $\Gamma_\omega^*(t)$  è il prezzo dell'energia in ogni mercato ad ogni ora per lo scenario  $\omega$ ,  $\mathbb{P}(\omega)$  è la probabilità che si verifichi un certo scenario,  $q^{\text{BM}+}(t)$  e  $q^{\text{BM}-}(t)$  indicano lo sbilanciamento di potenza positivo e negativo scambiato nel mercato di bilanciamento,  $r^{\text{BM}+}(t)$  e  $r^{\text{BM}-}(t)$  sono i coefficienti di riscaldamento rispetto all'MGP, utilizzati per evitare variabili binarie.

Il primo stadio riguarda il mercato MGP e include le variabili decisionali  $q^*(t)$ . Sia  $\hat{q}_\omega^{\text{MGP}}(t)$  la previsione di produzione dell'energia al tempo  $t$  disponibile all'orario che chiude la sessione del mercato MGP,  $q_{\text{CURT}}^{\text{MGP}}$  definisce il potenziale taglio di potenza nel caso in cui non risulti ottimale offrire all'MGP tutta l'energia che si prevede di produrre, mentre  $q_{\text{PCC}}$  rappresenta la capacità della linea di interconnessione alla rete elettrica.

Il secondo stadio è sull'MI. La decisione di offerta  $q^{\text{MI}_s}$  per ogni sessione infragiornaliera è definita come la differenza tra la previsione aggiornata della produzione di potenza  $\hat{q}_\omega^{\text{MI}_s}(t)$  e le offerte cumulative presentate nelle sessioni precedenti dei mercati energetici.

Infine l'ultimo stadio riguarda il calcolo dello sbilanciamento. Assumiamo che, arrivati a questo stadio, l'energia prodotta sia nota ( $q^{\text{ACT}}(t)$ ). Nell'MB lo sbilanciamento positivo  $\Delta Q^+(t)$  (cioè produzione maggiore di quanto precedentemente offerto) può essere venduto, oppure si può immagazzinare nel Sistema di accumulo a batteria (BESS) o tagliato. Lo sbilanciamento negativo (produzione inferiore a quella precedentemente contrattualizzata) invece può solo essere comprato nell'MB, pagando l'energia che non si riesce a fornire, oppure coperto dal BESS, scaricando la batteria per iniettare l'energia mancante alla rete.

Il modello finale risulta:

$$\begin{aligned}
\max \quad & I^{\text{MGP}} + \sum_{s \in S} I^{\text{MI}_s} + I^{\text{BM}} \\
\text{s.t.} \quad & I^{\text{MGP}} = \sum_{\omega} \mathbb{P}(\omega) \left( \sum_{t \in T} q^{\text{MGP}}(t) \cdot \Gamma_{\omega}^{\text{MGP}}(t) \right), & \forall t \in T, \omega \in \Omega, \\
& I^{\text{MI}_s} = \sum_{\omega} \mathbb{P}(\omega) \left( \sum_{t \in T} q^{\text{MI}_s}(t) \cdot \Gamma_{\omega}^{\text{MI}_s}(t) \right), & \forall s \in S, t \in T, \omega \in \Omega, \\
& I^{\text{BM}} = \sum_{\omega} \mathbb{P}(\omega) \left( \sum_{t \in T} q^{\text{BM}+}(t) \cdot \Gamma_{\omega}^{\text{MGP}}(t) \cdot r_{\omega}^{\text{BM}+}(t) \right) \\
& \quad - \sum_{\omega} \mathbb{P}(\omega) \left( \sum_{t \in T} q^{\text{BM}-}(t) \cdot \Gamma_{\omega}^{\text{MGP}}(t) \cdot r_{\omega}^{\text{BM}-}(t) \right), \\
& q^{\text{MGP}}(t) = \hat{q}_{\omega}^{\text{MGP}}(t) - q_{\text{CURT}}^{\text{MGP}}, & \forall t \in T, \omega \in \Omega, \\
& 0 \leq q^{\text{MGP}}(t) \leq q_{\text{PCC}}, & \forall t \in T, \omega \in \Omega, \\
& q_{\text{BID}}^{\text{MI}_s}(t) = \hat{q}_{\omega}^{\text{MI}_s}(t) - \left( q_{\text{BID}}^{\text{MGP}}(t) + \sum_{s' < s} q_{\text{BID}}^{\text{MGP}_{s'}}(t) \right), & \forall s \in S, t \in T, \omega \in \Omega, \\
& \sum_{s' \leq s} q^{\text{MI}_{s'}}(t) \geq -q_{\text{PCC}}, & \forall s \in S, t \in T, \\
& q^{\text{MGP}}(t) + \sum_{s' \leq s} q^{\text{MI}_{s'}}(t) \leq q_{\text{PCC}}, & \forall s \in S, t \in T, \\
& \Delta Q(t) = q^{\text{ACT}}(t) - \left( q^{\text{MGP}}(t) + \sum_s q^{\text{MI}_s}(t) \right), & \forall t \in T, \omega \in \Omega, \\
& \Delta Q(t) = \Delta Q^+(t) - \Delta Q^-(t), & \forall t \in T, \\
& \Delta Q^+(t) = q^{\text{BM}+}(t) + q_{\text{CHA}}(t) + q_{\text{CURT}}(t), & \forall t \in T, \\
& \Delta Q^-(t) = q^{\text{BM}-}(t) + q_{\text{DIS}}(t), & \forall t \in T, \\
& q^{\text{MGP}}(t) + \sum_s q^{\text{MI}_s}(t) + q^{\text{BM}+}(t) \leq q_{\text{PCC}}, & \forall t \in T, \\
& E_{\text{BAT}}(t) = 0.6 \cdot E_{\text{BAT}} + \eta_{\text{CHA}} \cdot q_{\text{CHA}}(t) - \frac{1}{\eta_{\text{DIS}}} \cdot q_{\text{DIS}}(t), & \forall t = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\text{BAT}}(t) &= E_{\text{BAT}}(t-1) + \eta_{\text{CHA}} \cdot q_{\text{CHA}}(t) - \frac{1}{\eta_{\text{DIS}}} \cdot q_{\text{DIS}}(t), & \forall t > 1, \\
E_{\text{BAT}}(t) &= 0.6 \cdot E_{\text{BAT}}, & \forall t = 24, \\
E_{\text{BAT}}(t) &\leq E_{\text{BAT}}, & \forall t \in T, \\
q_{\text{CHA}}(t) &\leq q_{\text{BAT}}, & \forall t \in T, \\
q_{\text{DIS}}(t) &\leq q_{\text{BAT}}, & \forall t \in T, \\
q_{\text{CHA}}(t) &\leq q^{\text{ACT}}(t), & \forall t \in T.
\end{aligned}$$

Il sistema di vincoli definisce nel complesso le logiche operative dell'impianto e i limiti imposti dalle dinamiche di mercato. Le prime equazioni quantificano i ricavi attesi per ciascuna sessione, ponderandoli in base alla probabilità di realizzazione di ogni scenario. Successivamente, il modello impone i limiti fisici di connessione alla rete, garantendo che i flussi di potenza non superino mai la capacità massima dell'infrastruttura, e traccia progressivamente le quantità di energia offerte tra i vari stadi decisionali. Un blocco centrale di vincoli è poi dedicato alla quantificazione dello sbilanciamento: calcola lo scostamento tra la produzione effettiva e i volumi precedentemente negoziati, smistando l'energia in eccesso o in deficit verso il mercato, il potenziale taglio di produzione o il sistema di accumulo. Infine, l'ultimo gruppo di equazioni governa le dinamiche fisiche della batteria (BESS), imponendo il rispetto dei vincoli di capacità strutturale, i limiti di potenza in carica e scarica, e assicurando la continuità del bilancio energetico tra l'inizio e la fine dell'orizzonte temporale.

Tuttavia il modello è disegnato per il caso spagnolo, che ha orari e struttura differente dal mercato italiano. Il modello dell'articolo [15] inoltre si basa sulla presenza di una BESS, che non è disponibile nel caso studio analizzato in questo lavoro di tesi, limitandone la diretta applicabilità. Si osserva anche che il modello ha come unico obiettivo quello di massimizzare il profitto atteso, ignorando il rischio ed evitando gli scenari peggiori. Un modello più robusto dovrebbe includere infatti metriche di rischio (come CVaR) per proteggere l'operatore da perdite catastrofiche, sacrificando una parte del profitto medio atteso.

Un problema matematico fondamentale della formulazione risiede nella definizione del vincolo relativo all'offerta sull'MGP. Per sua natura, l'MGP è un mercato che chiude prima che l'effettiva produzione da fonte rinnovabile sia nota: al momento della presentazione dell'offerta, l'operatore dispone soltanto di una previsione, non della realizzazione effettiva. Pertanto, la variabile decisionale  $q^{\text{MGP}}$  è una classica decisione del primo stadio, che non dipende dallo scenario stocastico  $\omega$ . Nel linguaggio della programmazione stocastica, ciò si traduce nell'assenza del pedice  $\omega$  su  $q^{\text{MGP}}$ : il suo valore deve essere unico per tutti gli scenari.

Tuttavia, nel modello proposto da Silva [15], l'offerta MGP è vincolata dall'equazione:

$$q^{\text{MGP}} = \hat{q}_{\omega}^{\text{MGP}}(t) - q_{\text{CURT}}^{\text{MGP}}$$

, dove  $\hat{q}_{\omega}^{\text{MGP}}(t)$  è la previsione di produzione per lo scenario  $\omega$  (che quindi è differente al variare di  $\omega$ ), mentre  $q_{\text{CURT}}^{\text{MGP}}$  rappresenta un eventuale taglio della produzione deciso in prima istanza, anch'esso privo del pedice  $\omega$ .

La contraddizione è immediata. Poiché sia  $q^{\text{MGP}}$  che  $q_{\text{CURT}}^{\text{MGP}}$  sono costanti

rispetto a  $\omega$ , la loro differenza è un numero fisso. L'equazione impone quindi che questo numero fisso sia uguale alla previsione  $\hat{q}_\omega^{\text{MGP}}(t)$  per ogni possibile scenario  $\omega$ . Questo è possibile solo se tutte le previsioni  $\hat{q}_\omega^{\text{MGP}}(t)$  coincidono esattamente, privando di fondamento logico l'intero approccio stocastico. Nella pratica, le previsioni differiscono da scenario a scenario (altrimenti non vi sarebbe incertezza da modellare). Ne consegue che, matematicamente, questo sistema di vincoli rende il problema di ottimizzazione infeasible, ovvero non ammette soluzioni ammissibili.

Una seconda criticità fondamentale riguarda la totale libertà d'azione concessa alle variabili dell'MI ( $q_{s,\omega,t}^{\text{MI}}$ ). Nella realtà operativa, i mercati infragiornalieri e di bilanciamento nascono per permettere ai produttori di aggiustare la propria posizione in base all'aggiornamento delle previsioni meteorologiche. Nel modello originale, l'assenza di stringenti vincoli volumetrici (come, ad esempio, un gap percentuale rispetto all'offerta MGP) permette al solutore matematico di sfruttare le discrepanze di prezzo tra le diverse sessioni infragiornaliere per fare puro trading finanziario.

Per superare queste limitazioni, il modello sviluppato nella prossima sezione propone una formulazione corretta in cui:

- L'offerta del giorno prima viene vincolata al valore medio atteso della produzione prevista, ripristinando la fattibilità matematica.
- Vengono introdotti vincoli di tolleranza percentuale (es.  $\pm 10\%$ ) sulle quantità scambiabili nell'MI, conformemente a quanto accade nella realtà.

Il modello proposto inoltre non avrà come obiettivo solo massimizzare il profitto ma anche minimizzare il rischio, tramite la metrica CVaR, al variare di alcuni parametri che permettono di modulare il trade-off tra profitto atteso e protezione dagli scenari sfavorevoli.

## 3.2 Secondo caso studio

A partire dallo studio del modello proposto da Silva [15], si è proceduto a modificare alcuni vincoli, estendendo e complicando la formulazione originaria tramite diverse aggiunte. Ora infatti l'offerta consiste non solo nella quantità da offrire, ma anche nel prezzo al quale si vuole vendere o comprare. Inoltre, poiché l'accettazione dell'offerta non è garantita, vengono introdotte variabili binarie per modellare l'eventualità in cui l'offerta proposta venga rifiutata, perché il prezzo di offerta è maggiore del prezzo spot (per la vendita) o è minore del prezzo spot per gli acquisti. Per semplicità, si suppone inoltre che se un'offerta viene accettata, allora viene accettata interamente e non solo una parte. A queste assunzioni, si aggiunge che la quantità offerta sul Mercato del Giorno Prima ( $q^{\text{MGP}}$ ) non costituisce una variabile decisionale del modello, bensì un parametro deterministico in input, strettamente positivo. Tale volume è calcolato a priori come media delle produzioni dei dati storici per la specifica ora e si considera sempre e interamente accettato dal mercato.

Si definiscono le variabili di prezzo  $p$  tali che siano sempre maggiori di zero, mentre l'offerta  $q$  col segno positivo indica una quantità in vendita, negativo di acquisto.

Per tradurre le regole di accettazione delle offerte, la formulazione *Mixed Integer Linear Program* (MILP) richiede l'introduzione di tre famiglie di variabili decisionali binarie, definite per ciascuno scenario e per ogni stadio decisionale:

- Variabile  $y$ : assume valore 1 se l'agente si posiziona in vendita ( $q \geq 0$ ), e 0 se si posiziona in acquisto ( $q \leq 0$ ).
- Variabile  $z$ : assume valore 1 se il prezzo offerto  $p$  risulta minore o uguale al prezzo spot di mercato  $\pi$  ( $p \leq \pi$ ), e 0 altrimenti ( $p \geq \pi$ ).
- Variabile  $w$ : funge da indicatore finale dell'esito della contrattazione. Assume valore 1 se l'offerta viene accettata dal mercato, e 0 se viene respinta. La logica di mercato stabilisce che un'offerta sia accettata ( $w = 1$ ) se e solo se si sta vendendo a un prezzo competitivo ( $y = 1$  e  $z = 1$ ) oppure si sta comprando a un prezzo conveniente ( $y = 0$  e  $z = 0$ ).

La funzione obiettivo massimizza la combinazione lineare convessa (espressa dal parametro  $\eta$  che varia tra 0 e 1) tra il profitto atteso e il rischio dato dagli scenari peggiori.

Il modello è il seguente ad un certo tempo fissato:

$$\max \quad (1 - \eta) \cdot \left( I^{\text{MGP}} + \sum_{s \in S} I^{\text{MI}_s} + I^{\text{BM}} \right) + \eta \cdot \left( -\text{VaR} - \frac{1}{1 - \beta} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} \pi_\omega \cdot \xi_\omega \right) \quad (3.1)$$

$$\text{s.t.} \quad I^{\text{MGP}} = q^{\text{MGP}} \cdot \pi^{\text{MGP}}, \quad (3.2)$$

$$I^{\text{MI}} = \sum_{\omega} \mathbb{P}(\omega) \left( \sum_{j=1}^3 q_{\omega_1, \dots, \omega_{j-1}}^{\text{MI}_j} \cdot \pi_{\omega_1, \dots, \omega_j}^{\text{MI}_j} \right), \quad (3.3)$$

$$I^{\text{BM}} = \sum_{\omega} \mathbb{P}(\omega) \sum_{\omega \in \Omega} \left( q_{\omega}^{\text{BM}} \cdot \pi_{\omega}^{\text{BM}} \right), \quad (3.4)$$

$$\xi_\omega \geq -\text{VaR} - \text{Profit}_\omega, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (3.5)$$

$$\xi_\omega \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (3.6)$$

$$q_{\omega}^{\text{BM}} = Q_{\omega}^{\text{ACT}} - (q^{\text{MGP}} + \gamma_{\omega_1}^{\text{MI}_1} + \gamma_{\omega_1, \omega_2}^{\text{MI}_2} + \gamma_{\omega}^{\text{MI}_3}), \quad (3.7)$$

$$-0.1 \cdot q^{\text{MGP}} \leq q_{\omega_1, \dots, \omega_{j-1}}^{\text{MI}_j} \leq 0.1 \cdot q^{\text{MGP}}, \quad (3.8)$$

$$q \leq M_{qmi} y, \quad (3.9)$$

$$q \geq -M_{qmi}(1 - y), \quad (3.10)$$

$$p \leq \pi + M_p(1 - z), \quad (3.11)$$

$$p \geq \pi - M_p z, \quad (3.12)$$

$$y + z \geq 1 - w, \quad (3.13)$$

$$y + z \leq 1 + w, \quad (3.14)$$

$$y - z \leq 1 - w, \quad (3.15)$$

$$-y + z \leq 1 - w, \quad (3.16)$$

$$-M_{qmi}w \leq \gamma \leq M_{qmi}w, \quad (3.17)$$

$$\gamma \leq M_{qmi}(1 - w) + q, \quad (3.18)$$

$$\gamma \geq -M_{qmi}(1 - w) + q, \quad (3.19)$$

$$p \geq (\pi + \epsilon) - M_p(w - y + 1), \quad (3.20)$$

$$p \leq (\pi - \epsilon) + M_p(w + y). \quad (3.21)$$

Dove i vincoli (3.9)–(3.12) formalizzano l'intenzione di vendere, ovvero se  $q$  è maggiore di 0, e controllano se il prezzo offerto è maggiore o minore del prezzo spot, facendo uso delle variabili ausiliarie binarie  $y, z$ . I vincoli (3.13)–(3.16), d'altra parte, modellano logicamente l'accettazione o il rifiuto dell'offerta. Le disequazioni (3.17)–(3.19) vincolano l'energia effettivamente scambiata  $\gamma$ : se l'offerta viene respinta ( $w = 0$ ), la variabile viene forzata a zero ( $\gamma = 0$ ); in caso di accettazione ( $w = 1$ ), la quantità scambiata è obbligata a coincidere con l'offerta presentata ( $\gamma = q$ ). Infine, i vincoli (3.20) e (3.21) prevengono l'ambiguità del caso marginale in cui il prezzo di offerta coincida con il prezzo spot ( $p = \pi$ ). L'introduzione della tolleranza  $\epsilon$  forza il solutore ad accettare l'offerta, impedendogli di rifiutarla in modo opportunistico per convenienza matematica. Nei vincoli logici, per semplificare la notazione, è stato omissso  $q_{\omega_1, \dots, \omega_{j-1}}^{\text{MI}_j}$ , sostituendolo semplicemente con  $q$ , e anche le variabili binarie sono dipendenti dagli scenari. Inoltre è stata impiegata un'unica variabile  $q^{BM}$ , anch'essa dipendente dagli scenari, poiché i dati utilizzati di sbilanciamento hanno un unico prezzo spot, sia per la vendita che per l'acquisto e la variabile può assumere valori sia negativi (necessità di acquistare perché si ha uno sbilanciamento negativo) che positivi (possibilità di vendere perché è stato offerto meno di quello che è stato prodotto).

I parametri Big-M impiegati per linearizzare i vincoli logici sono di due tipologie. La costante  $M_p = \max(\pi^{\text{MI}}) \times 1.2$  è giustificata dal fatto che, affinché il rilassamento sia matematicamente valido, la Big-M deve essere maggiore della massima differenza possibile tra le variabili ( $|p - \pi|$ ). Essendo sia il prezzo di offerta  $p$  che il prezzo spot  $\pi$  limitati e non negativi, la loro differenza assoluta non eccederà mai l'apice storico del mercato. Il margine addizionale del 20% assicura al solutore un'adeguata flessibilità nello spazio di ricerca, evitando il taglio improprio di soluzioni ammissibili. In questo modo, il limite inferiore ( $p \geq \pi - M_p$ ) assume valori negativi, risultando sempre verificato (poiché  $p \geq 0$ ), mentre il limite superiore ( $p \leq \pi + M_p$ ) risulta superiore a qualsiasi valore assumibile da  $p$ . Infine, la costante  $M_{qmi}$  funge da upper bound per l'offerta infragiornaliera, vincolata a un decimo dei volumi allocati sul MGP.

### 3.3 Creazione dell'albero degli scenari

La modellazione dell'incertezza all'interno del problema di ottimizzazione multistadio si fonda sulla costruzione di un albero degli scenari.

L'architettura dell'albero modella il processo decisionale sequenziale dell'operatore, articolandosi nei seguenti livelli:

- **Nodo Radice (Decisione Iniziale):** Il processo ha inizio dopo la chiusura dell'MGP, i cui esiti (energia promessa  $q^{\text{MGP}}$  e prezzo di valorizzazione) sono ormai deterministici. L'operatore definisce la strategia del primo stadio per la prima sessione del mercato infragiornaliero (MI-A1), decidendo la quantità da offrire ( $q^{\text{MI}_1}$ ) e il relativo prezzo limite ( $p^{\text{MI}_1}$ ).
- **Stadio 1 (Rivelazione MI1 e Decisione MI2):** L'albero subisce la prima diramazione in base ai possibili scenari del prezzo zonale del MI-A1 ( $\pi^{\text{MI}_1}$ ). Rivelato lo scenario, la quantità effettivamente accettata dal mercato ( $\gamma_1$ ) diventa nota. Sulla base di questa informazione, l'operatore formula l'offerta per la seconda sessione Infragiornaliera ( $q^{\text{MI}_2}$  e  $p^{\text{MI}_2}$ ), condizionata allo scenario appena osservato.
- **Stadio 2 (Rivelazione MI2 e Decisione MI3):** L'albero si dirama ulteriormente con la rivelazione del prezzo spot del MI-A2 ( $\pi^{\text{MI}_2}$ ), determinando la quantità scambiata  $\gamma_2$ . Qualora la finestra temporale di operatività lo consenta (ovvero per le ore di consegna successive alle 13:00), l'operatore elabora l'ultima offerta per la sessione MI-A3 ( $q^{\text{MI}_3}$  e  $p^{\text{MI}_3}$ ), vincolata all'intero percorso storico degli scenari precedenti.
- **Stadio 3 (Rivelazione MI3):** Una nuova diramazione svela il prezzo del MI-A3 ( $\pi^{\text{MI}_3}$ ), fissando in via definitiva l'ultima quantità scambiata  $\gamma_3$ . Con la chiusura dei mercati infragiornalieri, le contrattazioni terminano e l'impianto entra nella fase di consegna fisica.
- **Stadio 4 (Rivelazione MB e Bilancio Finale):** Nell'ultimo livello dell'albero, da ogni nodo dello Stadio 3, la struttura si dirama per rappresentare l'incertezza sul prezzo di sbilanciamento definito da Terna ( $\pi^{\text{BM}}$ ). Il modello calcola lo sbilanciamento fisico dell'impianto come differenza tra l'energia effettivamente prodotta e l'impegno complessivo assunto sui mercati ( $E_{\text{promessa}} = q^{\text{MGP}} + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ ). Le variabili di ricorso dell'ultimo stadio, indicizzate sull'intero percorso stocastico, sono le  $q^{\text{BM}}$ , ovvero l'energia immessa in rete in eccesso o in difetto rispetto al programma, offerta al prezzo zonale  $\pi^{\text{BM}}$ .

La generazione dei rami avviene mediante l'algoritmo di clustering K-Means applicato ai prezzi storici, già utilizzato in [7]. L'algoritmo K-Means è un metodo di clustering che individua sottogruppi di dati simili all'interno di un insieme di informazioni più vasto. Matematicamente, suddivide le osservazioni in un numero prefissato ( $k$ ) di cluster, associando ogni dato al gruppo il cui centro (chiamato centroide) risulta più vicino. In questa applicazione, il suo scopo è ridurre l'elevato numero di osservazioni storiche riassumendole in un numero limitato di "scenari tipici".

La probabilità di transizione verso un determinato nodo figlio è calcolata empiricamente come il rapporto tra il numero di campioni assegnati a quel cluster e il numero totale di campioni presenti nel nodo genitore. Fondamentalmente, dal secondo stadio in poi, l'algoritmo K-Means non opera sull'intero dataset, ma filtra i dati in modo condizionale: raggruppa esclusivamente i giorni

storici che appartengono al cluster genitore. Questo garantisce che le traiettorie stocastiche generate rispettino le correlazioni temporali dei prezzi di mercato.

A livello implementativo, la procedura oraria si articola in passaggi sequenziali: l'algoritmo isola dapprima lo storico dell'ora in esame, registrandone i valori medi come parametri base. Dopodiché, applica il K-Means in modo ricorsivo: partendo dal mercato MI-A1, per ogni cluster individuato filtra iterativamente il dataset procedendo agli stadi successivi (MI-A2, MI-A3 laddove l'ora  $\geq 13$ , e MB), determinando le probabilità condizionate ad ogni snodo. A chiusura del ciclo, la probabilità dell'intero percorso stocastico viene calcolata come prodotto delle probabilità sui singoli rami e le probabilità associate a tutti gli scenari finali (foglie) vengono normalizzate affinché la loro somma sia esattamente pari a 1.

A causa del filtraggio condizionale reiterato, è matematicamente fisiologico che nei nodi più profondi dell'albero (Stadio 3 o 4) l'algoritmo si trovi a processare un numero di osservazioni storiche inferiore al numero di rami richiesti ( $N_{\text{campioni}} < N_{\text{rami}}$ ).

Per mantenere una matrice di scenari simmetrica, è stata implementata una tecnica basata sulla generazione di "rami fittizi". Qualora un nodo non disponga di sufficienti dati per sostenere la ramificazione, l'algoritmo genera nodi di riempimento che ereditano i valori medi di prezzo e produzione dal livello precedente. A tali rami viene assegnata probabilità di occorrenza nulla.

Questa soluzione garantisce l'integrità della matrice dei vincoli per il solutore MILP, e al contempo preserva la fedeltà statistica dell'ottimizzazione, poiché gli scenari fittizi vengono matematicamente annullati nel calcolo della funzione obiettivo attesa.

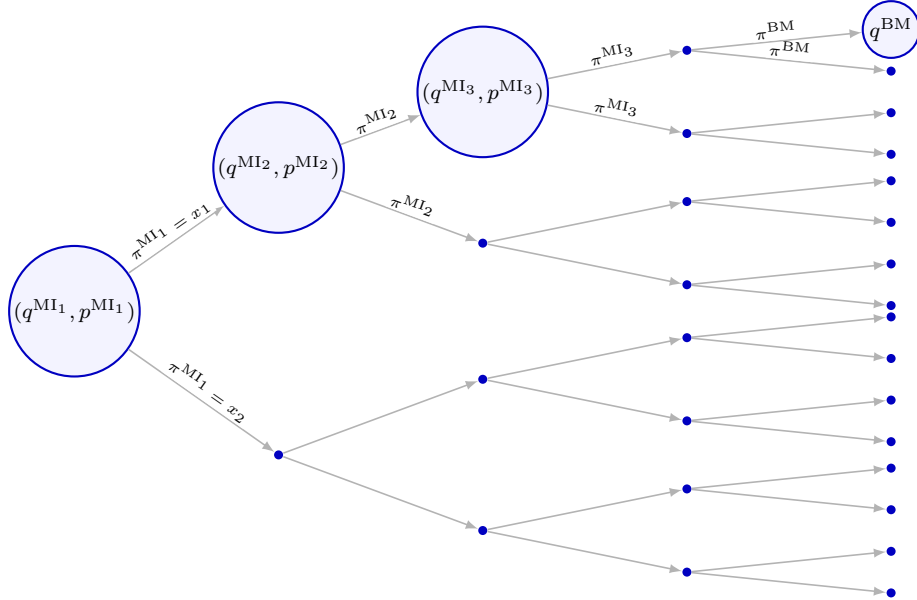


Figura 3.1: Rappresentazione dell'albero degli scenari per  $N_{\text{rami}} = 2$ , per un totale di  $2^4 = 16$  scenari.

## Capitolo 4

# Rafforzamento della Formulazione mediante Tagli Disgiuntivi

### 4.1 Analisi del rilassamento continuo

La formulazione MILP standard del modello presentato in precedenza, pur essendo algebricamente corretta, presenta un poliedro del rilassamento continuo  $P_R$  debole. Questa debolezza strutturale è da ricondurre principalmente a due fattori: l'utilizzo di costanti di penalizzazione (Big-M) e l'elevato numero di variabili decisionali binarie. L'inserimento dei vincoli Big-M, necessari per attivare o disattivare logicamente le disuguaglianze in funzione del valore delle binarie, ha l'effetto geometrico di allargare la regione ammissibile delle soluzioni nel piano continuo. Parallelamente, all'aumentare del numero di rami dell'albero degli scenari, la quantità di variabili binarie esplode (ad esempio con  $N_{\text{rami}} = 5$ , si avranno 341 variabili binarie), rendendo l'esplorazione dell'albero di Branch-and-Bound computazionalmente costosa. Questo si traduce in bound di scarsa qualità e, conseguentemente, nell'impossibilità di raggiungere l'ottimalità della soluzione entro limiti di tempo ragionevoli.

Per ovviare a questo problema, sia dal punto di vista concettuale che computazionale, si ricorre all'introduzione dei piani di taglio (cutting planes) [2]. Un piano di taglio è, per definizione, una disuguaglianza lineare  $\alpha^T x \geq \alpha_0$  che risulta valida per l'insieme delle soluzioni intere ammissibili  $X$ , ma che viene violata da almeno una soluzione ottima frazionaria  $x^*$  appartenente al rilassamento continuo. L'aggiunta iterativa di tali disuguaglianze al modello ha lo scopo di “tagliare via” porzioni del poliedro  $P_R$  che non contengono soluzioni intere, operando il rafforzamento del rilassamento lineare.

L'obiettivo teorico del rafforzamento è quello di restringere il poliedro del rilassamento affinché approssimi il più possibile l'involuppo convesso delle soluzioni ammissibili, indicato con  $\text{conv}(X)$ .

Nelle sezioni successive verrà introdotto un particolare tipo di taglio, quello disgiuntivo, e si studierà la sua capacità di chiudere efficacemente il gap di

rilassamento. Si analizzeranno in particolare due tipi di formulazione e approcci diversi per arrivare a generare questi tagli.

## 4.2 I tagli disgiuntivi

In questa sezione si approfondirà un particolare tipo di taglio che sarà utilizzato per rafforzare il rilassamento lineare nel modello.

Un poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ , è una formulazione lineare del problema  $(S, c)$  se e solo se  $S = P \cap \{0, 1\}^n$ , dove  $S$  è l'insieme delle soluzioni ammissibili di un particolare problema di programmazione lineare binaria (PL01) e  $c$  è il vettore dei costi. Equivale a dire che il problema  $(S, c)$  si può riscrivere in questo modo:

$$\min \quad c^\top x \quad (4.1)$$

$$x \in P, \quad (4.2)$$

$$x \in \{0, 1\}^n. \quad (4.3)$$

E chiamando rilassamento lineare il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min \quad c^\top x \quad (4.4)$$

$$x \in P. \quad (4.5)$$

La soluzione di quest'ultimo problema fornisce un lower bound alla soluzione ottima del (PL01). Esistono per uno stesso problema diverse formulazioni lineari, quindi anche diversi rilassamenti lineari. In particolare, una formulazione del problema è tanto migliore quanto più alto è il valore della soluzione ottima ad esso associato.

È possibile provare che esiste una formulazione ottima del problema, ovvero la migliore di tutte, ed è costituita dall'involucro convesso dell'insieme  $S$ , e verrà denotata con  $P_s$ .

Esistono diversi approcci per la generazione di  $P_s$ , uno di questi prende il nome di *Rafforzamento disgiuntivo*, ed è stato proposto alla fine degli anni 70 da E. Balas, del quale viene riportata la formulazione data da Sassano [13].

Sia  $P$  una formulazione di un problema  $(S, c)$  di Programmazione lineare 0,1 e si supponga, senza perdita di generalità, che  $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, i \in \{1, \dots, n\}\}$ .

Scelto un indice  $i \in \{1, \dots, n\}$ , si definiscano i politopi:

$$P_1 = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 1\}, \quad P_0 = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$$

È evidente che  $S$  è contenuto nell'insieme  $P_1 \cup P_0$ . Il problema  $(S, c)$  può essere quindi espresso nella seguente forma disgiuntiva:

$$\begin{array}{ll} \min c^\top x & \text{oppure} \quad \min c^\top x \\ x \in P_0, & x \in P_1, \\ x \in \{0, 1\}^n & x \in \{0, 1\}^n \end{array}$$

$P_1 \cup P_0$  non è un politopo. Tuttavia, dato che  $P$  è convesso, si ha:

$$\text{conv}(P_1 \cup P_0) \subseteq P.$$

Definiamo  $Q_i(P) = \text{conv}(P_1 \cup P_0)$  come il rafforzamento disgiuntivo di  $P$  rispetto alla componente  $i$ .  $Q_i$  è una formulazione di  $(S, c)$ ,  $Q_i(P) \subseteq P$ , dunque è “migliore” della formulazione originaria  $P$ . Inoltre  $\hat{x}$  è un vertice di  $Q_i(P)$  se e solo se è un vertice di  $P_1$  o di  $P_0$ , dunque la componente  $\hat{x}_i$  ha valore 0 o 1. Di conseguenza, il problema  $(S, c)$  può essere formulato nel modo seguente:

$$\min c^\top x \quad (4.6)$$

$$x \in Q_i(P), \quad (4.7)$$

$$x_h \in \{0, 1\}, \quad h \neq i. \quad (4.8)$$

e questa sostituzione si chiama operazione di rafforzamento disgiuntivo di  $P$  e viene usata per produrre le disequazioni valide per la formulazione ottima  $P_s$  nel seguente modo. Sia  $P$  una generica formulazione del problema  $(S, c)$  e sia  $Q^1 = Q_1(P)$  il politopo ottenuto applicando il rafforzamento disgiuntivo a  $P$  e all'indice 1. Il politopo  $Q^1$  è una formulazione migliore di  $P$  e tutti i suoi vertici hanno la componente  $x_1$  pari a 1 o 0. La procedura può essere applicata a  $Q^1$  e all'indice 2, ottenendo una migliore formulazione  $Q^2 = Q_2(Q^1)$  le cui prime due componenti dei vertici saranno 0 o 1. Iterando il procedimento, si ottiene la formulazione  $Q^n$ , che avrà ogni vertice con tutte le componenti 0,1, e allora  $Q^n$  è proprio la formulazione ottima che si stava cercando  $P_s$ . Questa procedura si chiama di convessificazione sequenziale.

Di seguito è presentato il metodo che consente di generare il rafforzamento disgiuntivo  $Q_i(P)$  di  $P$  rispetto alla componente  $x_i$ .

Sia  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  e supponiamo che le disequazioni  $0 \leq x_i \leq 1$  per  $i \in \{1, \dots, n\}$  siano comprese nel sistema  $Ax \leq b$ . Considerato un generico indice  $i$ , si ponga:

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x_i = 1\}, \quad P_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x_i = 0\}$$

Un vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  appartiene al politopo  $Q_i(P) = \text{conv}(P_1 \cup P_0)$  se e solo se è esprimibile come combinazione lineare convessa di un vettore  $y$  appartenente a  $P_1$  e un vettore  $z$  appartenente a  $P_0$ , ovvero se e solo se esistono  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  ed uno scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$  tali che:

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z,$$

$$Ay \leq b,$$

$$y_i = 1,$$

$$Az \leq b,$$

$$z_i = 0,$$

$$\lambda \geq 0,$$

$$\lambda \leq 1.$$

Pertanto, detto  $Z$  l'insieme delle soluzioni di questo sistema, si ha che l'insieme  $\text{conv}(P_1 \cup P_0)$  è la proiezione di  $Z$  nello spazio delle variabili  $x$ , ovvero  $\text{conv}(P_1 \cup$

$P_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y, z, \lambda) \in Z\}$ . Tuttavia il sistema precedente non è lineare, ma è possibile renderlo tale costruendo il seguente sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x &= y + z, \\ Ay &\leq \lambda b, \\ y_i &= \lambda, \\ Az &\leq (1 - \lambda)b, \\ z_i &= 0. \end{aligned}$$

Denotiamo con  $D_i(P)$  l'insieme delle sue soluzioni. La proiezione dell'insieme esteso  $D_i(P)$  sullo spazio originale delle variabili  $x$  coincide esattamente con il rafforzamento disgiuntivo  $Q_i(P)$ .

#### 4.2.1 Esempio semplice di taglio

Per chiarire il meccanismo operativo dei tagli disgiuntivi si propone di seguito un semplice esempio per testarne l'efficacia. Supponiamo di avere come insieme di possibili soluzioni di un problema di ottimizzazione l'unione di due politopi, in particolare due triangoli, come mostrato nella figura 4.1.

Si consideri il seguente modello:

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \geq 1 - Mz, \\ & x_2 \geq 1 - Mz, \\ & x_1 + x_2 \leq 3 + Mz, \\ & x_1 \geq 4 - M(1 - z), \\ & x_2 \leq 2 + M(1 - z), \\ & x_1 - x_2 \leq 3 + M(1 - z), \\ & z \in \{0, 1\}, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dove la variabile binaria  $z$  è introdotta proprio per esprimere l'unione tra i due politopi. Se infatti si denota con  $P_1$  il politopo corrispondente a  $z = 1$  e  $P_0$  il politopo corrispondente a  $z = 0$ , si ha quindi che sostituendo questi valori all'interno della formulazione Big-M, i termini legati alla costante  $M$  si annullano alternativamente, "attivando" un gruppo di vincoli e rendendo ridondanti gli altri. Per  $z = 0$  si ottiene il politopo  $P_0$ :

$$P_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \leq 3\}.$$

Per  $z = 1$ , attivando le equazioni del triangolo di destra, si ottiene il politopo  $P_1$ :

$$P_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 4, x_2 \leq 2, x_1 - x_2 \leq 3\}.$$

L'insieme delle soluzioni ammissibili del problema originale è descritto esattamente dall'unione logica e spaziale di questi due insiemi:  $P_0 \cup P_1$ .

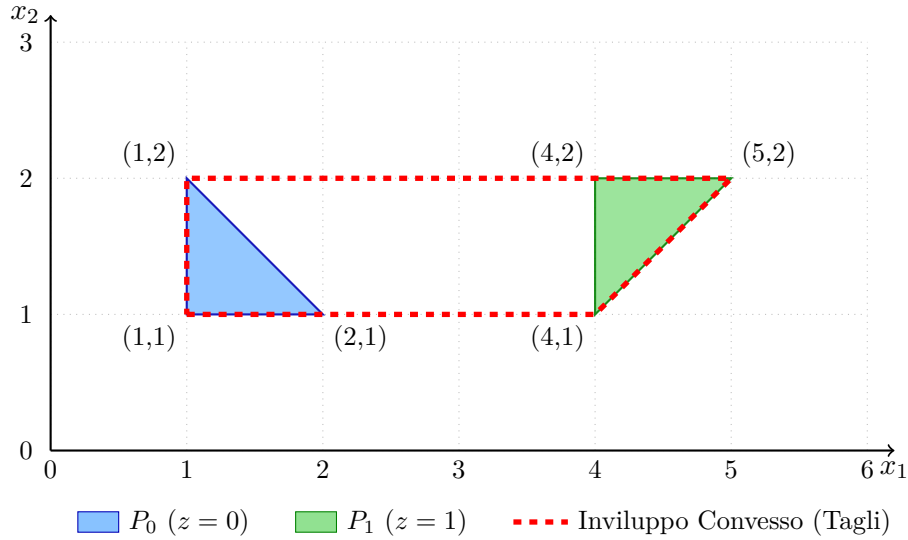


Figura 4.1: Rappresentazione geometrica dell'unione di due politipi e dei relativi tagli disgiuntivi che ne definiscono l'involuppo convesso.

Ora aggiungiamo al modello i tagli disgiuntivi, per rafforzare il rilassamento lineare e velocizzare la convergenza alla soluzione ottima. L'obiettivo dell'introduzione di tali tagli è descrivere matematicamente l'involuppo convesso dell'unione dei due politipi, ovvero il più piccolo insieme convesso che contiene integralmente sia  $P_0$  che  $P_1$ .

Geometricamente, poiché si opera in uno spazio a due dimensioni, la costruzione dell'involuppo convesso consiste nel trovare il trapezio più piccolo che "racchiude" i due politipi, la cui forma corrisponde a un trapezio con vertici in  $(1,1)$ ,  $(4,1)$ ,  $(5,2)$  e  $(1,2)$ . Ciò corrisponde a determinare le equazioni delle 4 rette che, intersecandosi, formano la figura.

Per ricavare analiticamente i vincoli che descrivono questo trapezio, si utilizzerà la formulazione vista precedentemente. L'idea alla base di questo approccio è che qualsiasi punto appartenente all'involuppo convesso dell'unione di due politipi può essere espresso come combinazione convessa di punti appartenenti ai politipi originari.

A tal fine, si procede sdoppiando il vettore delle variabili originali  $x$  nella somma di due nuovi vettori ausiliari,  $x^0$  e  $x^1$ , ciascuno associato rispettivamente al politopo  $P_0$  e  $P_1$ . Introduciamo inoltre una singola variabile moltiplicatrice  $\lambda \in [0, 1]$ , che funge da peso per la combinazione convessa. Si può quindi riscrivere il sistema esprimendo le coordinate originali come somma delle componenti sdoppiate:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + x_1^1, \\ x_2 = x_2^0 + x_2^1. \end{cases}$$

Si applicano dunque i pesi  $\lambda$  e  $(1 - \lambda)$  ai vincoli dei rispettivi politipi. Per il primo politopo ( $P_0$ ), le equazioni vengono proiettate sulle variabili  $x^0$  e vincolate

dal peso  $\lambda$ :

$$\begin{cases} x_1^0 \geq \lambda \\ x_2^0 \geq \lambda \\ x_1^0 + x_2^0 \leq 3\lambda \end{cases}$$

In modo del tutto analogo, per il secondo politopo ( $P_1$ ), le equazioni vengono proiettate sulle variabili  $x^1$  e vincolate dal peso complementare  $(1 - \lambda)$ :

$$\begin{cases} x_1^1 \geq 4(1 - \lambda) \\ x_2^1 \leq 2(1 - \lambda) \\ x_1^1 - x_2^1 \leq 3(1 - \lambda) \end{cases}$$

Questa formulazione estesa definisce perfettamente l'involuppo convesso, ma lo fa in uno spazio a dimensione superiore (in questo caso, a 6 dimensioni spaziali più il moltiplicatore  $\lambda$ ). Poiché l'obiettivo è descrivere la regione ammissibile esclusivamente nello spazio delle variabili originali  $x_1$  e  $x_2$ , è necessario proiettare questo sistema eliminando tutte le variabili ausiliarie ( $x^0, x^1, \lambda$ ).

Il modello finale risulta quindi:

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 = x_1^0 + x_1^1, \\ & x_2 = x_2^0 + x_2^1, \\ & x_1^0 \geq \lambda, \\ & x_2^0 \geq \lambda, \\ & x_1^0 + x_2^0 \leq 3\lambda, \\ & x_1^1 \geq 4(1 - \lambda), \\ & x_2^1 \leq 2(1 - \lambda), \\ & x_1^1 - x_2^1 \leq 3(1 - \lambda), \\ & 0 \leq \lambda \leq 1, \\ & x_1^0, x_2^0, x_1^1, x_2^1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Proiettando il sistema esteso nello spazio delle variabili originali, operazione che dal punto di vista algebrico consiste nel combinare linearmente i vincoli ed eliminare le variabili ausiliarie una alla volta (procedura nota come eliminazione di Fourier-Motzkin [2]), si ottengono le disuguaglianze che delimitano l'involuppo convesso. Nel semplice caso bidimensionale analizzato, l'algoritmo di proiezione si riduce a poche sostituzioni. Ad esempio, mostriamo i passaggi algebrici necessari per l'estrazione del primo taglio disgiuntivo ( $x_1 \geq 1$ ).

Esplicitando  $x_1^1$ :

$$x_1^1 = x_1 - x_1^0$$

Si sostituisce questa espressione nel primo vincolo appartenente al secondo

politopo ( $x_1^1 \geq 4(1 - \lambda)$ ) e isolando  $x_1^0$ :

$$x_1 - x_1^0 \geq 4 - 4\lambda \implies x_1^0 \leq x_1 - 4 + 4\lambda$$

Dal sistema esteso relativo al primo politopo, disponiamo già di un limite inferiore per la medesima variabile, ovvero  $x_1^0 \geq \lambda$ . Accoppiando questa informazione con la disuguaglianza ricavata al passo 1, è possibile elidere completamente  $x_1^0$  dal sistema:

$$\lambda \leq x_1^0 \leq x_1 - 4 + 4\lambda \implies \lambda \leq x_1 - 4 + 4\lambda$$

Riorganizzando i termini della nuova disuguaglianza ottenuta, si raggruppano i moltiplicatori  $\lambda$ :

$$4 - x_1 \leq 3\lambda$$

Ma  $\lambda$  è una quantità compresa tra 0 e 1, dunque andando a maggiorare si ottiene

$$4 - x_1 \leq 3$$

$$x_1 \geq 1$$

Tramite questo procedimento si ottengono i 4 tagli:

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases} \quad (4.9)$$

Se si implementa numericamente questo esempio, ponendo come funzione obiettivo la massimizzazione della differenza delle variabili originali ( $x_1 - x_2$ ), e ponendo  $M = 4$ , si può osservare come varia il comportamento computazionale dell'algoritmo risolutivo. Analizzando i risultati restituiti, emergono tre scenari distinti:

- Formulazione Big-M intera: Preservando il vincolo di interezza sulla variabile indicatrice ( $z \in \{0, 1\}$ ), la soluzione ottima converge sul vertice (4.0, 1.0) situato all'interno del politopo  $P_1$ , con la variabile  $z$  che assume correttamente il valore 1.0 e un valore obiettivo pari a 3.0. Questa rappresenta la soluzione esatta del problema in esame.
- Rilassamento continuo della formulazione Big-M: Se si rimuove il vincolo di interezza, permettendo alla variabile  $z$  di assumere valori continui ( $z \in [0, 1]$ ), emerge in modo evidente la debolezza della formulazione basata sul Big-M. Il solver sfrutta i valori frazionari (nello specifico  $z = 0.375$ ) per allentare i vincoli di entrambi i politipi contemporaneamente. Ciò genera una regione ammissibile fittizia molto più estesa nello spazio, portando a coordinate ottime ( $x_1 = 5.0, x_2 = -0.5$ ) e a una sovrastima del valore obiettivo, che raggiunge 5.5. Il politopo continuo include un volume enorme di soluzioni ammissibili fittizie.

- Rilassamento continuo con tagli disgiuntivi: Mantenendo la variabile  $z$  rilassata nel continuo, ma aggiungendo alla formulazione le quattro disuguaglianze dell'involuppo convesso calcolate in precedenza, il solutore viene ricondotto entro i limiti geometrici del trapezio reale. In questo scenario, le variabili principali convergono al vertice ottimo reale ( $x_1 = 4.0, x_2 = 1.0$ ) ripristinando il valore obiettivo corretto di 3.0.

In conclusione, l'implementazione numerica conferma che la generazione di tagli disgiuntivi permette di stringere il rilassamento continuo fino a farlo coincidere con l'involuppo convesso delle soluzioni intere.

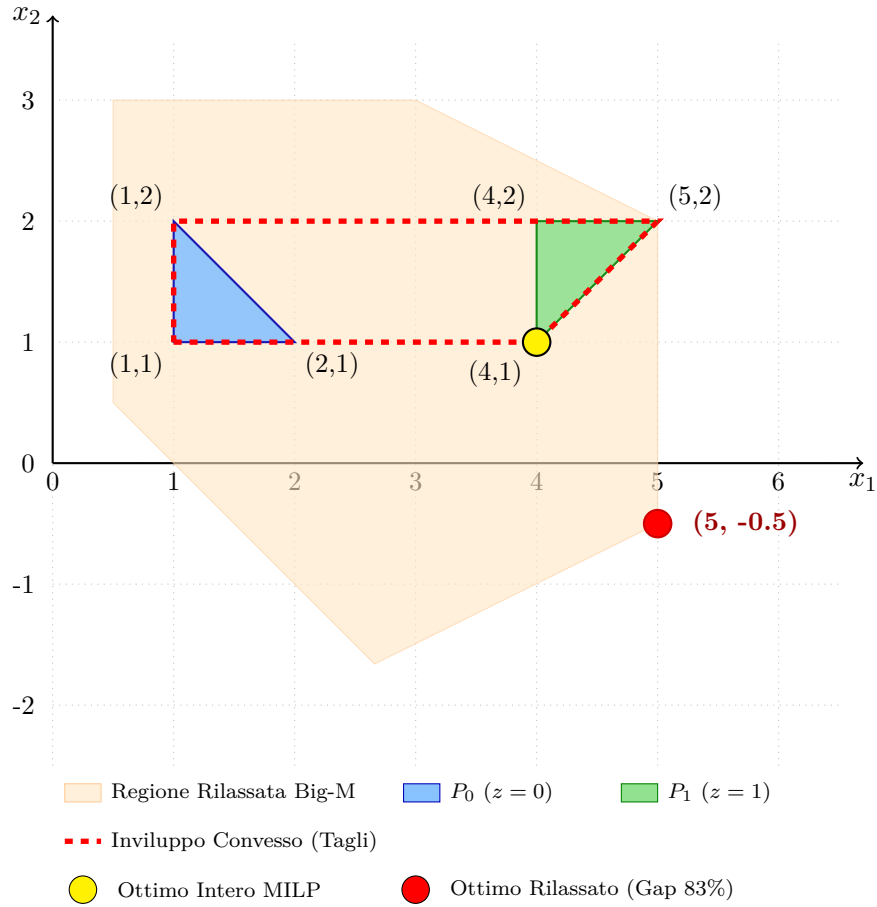


Figura 4.2: Rappresentazione geometrica del fallimento del rilassamento continuo con vincoli Big-M (area arancione) e azione di confinamento dei tagli disgiuntivi (linea tratteggiata rossa).

### Criticità della proiezione esplicita

Come descritto nella sezione precedente, l'involuppo convesso dell'unione dei due politopi, ovvero  $\text{conv}(P_1 \cup P_0)$ , coincide esattamente con la proiezione della formulazione estesa a dimensione superiore nel sottospazio originale delle variabili  $x$ . La conclusione teorica di questo approccio è che tale politopo può

essere ottenuto esplicitamente applicando un qualsiasi algoritmo di proiezione al sistema lineare esteso.

Sebbene questo approccio fornisca una rappresentazione matematicamente esatta dell'involuppo convesso, esso presenta delle criticità.

In primo luogo, vi è il limite computazionale degli algoritmi di proiezione. Spesso infatti questi metodi generano un numero esponenziale di disuguaglianze ridondanti. Nel caso studio in esame applicato ai mercati energetici, il modello presenta centinaia di variabili binarie. Costruire l'involuppo convesso sdoppiando esplicitamente lo spazio per ciascuna di queste variabili e proiettando l'intero sistema porterebbe a un'esplosione combinatoria del modello, rendendo il problema continuo risultante più lento da risolvere rispetto al MILP originario.

Per questi motivi, si ricaveranno le singole equazioni dei tagli disgiuntivi lavorando direttamente nello spazio originale delle variabili, estraendo esclusivamente i tagli necessari a separare la soluzione ottima frazionaria corrente. Questo è esattamente l'approccio basato sul Lemma di Farkas e formalizzato nel *Cut Generating Linear Program* (CGLP), che rappresenta la metodologia effettivamente implementata nei test numerici.

### 4.3 Tagli disgiuntivi e CGLP

Un approccio alternativo per la derivazione dei tagli disgiuntivi viene introdotto in questa sezione. Invece di ricorrere all'introduzione di variabili ausiliarie, questo metodo si fonda sulla risoluzione di uno specifico problema di ottimizzazione volto a calcolare direttamente l'equazione del taglio.

Seguendo la notazione dell'articolo di Fischetti [5], si consideri il seguente modello MILP:

$$\min\{c^T x : Ax \geq b, x_j \text{ intero } \forall j \in J\}$$

Nella pratica della risoluzione, il primo passo è sempre risolvere il rilassamento continuo di questo problema, ossia ignorare temporaneamente il vincolo che impone alle variabili  $x_j$  di essere intere. L'ottimo di questo problema continuo rilassato viene chiamato  $x^*$ . Se la soluzione  $x^*$  è intera, allora è stata trovata la soluzione del MILP, se invece c'è anche una sola componente non intera, per tagliare questa soluzione inammissibile, si introduce una disgiunzione:

$$\pi x \leq \pi_0 \quad \text{OR} \quad \pi x \geq \pi_0 + 1$$

dove  $\pi$  è un vettore della stessa dimensione del vettore delle variabili  $x$  e  $\pi_0$  uno scalare (entrambi interi), tali per cui  $\pi_j = 0$  per le variabili continue e la soluzione del rilassamento continuo  $x^*$  cade proprio tra queste due opzioni, ovvero  $\pi x^* - \pi_0 = \eta^*$ , con  $\eta^* \in (0, 1)$ . In pratica, imporre questa disgiunzione significa dividere lo spazio in due nuovi poliedri:  $P_0$  (dove vale la prima condizione) e  $P_1$  (dove vale la seconda), come si è visto nella formalizzazione precedente. Si vuole dunque trovare il taglio disgiuntivo, cioè una nuova disequazione  $\alpha x \geq \alpha_0$  che taglia fuori  $x^*$  ma che rimane sempre vera sia in  $P_0$  che in  $P_1$ . Per dimostrare che un vincolo è valido in un poliedro, si usa il lemma di Farkas, che ci assicura che una disequazione è valida per un sistema lineare

se e solo se può essere ottenuta come combinazione lineare non negativa dei vincoli del sistema stesso. Quindi, un taglio valido deve poter essere generato contemporaneamente da una combinazione (con moltiplicatori  $u \geq 0$  e  $u_0 \geq 0$ ) dei vincoli originari  $Ax \geq b$  e del vincolo  $-\pi x \geq -\pi_0$  (cioè il lato  $P_0$ ) e da una combinazione (con moltiplicatori  $v \geq 0$  e  $v_0 \geq 0$ ) dei vincoli originari  $Ax \geq b$  e del vincolo  $\pi x \geq \pi_0 + 1$  (cioè il lato  $P_1$ ).

Per ricavare analiticamente i coefficienti di tale taglio, si ricorre a un risultato fondamentale dell'ottimizzazione lineare: un noto corollario del Lemma di Farkas. Esso stabilisce che, dato un poliedro non vuoto  $P = \{x : Ax \geq b\}$ , una disuguaglianza  $\alpha x \geq \alpha_0$  è valida per  $P$  se e solo se esiste un vettore di moltiplicatori non negativi  $u \geq 0$  tale per cui  $\alpha = uA$  e  $\alpha_0 \leq ub$ . Affinché il taglio disgiuntivo risulti valido globalmente, è necessario applicare tale corollario separatamente ai poliedri  $P_0$  e  $P_1$ . Il poliedro  $P_0$  è definito dal sistema originario unito al ramo sinistro della disgiunzione, ossia  $Ax \geq b$  e  $-\pi x \geq -\pi_0$ . In base al corollario di Farkas, il taglio risulta valido in  $P_0$  qualora esistano dei moltiplicatori  $u \geq 0$  (associati ai vincoli originari) e  $u_0 \geq 0$  (associato alla disgiunzione) tali che:

$$\alpha = uA - u_0\pi \quad \text{e} \quad \alpha_0 \leq ub - u_0\pi_0$$

Analogamente, il poliedro  $P_1$  è descritto dal sistema  $Ax \geq b$  e  $\pi x \geq \pi_0 + 1$ . Il taglio si considera pertanto valido in  $P_1$  se esistono dei moltiplicatori  $v \geq 0$  e  $v_0 \geq 0$  tali che:

$$\alpha = vA + v_0\pi \quad \text{e} \quad \alpha_0 \leq vb + v_0(\pi_0 + 1)$$

Si noti che, applicando rigorosamente il corollario del lemma di Farkas, i vincoli che definiscono lo scalare  $\alpha_0$  dovrebbero essere formulati come disuguaglianze ( $\leq$ ). Tuttavia, come evidenziato da Fischetti e coautori [5], data la presenza, seppur implicita, della disuguaglianza banale  $0x \geq -1$  all'interno di qualsiasi sistema lineare ammissibile, è sempre matematicamente possibile richiedere che valga l'uguaglianza stretta in entrambi i rami della disgiunzione senza alcuna perdita di generalità. Il moltiplicatore di Farkas associato a tale vincolo, infatti, non altera il calcolo del vettore  $\alpha$ , ma funge da variabile di scarto implicita capace di assorbire esattamente il divario sul termine noto  $\alpha_0$ .

Pertanto, al fine di generare il taglio più profondo possibile, ovvero per massimizzare la violazione in corrispondenza della soluzione frazionaria  $x^*$ , si minimizza la quantità algebrica  $\alpha x^* - \alpha_0$ . Tale principio conduce direttamente alla formulazione del modello lineare CGLP standard, il quale determina i moltiplicatori di Farkas ottimali per la generazione del taglio:

$$\begin{aligned} \alpha &= uA - u_0\pi, \\ \alpha &= vA + v_0\pi, \\ \alpha_0 &= ub - u_0\pi_0, \\ \alpha_0 &= vb + v_0(\pi_0 + 1), \\ u, v, u_0, v_0 &\geq 0. \end{aligned}$$

Un problema che tuttavia, per lungo tempo, ha portato a trascurare l'utilità dei tagli disgiuntivi è che la regione ammissibile del CGLP, così com'è definita, è un cono. Ciò implica che, qualora si individui un taglio associato a una violazione negativa (ovvero un taglio valido), risulterebbe possibile moltiplicare indefinitamente i moltiplicatori  $u, v, u_0, v_0$  per generare un'iperpiano infinitamente violato, rendendo il problema illimitato. Per risolvere questo problema ed evitare che il modello diverga, è obbligatorio troncare il cono introducendo una cosiddetta condizione di normalizzazione. Gli autori dell'articolo [5] confrontano due approcci classici:

- La Normalizzazione Banale (Trivial Normalization), definita come  $u_0 + v_0 = 1$ .
- La *Standard Normalization Condition* (SNC), definita come  $\sum_{i=1}^m u_i + \sum_{i=1}^m v_i + u_0 + v_0 = 1$

Dalle loro analisi emerge che la normalizzazione SNC è computazionalmente molto più efficace. Questo risultato è dovuto a una caratteristica implicita della SNC: limitando la somma di tutti i moltiplicatori a 1, il sistema penalizza l'uso di moltiplicatori di Farkas grandi. Di conseguenza, il CGLP tende a selezionare solo un numero ristretto di vincoli per la derivazione del taglio (mantenendo i tagli sparsi) e favorisce disuguaglianze di “basso rango” (low-rank cuts). Al contrario, la normalizzazione banale si concentra solo sui moltiplicatori della disgiunzione ( $u_0$  e  $v_0$ ), lasciando gli altri moltiplicatori liberi di assumere valori enormi. Questo porta alla generazione di tagli molto densi e deboli.

Tuttavia, la SNC non è perfetta e soffre di un grave problema di “bad scaling” (cattivo ridimensionamento). La dimensione relativa dei moltiplicatori nella somma dipende dalla scala dei coefficienti dei vincoli corrispondenti. Se un vincolo originale viene moltiplicato artificialmente per un fattore elevato, il suo moltiplicatore associato nel CGLP viene diviso per lo stesso fattore, rendendo quel vincolo matematicamente più “economico” per la normalizzazione SNC. Questa vulnerabilità interferisce con la capacità della SNC di produrre tagli di basso rango, compromettendo le prestazioni dell'algoritmo.

Per risolvere il problema del “bad scaling” che affligge la SNC, gli autori introducono una nuova formulazione: la normalizzazione euclidea. Essa è definita matematicamente come:

$$\sum_{i=1}^m \|a_i\| u_i + \sum_{i=1}^m \|a_i\| v_i + \|\pi\| u_0 + \|\pi\| v_0 = 1$$

In questa equazione, il termine  $a_i$  identifica il vettore dei coefficienti dell' $i$ -esima riga della matrice dei vincoli originali. Di conseguenza, ogni moltiplicatore di Farkas viene esplicitamente pesato attraverso la norma euclidea  $\|a_i\|$  del vincolo associato. Gli autori dell'articolo [5] dimostrano che il CGLP troncato con la normalizzazione euclidea è del tutto immune alle operazioni di scaling. Sebbene questa normalizzazione faccia perdere la penalizzazione implicita verso i vincoli di alto rango tipica della SNC, essa assegna penalità basate sulla reale struttura geometrica del vincolo. Gli autori concludono che la normalizzazione euclidea

risulta particolarmente adatta ed efficace per i problemi di Set Covering, poiché in tali problemi i vincoli possiedono esclusivamente coefficienti non negativi, permettendo alla norma euclidea di fornire una misura estremamente affidabile su quanto sia svantaggioso utilizzare i relativi moltiplicatori.

#### 4.3.1 Esempio di taglio generato con il CGLP

Al fine di illustrare matematicamente l'azione del CGLP e dimostrarne l'efficacia algoritmica, si riprende l'esempio formulato nella Sezione 4.2.1. Il poliedro originario è descritto dal sistema di disequazioni lineari  $A\mathbf{x} \geq b$  che, esplicitando la costante  $M = 4$  e raggruppando i termini rispetto al vettore delle variabili  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, z)^T$ , assume la seguente forma matriciale:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 4z \geq 1, \\ & x_2 + 4z \geq 1, \\ & -x_1 - x_2 + 4z \geq -3, \\ & x_1 - 4z \geq 0, \\ & -x_2 - 4z \geq -6, \\ & -x_1 + x_2 - 4z \geq -7, \\ & z \in \{0, 1\}, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Risolvendo il rilassamento continuo di questo modello, il solutore ignora il vincolo di interezza e converge alla soluzione ottima frazionaria  $\mathbf{x}^* = (5.0, -0.5, 0.375)^T$ . La natura frazionaria della variabile  $z^* = 0.375$  fornisce la direzione di separazione. Si impone pertanto la disgiunzione  $z \leq 0 \vee z \geq 1$ , che si traduce nell'impostare il vettore  $\pi = (0, 0, 1)^T$  e lo scalare  $\pi_0 = 0$ .

Il CGLP viene costruito allocando i moltiplicatori di Farkas  $u \in \mathbb{R}^6$  (con  $u \geq 0$ ) e lo scalare  $u_0 \geq 0$  per caratterizzare il poliedro  $P_0$  (in cui si impone  $-z \geq 0$ ), e analogamente  $v \in \mathbb{R}^6$  (con  $v \geq 0$ ) e  $v_0 \geq 0$  per il poliedro  $P_1$  (in cui si impone  $z \geq 1$ ). Il CGLP mira a trovare l'iperpiano maggiormente violato. Ciò equivale a minimizzare il valore della differenza valutata nel punto frazionario  $\mathbf{x}^*$ , ovvero la quantità  $5.0\alpha_1 - 0.5\alpha_2 + 0.375\alpha_z - \alpha_0$ , ed è soggetto ai vincoli strutturali e alla condizione di normalizzazione SNC:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5.0\alpha_1 - 0.5\alpha_2 + 0.375\alpha_z - \alpha_0 \\ \text{s.t.} \quad & \alpha = uA - u_0\pi, \\ & \alpha = vA + v_0\pi, \\ & \alpha_0 = ub - u_0\pi_0, \\ & \alpha_0 = vb + v_0(\pi_0 + 1), \\ & \sum_{i=1}^6 u_i + \sum_{i=1}^6 v_i + u_0 + v_0 = 1. \end{aligned}$$

L'ottimizzazione di tale sistema nello spazio dei moltiplicatori converge a una soluzione ottima di base in cui assumono valore non nullo esclusivamente i moltiplicatori necessari a definire l'iperpiano di taglio (essendo l'SNC una forma di normalizzazione sparsa). Nello specifico, il solutore estrae:

- Per il lato  $P_0$ :  $u_2 = \frac{1}{15}$  e  $u_0 = \frac{4}{15}$ .
- Per il lato  $P_1$ :  $v_4 = \frac{1}{15}$ ,  $v_6 = \frac{1}{15}$  e  $v_0 = \frac{8}{15}$ .

È immediato verificare che la somma di tali moltiplicatori è esattamente pari a 1, rispettando la normalizzazione SNC. Poiché la soluzione ottima del CGLP assegna un valore nullo a tutti i moltiplicatori  $u_i$  ad eccezione di  $u_2$ , il prodotto matriciale  $uA$  si riduce al solo contributo della seconda riga della matrice  $A$ . Applicando dunque la definizione  $\alpha = uA - u_0\pi$  ed esplicitando sia i coefficienti del secondo vincolo ( $A_{2,1} = 0, A_{2,2} = 1, A_{2,z} = 4, b_2 = 1$ ) sia quelli della disgiunzione ( $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0, \pi_z = 1$ ), si ricavano i coefficienti del taglio:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= u_2 \cdot A_{2,1} - u_0 \cdot \pi_1 = \frac{1}{15} \cdot 0 - \frac{4}{15} \cdot 0 = 0 \\ \alpha_2 &= u_2 \cdot A_{2,2} - u_0 \cdot \pi_2 = \frac{1}{15} \cdot 1 - \frac{4}{15} \cdot 0 = \frac{1}{15} \\ \alpha_z &= u_2 \cdot A_{2,z} - u_0 \cdot \pi_z = \frac{1}{15} \cdot 4 - \frac{4}{15} \cdot 1 = \frac{4}{15} - \frac{4}{15} = 0 \\ \alpha_0 &= u_2 \cdot b_2 - u_0 \cdot \pi_0 = \frac{1}{15} \cdot 1 - \frac{4}{15} \cdot 0 = \frac{1}{15}\end{aligned}$$

Il CGLP genera in questo modo la disuguaglianza  $\frac{1}{15}x_2 \geq \frac{1}{15}$  che, moltiplicata per 15, restituisce il taglio  $x_2 \geq 1$ . Come dimostrato precedentemente tramite proiezione, tale disequazione definisce esattamente uno dei contorni dell'involuppo convesso. La validità e l'efficacia del procedimento di separazione trovano conferma finale valutando la funzione obiettivo nel punto frazionario di partenza  $\mathbf{x}^*$ :

$$\alpha^T \mathbf{x}^* - \alpha_0 = \frac{1}{15}(-0.5) - \frac{1}{15} = -0.1$$

Essendo il risultato strettamente negativo ( $-0.1 < 0$ ), l'iperpiano generato recide con successo la regione inammissibile del rilassamento, separando l'ottimo frazionario senza richiedere costose proiezioni esplicite dell'intero sistema.

L'aggiunta di questo primo taglio disgiuntivo al modello continuo innesca la successiva fase algoritmica. Riottimizzando il problema arricchito dal nuovo vincolo  $x_2 \geq 1$ , la regione ammissibile subisce una contrazione: il solutore converge verso un nuovo ottimo rilassato pari a  $\mathbf{x}^{**} = (5.0, 1.0, 0.75)^T$ , come mostrato in Figura 4.3.

Il valore della funzione obiettivo registra di conseguenza un netto miglioramento, riducendosi dal bound iniziale di 5.5 al nuovo valore di 4.0. Tuttavia, poiché la variabile indicatrice assume il valore  $z^{**} = 0.75$ , violando ancora il vincolo di interezza, il criterio di convergenza non risulta soddisfatto. La procedura viene pertanto iterata: il nuovo punto frazionario costituisce l'input per la risoluzione di un successivo CGLP volto a generare ulteriori disuguaglianze valide (quali, ad esempio,  $x_1 - x_2 \leq 3$ ), proseguendo il ciclo di rafforzamento

progressivo del poliedro fino al raggiungimento della soluzione ottima intera  $\mathbf{x}_{INT}^* = (4.0, 1.0, 1.0)^T$ .

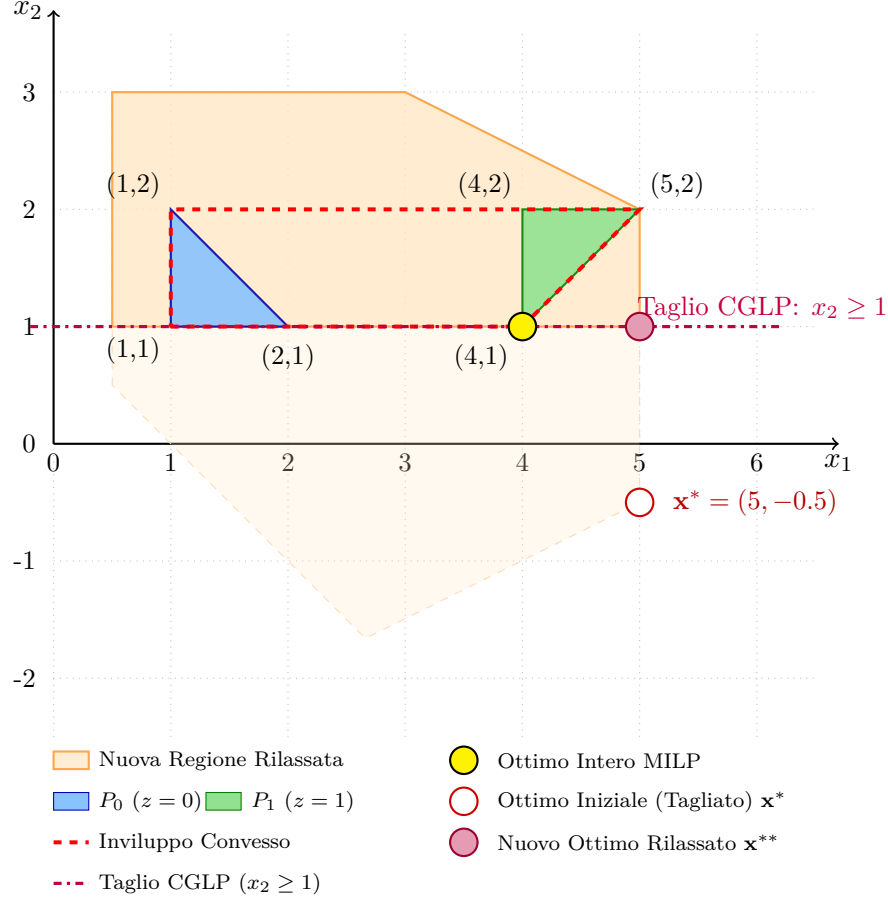


Figura 4.3: Azione del taglio disgiuntivo generato dal CGLP. L'iperpiano  $x_2 \geq 1$  (linea viola) recide la porzione inferiore della regione rilassata (area arancione), separando l'ottimo frazionario iniziale  $\mathbf{x}^*$  e forzando il solutore a convergere verso il nuovo ottimo  $\mathbf{x}^{**}$ .

#### 4.4 Rafforzamento della formulazione mediante tagli disgiuntivi con CGLP

Oltre alla definizione del modello base, risulta fondamentale indagarne e migliorarne le prestazioni computazionali mediante l'applicazione dei piani di taglio discussi nel presente capitolo. A tal fine, in questa sezione si proporranno e confronteranno due approcci risolutivi distinti. Il primo si basa sul rilassamento continuo della formulazione MILP originaria: in questo contesto, l'algoritmo di separazione interviene per recidere le soluzioni inammissibili in cui le variabili binarie assumono valori frazionari. Il secondo approccio, che rappresenta il contributo metodologico centrale di questo capitolo, si fonda invece su un modello "semplificato" puramente continuo. Eliminando alla radice le variabili binarie

e le costanti Big-M per ovviare ai problemi di instabilità numerica, la validità delle regole di mercato viene preservata imponendo direttamente una quadrupla disgiunzione geometrica, la quale guida la generazione dei tagli disgiuntivi.

#### 4.4.1 Prima Formulazione: Separazione sul rilassamento continuo del MILP

In primo luogo si è analizzato il rilassamento lineare per valutare lo scostamento del suo valore obiettivo rispetto all'ottimo intero. Le verifiche empiriche hanno confermato la validità del rilassamento, evidenziando una vicinanza tra i due valori. Si osserva che, in media, circa un quarto delle variabili binarie complessive (il cui numero esatto dipende dagli scenari generati) assume valori frazionari, venendo di fatto trattate dal solutore come variabili continue. Al fine di rafforzare ulteriormente il rilassamento continuo e restringere la regione ammissibile, sono stati aggiunti i tagli disgiuntivi descritti nella sezione precedente.

Dopo aver rilassato le variabili binarie nell'intervallo continuo  $[0, 1]$  ed esplicitato i loro limiti come vincoli lineari all'interno della matrice sparsa  $A$  (rendendoli così visibili all'algoritmo CGLP), si procede alla risoluzione del modello per ricavare l'ottimo frazionario  $x^*$ . A questo punto, vengono estratti i parametri fondamentali (la matrice  $A$ , il vettore dei termini noti  $b$  e l'array dei versi) e vengono identificate le componenti frazionarie relative alle variabili originariamente vincolate all'interezza. Tali variabili vengono ordinate in base al loro grado di frazionarietà, dove i valori prossimi a 0.5 presentano il massimo scostamento dall'interezza. Tutte le componenti la cui parte frazionaria supera una prefissata tolleranza numerica vengono quindi selezionate come candidate per la generazione dei tagli disgiuntivi. Per ogni candidato, il vettore  $\pi$  viene configurato per isolare la singola variabile. I coefficienti  $\alpha$  e  $\alpha_0$  del taglio  $\alpha x \geq \alpha_0$  vengono calcolati attraverso una specifica funzione che formula il problema CGLP avvalendosi della normalizzazione SNC.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \alpha x^* - \alpha_0 \\
 \text{s.t.} \quad & \alpha = uA - u_0\pi, \\
 & \alpha = vA + v_0\pi, \\
 & \alpha_0 = ub - u_0\pi_0, \\
 & \alpha_0 = vb + v_0(\pi_0 + 1), \\
 & \sum_{i=1}^m u_i + \sum_{i=1}^m v_i + u_0 + v_0 = 1, \\
 & u, v, u_0, v_0 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Dove, in questo caso, essendo la disgiunzione applicata a una specifica variabile candidata  $x_j$ , si ha  $x_j \leq 0 \vee x_j \geq 1$ . Di conseguenza, il vettore  $\pi$  corrisponde al  $j$ -esimo vettore della base canonica ( $e_j$ ), mentre lo scalare  $\pi_0$  è pari a 0. L'inserimento dei tagli è strutturato all'interno di un algoritmo iterativo. Ad ogni ciclo, il CGLP separa le disuguaglianze violate dalla soluzione frazionaria corrente; i nuovi iperpiani vengono quindi aggiunti al modello principale rilassato, che viene nuovamente ottimizzato. Il ciclo iterativo è programmato per

arrestarsi alla convergenza all'ottimo intero, ovvero quando tutte le variabili decisionali soddisfano il vincolo di interezza a meno di una tolleranza numerica (impostata a  $10^{-3}$ ).

#### 4.4.2 Seconda Formulazione: Modello semplificato

In una seconda fase dello studio, si è proposto un approccio alternativo. Invece di applicare i tagli sulle variabili binarie, che sono già delle variabili ausiliarie che rappresentano una disgiunzione, sono state applicati direttamente sul modello “svuotato” di tutti i vincoli logici e delle formulazioni con variabili binarie, d'ora in avanti denominato “modello semplificato”. L'intento infatti è quello di provare a rappresentare i vincoli logici, necessari alla correttezza del modello, tramite tagli disgiuntivi.

In questo nuovo modello inoltre sono stati aggiunti i “vincoli di monotonicità”. Per ogni nodo dell'albero degli scenari, questi vincoli impongono un ordinamento sulle quantità scambiate ( $\gamma$ ) in funzione del prezzo di mercato ( $\pi$ ) che si realizza nei nodi figli. Nello specifico, a parità di condizioni del nodo genitore, se un nodo figlio  $i$  presenta un prezzo spot superiore a un nodo figlio  $j$  ( $\pi_i > \pi_j$ ), il modello impone che la quantità di energia scambiata nel nodo  $i$  debba essere maggiore o uguale a quella del nodo  $j$  ( $\gamma_i \geq \gamma_j$ ). Questi vincoli restringono preventivamente il poliedro rilassato eliminando a priori un vasto insieme di soluzioni inammissibili, facilitando e accelerando il successivo lavoro di separazione e convergenza dell'algoritmo CGLP.

Per applicare la teoria dei tagli disgiuntivi al problema privo di vincoli logici, si deve per prima cosa identificare quali siano le reali partizioni dello spazio delle soluzioni. Nel caso di ottimizzazione sui mercati energetici in esame, la logica delle contrattazioni genera esattamente quattro possibili situazioni valide. Conseguentemente, per formulare correttamente il CGLP, si deve imporre una quadrupla disgiunzione, definendo l'insieme delle soluzioni ammissibili come l'unione di quattro poliedri distinti ( $P_0, P_1, P_2, P_3$ ). La formulazione matriciale di tale disgiunzione è strutturata come segue:

|         | $P_0$                |         | $P_1$                   |                 | $P_2$                |                 | $P_3$                     |
|---------|----------------------|---------|-------------------------|-----------------|----------------------|-----------------|---------------------------|
| $(u)$   | $Ax \geq b$          | $(v)$   | $Ax \geq b$             | $(\tilde{u})$   | $Ax \geq b$          | $(\tilde{v})$   | $Ax \geq b$               |
| $(u_0)$ | $q \geq 0$           | $(v_0)$ | $q \geq 0$              | $(\tilde{u}_0)$ | $-q \geq 0$          | $(\tilde{v}_0)$ | $-q \geq 0$               |
| $(u_1)$ | $-p \geq -\pi$       | $(v_1)$ | $p \geq \pi + \epsilon$ | $(\tilde{u}_1)$ | $p \geq \pi$         | $(\tilde{v}_1)$ | $-p \geq -\pi + \epsilon$ |
| $(u_2)$ | $-\gamma + q \geq 0$ | $(v_2)$ | $-\gamma \geq 0$        | $(\tilde{u}_2)$ | $-\gamma + q \geq 0$ | $(\tilde{v}_2)$ | $-\gamma \geq 0$          |
| $(u_3)$ | $\gamma - q \geq 0$  | $(v_3)$ | $\gamma \geq 0$         | $(\tilde{u}_3)$ | $\gamma - q \geq 0$  | $(\tilde{v}_3)$ | $\gamma \geq 0$           |

I poliedri  $P_0$  e  $P_2$  descrivono i casi in cui l'offerta proposta nell'MI viene accettata e integralmente scambiata ( $\gamma = q$ ). Nello specifico, essi si riferiscono rispettivamente allo scenario in cui l'agente vende a un prezzo competitivo, inferiore o uguale a quello spot ( $p \leq \pi$ ), e allo scenario in cui acquista a un prezzo superiore o uguale al prezzo spot ( $p \geq \pi$ ). Al contrario, i poliedri  $P_1$  e  $P_3$  rappresentano le situazioni in cui l'offerta viene respinta, azzerando di conseguenza i volumi scambiati ( $\gamma = 0$ ). Ciò si verifica quando l'operatore tenta di vendere a un prezzo eccessivamente alto ( $p \geq \pi + \epsilon$ ), oppure di acquistare a un limite di prezzo troppo basso ( $p \leq \pi - \epsilon$ ).

Operativamente, per identificare le soluzioni inammissibili nel modello continuo, l'algoritmo di separazione valuta la coerenza tra  $p^*$ ,  $q^*$  e  $\gamma^*$  nella soluzione corrente. Ad esempio, in fase di vendita ( $q^* > 0$ ), se il solutore individua un prezzo d'offerta competitivo ( $p^* \leq \pi$ ) ma l'energia scambiata risulta inferiore all'offerta ( $\gamma^* < q^*$ ), si palesa una violazione del poliedro  $P_0$ . Analogamente, se viene proposto un prezzo fuori mercato ( $p^* > \pi$ ) ma il solutore accetta l'energia ( $\gamma^* > 0$ ), vi è una violazione del poliedro  $P_1$ . Al verificarsi di tali incongruenze logiche, questo insieme di variabili ( $q^*, p^*, \gamma^*$ ), indicizzate sullo stesso scenario, viene fornito come input al CGLP per la generazione del taglio. Il programma ottimizzerà e restituirà i coefficienti  $\alpha$  e  $\alpha_0$  necessari per costruire il nuovo taglio disgiuntivo  $\alpha x \geq \alpha_0$  da aggiungere iterativamente al modello rilassato.

Il CGLP adattato per la disgiunzione a quattro rami, indicando con  $\alpha$  il vettore dei coefficienti del taglio, è formulato come segue:

$$\begin{aligned}
(\text{CGLP}) \quad & \min \quad \alpha x^* - \alpha_0 \\
& \text{s.t.} \quad \alpha = uA + u_0 \mathbf{e}_q - u_1 \mathbf{e}_p + u_2(-\mathbf{e}_\gamma + \mathbf{e}_q) + u_3(\mathbf{e}_\gamma - \mathbf{e}_q), \\
& \quad \alpha = vA + v_0 \mathbf{e}_q + v_1 \mathbf{e}_p - v_2 \mathbf{e}_\gamma + v_3 \mathbf{e}_\gamma, \\
& \quad \alpha = \tilde{u}A - \tilde{u}_0 \mathbf{e}_q + \tilde{u}_1 \mathbf{e}_p + \tilde{u}_2(-\mathbf{e}_\gamma + \mathbf{e}_q) + \tilde{u}_3(\mathbf{e}_\gamma - \mathbf{e}_q), \\
& \quad \alpha = \tilde{v}A - \tilde{v}_0 \mathbf{e}_q - \tilde{v}_1 \mathbf{e}_p - \tilde{v}_2 \mathbf{e}_\gamma + \tilde{v}_3 \mathbf{e}_\gamma, \\
& \quad \alpha_0 = ub - u_1 \pi, \\
& \quad \alpha_0 = vb + v_1(\pi + \epsilon), \\
& \quad \alpha_0 = \tilde{u}b + \tilde{u}_1 \pi, \\
& \quad \alpha_0 = \tilde{v}b + \tilde{v}_1(-\pi + \epsilon), \\
& \quad \sum_i u_i + \sum_i v_i + \sum_i \tilde{u}_i + \sum_i \tilde{v}_i + u_0 + v_0 + \tilde{u}_0 + \tilde{v}_0 = 1, \\
& \quad u, v, \tilde{u}, \tilde{v} \geq 0, \\
& \quad u_0, v_0, \tilde{u}_0, \tilde{v}_0 \geq 0.
\end{aligned}$$

Dove il vettore  $\mathbf{e}_q$  è un vettore di lunghezza pari al numero totale di variabili, fatto di tutti zeri, tranne un singolo 1 posizionato esattamente in corrispondenza della colonna in cui si trova la variabile  $q$ , rispetto allo scenario a cui ci stiamo riferendo. Lo stesso vale per i vettori  $\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_\gamma$ .

Una volta risolto il modello CGLP, i valori ottimi estratti per il vettore  $\alpha$  e lo scalare  $\alpha_0$  definiscono l'equazione dell'iperpiano di taglio disgiuntivo  $\alpha x \geq \alpha_0$ .

Operativamente, ad ogni iterazione l'algoritmo non si limita a generare una singola disuguaglianza. La procedura esamina infatti l'intero albero stocastico, valutando simultaneamente tutte le triple di variabili  $(q, p, \gamma)$  indicizzate per il medesimo scenario. Ciascuna tripla che esibisce un'incongruenza logica diviene una candidata indipendente per la separazione. In questo modo, fornendo queste coordinate in input al CGLP, viene generato un intero set di nuovi tagli disgiuntivi, che vengono aggiunti simultaneamente nel modello continuo semplificato. Il problema principale viene quindi riottimizzato e, qualora il nuovo punto di ottimo presenti ulteriori violazioni, il ciclo iterativo si ripete.

#### 4.4.3 Integrazione di vincoli aggiuntivi

##### Vincoli di monotonicità

Di seguito si approfondisce un concetto accennato in precedenza. In quest'ultima formulazione è stato introdotto un ulteriore insieme di disuguaglianze, denominate “vincoli di monotonicità”.

A livello formale, considerando una generica asta infragiornaliera  $MI_r$  (con  $r \in \{1, 2, 3\}$ ), le decisioni prese nei livelli precedenti identificano un nodo genitore caratterizzato dalla storia degli scenari  $(\omega_1, \dots, \omega_{r-1})$ . Fissata una coppia quantità-prezzo in offerta  $(q_{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}}^{MI_r}, p_{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}}^{MI_r})$  per tale nodo, indicando con  $i$  e  $j$  due qualsiasi nodi figli discendenti dal medesimo genitore, si impone la seguente implicazione logica:

$$\pi_{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, i}^{MI_r} \geq \pi_{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, j}^{MI_r} \implies \gamma_{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, i}^{MI_r} \geq \gamma_{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, j}^{MI_r}$$

per ogni  $i, j \in \{1, \dots, N_{\text{rami}}\}$ . Per dimostrare la validità di questa condizione, è possibile condurre una breve analisi verificando il comportamento della variabile  $\gamma$  in tutte le possibili configurazioni di mercato. Fissata una quantità  $q$  e un prezzo di offerta  $p$ , e supponendo senza perdita di generalità che si realizzino due scenari di prezzo tali per cui  $\pi_i \geq \pi_j$ , si presentano due casistiche principali: offerta di vendita e offerta di acquisto.

**Caso 1: Offerta di vendita ( $q > 0$ )** In fase di vendita, le regole di mercato stabiliscono che un'offerta viene accettata (generando  $\gamma = q$ ) se e solo se il prezzo spot risulta maggiore o uguale al prezzo di offerta ( $\pi \geq p$ ). Altrimenti, l'offerta viene rifiutata ( $\gamma = 0$ ). Analizziamo il posizionamento del prezzo  $p$  rispetto ai due scenari:

- Sottocaso 1.1: ( $\pi_i \geq \pi_j \geq p$ ): Il prezzo di mercato in entrambi gli scenari è sufficientemente alto. L'offerta viene accettata in entrambi i casi, da cui  $\gamma_i = q$  e  $\gamma_j = q$ . La disuguaglianza  $\gamma_i \geq \gamma_j$  diventa  $q \geq q$ , che risulta immediatamente verificata.
- Sottocaso 1.2: ( $\pi_i \geq p > \pi_j$ ): Il prezzo di offerta si colloca tra i due prezzi spot. L'offerta risulta accettabile nello scenario  $i$ , ma troppo costosa per lo scenario  $j$ . Si avrà dunque  $\gamma_i = q$  e  $\gamma_j = 0$ . Essendo un'offerta di vendita ( $q > 0$ ), la disuguaglianza si traduce in  $q \geq 0$ , anch'essa logicamente verificata.
- Sottocaso 1.3: ( $p > \pi_i \geq \pi_j$ ): Il prezzo richiesto è fuori mercato per entrambi gli scenari. L'offerta viene rifiutata ovunque, determinando  $\gamma_i = 0$  e  $\gamma_j = 0$ . La disuguaglianza  $0 \geq 0$  è verificata.

**Caso 2: Offerta di acquisto ( $q < 0$ )** In fase di acquisto, la logica si inverte: l'operatore è disposto a comprare solo se il prezzo di mercato risulta inferiore o uguale al limite imposto ( $\pi \leq p$ ).

- Sottocaso 2.1: ( $p \geq \pi_i \geq \pi_j$ ): Il prezzo spot è conveniente in entrambi gli scenari. L'offerta di acquisto viene accettata, portando a  $\gamma_i = q$  e  $\gamma_j = q$ . La relazione  $q \geq q$  rimane verificata.
- Sottocaso 2.2: ( $\pi_i > p \geq \pi_j$ ): Il prezzo nello scenario  $i$  è troppo alto, per cui l'offerta viene scartata ( $\gamma_i = 0$ ). Nello scenario  $j$ , invece, il prezzo è favorevole e l'offerta viene accettata ( $\gamma_j = q$ ). La disuguaglianza  $\gamma_i \geq \gamma_j$  si traduce in  $0 \geq q$ . Poiché per definizione nel caso in acquisto si ha  $q < 0$ , la disuguaglianza è verificata.
- Sottocaso 2.3: ( $\pi_i \geq \pi_j > p$ ): Il mercato è troppo caro in entrambi i rami, comportando il rifiuto dell'offerta ( $\gamma_i = 0$  e  $\gamma_j = 0$ ). Anche in questo caso, la relazione  $0 \geq 0$  è verificata.

Questa condizione, dunque, traduce matematicamente la natura intrinseca delle regole di mercato e assume anche un ruolo strutturale fondamentale per l'efficienza dell'approccio risolutivo considerato.

Nella formulazione MILP originale, basata sulle costanti Big-M, il comportamento monotonic dell'offerta era implicitamente garantito dalla logica delle variabili binarie di attivazione. Tuttavia, passando a un modello continuo privato di questi vincoli, l'algoritmo perderebbe questa consapevolezza logica, rischiando di esplorare soluzioni rilassate matematicamente vantaggiose ma economicamente inammissibili.

### Aggiunta di vincoli dedotti dall'analisi delle iterazioni di taglio

Prima di procedere con i test per valutare le prestazioni finali, è stata condotta un'analisi preliminare sul modello semplificato base (privo di vincoli logici e variabili binarie). Inizialmente, i risultati hanno mostrato una criticità evidente: arrestando l'algoritmo CGLP alla cosiddetta "prima chiusura" (ovvero eseguendo un singolo passaggio di separazione e riottimizzazione, senza iterare ulteriormente la ricerca di violazioni), il gap di chiusura rimaneva bloccato allo 0%, ovvero i tagli della prima chiusura risultavano apparentemente inutili dato che il valore ottimo rimaneva fisso.

Tale comportamento non indica un'inefficacia dei tagli generati, ma evidenzia la complessa interazione tra le variabili del modello.

Nella funzione obiettivo il profitto dipende solo dall'energia che viene effettivamente scambiata ( $\gamma$ ). Il prezzo di offerta ( $p$ ), invece, non compare nella funzione obiettivo o nei vincoli del modello semplificato iniziale, risultando limitato unicamente dai bound naturali del mercato (es.  $0 \leq p \leq p_{max}$ ). Questo significa che il solutore è libero di modificare il valore di  $p$  senza che il profitto totale subisca alcuna variazione. Quando si aggiungono i tagli della prima chiusura, si stanno inserendo dei vincoli che legano il prezzo  $p$  alla quantità  $\gamma$ , come è possibile osservare analizzando i risultati. Tuttavia, un singolo taglio funziona come una barriera posizionata solo da un lato. Poiché la variabile  $p$  ha molto spazio per muoversi prima di raggiungere il suo limite massimo, il solutore riesce a rispettare il nuovo taglio semplicemente "spostando"  $p$  verso l'alto o verso il basso. In questo modo, l'impatto del taglio viene completamente

assorbito dal prezzo, mentre la quantità scambiata  $\gamma$  rimane invariata. Di conseguenza, un solo gruppo di tagli non riesce a bloccare del tutto le variabili  $p$ . Per arrivare alla soluzione ottimale reale, è indispensabile iterare la procedura CGLP. Generando tagli successivi, si creano vincoli incrociati che restringono l'intervallo ammissibile della variabile  $p$ , bloccandola sia dall'alto che dal basso. Solo quando l'intervallo di valori ammissibili di  $p$  risulta sufficientemente ristretto, il solutore è costretto a ridurre le quantità scambiate  $\gamma$ , determinando una riduzione del profitto e chiudendo il gap.

Un'osservazione attenta dei log di debug relativi alla prima e alla seconda chiusura algoritmica ha permesso tuttavia di individuare una regolarità strutturale ricorrente nei tagli generati dal CGLP. Per ogni ora simulata, si osservava la generazione iterativa di disequazioni con coefficienti proporzionali. Ad esempio, analizzando la transizione tra il primo e il secondo giro di tagli, i log mostravano andamenti del tipo:

- Passo 1 (Prima chiusura):

$$+0.1000 * q\_MI\_3[1, 0] - 0.2000 * \gamma\_MI\_3[1, 0, 0] \geq -0.0356$$

- Passo 2 (Seconda chiusura):

$$-0.1000 * q\_MI\_3[1, 0] + 0.2000 * \gamma\_MI\_3[1, 0, 0] \geq -0.0356$$

Da questa evidenza empirica è stato possibile dedurre analiticamente due nuove famiglie di vincoli, formulabili come segue:

$$q \geq 2\gamma - ub_q$$

$$q \leq 2\gamma + ub_q$$

dove il termine  $ub_q$  rappresenta il limite superiore imposto ai volumi scambiabili sui mercati infragiornalieri, definito come:

$$ub_q = 0.1 \cdot q^{\text{MGP}}$$

È fondamentale sottolineare che tale parametro risulta strutturalmente positivo ( $ub_q > 0$ ). Nel presente modello si assume infatti che l'agente operi primariamente come produttore di energia; di conseguenza, il volume base posizionato sull'MGP ( $q^{\text{MGP}}$ ) è definito come un valore strettamente positivo, riflettendo una posizione di vendita iniziale.

Per conferire totale rigore matematico all'introduzione di tali relazioni, è fondamentale verificare la loro validità. Nel contesto operativo in esame, le regole di mercato impongono che l'energia scambiata  $\gamma$  possa assumere unicamente due stati logici: o l'offerta viene respinta, risultando in  $\gamma = 0$ , oppure viene integralmente accettata, ponendo  $\gamma = q$ . Sostituendo il caso del rifiuto ( $\gamma = 0$ ) all'interno delle due nuove famiglie di vincoli, si ottengono le relazioni  $q \geq -ub_q$  e  $q \leq ub_q$ . Queste coincidono esattamente con i limiti strutturali della variabile di offerta, risultando pertanto sempre verificate. Procedendo in modo analogo per lo scenario di accettazione, la sostituzione di  $\gamma = q$  nelle disequazioni porta

alle espressioni  $q \geq 2q - ub_q$  e  $q \leq 2q + ub_q$ , le quali, una volta semplificate algebricamente, si riducono nuovamente alle condizioni  $q \leq ub_q$  e  $q \geq -ub_q$ . Poiché tali disuguaglianze risultano matematicamente sempre soddisfatte in tutte le situazioni possibili, è possibile aggiungerle al modello semplificato.

Inserite a priori nel modello semplificato, esse restringono drasticamente il volume del poliedro iniziale eliminando regioni di soluzioni inammissibili.

Nel modello semplificato, infatti, la rimozione delle variabili binarie aveva reso le variabili continue  $q$  e  $\gamma$  completamente indipendenti l'una dall'altra, limitate unicamente dai propri estremi superiori e inferiori (ovvero  $-ub_q \leq q \leq ub_q$  e  $-ub_q \leq \gamma \leq ub_q$ ). Geometricamente, questi semplici bound definiscono un'ampia regione di soluzioni ammissibili.

All'interno di questo spazio, il solutore matematico poteva generare profitti fittizi. Ad esempio, in scenari con prezzi spot molto favorevoli, l'algoritmo tendeva a minimizzare il rischio offrendo volumi nulli ( $q = 0$ ), ma facendosi simultaneamente "accettare" la quantità massima consentita ( $\gamma = ub_q$ ). Poiché il punto ( $q = 0, \gamma = ub_q$ ) rispetta i semplici bound iniziali, il solutore incassava un profitto massimo senza assumersi alcun rischio fisico di sbilanciamento. I vincoli di monotonicità introdotti precedentemente non erano sufficienti ad arginare il problema, in quanto imponevano un ordinamento sulle quantità accettate al variare del prezzo, ma non legavano mai direttamente la variabile  $\gamma$  alla quantità offerta ( $q$ ).

I nuovi vincoli  $q \geq 2\gamma - ub_q$  e  $q \leq 2\gamma + ub_q$  intervengono proprio per sanare questa criticità, instaurando una relazione tra l'energia offerta e quella accettata. Sostituendo il caso fittizio precedente ( $q = 0, \gamma = ub_q$ ) nella prima disuguaglianza, si otterrebbe  $0 \geq 2(ub_q) - ub_q$ , da cui  $0 \geq ub_q$ , ovvero una condizione falsa. L'inclusione di queste disuguaglianze rafforza dunque il modello, impedendo a monte l'esplorazione di soluzioni non ammissibili. I risultati computazionali confermeranno infine che l'imposizione di tali disuguaglianze permette di ovviare al limite iniziale, ovvero la chiusura del gap dello 0% al primo set di tagli aggiunto (di rango 1). Questi ultimi infatti consentiranno al modello ad avvicinarsi al valore ottimo.

Il modello semplificato, con l'aggiunta di questa nuova famiglia di vincoli e delle disuguaglianze di monotonicità, su cui verranno applicati i tagli, risulta dunque:

$$\begin{aligned} \max \quad & (1 - \eta) (I^{\text{MGP}} + I^{\text{MI}} + I^{\text{BM}}) \\ & + \eta \left( -\text{VaR} - \frac{1}{1 - \beta} \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \cdot \xi_{\omega} \right) \\ \text{s.t.} \quad & I^{\text{MGP}} = q^{\text{MGP}} \cdot \pi^{\text{MGP}}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$I^{\text{MI}} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \left( \sum_{r=1}^3 \gamma_{\omega_1, \dots, \omega_r}^{\text{MI}_r} \cdot \pi_{\omega_1, \dots, \omega_r}^{\text{MI}_r} \right), \quad (4.11)$$

$$I^{\text{BM}} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) (q_{\omega}^{\text{BM}} \cdot \pi_{\omega}^{\text{BM}}), \quad (4.12)$$

$$\text{Profit}_{\omega} = q^{\text{MGP}} \cdot \pi^{\text{MGP}} + \sum_{r=1}^3 \gamma_{\omega_1, \dots, \omega_r}^{\text{MI}_r} \cdot \pi_{\omega_1, \dots, \omega_r}^{\text{MI}_r}$$

$$+ q_{\omega}^{\text{BM}} \cdot \pi_{\omega}^{\text{BM}}, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.13)$$

$$\xi_{\omega} \geq -\text{VaR} - \text{Profit}_{\omega}, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.14)$$

$$\xi_{\omega} \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.15)$$

$$q_{\omega}^{\text{BM}} = Q_{\omega}^{\text{ACT}} - \left( q^{\text{MGP}} + \sum_{r=1}^3 \gamma_{\omega_1, \dots, \omega_r}^{\text{MI}_r} \right), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.16)$$

$$-0.1 \cdot q^{\text{MGP}} \leq q_{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}}^{\text{MI}_r} \leq 0.1 \cdot q^{\text{MGP}}, \quad \forall r \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.17)$$

$$\gamma_{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, i}^{\text{MI}_r} \geq \gamma_{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, j}^{\text{MI}_r}, \quad \forall r, \forall i, j : \pi_{\dots, i}^{\text{MI}_r} \geq \pi_{\dots, j}^{\text{MI}_r}, \quad (4.18)$$

$$q_{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}}^{\text{MI}_r} \geq 2\gamma_{\omega_1, \dots, \omega_r}^{\text{MI}_r} - 0.1 \cdot q^{\text{MGP}}, \quad \forall r \in \{1, 2, 3\}, \forall \omega \in \Omega, \quad (4.19)$$

$$q_{\omega_1, \dots, \omega_{r-1}}^{\text{MI}_r} \leq 2\gamma_{\omega_1, \dots, \omega_r}^{\text{MI}_r} + 0.1 \cdot q^{\text{MGP}}, \quad \forall r \in \{1, 2, 3\}, \forall \omega \in \Omega. \quad (4.20)$$

Nella prossima sezione si effettuerà un confronto numerico tra i due modelli, quello con le variabili binarie rilassato e quello semplificato, senza vincoli logici. Sarà testata l'efficacia dei tagli, analizzando se, con l'aggiunta di questi ultimi, le nuove formulazioni riescono a raggiungere l'ottimo intero.

## Capitolo 5

# Test Numerici e Risultati Computazionali

In questa sezione si presentano i risultati delle simulazioni computazionali condotte con il duplice obiettivo di ottimizzare le prestazioni algoritmiche del modello e di identificare la strategia di offerta che massimizzi il profitto atteso sui mercati sequenziali.

Per la costruzione dell'albero degli scenari, l'incertezza è stata discretizzata impiegando le serie storiche orarie dei prezzi zonali relative al periodo compreso tra gennaio e agosto 2025. Nello specifico, i prezzi dell'MGP e delle sessioni dell'MI sono stati acquisiti dal database pubblico del GME [6]. I prezzi dell'MB sono stati invece estratti dalla piattaforma *ENTSO-E Transparency Platform* [3]. Poiché i dati originali dei mercati presentavano una granularità quarto-oraria, i valori sono stati aggregati calcolandone la media per ricondurli alla risoluzione oraria.

Per definire la posizione iniziale sull'MGP, il parametro deterministico  $q^{\text{MGP}}$  è stato fissato pari al valore medio orario di produzione di un impianto virtuale ibrido, dimensionato con 20 MW di capacità eolica e 20 MW di capacità solare. I profili orari di generazione di tale impianto sono stati ricostruiti avvalendosi del simulatore *Renewables.ninja* [9, 16], il quale stima l'output energetico elaborando i dati meteorologici storici registrati nel centro Italia durante il medesimo orizzonte temporale.

### 5.1 Analisi parametrica del modello

#### 5.1.1 Test al variare del numero di scenari

In fase preliminare, si è condotta un'analisi volta a valutare le prestazioni e i tempi di esecuzione del modello al variare del numero di rami dell'albero degli scenari. Considerando che, per le ore pomeridiane, il numero totale di foglie dell'albero cresce con legge esponenziale pari a  $N_{\text{rami}}^4$  (dove  $N_{\text{rami}}$  rappresenta il numero di diramazioni per ciascun nodo intermedio), si è resa necessaria un'espansione dell'insieme dei dati storici.

Al fine di garantire la robustezza dell'algoritmo (evitando che i rami venissero generati a partire da cluster contenenti un numero insufficiente di osservazioni storiche), le serie temporali del 2025 sono state integrate con i dati integrali dell'anno 2024 (relativi a MGP, MI e MB, estratti dalle medesime fonti dei dati del 2025). Tale operazione ha permesso di estendere il “numero di campioni” a oltre 600 giornate operative, garantendo un'elevata affidabilità nella generazione degli scenari di prezzo.

I test sono stati eseguiti isolando una singola istanza, fissata al 1° settembre 2025, ore 15:00. In questa fase non ci si è limitati a risolvere il modello nel momento decisionale iniziale, bensì si è simulata l'intera catena decisionale sequenziale. Si è riprodotto l'effettivo scorrere del tempo e la progressiva rivelazione dei prezzi spot sui mercati infragiornalieri, aggiornando le variabili e risolvendo iterativamente il modello matematico per le sessioni MI-A1, MI-A2 e MI-A3. I test inoltre sono stati eseguiti con parametri  $\eta = 0.5$  e  $\beta = 0.95$ .

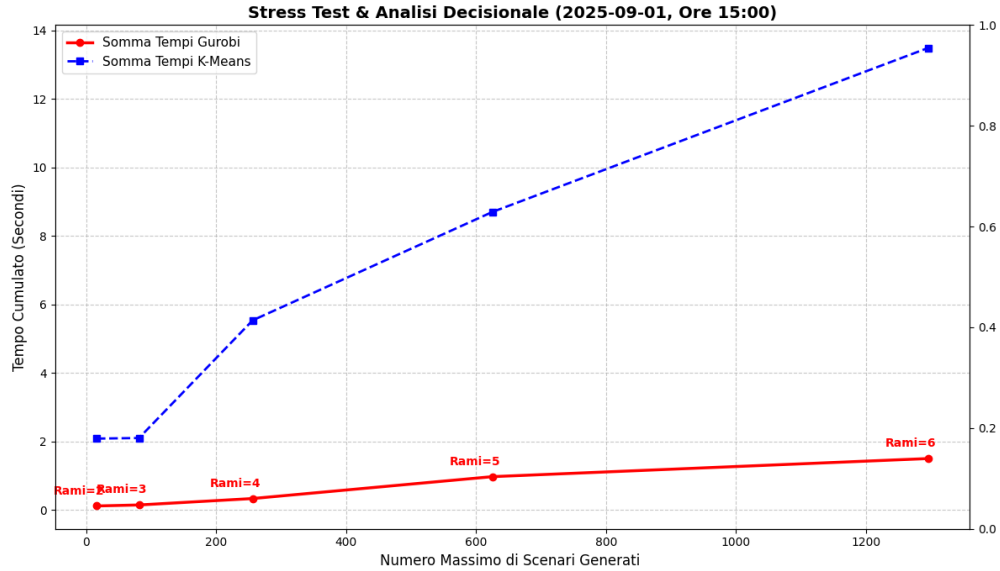


Figura 5.1: Analisi dei tempi al variare del numero di scenari (Istanza: 1 settembre 2025, ore 15:00).

I risultati sono riportati in Figura 5.1. Il grafico illustra l'andamento cumulativo dei tempi di esecuzione al crescere del numero di rami per nodo dell'albero degli scenari.

Come atteso, il tempo di risoluzione del modello di ottimizzazione intero mostra una crescita controllata all'aumentare degli scenari generati, arrivando a un massimo di circa 2 secondi nella configurazione più complessa a 6 rami. Al contrario, il tempo computazionale associato alla generazione stocastica dell'albero subisce un incremento di natura esponenziale, arrivando a superare i 13 secondi per la medesima istanza a 6 diramazioni.

Considerando che tale procedura deve essere ripetuta iterativamente per ciascuna delle 24 ore operative, scegliere un modello con un alto numero di scenari comporterebbe un tempo di esecuzione complessivo eccessivamente di-

latato e difficilmente compatibile con un'analisi su larga scala. Di conseguenza, per la conduzione dei test numerici sui tagli, si è ritenuto ottimale operare con un parametro di diramazione più contenuto, fissando il numero di rami a 3. Questa scelta garantisce il miglior compromesso tecnico tra l'esplorazione dell'incertezza e la trattabilità computazionale del sistema.

### 5.1.2 Test al variare dei parametri $\eta$ , $\beta$

Si richiama la funzione obiettivo del modello MILP:

$$\max \quad (1 - \eta) \cdot (I^{\text{MGP}} + \sum_{s \in S} I^{\text{MI}_s} + I^{\text{BM}}) + \eta \cdot (-\text{VaR} - \frac{1}{1 - \beta} \cdot \sum_{\omega \in \Omega} \pi_{\omega} \cdot \xi_{\omega})$$

L'obiettivo di questa fase computazionale è studiare come varia il trade-off tra il rendimento atteso e l'esposizione alle perdite, analizzando come le decisioni ottime si modifichino al variare dei due parametri fondamentali della misura di rischio: il grado di avversione  $\eta$  e il livello di confidenza  $\beta$ .

Il setup sperimentale è stato configurato per simulare le contrattazioni sull'intero mese di settembre 2025, focalizzando l'analisi su tre specifiche fasce orarie (08:00, 14:00 e 20:00). Questa scelta permette di testare la robustezza del modello su regimi di prezzo differenti e con forme dell'albero variabili (inclusione o meno della sessione MI-A3 per le ore pomeridiane e serali).

Per rendere la simulazione quanto più fedele alla realtà operativa, la posizione iniziale sull'MGP ( $q^{\text{MGP}}$ ) non è stata fissata a priori, bensì calcolata dinamicamente per ciascuna giornata di test. Il parametro  $q^{\text{MGP}}$  è stato posto pari alla media oraria della produzione reale registrata nei 7 giorni antecedenti alla data in esame.

Per l'analisi di sensitività, si è definita una griglia bidimensionale dei valori che si intendono analizzare. Nello specifico, i parametri sono stati configurati come segue:

- **Grado di avversione al rischio ( $\eta$ ):** Fatto variare all'interno dell'insieme  $\{0.0, 0.1, 0.4, 0.8, 0.99\}$ , permettendo di esplorare un intero spettro di profili strategici, dal decisore neutrale al rischio ( $\eta = 0.0$ , in cui la funzione obiettivo massimizza il solo profitto atteso) fino al decisore estremamente conservativo ( $\eta = 0.99$ ).
- **Livello di confidenza ( $\beta$ ):** Testato sui valori  $\{0.02, 0.3, 0.7, 0.95\}$ , per modificare la porzione della coda della distribuzione dei profitti su cui viene calcolato il valore atteso delle perdite. La scelta del parametro  $\beta$  risulta cruciale nella calibrazione della propensione al rischio: assegnare un valore elevato (ad esempio  $\beta = 0.95$ ) equivale a concentrare l'attenzione unicamente sul peggior 5% degli scenari possibili (poiché l'operatore matematico fa la media sulla frazione  $1 - \beta$ ), delineando il profilo di un operatore di mercato focalizzato esclusivamente sugli eventi estremi e catastrofici. Al contrario, l'adozione di un  $\beta$  piccolo (come  $\beta = 0.02$ ) implica l'estensione del calcolo del valore atteso della perdita a una porzione vastissima della distribuzione, arrivando a includere il 98% dei casi. Considerare una porzione così ampia della distribuzione di scenari significa

attenuare il peso specifico degli eventi avversi, “diluendoli” con esiti ordinari e del tutto normali. Di conseguenza, al decrescere di  $\beta$ , la misura di rischio si “rilassa” e il modello tende a massimizzare solo il valore atteso, disinnescando l’impatto penalizzante della CVaR nella funzione obiettivo, comportandosi come un decisore neutrale al rischio.

La scelta di adottare un campionamento asimmetrico per i due insiemi è motivata dagli esiti di una serie di test preliminari: le simulazioni iniziali hanno infatti evidenziato una maggiore sensibilità e variabilità delle strategie ottime al variare del parametro  $\eta$  rispetto al parametro  $\beta$ . Di conseguenza, si è optato per un campionamento più denso per il grado di avversione al rischio.

Per misurare in modo oggettivo le prestazioni di ciascuna configurazione, i risultati giornalieri sono stati aggregati a livello mensile valutando le seguenti metriche di sintesi:

1. **Profitto cumulato:** Il guadagno totale generato nel mese per le ore specifiche analizzate, che vengono in seguito sommate tra di loro.
2. **Volatilità ( $\sigma$ ):** La deviazione standard campionaria calcolata sull’insieme dei 93 profitti orari registrati nel mese di test (31 giorni  $\times$  3 fasce orarie). Tale metrica valuta la dispersione di ogni singola ora rispetto al profitto orario medio mensile ottenuto da quella specifica configurazione parametrica. In termini pratici, quantifica di quanti euro il guadagno di una singola ora rischia di allontanarsi, in positivo o in negativo, dalla media attesa. Un abbattimento di  $\sigma$  al crescere di  $\eta$  fornisce la prova matematica che la CVaR sta compattando la distribuzione dei profitti attorno al suo valore atteso.
3. **Caso peggiore:** Il profitto minimo giornaliero registrato nel mese di settembre tra gli orari considerati, fondamentale per osservare come elevati livelli di avversione limitino i picchi di perdita associati agli sbilanciamenti sul mercato.

I risultati dell’analisi di sensitività per il mese di settembre 2025 sono riassunti nella Tabella 5.1.

Dall’analisi della tabella emergono alcune dinamiche fondamentali. Come atteso dalla formulazione dell’obiettivo, impostando  $\eta = 0.0$  il modello degenera in un puro problema di massimizzazione del valore atteso. In questo regime, l’impostazione del livello di confidenza  $\beta$  risulta matematicamente ininfluente, restituendo metriche identiche per tutte le configurazioni (profitto massimo di circa 80.773 €, ma con un’esposizione al caso peggiore pari a -334.36 €).

È interessante notare il comportamento del modello per  $\beta = 0.02$ . In questo caso, la CVaR sta valutando il valore atteso del peggior 98% degli scenari. Estendendo l’analisi della coda a quasi l’intera distribuzione, la misura di rischio approssima il valore atteso globale. Di conseguenza, le decisioni ottime tendono a riallinearsi a quelle del decisore neutrale al rischio, indipendentemente dal valore assegnato a  $\eta$ .

Il vero impatto della CVaR emerge nelle configurazioni ad alta avversione. Fissando  $\eta = 0.99$  e  $\beta = 0.95$  (il decisore focalizzato esclusivamente sulla mitigazione del peggior 5% degli scenari), si registra una sensibile compressione

della volatilità globale ( $\sigma$  scende al valore minimo di 515.05) e un miglioramento drastico del caso peggiore, la cui perdita viene mitigata di oltre il 36% (da -334.36 € a -212.43 €). Questa maggiore stabilità e sicurezza impone tuttavia la rinuncia a quote di profitto negli scenari favorevoli, traducendosi in un profitto mensile di 77.882 €, ovvero uno dei più bassi osservati.

Tabella 5.1: Analisi del profilo rischio-rendimento: profitti mensili (Settembre 2025) al variare del grado di avversione ( $\eta$ ) e del livello di confidenza ( $\beta$ ). Si analizzano le ore 8:00, 14:00, e 20:00. Si riportano il Profitto Totale (PT), la Volatilità ( $\sigma$ ), e il Caso Peggior (CP).

| Parametri CVaR |             | Profitti Orari Mensili (€) |          |          | Metriche Mensili Globali (€) |               |                |
|----------------|-------------|----------------------------|----------|----------|------------------------------|---------------|----------------|
| $\eta$         | $\beta$     | 08:00                      | 14:00    | 20:00    | PT                           | $\sigma$      | CP             |
| <b>0.00</b>    | 0.02        | 34710.11                   | 33116.36 | 12946.81 | <b>80773.28</b>              | <b>527.25</b> | <b>-334.36</b> |
| 0.00           | 0.30        | 34710.11                   | 33116.36 | 12946.81 | 80773.28                     | 527.25        | -334.36        |
| 0.00           | 0.70        | 34710.11                   | 33116.36 | 12946.81 | 80773.28                     | 527.25        | -334.36        |
| 0.00           | 0.95        | 34710.11                   | 33116.36 | 12946.81 | 80773.28                     | 527.25        | -334.36        |
| 0.10           | 0.02        | 34710.11                   | 33057.44 | 12946.81 | 80714.36                     | 526.50        | -334.36        |
| 0.10           | 0.30        | 34710.11                   | 33139.32 | 12785.05 | 80634.47                     | 530.49        | -367.49        |
| 0.10           | 0.70        | 34800.42                   | 32930.24 | 12903.06 | 80633.71                     | 533.09        | -334.36        |
| 0.10           | 0.95        | 34710.11                   | 32893.01 | 12837.90 | 80441.02                     | 534.97        | -334.36        |
| 0.40           | 0.02        | 34710.11                   | 33057.44 | 12946.81 | 80714.36                     | 526.50        | -334.36        |
| 0.40           | 0.30        | 34710.11                   | 32609.63 | 12782.87 | 80102.60                     | 535.28        | -367.49        |
| 0.40           | 0.70        | 34800.42                   | 33231.56 | 12341.61 | 80373.59                     | 541.15        | -367.49        |
| 0.40           | 0.95        | 33730.30                   | 32839.22 | 12089.48 | 78659.00                     | 521.49        | -261.92        |
| 0.80           | 0.02        | 34710.11                   | 33338.89 | 12969.67 | 81018.67                     | 532.50        | -334.36        |
| 0.80           | 0.30        | 34674.31                   | 33227.45 | 12614.94 | 80516.71                     | 538.42        | -367.49        |
| 0.80           | 0.70        | 34275.93                   | 33329.47 | 11548.30 | 79153.70                     | 533.65        | -328.18        |
| 0.80           | 0.95        | 33244.73                   | 32749.71 | 11497.69 | 77492.13                     | 518.10        | -261.92        |
| <b>0.99</b>    | <b>0.02</b> | 34710.11                   | 33338.89 | 12969.67 | <b>81018.67</b>              | <b>532.50</b> | <b>-334.36</b> |
| 0.99           | 0.30        | 34674.31                   | 33449.22 | 12532.07 | 80655.60                     | 541.58        | -367.49        |
| 0.99           | 0.70        | 34275.93                   | 33325.74 | 11565.01 | 79166.68                     | 533.83        | -328.18        |
| <b>0.99</b>    | <b>0.95</b> | 33244.73                   | 33069.29 | 11568.52 | <b>77882.54</b>              | <b>515.05</b> | <b>-212.43</b> |

La Figura 5.2 fornisce una rappresentazione visiva del trade-off globale tra rischio (misurato sull'asse delle ascisse come deviazione standard) e rendimento (misurato sull'asse delle ordinate come profitto cumulato). La disposizione dei punti evidenzia una frontiera lungo la quale si distribuiscono le diverse configurazioni: dal vertice in alto a destra, caratterizzato dai massimi profitti ma da un'estrema volatilità, al vertice in basso a sinistra, che garantisce massima stabilità a fronte di ritorni economici inferiori. Il gradiente di colore mappa il grado di avversione al rischio  $\eta$ .

Si osserva chiaramente come i modelli prossimi alla neutralità ( $\eta \approx 0.0$ , tonalità scure) si concentrino nella regione ad alto rendimento e alto rischio. Aumentando i livelli di avversione ( $\eta = 0.8$  o  $0.99$ , tonalità più chiare), la nuvola di punti si sposta progressivamente verso sinistra, confermando che l'algoritmo rinuncia a quote di profitto pur di comprimere la deviazione standard. In questa dinamica, il parametro di confidenza  $\beta$  gioca un ruolo determinante, giustificando la presenza di alcuni punti ad altissima avversione (tonalità chia-

re) posizionati in modo anomalo in alto a destra. L'impostazione di un  $\beta$  molto basso (ad esempio  $\beta = 0.02$ ) estende il calcolo della CVaR al 98% della distribuzione. Includendo nel calcolo del rischio una porzione così vasta di scenari, comprendente anche esiti ordinari e favorevoli, la metrica smette di penalizzare esclusivamente gli eventi estremi. Di conseguenza, l'effetto frenante di  $\eta$  viene neutralizzato e l'ottimizzatore torna a comportarsi come un decisore neutrale al rischio, massimizzando il profitto atteso globale.

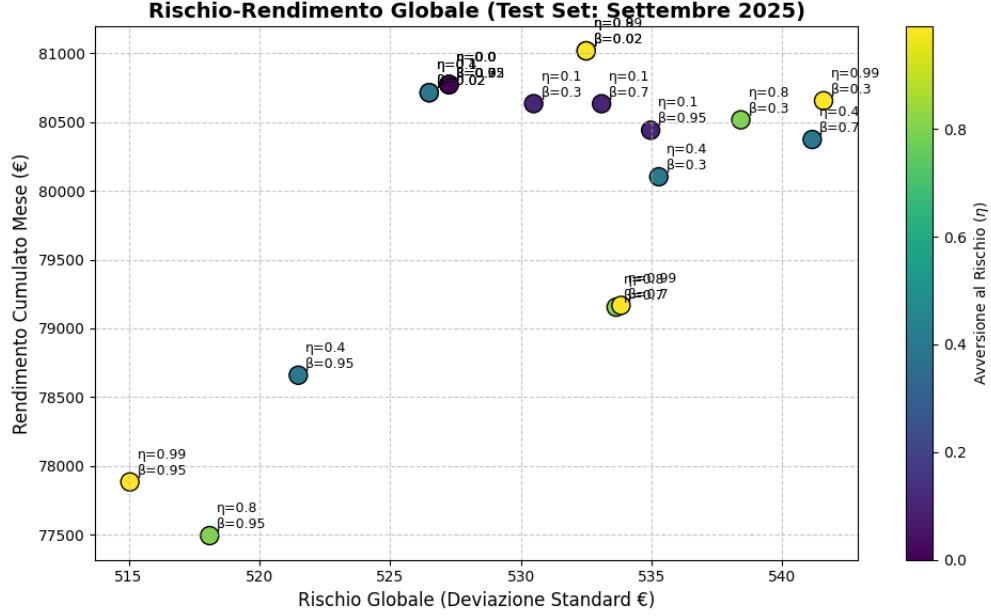


Figura 5.2: Scatter plot che confronta il rendimento cumulato e il rischio globale al variare dei parametri  $\eta, \beta$

### Estensione dell'orizzonte temporale e analisi al variare del numero di scenari

Per conferire maggiore robustezza statistica ai risultati e per svincolare l'analisi dalla volatilità di un singolo mese, il test è stato esteso a un orizzonte temporale di lungo periodo, simulando le contrattazioni in modo continuativo dal 1° settembre 2025 al 30 giugno 2026.

Parallelamente all'orizzonte temporale, si è introdotta una seconda dimensione di analisi: come cambiano i risultati all'aumentare del numero di rami dell'albero stocastico. I test sono stati ripetuti modellando le incertezze dei prezzi tramite alberi a 3, 5 e 10 rami. L'obiettivo è valutare come il numero totale di scenari possibili influenzi le strategie di copertura e il profitto finale, soffermandoci su 3 orari (8:00, 14:00, 20:00), per non appesantire troppo il modello. Per supportare una ramificazione stocastica così ampia, l'insieme dei dati storici è stato esteso integrando le osservazioni dell'intero 2024, estratte dalle medesime fonti, in aggiunta ai dati del 2025 fino al mese di agosto.

I risultati di questa estensione hanno portato all'emersione delle seguenti dinamiche, riassunte nelle Tabelle 5.2 e 5.3, relative rispettivamente agli alberi a 5 e 10 rami.

Analizzando i profitti assoluti in regime di neutralità al rischio ( $\eta = 0.0$ ), si osserva che l'albero a 5 rami rappresenta il compromesso più favorevole. In questa configurazione, il modello raggiunge il profitto cumulato massimo dell'intero studio, pari a 1.049.935,86 €. L'albero a 3 rami, risultando troppo rigido, si ferma a 1.046.313 €.

Aumentando la densità dell'albero a 10 rami, ci si aspetterebbe un miglioramento delle decisioni e, conseguentemente, un aumento dei ricavi. I dati dimostrano l'esatto opposto: a parità di neutralità al rischio ( $\eta = 0.0$ ), il profitto si riduce a 1.024.956,87 €. Questo fenomeno è riconducibile a una sorta di "overfitting" del solutore sugli scenari estremi: fornendo un albero molto ramificato, il modello rappresenta con maggiore dettaglio le code della distribuzione, nonché i picchi anomali dei prezzi e i repentini crolli del mercato elettrico. Di conseguenza l'algoritmo adotta intrinsecamente strategie di offerta più conservative pur di evitare sbilanciamenti catastrofici, sacrificando circa 25.000 € di margine potenziale. Gli stessi risultati emergono anche dallo studio di diversi parametri di  $\eta$  e  $\beta$ .

Tabella 5.2: Analisi del profilo rischio-rendimento: profitti cumulati (Set 2025 - Giu 2026) al variare del grado di avversione ( $\eta$ ) e del livello di confidenza ( $\beta$ ) per l'albero a 5 rami. Si analizzano le ore 8:00, 14:00, e 20:00. Si riportano il Profitto Totale (PT), la Volatilità ( $\sigma$ ), e il Caso Peggior (CP).

| Parametri CVaR |         | Profitti Orari Cumulati (€) |           |           | Metriche Globali Cumulate (€) |          |                 |
|----------------|---------|-----------------------------|-----------|-----------|-------------------------------|----------|-----------------|
| $\eta$         | $\beta$ | 08:00                       | 14:00     | 20:00     | PT                            | $\sigma$ | CP              |
| 0.00           | 0.02    | 446959.19                   | 422551.43 | 180425.24 | <b>1049935.86</b>             | 1538.81  | -1008.03        |
| 0.00           | 0.30    | 446959.19                   | 422551.43 | 180425.24 | 1049935.86                    | 1538.81  | -1008.03        |
| 0.00           | 0.70    | 446959.19                   | 422551.43 | 180425.24 | 1049935.86                    | 1538.81  | -1008.03        |
| 0.00           | 0.95    | 446959.19                   | 422551.43 | 180425.24 | 1049935.86                    | 1538.81  | -1008.03        |
| 0.10           | 0.02    | 446860.63                   | 422378.41 | 180440.54 | 1049679.58                    | 1538.62  | -1008.03        |
| 0.10           | 0.30    | 447118.67                   | 420526.07 | 180640.18 | 1048284.92                    | 1545.65  | -1467.34        |
| 0.10           | 0.70    | 447320.89                   | 419871.41 | 180519.29 | 1047711.59                    | 1546.26  | -1467.34        |
| 0.10           | 0.95    | 447254.98                   | 420719.84 | 179592.02 | 1047566.84                    | 1543.52  | -1333.46        |
| 0.40           | 0.02    | 446860.63                   | 422045.02 | 180391.41 | 1049297.06                    | 1542.92  | -1259.07        |
| 0.40           | 0.30    | 446837.66                   | 416922.75 | 180540.12 | 1044300.54                    | 1558.44  | <b>-1931.70</b> |
| 0.40           | 0.70    | 446040.91                   | 418126.60 | 178074.13 | 1042241.64                    | 1535.47  | -1171.62        |
| 0.40           | 0.95    | 435056.54                   | 420079.20 | 177537.49 | 1032673.24                    | 1513.73  | -892.63         |
| 0.80           | 0.02    | 446860.63                   | 421783.06 | 180369.85 | 1049013.54                    | 1545.33  | -1467.34        |
| 0.80           | 0.30    | 447253.44                   | 414940.40 | 179988.62 | 1042182.46                    | 1560.42  | -1741.04        |
| 0.80           | 0.70    | 446374.06                   | 416790.80 | 176827.57 | 1039992.42                    | 1537.11  | -957.22         |
| 0.80           | 0.95    | 433878.16                   | 419678.08 | 177237.09 | 1030793.33                    | 1513.90  | -751.06         |
| 0.99           | 0.02    | 446860.63                   | 420059.28 | 180392.62 | 1047312.54                    | 1549.54  | -1718.38        |
| 0.99           | 0.30    | 446207.93                   | 415121.12 | 179249.15 | 1040578.20                    | 1557.71  | -1742.08        |
| 0.99           | 0.70    | 445368.06                   | 416609.88 | 176720.02 | 1038697.97                    | 1533.78  | -1009.15        |
| 0.99           | 0.95    | 433786.14                   | 419841.81 | 177527.24 | 1031155.19                    | 1512.46  | <b>-691.07</b>  |

Tabella 5.3: Analisi del profilo rischio-rendimento: profitti cumulati (Set 2025 - Giu 2026) al variare del grado di avversione ( $\eta$ ) e del livello di confidenza ( $\beta$ ) per l'albero a 10 rami. Si analizzano le ore 8:00, 14:00, e 20:00. Si riportano il Profitto Totale (PT), la Volatilità ( $\sigma$ ), e il Caso Peggior (CP).

| Parametri CVaR |         | Profitti Orari Cumulati (€) |           |           | Metriche Globali Cumulate (€) |          |                 |
|----------------|---------|-----------------------------|-----------|-----------|-------------------------------|----------|-----------------|
| $\eta$         | $\beta$ | 08:00                       | Ore 14:00 | 20:00     | PT                            | $\sigma$ | CP              |
| 0.00           | 0.02    | 446806.53                   | 398351.35 | 179798.99 | <b>1024956.87</b>             | 1510.30  | -1074.73        |
| 0.00           | 0.30    | 446806.53                   | 398351.35 | 179798.99 | 1024956.87                    | 1510.30  | -1074.73        |
| 0.00           | 0.70    | 446806.53                   | 398351.35 | 179798.99 | 1024956.87                    | 1510.30  | -1074.73        |
| 0.00           | 0.95    | 446806.53                   | 398351.35 | 179798.99 | 1024956.87                    | 1510.30  | -1074.73        |
| 0.10           | 0.02    | 446754.40                   | 398453.54 | 179797.84 | 1025005.77                    | 1510.02  | -1074.73        |
| 0.10           | 0.30    | 446690.71                   | 397591.03 | 179906.66 | 1024188.40                    | 1512.89  | -1074.73        |
| 0.10           | 0.70    | 446417.08                   | 397292.95 | 179722.51 | 1023432.54                    | 1508.21  | -998.20         |
| 0.10           | 0.95    | 445306.54                   | 398384.21 | 179585.51 | 1023276.26                    | 1497.91  | -658.19         |
| 0.40           | 0.02    | 446754.40                   | 398476.91 | 179824.50 | 1025055.81                    | 1509.81  | -1074.73        |
| 0.40           | 0.30    | 446493.18                   | 397668.60 | 180274.40 | 1024436.18                    | 1521.03  | -1288.05        |
| 0.40           | 0.70    | 442140.30                   | 396294.22 | 178749.82 | 1017184.34                    | 1497.45  | -530.89         |
| 0.40           | 0.95    | 428288.17                   | 399526.78 | 177646.49 | 1005461.44                    | 1474.67  | <b>167.56</b>   |
| 0.80           | 0.02    | 446885.03                   | 397949.65 | 179740.55 | 1024575.23                    | 1511.36  | -1074.73        |
| 0.80           | 0.30    | 447518.85                   | 400268.39 | 180348.10 | 1028135.33                    | 1537.89  | -1424.83        |
| 0.80           | 0.70    | 437935.32                   | 395657.58 | 177476.83 | 1011069.73                    | 1487.32  | -599.80         |
| 0.80           | 0.95    | 423547.75                   | 399779.49 | 177823.17 | 1001150.42                    | 1474.23  | <b>167.56</b>   |
| 0.99           | 0.02    | 446885.03                   | 398311.12 | 179830.95 | 1025027.10                    | 1512.47  | -1074.73        |
| 0.99           | 0.30    | 446987.22                   | 402907.08 | 180283.45 | <b>1030177.75</b>             | 1540.92  | <b>-1675.16</b> |
| 0.99           | 0.70    | 436021.09                   | 395515.13 | 177516.60 | 1009052.82                    | 1487.01  | -705.40         |
| 0.99           | 0.95    | 423357.18                   | 399414.77 | 177947.23 | 1000719.17                    | 1473.36  | <b>167.56</b>   |

Un'ulteriore evidenza di rilievo emerge dall'analisi della colonna relativa al "Caso peggiore" nelle due configurazioni stocastiche. Confrontando i dati, si nota come l'albero a 10 rami garantisca, nei regimi di alta avversione al rischio, una protezione nettamente superiore rispetto al modello a 5 rami, arrivando persino a trasformare la massima perdita in un guadagno nelle ore considerate.

Nello specifico, nell'albero a 5 rami il caso peggiore rimane strutturalmente negativo in tutte le configurazioni, toccando un picco di -1931.70 € e non riuscendo a superare la soglia di -691.07 € nemmeno imponendo la massima cautela possibile ( $\eta = 0.99$ ,  $\beta = 0.95$ ). Al contrario, nell'albero a 10 rami, all'aumentare dell'avversione al rischio (con  $\beta = 0.95$  e  $\eta \geq 0.40$ ), la perdita massima viene completamente annullata, stabilizzandosi su un valore strettamente positivo pari a +167.56 €, non perdendo dunque denaro in alcun scenario.

La spiegazione di questo fenomeno è dovuta al fatto che l'albero a 10 rami è sufficientemente denso da rilevare i picchi anomali estremi durante l'ottimizzazione; questo garantisce un margine positivo persino nella giornata peggiore dell'anno, seppur al costo di un minor profitto totale. Al contrario, l'albero a 5 rami aggrega l'incertezza e "media" le traiettorie, non riuscendo a mitigare l'esposizione al rischio e lasciando il portafoglio parzialmente esposto durante gli scenari più avversi.

Infine, lo studio degli scatterplot al variare del numero di scenari dimostra gli stessi risultati trovati in precedenza nel caso studio di un solo mese. Le dinamiche parametriche analizzate in precedenza per il singolo mese restano infatti

invariate sull'orizzonte annuale: si conferma, ad esempio, che anche imponendo una marcata avversione al rischio (con  $\eta$  elevato), l'adozione di un livello di confidenza ridotto ( $\beta$  piccolo) disinnesci l'impatto della CVaR, portando il solutore a riposizionarsi sistematicamente nei pattern ad alto rendimento e alta volatilità.

### 5.1.3 Confronto con e senza Mercato Infragiornaliero

Fissando i parametri della misura di rischio sui valori precedentemente individuati come i più efficaci per la minimizzazione del rischio globale, ovvero  $(\eta, \beta) = (0.99, 0.95)$ , è possibile isolare e quantificare l'effettivo valore aggiunto derivante dalla partecipazione attiva alle sessioni dell'MI. L'obiettivo è confrontare questa strategia dinamica con un approccio "passivo", in cui l'operatore si limita a definire la propria posizione sull'MGP, subendo passivamente le conseguenze economiche sull'MB.

A livello complessivo mensile, ci aspettiamo un miglioramento delle prestazioni complessive utilizzando il modello multistadio. La natura sequenziale del MI offre infatti l'opportunità di intraprendere azioni di ricorso: al rivelarsi progressivo dell'incertezza, l'operatore può correggere le proprie promesse di immissione, allineandole all'effettiva disponibilità energetica e mitigando così le penalizzazioni imposte dal sistema di sbilanciamento.

Tuttavia, è possibile osservare scenari specifici in cui la strategia passiva priva della partecipazione all'MI risulta, in modo controintuitivo, più remunerativa. Questa dinamica trova una giustificazione nella natura probabilistica dell'ottimizzazione stocastica. Il modello completo formula le proprie offerte infragiornaliere bilanciando il valore atteso degli scenari futuri; tuttavia, nel mercato reale può accadere che il prezzo di sbilanciamento si riveli improvvisamente molto favorevole (ad esempio, qualora il sistema elettrico nazionale remunerasse positivamente un'immissione in eccesso per esigenze di adeguatezza di rete). Di conseguenza, mentre la strategia passiva beneficia accidentalmente di questo andamento favorevole, il modello prudente incassa un profitto inferiore, avendo già vincolato i propri volumi nell'MI a prezzi più sicuri ma meno speculativi.

I risultati della simulazione sull'intero mese di settembre 2025, riportati nella Tabella 5.4, forniscono una validazione numerica di queste analisi.

Il modello stocastico multistadio conferma la sua superiorità strutturale: nell'arco del mese, la strategia di includere l'MI genera un valore aggiunto complessivo di +6.873,42 €, registrando un incremento netto dell'1,45% rispetto alla baseline "passiva".

Disaggregando l'analisi per singola fascia oraria, si evince una spiccata eterogeneità nei risultati. Si osservano delle fasce orarie particolarmente favorevoli, in cui il modello stocastico esprime il suo massimo potenziale: si registrano incrementi di profitto del +9,89% alle 16:00 e del +15,31% alle 17:00. Tale efficienza è accentuata dalla disponibilità di una terza fase di ricorso (la sessione MI-A3), che fornisce all'algoritmo maggiori gradi di libertà per l'aggiustamento della posizione.

Di contro, si riscontrano fasce orarie in cui la percentuale diviene negativa (ad esempio, -3,29% alle 02:00 o -3,78% alle 19:00). In queste specifiche ore, l'algoritmo ha ottimizzato la funzione obiettivo ponendo l'offerta sui mercati infragiornalieri a prezzi conservativi, rinunciando all'esposizione rischiosa sull'MB che, a posteriori, si è rivelato maggiormente remunerativo.

È possibile ripetere l'esperimento scegliendo come coppia di parametri  $(\eta, \beta) = (0.01, 0.95)$ , quindi optando per un approccio più rischioso, che tende esclusivamente a massimizzare solo il profitto atteso. In tale configurazione, l'impiego del modello multistadio genera un profitto complessivo pari a 11.240,41 €, corrispondente a un incremento del 2,42% rispetto all'approccio passivo. Questo risultato è coerente con quanto dimostrato in precedenza; infatti, con questi parametri si osserva un profitto globale maggiore, ma una volatilità più alta.

Tabella 5.4: Analisi comparativa dei profitti mensili aggregati per singola fascia oraria e bilancio complessivo (Settembre 2025) per  $(\eta, \beta) = (0.99, 0.95)$ . Legenda: **MI**: Modello Infragiornaliero; **MP**: Modello Passivo; **VA**: Valore Aggiunto; **Incr.**: Incremento.

| Ora                | MI (€)    | MP (€)    | VA (€)   | Incr. (%)     |
|--------------------|-----------|-----------|----------|---------------|
| 00:00              | 7777.98   | 7750.95   | +27.03   | +0.35         |
| 01:00              | 7995.53   | 8096.36   | -100.83  | -1.25         |
| 02:00              | 7916.81   | 8185.81   | -269.00  | -3.29         |
| 03:00              | 7625.51   | 7538.58   | +86.94   | +1.15         |
| 04:00              | 6802.23   | 6298.08   | +504.15  | +8.00         |
| 05:00              | 6865.34   | 6451.86   | +413.47  | +6.41         |
| 06:00              | 11183.72  | 11172.13  | +11.59   | +0.10         |
| 07:00              | 22766.89  | 22776.16  | -9.27    | -0.04         |
| 08:00              | 33245.06  | 33452.97  | -207.90  | -0.62         |
| 09:00              | 37285.91  | 37301.85  | -15.94   | -0.04         |
| 10:00              | 40097.02  | 39899.57  | +197.45  | +0.49         |
| 11:00              | 40477.06  | 41054.57  | -577.52  | -1.41         |
| 12:00              | 38604.89  | 38279.73  | +325.15  | +0.85         |
| 13:00              | 35728.01  | 33611.06  | +2116.96 | +6.30         |
| 14:00              | 33173.08  | 33609.07  | -435.99  | -1.30         |
| 15:00              | 29227.11  | 28916.99  | +310.12  | +1.07         |
| 16:00              | 26055.42  | 23711.01  | +2344.41 | +9.89         |
| 17:00              | 19030.47  | 16503.69  | +2526.77 | <b>+15.31</b> |
| 18:00              | 16984.02  | 16774.85  | +209.17  | +1.25         |
| 19:00              | 16043.88  | 16673.39  | -629.51  | <b>-3.78</b>  |
| 20:00              | 11349.72  | 11577.81  | -228.09  | -1.97         |
| 21:00              | 7909.44   | 8016.64   | -107.20  | -1.34         |
| 22:00              | 7943.39   | 7584.90   | +358.49  | +4.73         |
| 23:00              | 7787.70   | 7764.74   | +22.96   | +0.30         |
| Totale Complessivo | 479876.18 | 473002.76 | +6873.42 | <b>+1.45</b>  |

Nel grafico seguente (5.3) viene mostrato infine l'andamento dei profitti registrati nel "test set" per quattro fasce orarie specifiche, monitorati giornalmente per tutto il mese di settembre. Per ciascuna fascia oraria, la linea tratteggiata rappresenta l'approccio passivo (solo MGP e MB), mentre la linea continua evidenzia l'andamento della strategia dinamica con partecipazione ai mercati infragiornalieri.

L'analisi visiva restituisce l'immagine di un mercato caratterizzato da un'estrema volatilità, con i profitti che subiscono brusche oscillazioni da un giorno all'altro. In un contesto così turbolento, il grafico evidenzia come l'azione del modello con l'MI tenda ad ammortizzare le cadute nei giorni peggiori, portando la curva dei profitti al di sopra della soglia dello zero nei casi in cui l'approccio passivo avrebbe invece generato forti perdite per sbilanciamento.

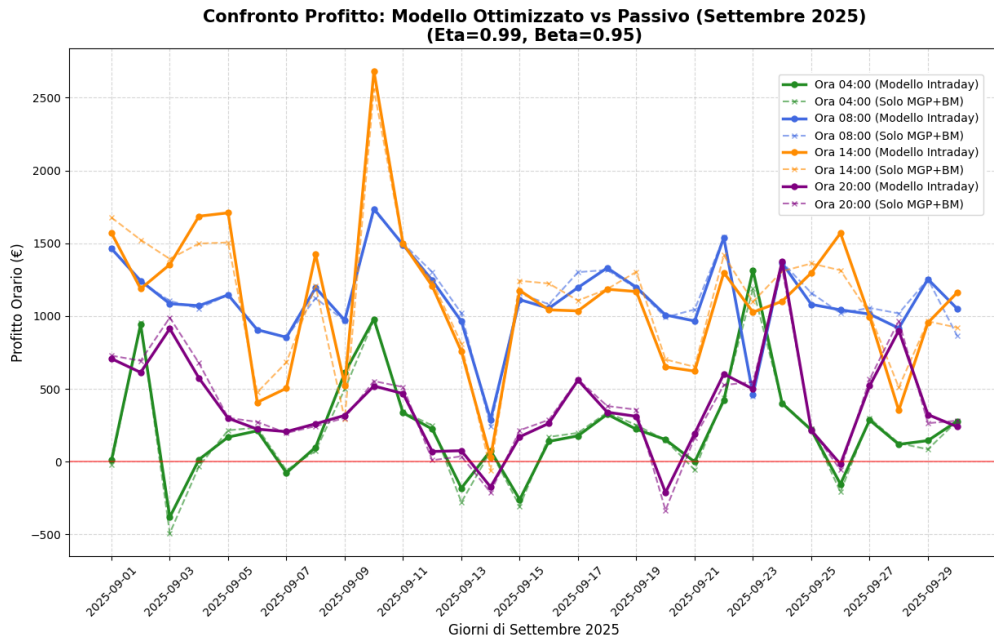


Figura 5.3: Confronto modello con e senza MI per 4 fasce orarie (Settembre 2025)

### Estensione dell'orizzonte temporale e analisi al variare del numero di scenari

Per confermare quanto visto sul singolo mese di settembre, è stato esteso il confronto tra il modello dinamico (che usa l'MI) e quello passivo sull'intero orizzonte temporale di dieci mesi (Settembre 2025 - Giugno 2026). Al fine di analizzare nel dettaglio il comportamento dell'algoritmo, sono stati effettuati i test su due variabili: il numero di rami dell'albero stocastico (3, 5 e 10 rami) e l'atteggiamento verso il rischio, testando un profilo molto prudente ( $\eta = 0.99$ ) e uno quasi neutrale ( $\eta = 0.01$ ), con  $\beta$  fisso a 0.95.

Osservando i profitti totali riportati nelle tabelle, emergono alcune dinamiche interessanti.

Indipendentemente dal numero di rami, quando si impone una forte avversione al rischio ( $\eta = 0.99$ ), il modello dinamico guadagna sistematicamente meno di quello passivo. All'aumentare della ramificazione stocastica si registra un progressivo deterioramento dei profitti: si osserva infatti una perdita di circa 62.000 € con 3 rami, 77.000 € con 5 rami, fino a ben 149.000 € con 10 rami. Questa riduzione si verifica perché, all'aumentare dei rami, l'albero stocastico

mappa con più precisione le code estreme della distribuzione. Il modello diviene eccessivamente sensibile a tali scenari catastrofici e converge verso strategie di copertura estremamente conservative, penalizzando il margine di profitto. Al fine di evitare le perdite, l'algoritmo accetta sistematicamente scambi poco convenienti, determinando una riduzione del margine di profitto potenziale.

Se invece si lascia il modello libero di massimizzare i profitti ( $\eta = 0.01$ ), la partecipazione all'MI diventa vantaggiosa in tutti gli scenari. Qui si nota chiaramente come varia il profitto al variare dei rami. Con 3 rami, il modello dinamico guadagna circa 54.000 € in più rispetto a quello passivo. Passando a 5 rami, si ottiene invece il profitto massimo in assoluto: un valore aggiunto di oltre 68.000 €. Tale configurazione si conferma il miglior compromesso tra un'adeguata rappresentazione dell'incertezza e la necessaria flessibilità del modello. Infine, aumentando ulteriormente la risoluzione a 10 rami, il guadagno non sale, ma scende a circa 46.000 €.

Tabella 5.5: Profitti aggregati mensilmente (Set 2025 - Giu 2026) con albero a 5 rami ( $\eta = 0.01$ ,  $\beta = 0.95$ ). Legenda: **MI**: Modello Infragiornaliero; **MP**: Modello Passivo; **VA**: Valore Aggiunto; **Incr.**: Incremento.

| Mese                  | MI (€)            | MP (€)            | VA (€)           | Incr. (%)    |
|-----------------------|-------------------|-------------------|------------------|--------------|
| Sett 2025             | 487611.93         | 475812.06         | +11799.87        | +2.48        |
| Ott 2025              | 594697.28         | 577870.60         | +16826.68        | +2.91        |
| Nov 2025              | 520944.80         | 514153.13         | +6791.67         | +1.32        |
| Dic 2025              | 475040.62         | 475279.65         | -239.03          | -0.05        |
| Gen 2026              | 870107.80         | 865004.70         | +5103.11         | +0.59        |
| Feb 2026              | 461416.87         | 459981.03         | +1435.84         | +0.31        |
| Mar 2026              | 956913.23         | 952725.75         | +4187.47         | +0.44        |
| Apr 2026              | 941655.63         | 935466.57         | +6189.06         | +0.66        |
| Mag 2026              | 855538.49         | 844544.07         | +10994.42        | +1.30        |
| Giu 2026              | 763969.08         | 758230.22         | +5738.86         | +0.76        |
| <b>Totale Periodo</b> | <b>6927895.73</b> | <b>6859067.77</b> | <b>+68827.96</b> | <b>+1.00</b> |

Il fatto che l'albero a 10 rami guadagni meno di quello a 5 rami è un risultato interessante. Si crea, infatti, una sorta di "overfitting". Fornendo al solutore così tanti scenari, il modello attribuisce maggiore rilevanza a un numero elevato di scenari estremi e rari. Invece di cogliere il trend generale, l'algoritmo si adatta troppo alle code della distribuzione e, per proteggersi da questi casi limite, rinuncia a buone occasioni di guadagno. Questo fenomeno si nota in modo evidente anche nella configurazione a 10 rami prudente ( $\eta = 0.99$ ). L'analisi dei dati mensili e orari evidenzia una marcata riduzione dei profitti in primavera (Aprile, Maggio, Giugno), concentrato esclusivamente nelle ore centrali della giornata (in particolare alle 14:00, con un calo del -6,50%). Tale risultato è riconducibile alle condizioni fisiche della rete, caratterizzate in primavera da una marcata incertezza indotta dalla produzione solare. Un albero degli scenari a 10 rami modella in modo più accurato tale incertezza, inducendo il modello a privilegiare la vendita dell'energia sull'MI anche a fronte di prezzi meno favorevoli, pur di bloccare subito i volumi sicuri.

Tabella 5.6: Profitti aggregati mensilmente (Set 2025 - Giu 2026) con albero a 10 rami ( $\eta = 0.99$ ,  $\beta = 0.95$ ). Legenda: **MI**: Modello Infragiornaliero; **MP**: Modello Passivo; **VA**: Valore Aggiunto; **Incr.**: Incremento.

| Mese                  | MI (€)            | MP (€)            | VA (€)            | Incr. (%)    |
|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------|
| Sett 2025             | 480263.71         | 475812.06         | +4451.65          | +0.94        |
| Ott 2025              | 574349.47         | 577870.60         | -3521.12          | -0.61        |
| Nov 2025              | 527507.47         | 514153.13         | +13354.35         | +2.60        |
| Dic 2025              | 476128.21         | 475279.65         | +848.56           | +0.18        |
| Gen 2026              | 869546.05         | 865004.70         | +4541.35          | +0.53        |
| Feb 2026              | 462276.01         | 459981.03         | +2294.98          | +0.50        |
| Mar 2026              | 943574.69         | 952725.75         | -9151.06          | -0.96        |
| Apr 2026              | 874649.15         | 935466.57         | -60817.42         | <b>-6.50</b> |
| Mag 2026              | 785852.26         | 844544.07         | -58691.81         | <b>-6.95</b> |
| Giu 2026              | 715560.78         | 758230.22         | -42669.44         | <b>-5.63</b> |
| <b>Totale Periodo</b> | <b>6709707.80</b> | <b>6859067.77</b> | <b>-149359.97</b> | <b>-2.18</b> |

In conclusione, l'analisi con un orizzonte temporale più esteso ha dimostrato che attribuire un peso eccessivo alla componente di rischio, trascurando la massimizzazione del profitto, porterebbe solo a dei risultati controproducenti. Inoltre, si conferma che aumentare la ramificazione stocastica non si traduce necessariamente in un miglioramento delle prestazioni: l'eccesso di dettagli della configurazione a 10 rami induce, infatti, un eccessivo adattamento del modello ai casi limite, portando a sovrastimare l'impatto degli scenari peggiori. È opportuno sottolineare che tale comportamento è strettamente legato alla dimensionalità del set di dati impiegato per costruire l'albero; essendo quest'ultimo calibrato esclusivamente sulle osservazioni storiche comprese tra gennaio 2024 e agosto 2025, la mole di dati a disposizione risulta insufficiente per popolare in modo statisticamente robusto una struttura così densa. Alla luce di queste considerazioni, la configurazione a 5 rami risulta quella in grado di offrire il miglior compromesso tra l'accuratezza nella rappresentazione dell'incertezza e il costo computazionale nei test considerati.

## 5.2 Test tagli disgiuntivi

### 5.2.1 Confronto numerico tra i due modelli

Si osservano ora i risultati computazionali ottenuti dal confronto tra le due formulazioni algoritmiche proposte: il modello rilassato, in cui il CGLP viene applicato per recidere le variabili binarie frazionarie, e il modello "semplificato", privo di vincoli logici e basato direttamente sulla quadrupla disgiunzione delle variabili continue.

Le simulazioni numeriche sono state condotte analizzando singolarmente ciascuna ora della giornata. L'ottimizzazione testata si colloca nel momento decisionale iniziale, ovvero nell'istante antecedente alla rivelazione di qualsiasi scenario di prezzo spot. Per definire l'impegno assunto sull'MGP, il parametro di input  $q^{\text{MGP}}$  è stato posto pari al valore medio orario di produzione di un

impianto ibrido (composto da 20 MW di eolico e 20 MW di solare) per quella specifica ora.

Per la costruzione dell'albero degli scenari sono state impiegate le serie storiche dei prezzi dei mercati MGP, MI e MB relative al periodo compreso tra gennaio e agosto 2025. La discretizzazione dell'incertezza è stata modellata imponendo 3 diramazioni per ogni nodo intermedio. Tale scelta genera un albero asimmetrico a seconda dell'ora considerata: per le ore antecedenti alle 13:00 (dove sono attive solo le sessioni MI-A1 e MI-A2) l'albero si sviluppa fino a 27 foglie, mentre per le ore pomeridiane, con l'inclusione della sessione MI-A3, l'albero si espande fino a 81 scenari finali.

Relativamente alla gestione del rischio, i parametri della metrica CVaR sono stati fissati a  $\eta = 0.5$  (peso attribuito al rischio nella funzione obiettivo) e  $\beta = 0.95$  (livello di confidenza).

Dal punto di vista algoritmico, le fasi di test per entrambi i modelli condividono la medesima architettura di separazione. Ad ogni iterazione, il modello esamina la soluzione ottima del rilassamento continuo corrente; se vengono identificate delle violazioni (frazionarie o logiche), il CGLP genera simultaneamente un set di tagli disgiuntivi. Tali disuguaglianze vengono aggiunte simultaneamente nel modello originale, il quale viene riottimizzato per valutare l'emersione di ulteriori inammissibilità. Questo ciclo iterativo di rafforzamento del poliedro procede ininterrottamente fino al verificarsi di una delle due condizioni di arresto: l'assenza di ulteriori violazioni o il raggiungimento del limite di tolleranza numerica (stallo per tagli troppo deboli).

Per valutare rigorosamente l'efficacia dei piani di taglio generati, i risultati computazionali vengono analizzati confrontando il valore della funzione obiettivo. Indicando con  $z_{\text{INT}}^*$  il valore ottimo del problema intero originale e con  $z_{\text{LP}}^*$  il valore ottimo del rilassamento continuo di base, si ha che  $z_{\text{LP}}^* \geq z_{\text{INT}}^*$ , trattandosi di un problema di massimizzazione.

La discrepanza tra i due modelli viene quantificata tramite il *gap relativo* percentuale, definito come:

$$\text{Gap}_{\text{rel}}(\%) = \frac{z_{\text{LP}}^* - z_{\text{INT}}^*}{|z_{\text{INT}}^*|} \times 100 \quad (5.1)$$

Questa metrica esprime l'errore percentuale di sovrastima del profitto che si commette ignorando la natura intera delle variabili binarie rilassate (nel caso del primo modello).

Al fine di misurare il miglioramento effettivo apportato dall'algoritmo di separazione, si introduce un'ulteriore metrica. Sia  $z_{\text{CUT}}^*$  il valore della funzione obiettivo ottenuto dopo l'aggiunta dei tagli disgiuntivi al modello continuo; la teoria dei tagli garantisce che  $z_{\text{INT}}^* \leq z_{\text{CUT}}^* \leq z_{\text{LP}}^*$ . L'efficacia algoritmica viene pertanto valutata calcolando la percentuale di *gap chiuso*, definita secondo la seguente formula:

$$\text{Gap}_{\text{chiuso}}(\%) = \frac{z_{\text{LP}}^* - z_{\text{CUT}}^*}{z_{\text{LP}}^* - z_{\text{INT}}^*} \times 100 \quad (5.2)$$

Un valore del gap chiuso del 100% indica che i tagli hanno permesso al rilassamento di convergere esattamente al valore dell'ottimo intero.

I risultati del primo modello sono i seguenti:

Tabella 5.7: Confronto dei risultati computazionali: Modello Intero vs Rilassamenti (con e senza tagli disgiuntivi). Il trattino (–) indica l’ora in cui il rilassamento base aveva già raggiunto l’ottimo intero (gap iniziale pari a zero), rendendo non applicabile il calcolo della percentuale di gap chiuso.

| Ora   | Intero                 | Rilassamento Base     |         |       | Rilassamento con Tagli |         |       | Gap        |
|-------|------------------------|-----------------------|---------|-------|------------------------|---------|-------|------------|
|       | $z_{\text{INT}}^*$ (€) | $z_{\text{LP}}^*$ (€) | Gap (%) | Frac. | $z_{\text{CUT}}^*$ (€) | Gap (%) | Frac. | Chiuso (%) |
| 00:00 | 261.64                 | 261.99                | 0.14    | 9     | 261.64                 | 0.00    | 0     | 100.00     |
| 01:00 | 295.34                 | 295.60                | 0.09    | 6     | 295.34                 | 0.00    | 0     | 100.00     |
| 02:00 | 245.88                 | 245.92                | 0.02    | 2     | 245.88                 | 0.00    | 0     | 100.00     |
| 03:00 | 234.08                 | 234.20                | 0.05    | 4     | 234.08                 | 0.00    | 0     | 100.00     |
| 04:00 | 318.88                 | 320.08                | 0.38    | 4     | 318.88                 | 0.00    | 0     | 100.00     |
| 05:00 | 367.69                 | 367.74                | 0.02    | 2     | 367.69                 | 0.00    | 0     | 100.00     |
| 06:00 | 544.98                 | 548.37                | 0.62    | 23    | 545.47                 | 0.09    | 10    | 85.58      |
| 07:00 | 955.46                 | 961.54                | 0.64    | 22    | 956.15                 | 0.07    | 8     | 88.53      |
| 08:00 | 1184.22                | 1188.12               | 0.33    | 11    | 1185.07                | 0.07    | 4     | 78.23      |
| 09:00 | 1391.17                | 1393.21               | 0.15    | 13    | 1391.17                | 0.00    | 6     | 100.00     |
| 10:00 | 1356.21                | 1373.97               | 1.31    | 23    | 1356.22                | 0.00    | 4     | 99.98      |
| 11:00 | 1177.43                | 1185.33               | 0.67    | 7     | 1177.43                | 0.00    | 0     | 100.00     |
| 12:00 | 1048.19                | 1052.45               | 0.41    | 14    | 1048.19                | 0.00    | 5     | 100.00     |
| 13:00 | 658.49                 | 664.39                | 0.90    | 18    | 658.62                 | 0.02    | 4     | 97.70      |
| 14:00 | 526.55                 | 532.63                | 1.15    | 22    | 527.43                 | 0.17    | 2     | 85.66      |
| 15:00 | 452.11                 | 453.42                | 0.29    | 18    | 452.11                 | 0.00    | 0     | 100.00     |
| 16:00 | 322.12                 | 322.45                | 0.10    | 11    | 322.12                 | 0.00    | 0     | 100.00     |
| 17:00 | 381.46                 | 381.46                | 0.00    | 0     | 381.46                 | 0.00    | 0     | –          |
| 18:00 | 346.02                 | 346.45                | 0.12    | 18    | 346.02                 | 0.00    | 0     | 100.00     |
| 19:00 | 329.51                 | 330.36                | 0.26    | 24    | 329.51                 | 0.00    | 0     | 100.00     |
| 20:00 | 286.22                 | 287.51                | 0.45    | 15    | 286.27                 | 0.02    | 10    | 95.79      |
| 21:00 | 197.96                 | 198.91                | 0.48    | 36    | 198.22                 | 0.13    | 12    | 72.47      |
| 22:00 | 145.94                 | 146.75                | 0.55    | 37    | 145.94                 | 0.00    | 0     | 100.00     |
| 23:00 | 177.20                 | 178.35                | 0.65    | 36    | 177.20                 | 0.00    | 0     | 100.00     |

L’implementazione numerica del CGLP ha prodotto degli ottimi risultati computazionali, confermando l’efficacia dei tagli disgiuntivi nel rafforzare il rilassamento continuo del modello di ottimizzazione stocastica.

Analizzando i risultati sull’intero orizzonte giornaliero, si osserva come questo approccio sia riuscito a chiudere integralmente (100%) il gap relativo in oltre la metà delle istanze testate. In questi specifici scenari, l’iniezione dei tagli ha ricondotto esattamente il poliedro rilassato al suo involucro convesso nella regione di ottimalità, abbattendo il numero di variabili frazionarie a zero e rendendo il problema continuo matematicamente equivalente alla sua controparte intera senza alcun ricorso al Branch-and-Bound.

Anche nelle istanze in cui non si è ottenuta la chiusura totale del gap, le percentuali di rafforzamento si mantengono su livelli eccellenti. In svariati casi il CGLP ha rasentato la percentuale massima, riducendo le decine di variabili frazionarie iniziali a pochissime unità residue. Il mancato raggiungimento del 100% esatto in queste configurazioni non è da imputare a un’inefficacia teorica dei tagli generati, bensì alle tolleranze di approssimazione e a fenomeni di instabilità numerica che insorgono all’interno dei solutori lineari quando chiamati a gestire matrici malcondizionate o coefficienti fortemente eterogenei. Que-

sta instabilità numerica è direttamente imputabile al modello rilassato, poiché l'impiego delle costanti Big-M introduce una disparità di scala tra i coefficienti.

Facendo lo stesso test sul secondo modello, si ottengono i seguenti risultati:

Tabella 5.8: Confronto dei risultati computazionali: Modello Intero vs Modello Semplificato (con e senza tagli disgiuntivi). Il trattino (–) indica l'ora in cui il modello semplificato base aveva già raggiunto l'ottimo intero. Legenda: **MS**: Modello Semplificato base; **MS+T**: Modello Semplificato (Pass 1) con Tagli; **G\_C**: Gap Chiuso.

| Ora   | Intero          | MS             |         |       | MS+T            |         |       | G_C (%) |
|-------|-----------------|----------------|---------|-------|-----------------|---------|-------|---------|
|       | $z_{INT}^*$ (€) | $z_{LP}^*$ (€) | Gap (%) | Frac. | $z_{CUT}^*$ (€) | Gap (%) | Frac. |         |
| 00:00 | 261.64          | 262.11         | 0.18    | 0     | 261.64          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 01:00 | 295.34          | 295.34         | 0.00    | 0     | 295.34          | 0.00    | 0     | –       |
| 02:00 | 245.88          | 247.45         | 0.64    | 0     | 245.88          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 03:00 | 234.08          | 234.71         | 0.27    | 0     | 234.08          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 04:00 | 318.88          | 320.09         | 0.38    | 0     | 318.88          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 05:00 | 367.69          | 367.69         | 0.00    | 0     | 367.69          | 0.00    | 0     | –       |
| 06:00 | 544.98          | 545.69         | 0.13    | 0     | 544.98          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 07:00 | 955.46          | 956.15         | 0.07    | 0     | 955.46          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 08:00 | 1184.22         | 1185.36        | 0.10    | 0     | 1184.22         | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 09:00 | 1391.17         | 1391.31        | 0.01    | 0     | 1391.17         | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 10:00 | 1356.21         | 1356.22        | 0.00    | 0     | 1356.21         | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 11:00 | 1177.43         | 1178.05        | 0.05    | 0     | 1177.43         | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 12:00 | 1048.19         | 1049.24        | 0.10    | 0     | 1048.19         | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 13:00 | 658.49          | 659.97         | 0.22    | 0     | 658.49          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 14:00 | 526.55          | 530.08         | 0.67    | 0     | 526.55          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 15:00 | 452.11          | 458.37         | 1.38    | 0     | 452.11          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 16:00 | 322.12          | 322.12         | 0.00    | 0     | 322.12          | 0.00    | 0     | –       |
| 17:00 | 381.46          | 381.50         | 0.01    | 0     | 381.46          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 18:00 | 346.02          | 346.23         | 0.06    | 0     | 346.02          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 19:00 | 329.51          | 330.01         | 0.15    | 0     | 329.51          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 20:00 | 286.22          | 287.60         | 0.48    | 0     | 286.22          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 21:00 | 197.96          | 198.78         | 0.42    | 0     | 197.96          | 0.00    | 0     | 99.51   |
| 22:00 | 145.94          | 146.26         | 0.21    | 0     | 145.94          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 23:00 | 177.20          | 177.56         | 0.20    | 0     | 177.20          | 0.00    | 0     | 100.00  |

L'implementazione computazionale di questa formulazione ha confermato la solidità teorica dell'approccio disgiuntivo. Il dato più rilevante che emerge dalle simulazioni sull'intero orizzonte giornaliero è la costanza dei risultati: in ogni singola istanza oraria analizzata il gap viene chiuso totalmente, a meno di trascurabili approssimazioni decimali legate alle tolleranze di macchina, ricalcando al centesimo il profitto del modello originario in tutti gli scenari testati. Questo successo evidenzia un vantaggio strutturale rispetto al primo approccio. Avendo rimosso alla radice le variabili ausiliarie binarie e, soprattutto, le costanti Big-M, la matrice dei coefficienti del sistema risulta notevolmente meglio condizionata. Di conseguenza, il modello continuo “semplificato” si dimostra immune a quegli errori di tolleranza e a quelle instabilità numeriche che, nel caso precedente, ostacolavano la chiusura totale del gap nelle istanze dimensionalmente più complesse.

### Confronto tempi

Tabella 5.9: Confronto dei tempi computazionali (in secondi) per la generazione e applicazione dei tagli disgiuntivi. Legenda: **MBM**: Modello con vincoli Big-M; **MS**: Modello Semplificato.

| Ora          | MBM (s)      | MS (s)        | Ora   | MBM (s) | MS (s) |
|--------------|--------------|---------------|-------|---------|--------|
| 00:00        | 0.438        | 2.828         | 12:00 | 0.312   | 0.734  |
| 01:00        | 0.281        | 0.766         | 13:00 | 1.344   | 9.344  |
| 02:00        | 1.141        | 1.891         | 14:00 | 0.484   | 4.562  |
| 03:00        | 0.297        | 0.656         | 15:00 | 0.781   | 5.719  |
| 04:00        | 0.250        | 0.906         | 16:00 | 0.391   | 6.109  |
| 05:00        | 0.734        | 2.469         | 17:00 | 0.422   | 6.422  |
| 06:00        | 0.562        | 1.938         | 18:00 | 0.812   | 7.562  |
| 07:00        | 0.484        | 0.750         | 19:00 | 2.250   | 11.391 |
| 08:00        | 1.641        | 3.750         | 20:00 | 4.688   | 2.672  |
| <b>09:00</b> | <b>2.047</b> | <b>43.594</b> | 21:00 | 1.500   | 5.250  |
| 10:00        | 1.812        | 1.969         | 22:00 | 0.344   | 4.328  |
| 11:00        | 0.250        | 1.438         | 23:00 | 0.594   | 4.375  |

Sebbene il modello “semplificato” offra il vantaggio teorico di una formulazione priva di costanti Big-M, l’analisi dei tempi computazionali ha rivelato in quasi tutte le istanze una convergenza più lenta rispetto all’approccio tradizionale basato sul rilassamento delle variabili binarie. Questo decadimento delle performance è imputabile a due fattori geometrici e algoritmici. In primo luogo, l’identificazione delle violazioni non è più circoscritta a un set ristretto di variabili decisionali confinate nell’intervallo unitario  $[0, 1]$ , bensì coinvolge direttamente le variabili continue  $(q, p, \gamma)$ , ampliando notevolmente lo spazio di ricerca per le violazioni. In secondo luogo, come riscontrato nei log di esecuzione (ad esempio per l’istanza dell’ora 9), l’algoritmo CGLP, privo della struttura geometrica definita dai bounds delle variabili binarie, può produrre iperpiani più deboli. Tali disuguaglianze asportano porzioni marginali del poliedro continuo, costringendo il solutore a decine di iterazioni ravvicinate che garantiscono miglioramenti infinitesimali della funzione obiettivo, fino al verificarsi di uno stallo numerico che interrompe prematuramente la chiusura del gap.

Questi motivi giustificano anche il fatto che, dall’analisi dei log di esecuzione, il modello basato sul rilassamento continuo delle variabili binarie richiede un numero di iterazioni di separazione drasticamente inferiore rispetto alla formulazione “semplificata”.

#### 5.2.2 Analisi della prima e della seconda chiusura

Nello studio di algoritmi di generazione dei piani di taglio, l’analisi delle prime iterazioni fornisce indicazioni cruciali sulla geometria dello spazio delle soluzioni. Al fine di valutare il trade-off tra costo computazionale e qualità del rafforzamento, si è condotto un test limitando l’algoritmo alla sola “prima chiusura” (tagli di Rango 1). In questa configurazione, il solutore individua le violazioni

della soluzione originale, inietta i rispettivi piani di taglio e il processo termina con una singola riottimizzazione.

Il primo modello studiato, ovvero il MILP rilassato, mostra un comportamento favorevole in questo esperimento, raggiungendo esattamente la stessa percentuale di gap chiuso del modello in cui i tagli sono applicati in modo iterativo. La differenza, però, sta nel numero di variabili frazionarie residue, che in questa nuova analisi è leggermente superiore; di conseguenza, fermarsi alla sola prima chiusura risulta estremamente conveniente per questo primo approccio.

I risultati computazionali sul secondo modello, ovvero il modello “semplificato” arricchito con le nuove famiglie di vincoli empirici tra  $q$  e  $\gamma$  insieme ai vincoli di monotonicità, mostrano un comportamento straordinariamente efficace. È opportuno ricordare che, in assenza di queste nuove disuguaglianze valide, l’applicazione della sola prima chiusura restituiva un tasso di gap chiuso pari allo 0.00% su tutte le istanze orarie, a causa dell’assenza di correlazione tra le decisioni di offerta e l’energia effettivamente scambiata.

Tabella 5.10: Confronto dei risultati computazionali sul modello semplificato con la prima chiusura. Legenda: **MS**: Modello Semplificato base; **MS+T**: Modello Semplificato (Pass 1) con Tagli; **G\_C**: Gap Chiuso.

| Ora   | Intero          | MS             |         |       | MS+T            |         |       | G_C (%) |
|-------|-----------------|----------------|---------|-------|-----------------|---------|-------|---------|
|       | $z_{INT}^*$ (€) | $z_{LP}^*$ (€) | Gap (%) | Frac. | $z_{CUT}^*$ (€) | Gap (%) | Frac. |         |
| 00:00 | 261.64          | 262.11         | 0.18    | 0     | 261.64          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 01:00 | 295.34          | 295.34         | 0.00    | 0     | 295.34          | 0.00    | 0     | -       |
| 02:00 | 245.88          | 247.45         | 0.64    | 0     | 245.88          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 03:00 | 234.08          | 234.71         | 0.27    | 0     | 234.08          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 04:00 | 318.88          | 320.09         | 0.38    | 0     | 318.88          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 05:00 | 367.69          | 367.69         | 0.00    | 0     | 367.69          | 0.00    | 0     | -       |
| 06:00 | 544.98          | 545.69         | 0.13    | 0     | 545.47          | 0.09    | 0     | 31.45   |
| 07:00 | 955.46          | 956.15         | 0.07    | 0     | 956.15          | 0.07    | 0     | 0.00    |
| 08:00 | 1184.22         | 1185.36        | 0.10    | 0     | 1185.07         | 0.07    | 0     | 25.84   |
| 09:00 | 1391.17         | 1391.31        | 0.01    | 0     | 1391.17         | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 10:00 | 1356.21         | 1356.22        | 0.00    | 0     | 1356.22         | 0.00    | 0     | 0.00    |
| 11:00 | 1177.43         | 1178.05        | 0.05    | 0     | 1177.43         | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 12:00 | 1048.19         | 1049.24        | 0.10    | 0     | 1048.19         | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 13:00 | 658.49          | 659.97         | 0.22    | 0     | 658.62          | 0.02    | 0     | 90.83   |
| 14:00 | 526.55          | 530.08         | 0.67    | 0     | 527.43          | 0.17    | 0     | 75.28   |
| 15:00 | 452.11          | 458.37         | 1.38    | 0     | 452.11          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 16:00 | 322.12          | 322.12         | 0.00    | 0     | 322.12          | 0.00    | 0     | -       |
| 17:00 | 381.46          | 381.50         | 0.01    | 0     | 381.46          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 18:00 | 346.02          | 346.23         | 0.06    | 0     | 346.02          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 19:00 | 329.51          | 330.01         | 0.15    | 0     | 329.51          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 20:00 | 286.22          | 287.60         | 0.48    | 0     | 286.27          | 0.02    | 0     | 96.07   |
| 21:00 | 197.96          | 198.78         | 0.42    | 0     | 198.22          | 0.13    | 0     | 68.12   |
| 22:00 | 145.94          | 146.26         | 0.21    | 0     | 145.94          | 0.00    | 0     | 100.00  |
| 23:00 | 177.20          | 177.56         | 0.20    | 0     | 177.20          | 0.00    | 0     | 100.00  |

Come si può osservare nella Tabella 5.10, già alla prima iterazione di tagli disgiuntivi, questi permettono di chiudere integralmente il gap di rilassamento (100.00%) in ben 16 delle 24 fasce orarie analizzate, forzando la funzio-

ne obiettivo del modello continuo a coincidere esattamente con l'ottimo intero ( $z_{\text{CUT}}^* = z_{\text{INT}}^*$ ).

Il raggiungimento di un gap chiuso del 100% in 16 istanze su 24, avvalendosi di un singolo passaggio algoritmico rappresenta un risultato computazionale e geometrico significativo, evidenziando i vantaggi sostanziali di questo modello rispetto ai metodi tradizionali. Il modello semplificato evita alla radice l'impiego delle costanti Big-M. Come è noto in letteratura, valori di Big-M elevati (necessari per vincolare i prezzi sui mercati energetici) causano un cattivo condizionamento della matrice e generano rilassamenti lineari deboli. Sostituendo la logica Big-M con la definizione esatta dell'involuppo convesso tramite i tagli, si ottiene un modello intrinsecamente più stabile e matematicamente rigoroso. Inoltre, la generazione di tagli di rango 1 (prima chiusura) è computazionalmente molto economica.

Eseguendo un ulteriore passaggio algoritmico e passando alla “seconda chiusura” (ovvero estraendo i tagli di Rango 2 dopo la prima riottimizzazione), si osserva un perfezionamento mirato delle prestazioni nelle fasce orarie in cui il gap non era stato completamente abbattuto al primo passaggio.

Confrontando i dati delle due tabelle, si evidenzia come la seconda chiusura permetta di limare ulteriormente il margine di sovrastima nelle ore più complesse. Nello specifico, si riportano i miglioramenti più significativi:

- Alle ore 06:00, la percentuale di gap chiuso sale dal 31.45% al 77.96%.
- Alle ore 08:00, passa dal 25.84% al 76.19%.
- Alle ore 13:00, incrementa dal 90.83% al 95.42%.
- Alle ore 14:00, sale dal 75.28% all'88.24%.
- Alle ore 20:00 e 21:00, si registrano incrementi dal 96.07% al 97.50% e dal 68.12% al 72.30% rispettivamente.

Questo comportamento dimostra la validità dell'architettura proposta: i vincoli empirici tra  $q$  e  $\gamma$  svolgono un pre-processing geometrico, mentre la sequenza dei passaggi CGLP rifinisce in modo progressivo i confini del poliedro ammissibile attorno alle regole di mercato.

### 5.2.3 Applicazione e confronto con il Mercato Spagnolo

In questa sezione, il modello stocastico di ottimizzazione multistadio sviluppato viene adattato e applicato al mercato dell'energia spagnolo. L'obiettivo è replicare gli stessi test che sono stati condotti sul mercato italiano, valutando le prestazioni dell'algoritmo dei piani di taglio disgiuntivi su un'infrastruttura di mercato differente e computazionalmente più complessa.

I dati storici dei prezzi, relativi al periodo da gennaio a giugno 2020, sono stati estratti dal gestore del mercato iberico OMIE (*Operador del Mercado Ibérico de Energía* [8]), nello specifico per l'MGP e per le sessioni dell'MI. Per quanto riguarda la modellazione della produzione da fonti rinnovabili, è stato simulato un impianto ibrido (eolico e solare) avvalendosi del sito *Renewables.ninja* [9,

16], già usato per ricreare i dati italiani, ma questa volta simulando un impianto posizionato a Madrid.

A differenza del caso italiano, si è adottata una semplificazione per i prezzi dello sbilanciamento, in linea col primo caso studio che è stato analizzato, ovvero il modello sviluppato da Silva [15]. Invece di modellare i prezzi spot del MB tramite scenari stocastici generati sui dati storici, sono stati applicati dei tassi di de-rating fissi e proporzionali al prezzo MGP. Nello specifico:

- In caso di sbilanciamento positivo (vendita di energia in eccesso al sistema), il prezzo di remunerazione è assunto pari a  $0.85 \cdot \pi_{\text{MGP}}$ .
- In caso di sbilanciamento negativo (acquisto per deficit di produzione), la penale applicata è pari a  $1.15 \cdot \pi_{\text{MGP}}$ .

Essendo questi tassi deterministici rispetto all'esito dell'MGP, l'albero degli scenari non presenterà un'ulteriore diramazione stocastica finale dedicata al MB.

La differenza strutturale più impattante del mercato spagnolo risiede nell'organizzazione dell'MI, strutturato in 6 diverse aste (MI-A1, ..., MI-A6) con orari di apertura sfalsati. Nello specifico, le prime tre sessioni sono accessibili per tutta la giornata; la quarta asta interviene a partire dalla quarta ora del giorno, la quinta dalla settima ora e la sesta diviene operativa solo nella seconda metà della giornata (dalla dodicesima ora in poi). Per riflettere questa dinamica temporale, la struttura dell'albero delle decisioni è stata adattata affinché le diramazioni si attivino in base all'ora di simulazione. Per il caso studio in esame, si è scelto un grado di ramificazione definito dal vettore  $[3, 3, 2, 2, 2, 2]$ , che genera un massimo di  $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 144$  scenari finali.

Nelle ore della giornata in cui tutte le 6 sessioni sono attive (ovvero per  $h \geq 12$ ), l'albero genera fino a 282 nodi decisionali per singola ora, portando a un numero estremamente elevato di variabili binarie rispetto al caso italiano. Conseguentemente, tutte le variabili del modello sono state riadattate per dipendere dai 6 indici dimensionali dell'albero ( $w_1, \dots, w_6$ ), pur mantenendo inalterata la formulazione teorica dei vincoli di offerta e bilancio.

Seguendo la medesima metodologia del caso italiano, la validazione si baserà sul confronto tra due approcci di risoluzione algoritmica:

1. Il **modello rilassato base**, in cui si applicano i tagli CGLP classici sulle variabili frazionarie del MILP che dovrebbero essere binarie, mantenendo l'impalcatura originaria dei vincoli logici.
2. Il **modello semplificato**, privato dei vincoli logici, la cui regione ammissibile viene interamente ricostruita e confinata tramite i tagli generati dal CGLP adattato alla quadrupla disgiunzione.

I risultati di questa simulazione sono di particolare rilevanza, in quanto consentono di testare la scalabilità computazionale dei due algoritmi e la robustezza del modello semplificato su uno spazio di ricerca notevolmente più vasto. Si commentano dunque i risultati numerici ottenuti dalle simulazioni sulle 24 ore operative del mercato spagnolo.

Tabella 5.11: Confronto dei risultati computazionali del MILP: Modello Intero vs Rilassamento vs Rilassamento+Tagli (mercato OMIE a 6 sessioni).

| Ora   | Intero                 | Rilassamento Base     |             |       | Rilassamento con Tagli |         |       | Gap          |
|-------|------------------------|-----------------------|-------------|-------|------------------------|---------|-------|--------------|
|       | $z_{\text{INT}}^*$ (€) | $z_{\text{LP}}^*$ (€) | Gap (%)     | Frac. | $z_{\text{CUT}}^*$ (€) | Gap (%) | Frac. | Chiuso (%)   |
| 00:00 | 127.71                 | 127.74                | 0.03        | 15    | 127.74                 | 0.03    | 13    | 1.64         |
| 01:00 | 132.55                 | 132.61                | 0.05        | 21    | 132.61                 | 0.05    | 12    | 0.51         |
| 02:00 | 110.42                 | 110.42                | 0.00        | 13    | 110.42                 | 0.00    | 2     | 0.00         |
| 03:00 | 101.73                 | 101.74                | 0.01        | 14    | 101.74                 | 0.01    | 4     | 0.00         |
| 04:00 | 83.83                  | 83.84                 | 0.00        | 23    | 83.84                  | 0.00    | 4     | 1.39         |
| 05:00 | 98.20                  | 98.29                 | 0.09        | 39    | 98.29                  | 0.09    | 27    | 2.45         |
| 06:00 | 141.17                 | 141.21                | 0.02        | 28    | 141.20                 | 0.02    | 20    | <b>14.48</b> |
| 07:00 | 208.87                 | 208.92                | 0.03        | 63    | 208.92                 | 0.03    | 34    | 1.15         |
| 08:00 | 322.07                 | 322.08                | 0.00        | 43    | 322.08                 | 0.00    | 16    | 6.11         |
| 09:00 | 435.35                 | 435.92                | 0.13        | 52    | 435.92                 | 0.13    | 23    | 0.02         |
| 10:00 | 483.82                 | 484.16                | 0.07        | 67    | 484.15                 | 0.07    | 37    | 2.37         |
| 11:00 | 470.87                 | 470.92                | 0.01        | 63    | 470.92                 | 0.01    | 20    | 0.00         |
| 12:00 | 424.64                 | 424.80                | 0.04        | 107   | 424.79                 | 0.03    | 46    | 8.95         |
| 13:00 | 359.65                 | 360.38                | <b>0.20</b> | 117   | 360.37                 | 0.20    | 61    | 0.33         |
| 14:00 | 282.37                 | 282.56                | 0.06        | 114   | 282.55                 | 0.06    | 45    | 0.80         |
| 15:00 | 179.16                 | 179.20                | 0.02        | 92    | 179.20                 | 0.02    | 37    | 11.13        |
| 16:00 | 106.18                 | 106.19                | 0.01        | 99    | 106.19                 | 0.01    | 44    | 0.38         |
| 17:00 | 90.84                  | 90.88                 | 0.04        | 101   | 90.87                  | 0.03    | 37    | 10.19        |
| 18:00 | 98.30                  | 98.31                 | 0.02        | 90    | 98.31                  | 0.02    | 19    | 0.16         |
| 19:00 | 112.51                 | 112.59                | 0.07        | 117   | 112.58                 | 0.06    | 62    | 4.96         |
| 20:00 | 135.37                 | 135.42                | 0.04        | 97    | 135.42                 | 0.04    | 33    | 1.14         |
| 21:00 | 129.30                 | 129.36                | 0.04        | 105   | 129.35                 | 0.04    | 49    | 2.60         |
| 22:00 | 124.25                 | 124.29                | 0.03        | 128   | 124.28                 | 0.03    | 67    | 7.04         |
| 23:00 | 102.08                 | 102.11                | 0.04        | 110   | 102.11                 | 0.04    | 62    | 3.74         |

Dall'analisi dei risultati riportati nella Tabella 5.11, il rilassamento lineare della formulazione con variabili binarie risulta già estremamente accurato, presentando un gap rispetto all'ottimo intero sempre inferiore allo 0.2% e, nella maggior parte delle istanze, inferiore allo 0.1%. Ciò indica che la formulazione basata sulle variabili binarie e sui vincoli di tipo Big-M fornisce già un'approssimazione molto stretta dell'involuppo convesso del problema.

L'applicazione iterativa del CGLP produce comunque un numero elevato di tagli e determina una sensibile riduzione del numero di variabili frazionarie presenti nella soluzione del rilassamento. In numerose istanze, infatti, il numero di variabili frazionarie viene ridotto di oltre il 50%, confermando che i tagli sono efficaci nell'eliminare configurazioni frazionarie non desiderate. Tuttavia, tale miglioramento non si riflette in una corrispondente riduzione del gap di rilassamento, che rimane pressoché invariato. La percentuale di gap chiuso risulta infatti generalmente inferiore al 15%, con valori spesso prossimi allo zero.

Questo comportamento non deve essere interpretato come una scarsa efficacia del metodo di separazione, bensì come una conseguenza della qualità della formulazione di partenza. Essendo il rilassamento lineare già molto vicino all'ottimo intero, le soluzioni frazionarie residue hanno un'influenza estremamente limitata sul valore della funzione obiettivo. I tagli disgiuntivi continuano quindi ad eliminare vertici frazionari del poliedro rilassato, ma tali vertici risul-

tano quasi equivalenti dal punto di vista economico, determinando variazioni trascurabili del bound del rilassamento.

Inoltre, nel contesto ad alta dimensionalità del mercato spagnolo (caratterizzato da una massiccia presenza di variabili binarie), un ruolo cruciale è giocato dalle tolleranze numeriche. In fase di implementazione algoritmica, per prevenire fenomeni di instabilità numerica e il malcondizionamento delle matrici all'interno del solutore, sono state imposte delle rigorose soglie di sicurezza. Nello specifico, il generatore di tagli è stato programmato per scartare automaticamente gli iperpiani caratterizzati da violazioni marginali (inferiori a  $10^{-4}$ ) o da un eccessivo dinamismo dei coefficienti del taglio stesso (ovvero quando il rapporto tra il coefficiente massimo e minimo nella medesima disuguaglianza generata risulta superiore a  $10^6$ ).

Questi necessari limiti operativi impediscono l'iniezione di disuguaglianze numericamente instabili. Di conseguenza, il CGLP si arresta fisiologicamente prima di aver eliminato ogni singola frazionalità, lasciando un residuo nel numero di variabili (comunque drasticamente abbattuto rispetto alla soluzione base) e mantenendo il gap relativo pressoché inalterato.

Tabella 5.12: Confronto secondo modello dei profitti attesi e analisi dei gap relativi per il mercato Spagnolo (OMIE a 6 sessioni). Legenda: **MI**: Modello Intero; **MS**: Modello Semplificato; **MS+T**: Modello Semplificato con Tagli; **G\_B**: Gap Base; **G\_T**: Gap Tagli (%); **G\_C**: Gap Chiuso (%).

| Ora   | MI     | MS     | G_B  | MS+T   | G_T  | G_C    |
|-------|--------|--------|------|--------|------|--------|
| 00:00 | 127.71 | 128.38 | 0.52 | 127.71 | 0.00 | 100.00 |
| 01:00 | 132.55 | 133.45 | 0.69 | 132.55 | 0.00 | 99.55  |
| 02:00 | 110.42 | 111.01 | 0.54 | 110.42 | 0.00 | 100.00 |
| 03:00 | 101.73 | 102.49 | 0.75 | 101.73 | 0.00 | 100.00 |
| 04:00 | 83.83  | 84.96  | 1.34 | 83.83  | 0.00 | 100.00 |
| 05:00 | 98.20  | 99.55  | 1.38 | 98.20  | 0.00 | 100.00 |
| 06:00 | 141.17 | 142.60 | 1.01 | 141.17 | 0.00 | 99.79  |
| 07:00 | 208.87 | 211.91 | 1.46 | 208.88 | 0.01 | 99.62  |
| 08:00 | 322.07 | 327.64 | 1.73 | 322.07 | 0.00 | 100.00 |
| 09:00 | 435.35 | 441.22 | 1.35 | 435.35 | 0.00 | 100.00 |
| 10:00 | 483.82 | 486.81 | 0.62 | 483.82 | 0.00 | 99.72  |
| 11:00 | 470.87 | 477.11 | 1.32 | 470.90 | 0.01 | 99.47  |
| 12:00 | 424.64 | 427.25 | 0.61 | 424.65 | 0.00 | 99.59  |
| 13:00 | 359.65 | 364.77 | 1.42 | 359.66 | 0.00 | 99.70  |
| 14:00 | 282.37 | 286.22 | 1.36 | 282.38 | 0.00 | 99.70  |
| 15:00 | 179.16 | 181.48 | 1.29 | 179.17 | 0.00 | 99.75  |
| 16:00 | 106.18 | 107.49 | 1.24 | 106.18 | 0.00 | 99.68  |
| 17:00 | 90.84  | 92.80  | 2.16 | 90.84  | 0.00 | 99.90  |
| 18:00 | 98.30  | 99.82  | 1.55 | 98.30  | 0.01 | 99.65  |
| 19:00 | 112.51 | 114.64 | 1.90 | 112.51 | 0.00 | 99.99  |
| 20:00 | 135.37 | 137.14 | 1.31 | 135.38 | 0.01 | 99.54  |
| 21:00 | 129.30 | 131.47 | 1.68 | 129.31 | 0.00 | 99.83  |
| 22:00 | 124.25 | 126.14 | 1.52 | 124.25 | 0.00 | 99.76  |
| 23:00 | 102.08 | 103.80 | 1.69 | 102.08 | 0.01 | 99.54  |

Tali test sono stati effettuati anche nel secondo approccio studiato, quello del modello semplificato, i cui risultati sono sintetizzati nella Tabella 5.12. Come

si evince da questa seconda tabella, il comportamento del modello semplificato è diametralmente opposto.

Nel modello semplificato base, l'eliminazione totale delle variabili binarie logiche priva temporaneamente il solutore dei vincoli che rappresentano la logica di mercato. Di conseguenza, il rilassamento continuo iniziale risulta più debole rispetto al caso precedente, mostrando un gap base decisamente più ampio e visibile, che oscilla tra lo 0.50% e il 2.16%.

La percentuale di gap chiuso dall'applicazione dei tagli sfiora la totalità in ogni singola istanza della giornata, attestandosi stabilmente tra il 99.47% e il 100.00%.

Spostando l'attenzione sui lievi scostamenti dal 100% di gap chiuso (con valori attorno al 99.5%), è importante chiarire che essi non indicano un'inefficienza dei tagli, ma dipendono dalle tolleranze numeriche del solutore. Coerentemente con le tolleranze interne di Gurobi, l'algoritmo è stato programmato per ignorare le violazioni microscopiche (impostate sotto la soglia di  $10^{-4}$ ), per evitare tagli instabili.

Nel modello privo di variabili binarie dunque il rilassamento iniziale è significativamente più debole e le disgiunzioni rappresentano un meccanismo in grado di descrivere la logica del problema; di conseguenza, i tagli generati dal CGLP consentono di chiudere praticamente l'intero gap di rilassamento. Nel modello con variabili binarie, invece, gran parte dell'informazione logica è già incorporata nella formulazione mediante i vincoli di attivazione, per cui il margine di miglioramento del bound risulta inevitabilmente molto limitato. Ne consegue che, in questa prima formulazione, il principale effetto del CGLP consiste nel ridurre la frazionalità delle soluzioni piuttosto che nel rafforzare ulteriormente il rilassamento lineare.

Per tali ragioni, la formulazione semplificata risulta essere l'opzione migliore: essa permette di sfruttare appieno la forza dei tagli disgiuntivi per ricostruire l'esatta logica del problema senza appesantirne la struttura matematica.



## Capitolo 6

# Conclusioni

In questo lavoro di tesi sono state analizzate le prestazioni e le proprietà computazionali di un modello per la definizione di strategie di offerta ottimali nei mercati elettrici, integrando il controllo del rischio e sviluppando una formulazione basata sulla teoria dei piani di taglio.

Nella prima fase dello studio, le simulazioni hanno valutato l'impatto della struttura dell'albero degli scenari e dei parametri della metrica CVaR sulle performance del portafoglio. I test numerici hanno dimostrato che incrementare eccessivamente il numero di rami non conduce a strategie più redditizie. Nello specifico, l'architettura a dieci rami per ogni stadio ha evidenziato un eccessivo adattamento agli scenari estremi della distribuzione: utilizzando una ramificazione troppo elevata, il modello ha concentrato l'ottimizzazione sui singoli casi anomali della distribuzione, adottando contromisure eccessivamente conservative che hanno ridotto il profitto globale. L'architettura a cinque rami si è invece confermata il compromesso ottimale, offrendo un equilibrio tra la rappresentazione dell'incertezza e la massimizzazione del profitto complessivo. Parallelamente, si è condotta l'analisi sui parametri  $\eta$  e  $\beta$ . Minimizzare esclusivamente il rischio, fissando un'alta avversione, protegge dagli sbilanciamenti, ma determina una riduzione del profitto medio; al contrario, un approccio puramente neutrale massimizza le entrate ma espone l'operatore a pesanti perdite nei casi peggiori. È emerso chiaramente che per ottenere un portafoglio robusto è necessario calibrare dei pesi intermedi nella funzione obiettivo, garantendo introiti elevati senza incorrere in fluttuazioni finanziarie insostenibili. Inoltre, si è confermato che la partecipazione attiva alle sessioni del Mercato Infragiornaliero genera un valore aggiunto rispetto a una strategia passiva vincolata al solo Mercato del Giorno Prima.

La seconda parte della ricerca si è concentrata sul rafforzamento della formulazione matematica tramite un algoritmo di separazione basato su CGLP. In una prima fase, tale procedura è stata impiegata per generare piani di taglio disgiuntivi volti a rafforzare il rilassamento continuo del modello MILP originario, recidendone le soluzioni frazionarie. Successivamente, la metodologia è stata applicata al modello semplificato, privo di variabili binarie: i risultati confermano l'efficacia di questo secondo approccio, in cui la nuova formulazione, basata sull'imposizione di una quadrupla disgiunzione sulle variabili, è riusci-

ta a rappresentare fedelmente le logiche di accettazione e rifiuto del mercato senza l'ausilio di variabili intere. L'algoritmo è infatti riuscito a chiudere integralmente il gap di rilassamento, raggiungendo la soluzione ottima in tutte le istanze analizzate. Dall'analisi della prima chiusura, inoltre, si è osservato che il modello ha raggiunto l'ottimo intero nella maggior parte delle istanze analizzate, con un costo computazionale contenuto, questo grazie anche all'aggiunta a priori dei vincoli di monotonicità e delle disuguaglianze empiriche. I vantaggi di questo approccio sono emersi in modo evidente nell'applicazione al mercato iberico. A fronte di sei sessioni infragiornaliere, l'approccio tradizionale basato sul rilassamento MILP ha evidenziato maggiori difficoltà, poiché l'esplosione combinatoria delle variabili binarie ha impedito al solutore di chiudere il gap al 100% a causa di tolleranze e instabilità numeriche. Al contrario, il modello semplificato continuo ha mantenuto prestazioni elevate anche all'aumentare della dimensionalità del problema.

Alla luce dei risultati ottenuti, il presente lavoro apre diverse prospettive per futuri approfondimenti e perfezionamenti. Un'estensione naturale del modello consiste nell'affiancare alle contrattazioni ad asta la dinamica del mercato infragiornaliero continuo, implementazione che richiederà una modellazione stocastica nettamente più complessa. Dal punto di vista computazionale, sebbene la nuova formulazione continua garantisca la convergenza all'ottimo, i tempi di risoluzione tendono a dilatarsi nelle istanze più complesse a causa dell'elevato numero di iterazioni necessarie. Studi futuri potrebbero pertanto esplorare strategie alternative per la selezione delle variabili candidate o testare funzioni di normalizzazione alternative per il cono del CGLP, al fine di estrarre iperpiani più profondi e accelerare la procedura di separazione.

# Bibliografia

- [1] John R. Birge e Francois Louveaux. *Introduction to stochastic programming*. Springer, 1997 (cit. alle pp. 18, 19).
- [2] Michele Conforti, Gérard Cornuéjols e Giacomo Zambelli. *Integer Programming*. Cham, Switzerland: Springer, 2014, pp. 24–25 (cit. alle pp. 35, 40).
- [3] ENTSO-E. *Transparency Platform: Balancing Market Data*. <https://transparency.entsoe.eu/>. Ultimo accesso: 2025 (cit. a p. 57).
- [4] Pary Fazlalipour, Mehdi Ehsan e Behnam Mohammadi-Ivatloo. *Risk-aware stochastic bidding strategy of renewable micro-grids in day-ahead and real-time markets*. In: *Energy* 171 (2019), pp. 689–700 (cit. a p. 25).
- [5] Matteo Fischetti, Andrea Lodi e Andrea Tramontani. *On the separation of disjunctive cuts*. In: *Mathematical Programming* 128.1 (2011), pp. 205–230 (cit. alle pp. 43–45).
- [6] Gestore dei Mercati Energetici (GME). *Dati Storici e Relazioni: Esiti dei Mercati Elettrici*. <https://www.mercatoelettrico.org>. Ultimo accesso: 2025 (cit. a p. 57).
- [7] Razan A. Al-Lawati, Jose L. Crespo-Vazquez, Tasnim Ibn Faiz, Xin Fang e Md Noor-E-Alam. *Two-stage stochastic optimization frameworks to aid in decision-making under uncertainty for variable resource generators participating in a sequential energy market*. In: *Applied Energy* 292 (2021) (cit. a p. 33).
- [8] OMIE - Operador del Mercado Ibérico de Energía. *Market results history: Daily and hourly market (Anno 2020)*. 2020. URL: <https://www.omie.es/en/market-results-history/monthly/daily-market/hourly-market> (cit. a p. 75).
- [9] Stefan Pfenninger e Iain Staffell. *Long-term patterns of European PV output using 30 years of validated hourly reanalysis and satellite data*. In: *Energy* 114 (2016), pp. 1251–1265 (cit. alle pp. 57, 75).
- [10] Hugo Miguel Inácio Pousinho, Víctor Manuel Fernandes Mendes e João Paulo da Silva Catalão. *A risk-averse optimization model for trading wind energy in a market environment under uncertainty*. In: *Energy* 36.8 (2011), pp. 4935–4942 (cit. a p. 24).

- [11] Laura Puglia, Daniele Bernardini e Alberto Bemporad. *A multi-stage stochastic optimization approach to optimal bidding on energy markets*. In: (2011), pp. 1509–1514 (cit. a p. 25).
- [12] R. Tyrrell Rockafellar e Stanislav Uryasev. *Optimization of conditional value-at-risk*. In: *Journal of risk* 2 (2000), pp. 21–42 (cit. alle pp. 21, 22).
- [13] Antonio Sassano et al. *Formulazioni e Piani di Taglio*. In: *Modelli e algoritmi della ricerca operativa*. FrancoAngeli, 1999 (cit. a p. 36).
- [14] Kwami Senam A. Sedzro, Shaline Kishore, Alberto J. Lamadrid e Luis F. Zuluaga. *Stochastic risk-sensitive market integration for renewable energy: Application to ocean wave power plants*. In: *Applied Energy* 229 (2018), pp. 474–481 (cit. a p. 24).
- [15] Ana R. Silva, H.M.I. Pousinho e Ana Estanqueiro. *A multistage stochastic approach for the optimal bidding of variable renewable energy in the day-ahead, intraday and balancing markets*. In: *Energy* 258 (2022), p. 124856 (cit. alle pp. 10, 27, 29, 30, 76).
- [16] Iain Staffell e Stefan Pfenninger. *Using bias-corrected reanalysis to simulate current and future wind power output*. In: *Energy* 114 (2016), pp. 1224–1239 (cit. alle pp. 57, 76).
- [17] Jean-François Toubreau, Thuy-Hai Nguyen, Hooman Khaloie, Yi Wang e François Vallée. *Forecast-driven stochastic scheduling of a virtual power plant in energy and reserve markets*. In: *IEEE Systems Journal* 16.4 (2021), pp. 5212–5223 (cit. a p. 24).

## Appendice A

# Indice delle abbreviazioni

|             |                                                                                      |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>BESS</b> | Sistema di accumulo a batteria                                                       |
| <b>CDP</b>  | Capacità Disponibile in Probabilità                                                  |
| <b>CGLP</b> | <i>Cut Generating Linear Program</i> , programma lineare per la generazione di tagli |
| <b>CVaR</b> | <i>Conditional Value at Risk</i> , valore a rischio condizionato                     |
| <b>GME</b>  | Gestore dei Mercati Energetici                                                       |
| <b>LOLE</b> | <i>Loss Of Load Expectation</i> , aspettativa di perdita di carico                   |
| <b>MB</b>   | Mercato del Bilanciamento                                                            |
| <b>MGP</b>  | Mercato del Giorno Prima                                                             |
| <b>MI</b>   | Mercato Infragiornaliero                                                             |
| <b>MILP</b> | <i>Mixed Integer Linear Program</i> , programmazione lineare intera mista            |
| <b>MSD</b>  | Mercato per il Servizio del Dispacciamento                                           |
| <b>PUN</b>  | Prezzo Unico Nazionale                                                               |
| <b>SNC</b>  | <i>Standard Normalization Condition</i>                                              |
| <b>TSO</b>  | Gestore del Sistema di Trasmissione                                                  |
| <b>VaR</b>  | <i>Value at Risk</i> , valore a rischio                                              |
| <b>VPP</b>  | <i>Virtual Power Plant</i> , centrale elettrica virtuale                             |
| <b>XBID</b> | <i>Cross-Border Intraday</i>                                                         |