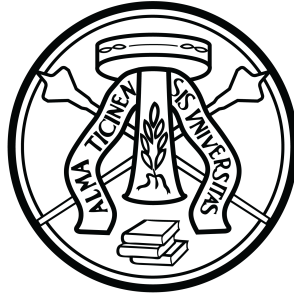


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA



UNIVERSITÀ
DI PAVIA

La Geometria Iperbolica a Pavia: da Saccheri ai
Modelli della Collezione

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Relatore:
Riccardo Rosso

Tesi di Laurea di:
Andrea Colognese
Matricola 545911

Anno Accademico 2025-2026

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA



UNIVERSITÀ
DI PAVIA

**La Geometria Iperbolica a Pavia: da Saccheri ai
Modelli della Collezione**

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Relatore:
Riccardo Rosso

Tesi di Laurea di:
Andrea Colognese
Matricola 545911

Anno Accademico 2025-2026

*se da colei che tal quasi m'ha fatto,
che 'l poco ingegno ad or ad or mi lima,
me ne sarà però tanto concesso,
che mi basti a finir quanto ho promesso.*

— *L. Ariosto, Orlando Furioso,
Canto I, ottava 2, vv. 5–8*

Abstract

Versione italiana

Il presente elaborato si propone di ricostruire, in una prospettiva storico matematica, il lungo processo che ha condotto alla nascita della geometria iperbolica e alla sua progressiva affermazione all'interno della cultura scientifica moderna, concentrando l'attenzione sul ruolo svolto da alcuni studiosi legati all'Università di Pavia e sul particolare contributo che il contesto pavese apportò allo sviluppo della geometria tra XVIII e XX secolo. L'obiettivo non è soltanto quello di ripercorrere le tappe fondamentali della nascita delle geometrie non euclidee, ma anche di mostrare come esse costituiscano il risultato di un processo storico complesso, caratterizzato dall'intreccio tra ricerca matematica e innovazione didattica, realizzata anche grazie alla produzione materiale di modelli matematici.

La geometria iperbolica rappresenta infatti uno dei più significativi momenti di svolta nella storia della matematica. Per oltre due millenni la geometria euclidea fu considerata non soltanto il paradigma della rigorosa deduzione matematica, ma anche la descrizione necessaria e universale della struttura dello spazio fisico. La crisi di tale concezione non derivò da un'improvvisa scoperta, bensì da una lunga serie di tentativi volti a chiarire o dimostrare il cosiddetto V postulato di Euclide. La particolare formulazione di questo assioma, più complessa e meno intuitiva rispetto agli altri postulati contenuti negli *Elementi*, suscitò fin dall'antichità profonde perplessità, inducendo generazioni di matematici a interrogarsi sulla sua effettiva natura e sulla possibilità di derivarlo da postulati precedenti.

Il primo capitolo dell'elaborato è dedicato proprio alla ricostruzione di questa vicenda. A partire dal testo euclideo, vengono analizzati i principali tentativi di dimostrazione del Postulato delle parallele, seguendo un percorso che attraversa epoche e tradizioni culturali differenti. Dalle riflessioni dell'età ellenistica fino ai contributi della matematica araba e persiana medievale, emerge con chiarezza come il problema delle parallele abbia costituito uno dei temi più persistenti della storia della geometria. Particolare attenzione viene riservata alla figura di Omar Khayyam, il quale riformulò il problema nel contesto di un quadrilatero birettangolo isoscele, inaugurando una linea di ricerca destinata ad avere un'importanza decisiva negli sviluppi successivi.

L'analisi prosegue attraverso i contributi di Lambert e Legendre, fino a giungere alla svolta del XIX secolo, quando János Bolyai e Nikolaj Ivanovič Lobačevskij compresero che la negazione del Postulato delle parallele non con-

duceva necessariamente a contraddizioni logiche. Per la prima volta divenne così possibile concepire un sistema geometrico coerente fondato su assiomi differenti da quelli della tradizione euclidea. La nascita della geometria iperbolica inaugurò una nuova stagione della matematica, all'interno della quale le nozioni della geometria si allontanarono dalla definizione di spazio fino ad allora nota. In questa prospettiva viene inoltre esaminato il ruolo svolto da Carl Friedrich Gauss, le cui riflessioni, pur rimanendo in larga parte inedite durante la sua vita, contribuirono significativamente alla maturazione delle nuove teorie.

A conclusione del capitolo viene affrontato il processo di sistematizzazione teorica delle diverse geometrie realizzato nella seconda metà dell'Ottocento, con particolare riferimento al *Programma di Erlangen* di Felix Klein. In tale quadro, le varie geometrie vengono interpretate come specifiche realizzazioni di una più generale struttura proiettiva e vengono presentati i principali modelli della geometria iperbolica: il modello conforme del disco di Riemann-Beltrami-Poincaré, il modello conforme del semipiano di Liouville-Beltrami e il modello proiettivo del disco di Beltrami-Klein. Per completezza, l'esposizione include anche alcuni richiami alla geometria sferica, frequentemente utilizzata come termine di confronto nello sviluppo delle teorie non euclidee.

Il secondo capitolo è dedicato alla figura di Giovanni Girolamo Saccheri, matematico gesuita e docente dell'Università di Pavia, la cui opera rappresenta uno dei momenti più significativi della storia della geometria iperbolica. Saccheri occupa una posizione singolare nella vicenda delle geometrie non euclidee: intenzionato a difendere la validità della tradizione euclidea, egli finì infatti per sviluppare alcuni dei risultati più profondi che preannunciarono la geometria di Lobačevskij e Bòlyai.

Dopo una ricostruzione del suo profilo biografico e del contesto culturale in cui operò, l'attenzione viene rivolta all'*Euclides ab omni naevo vindicatus*, pubblicato nel 1733. In quest'opera, Saccheri riprende il problema introdotto da Khayyam e costruisce quello che oggi è noto come il Quadrilatero di Saccheri. Attraverso una raffinata dimostrazione per assurdo, egli distingue tre possibili ipotesi, dell'angolo retto, dell'angolo ottuso e dell'angolo acuto, cercando di mostrare che soltanto la prima possa essere compatibile con una geometria coerente. Se l'ipotesi dell'angolo ottuso viene rapidamente esclusa, l'analisi dell'ipotesi dell'angolo acuto conduce invece Saccheri a risultati di straordinaria modernità. Pur rimanendo fedele all'obiettivo iniziale di difendere Euclide, egli giunge infatti ad anticipare numerose proprietà caratteristiche della geometria iperbolica, tra cui la dipendenza della somma degli angoli di un triangolo dalla struttura della superficie di cui fa parte e l'emergere di fenomeni strettamente connessi alla futura teoria dell'angolo di parallelismo elaborata da Lobačevskij.

Il terzo capitolo affronta la figura di Eugenio Beltrami, protagonista assoluto della matematica italiana dell'Ottocento e principale artefice della legittimazione matematica della geometria non euclidea. Se Bòlyai e Lobačevskij avevano dimostrato la coerenza della nuova geometria, fu Beltrami a fornire la prima interpretazione concreta dei suoi assiomi attraverso la costruzione di modelli geometrici espliciti.

La trattazione prende avvio dall'analisi del percorso biografico e scientifico del matematico, soffermandosi sui suoi primi lavori di geometria e sulle tradu-

zioni delle opere di Gauss. In particolare, vengono esaminati gli studi relativi alle rappresentazioni conformi delle superfici e alle trasformazioni che consentono di rappresentare le geodetiche mediante linee rette. Tali ricerche conducono Beltrami all'incontro con la teoria delle superfici a curvatura costante negativa e con i lavori di Minding e Codazzi, facendo emergere un profondo legame tra la geometria differenziale, materia inaugurata dalle *Disquisitiones generales circa superficies curvas* di Gauss, e la geometria non euclidea.

Il punto culminante di questo percorso è costituito dal *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* del 1868, nel quale Beltrami mostra che la geometria di Lobačevskij può essere realizzata come geometria intrinseca di una superficie a curvatura costante negativa. Attraverso questa interpretazione, la cosiddetta "geometria immaginaria" acquisisce una concreta rappresentazione matematica e viene elevata allo stesso livello di legittimità teorica della geometria euclidea. Il capitolo analizza dettagliatamente i contenuti del *Saggio*, soffermandosi inoltre sulle reazioni suscitate nella comunità scientifica europea. Attraverso lo studio della corrispondenza tra Eugenio Beltrami, Jules Hoüel e Hermann von Helmholtz vengono ricostruiti i dibattiti che accompagnarono la ricezione della nuova teoria e la progressiva evoluzione delle posizioni dello stesso Beltrami, che passò da un iniziale atteggiamento di prudente scetticismo a una piena adesione alle potenzialità della geometria non euclidea.

Un ruolo fondamentale in tale evoluzione è svolto dalla lettura della *Habilitationsvortrag* di Riemann. Le idee di Riemann consentono infatti a Beltrami di ampliare la propria riflessione oltre il caso delle superfici bidimensionali, giungendo alla formulazione della *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*. In quest'opera emerge con particolare evidenza la sua capacità di coniugare la tradizione gaussiana con le nuove prospettive introdotte dalla teoria delle varietà. Al tempo stesso, si manifesta uno dei problemi destinati a caratterizzare la successiva evoluzione della disciplina: la crescente difficoltà di associare un'intuizione geometrica immediata a strutture matematiche sempre più astratte e multidimensionali.

L'ultimo capitolo amplia l'orizzonte dell'indagine affrontando il tema dei modelli materiali e del loro ruolo nella produzione e trasmissione della conoscenza matematica tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo. In questo contesto, la Collezione dei Modelli Matematici dell'Università di Pavia costituisce una testimonianza privilegiata del rapporto tra teoria, visualizzazione e attività didattica.

L'elaborato mostra come la diffusione europea dei modelli materiali, favorita dall'opera di Felix Klein e Alexander Brill, abbia trasformato questi oggetti da semplici supporti didattici a veri e propri strumenti di ricerca. L'Italia partecipò attivamente a questo processo grazie al contributo di una vivace scuola di geometria differenziale e algebrica, all'interno della quale la figura di Beltrami occupa nuovamente una posizione pionieristica. Tra il 1869 e il 1872 egli realizzò infatti diversi modelli materiali della pseudosfera, utilizzandoli non soltanto per dare forma alle proprie teorie, ma anche come strumenti di indagine matematica.

Particolare attenzione viene dedicata al modello della pseudosfera conservato presso l'Università di Pavia e alle testimonianze documentarie che ne ac-

compagnarono la realizzazione. L'analisi delle lettere di Beltrami permette di evidenziare il valore attribuito alla costruzione materiale dei modelli e il ruolo che essi svolgevano nella comprensione dei fenomeni geometrici. Vengono inoltre esaminati i risultati maturati da Beltrami negli anni successivi, raccolti nei lavori *Teorema di geometria pseudosferica* e *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche*.

La parte conclusiva del capitolo si concentra infine su alcuni dei più significativi modelli conservati nella collezione pavese, tra cui i modelli di rotazione a curvatura negativa costante, la superficie di Vogel, ottenuta mediante un moto elicoidale, e la superficie di Bianchi. L'attenzione si sposta così sulla figura di Luigi Bianchi, la cui attività scientifica rappresenta uno degli sviluppi più maturi della tradizione geometrica italiana. Attraverso i suoi contributi pubblicati negli *Mathematische Annalen* e le sue ricerche sulle trasformazioni delle superfici, Bianchi contribuì in modo decisivo all'evoluzione della geometria differenziale e alla prosecuzione di quella linea di ricerca che, a partire dal problema delle parallele, aveva progressivamente trasformato la geometria.

Nel suo complesso, il presente lavoro intende dunque mostrare come la storia della geometria iperbolica non possa essere interpretata esclusivamente come la vicenda di una rivoluzione teorica. Essa costituisce piuttosto il risultato di una complessa interazione tra idee, persone, istituzioni e strumenti materiali. Da Saccheri a Beltrami, fino a Bianchi e alla cultura dei modelli matematici, il caso pavese offre un osservatorio privilegiato per comprendere come una delle più profonde trasformazioni della matematica moderna abbia preso forma attraverso un continuo dialogo fra ragionamento deduttivo e intuizione geometrica.

English Version

This thesis aims to reconstruct, from a historical and mathematical perspective, the long process that led to the birth of hyperbolic geometry and its gradual acceptance within modern scientific culture. Particular attention is devoted to the role played by scholars connected with the University of Pavia and to the specific contribution that the Pavia context made to the development of geometry between the eighteenth and twentieth centuries. The objective is not only to retrace the main stages in the emergence of non-Euclidean geometries, but also to show how they resulted from a complex historical process characterized by the interaction between mathematical research and educational innovation, which was also supported by the production of physical mathematical models.

Hyperbolic geometry represents one of the most significant turning points in the history of mathematics. For more than two millennia, Euclidean geometry was regarded not only as the paradigm of rigorous mathematical deduction, but also as the necessary and universal description of the structure of physical space. The crisis of this conception did not arise from a sudden discovery. Rather, it resulted from a long series of attempts to clarify or prove Euclid's so-called Fifth Postulate. The particular formulation of this axiom, more complex and less intuitive than the other postulates contained in the *Elements*, raised serious doubts from antiquity onward and led generations of mathematicians to question its actual nature and the possibility of deriving it from previous postulates.

The first chapter of the thesis is devoted to the reconstruction of this historical development. Starting from Euclid's text, it examines the principal attempts to prove the parallel postulate, following a path that crosses different periods and cultural traditions. From reflections in the Hellenistic age to the contributions of medieval Arabic and Persian mathematics, it becomes clear that the problem of parallels was one of the most persistent themes in the history of geometry. Particular attention is given to Omar Khayyam, who reformulated the problem in the context of an isosceles birectangular quadrilateral, thereby opening a line of research that would prove decisive for later developments.

The analysis continues through the contributions of Lambert and Legendre and reaches the turning point of the nineteenth century, when János Bolyai and Nikolai Ivanovich Lobachevsky realized that the negation of the parallel postulate did not necessarily lead to logical contradictions. For the first time, it became possible to conceive a consistent geometric system based on axioms different from those of the Euclidean tradition. The birth of hyperbolic geometry inaugurated a new phase in mathematics, in which geometric concepts moved beyond the traditional notion of space. Within this context, the chapter also examines the role of Carl Friedrich Gauss, whose reflections, although largely unpublished during his lifetime, contributed significantly to the maturation of the new theories.

The chapter concludes with an analysis of the theoretical systematization of the various geometries carried out during the second half of the nineteenth century, with particular reference to Felix Klein's *Erlangen Program*. Within

this framework, the different geometries are interpreted as specific realizations of a more general projective structure. The main models of hyperbolic geometry are then presented: the conformal Riemann-Beltrami-Poincaré disk model, the conformal Liouville-Beltrami half-plane model, and the projective Beltrami-Klein disk model. For completeness, the discussion also includes references to spherical geometry, which was often used as a point of comparison in the development of non-Euclidean theories.

The second chapter focuses on Giovanni Girolamo Saccheri, the Jesuit mathematician and professor at the University of Pavia whose work represents one of the most significant moments in the history of hyperbolic geometry. Saccheri occupies a unique position in the development of non-Euclidean geometries. Although his intention was to defend the validity of the Euclidean tradition, he ultimately developed some of the deepest results that anticipated the geometry of Lobachevsky and Bolyai.

After reconstructing his biography and the cultural context in which he worked, the chapter turns to the *Euclides ab omni naevo vindicatus*, published in 1733. In this work, Saccheri revisited the problem introduced by Khayyam and constructed what is now known as the Saccheri quadrilateral. Through a sophisticated proof by contradiction, he distinguished three possible hypotheses, the hypothesis of the right angle, the obtuse angle, and the acute angle, seeking to show that only the first could be compatible with a consistent geometry. While the hypothesis of the obtuse angle was quickly rejected, the analysis of the acute-angle hypothesis led Saccheri to remarkably modern results. Although he remained faithful to his original goal of defending Euclid, he anticipated several characteristic properties of hyperbolic geometry, including the dependence of the angle sum of a triangle on the structure of the surface to which it belongs and the appearance of phenomena closely related to the future theory of the angle of parallelism developed by Lobachevsky.

The third chapter examines Eugenio Beltrami, a leading figure in nineteenth-century Italian mathematics and the principal architect of the mathematical legitimization of non-Euclidean geometry. While Bolyai and Lobachevsky had demonstrated the consistency of the new geometry, it was Beltrami who provided the first concrete interpretation of its axioms through the construction of explicit geometric models.

The discussion begins with an analysis of Beltrami's biographical and scientific development, focusing on his early work in geometry and his translations of Gauss's writings. Particular attention is devoted to his studies of conformal representations of surfaces and of transformations that allow geodesics to be represented by straight lines. These investigations led Beltrami to the theory of surfaces of constant negative curvature and to the works of Minding and Codazzi, revealing a deep connection between differential geometry, whose foundations were laid by Gauss in the *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, and non-Euclidean geometry.

The culmination of this intellectual path is represented by the *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea* of 1868, in which Beltrami showed that Lobachevskian geometry could be realized as the intrinsic geometry of a surface with constant negative curvature. Through this interpretation, the so-

called "imaginary geometry" acquired a concrete mathematical representation and achieved the same level of theoretical legitimacy as Euclidean geometry. The chapter analyses the contents of the *Saggio* in detail and also examines the reactions it provoked within the European scientific community. Through a study of the correspondence between Eugenio Beltrami, Jules Hoüel, and Hermann von Helmholtz, the debates surrounding the reception of the new theory are reconstructed, as well as the gradual evolution of Beltrami's own position, which moved from an initially cautious skepticism to a full recognition of the potential of non-Euclidean geometry.

A fundamental role in this development was played by Beltrami's reading of Riemann's *Habilitationsvortrag*. Riemann's ideas enabled him to extend his reflections beyond the case of two-dimensional surfaces, leading to the formulation of the *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*. This work clearly demonstrates Beltrami's ability to combine the Gaussian tradition with the new perspectives introduced by the theory of manifolds. At the same time, it reveals one of the issues that would characterize the subsequent development of the discipline: the growing difficulty of associating immediate geometric intuition with increasingly abstract and multidimensional mathematical structures.

The final chapter broadens the scope of the investigation by addressing the theme of physical models and their role in the production and transmission of mathematical knowledge between the late nineteenth and the early twentieth century. In this context, the Collection of Mathematical Models of the University of Pavia provides a unique testimony to the relationship between theory, visualization, and teaching.

The thesis shows how the European spread of physical models, encouraged by the work of Felix Klein and Alexander Brill, transformed these objects from simple teaching aids into genuine research instruments. Italy participated actively in this process through the contribution of a vibrant school of differential and algebraic geometry, within which Beltrami once again occupied a pioneering position. Between 1869 and 1872, he produced several physical models of the pseudosphere, using them not only to give form to his theories but also as instruments of mathematical investigation.

Particular attention is devoted to the pseudosphere model preserved at the University of Pavia and to the documentary evidence accompanying its construction. The analysis of Beltrami's letters highlights the importance he attributed to the physical construction of models and the role these objects played in understanding geometric phenomena. The chapter also examines results achieved by Beltrami in subsequent years, collected in the works *Teorema di geometria pseudosferica* and *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche*.

The concluding section of the chapter focuses on some of the most significant models preserved in the Pavia collection, including models of surfaces of revolution with constant negative curvature, Vogel's surface, generated by a helical motion, and Bianchi's surface. Attention then shifts to Luigi Bianchi, whose scientific activity represents one of the most mature developments of the Italian geometric tradition. Through his contributions published in *Mathematische Annalen* and his research on surface transformations, Bianchi made

a decisive contribution to the development of differential geometry and to the continuation of the line of research that, beginning with the problem of parallels, had gradually transformed geometry itself.

Taken as a whole, this study seeks to show that the history of hyperbolic geometry cannot be interpreted solely as the story of a theoretical revolution. Rather, it was the result of a complex interaction among ideas, people, institutions, and material tools. From Saccheri to Beltrami, and from Bianchi to the culture of mathematical models, the case of Pavia offers a privileged perspective for understanding how one of the deepest transformations in modern mathematics took shape through a continuous dialogue between deductive reasoning and geometric intuition.

Indice

Abstract	4
1 La genesi della geometria non euclidea	14
1.1 Euclide e gli <i>Elementi</i>	14
1.2 I primi tentativi di dimostrazione del Postulato delle parallele . .	20
1.3 L'epoca d'oro islamica	23
1.4 La teoria delle parallele nel XVI secolo	32
1.5 Il <i>precursore italiano</i> della geometria iperbolica	34
1.6 Verso il cambio di paradigma del XIX secolo	36
1.6.1 János Bolyai	37
1.6.2 Nicolaj Ivanovič Lobačevskij	42
1.6.3 Carl Friedrich Gauss	51
1.7 Dalla legittimazione della geometria iperbolica alla sistematizza- zione delle geometrie	61
1.8 I modelli della geometria iperbolica	64
1.8.1 Modello del disco di Poincaré	64
1.8.2 Modello del semipiano di Poincaré	70
1.8.3 Modello proiettivo di Beltrami-Klein	72
1.8.4 Modello della geometria sferica	76
2 Giovanni Girolamo Saccheri	79
2.1 <i>L'Euclides ab omni naevo vindicatus</i>	80
2.2 Il quadrilatero di Saccheri	81
2.3 Le tre <i>hypotesis anguli</i>	85
2.4 La falsità dell'ipotesi dell'angolo ottuso	90
2.5 <i>L'inimicam anguli acuti hypotesim</i>	96
2.6 La seconda parte del primo libro	109
2.7 La riscoperta di Saccheri	115
3 Eugenio Beltrami	118
3.1 La vita di Beltrami	119
3.2 Il problema delle carte geografiche	122
3.3 Il <i>Saggio</i> del 1868	134
3.4 Le critiche al <i>Saggio</i>	154
3.4.1 Le obiezioni di Genocchi	157
3.4.2 La controversia con Helmholtz	160

3.5	La formazione delle idee alla base del <i>Saggio</i>	163
3.6	L' <i>Habilitationsvortrag</i> di Riemann	170
3.7	La <i>Teoria fondamentale</i> del 1869	175
3.8	Il consolidamento delle idee di Beltrami	186
4	La matematica delle collezioni di modelli	193
4.1	Klein, Brill e la diffusione dei modelli	195
4.2	La collezione di Pavia	200
4.3	Eugenio Beltrami artigiano della pseudosfera	203
4.3.1	La cuffia di Beltrami a Pavia	208
4.3.2	Le implicazioni teoriche del modello della pseudosfera	216
4.4	I modelli derivati dagli studi di Beltrami	220
4.4.1	Il modello di Bacharach della pseudosfera	221
4.4.2	Il modello di Bacharach della superficie a curvatura costante negativa di tipo conico	230
4.4.3	Il modello di Dyck della superficie a curvatura costante negativa di tipo iperbolico	236
4.5	La superficie elicoidale a curvatura costante negativa di Vogel	248
4.6	Dopo Beltrami: i lavori di Luigi Bianchi	250
4.6.1	Il lavoro di Luigi Bianchi sugli <i>Annalen</i>	252
4.6.2	La superficie di Kuen secondo la teoria di Bianchi	257
	Conclusione	271
A	Gli Elementi di Euclide: I.1–I.26	274
B	Le <i>Disquisitiones generales</i> di Gauss	277
B.1	La rappresentazione delle superfici	277
B.2	La prima forma fondamentale	279
B.3	La seconda forma fondamentale	280
B.4	La misura di curvatura di una superficie	280
B.5	Il <i>Theorema Egregium</i>	281
B.6	Geodetiche, coordinate geodetiche e triangoli geodetici	282
C	I fondamenti della geometria di Hilbert	284
D	Le lettere di Beltrami a Manganotti	288
D.1	La lettera del 23 maggio 1889	288
D.2	La lettera del 9 gennaio 1891	290
E	Una lettera di Cassani a Manganotti	292
E.1	La lettera del 25 agosto 1903	293
F	Bianchi negli <i>Annalen</i>	295

Capitolo 1

La genesi della geometria non euclidea

La questione dell'origine e dello sviluppo delle geometrie non euclidee rappresenta uno dei più radicali mutamenti di paradigma nella storia del pensiero matematico. Essa infatti non scaturisce da un'improvvisa intuizione creativa, ma è l'esito di un lungo processo critico durato oltre due millenni, incentrato sull'analisi dei fondamenti della geometria classica. Questo percorso, nato dall'esigenza di purificare la struttura assiomatica della geometria, ha finito per scardinarne l'unicità, permettendo la fioritura di geometrie alternative alla geometria euclidea.

Il nucleo del problema si può ricondurre proprio al primo tentativo di definizione della struttura assiomatico-deduttiva della geometria presente negli *Elementi* di Euclide. Tra i cinque postulati dell'opera greca, sfruttati dall'autore come base per tutto il discorso successivo, l'ultimo, dedicato alla questione del parallelismo tra rette, risulta meno intuitivo e immediato: la sua formulazione prolissa e la sua natura non puramente locale lo fanno apparire, agli occhi dello stesso Euclide e dei suoi successori, più simile a un teorema che a un principio primo. Da qui deriva lo sforzo millenario di dimostrarlo deducendolo dai primi quattro postulati.

Ripercorriamo, a partire dall'opera di Euclide, i tratti salienti di questo lungo percorso, fino ad arrivare alla struttura delle geometrie non euclidee così come le conosciamo oggi.

1.1 Euclide e gli *Elementi*

Pur non essendo l'iniziatore della geometria greca, **Euclide** è indubbiamente la figura fondamentale per la sistematizzazione delle conoscenze geometriche sviluppate dai greci: egli, infatti, è l'autore degli *Elementi*, il trattato definito *un punto d'arrivo e un punto di partenza* [31] per la geometria e la matematica greca. L'opera, un'accurata e organica presentazione delle proposizioni teoriche alla base del pensiero geometrico greco [64], fu composta intorno al 300 a.C. e rappresenta la sintesi, sistematizzata e rielaborata, degli studi dei matematici greci dei secoli precedenti. D'altro canto, il testo costituì negli anni successivi

anche la base essenziale sia per le ricerche di carattere superiore portate avanti dagli immediati successori di Euclide, che non dovettero così più occuparsi di questioni "elementari" già risolte e chiarite dall'autore, sia per l'insegnamento scolastico e accademico nella maggior parte dei paesi occidentali fino alla fine del 1900.

Non è possibile fornire una biografia di Euclide, in quanto le poche informazioni note riguardanti la sua vita sono legate quasi esclusivamente al testo più famoso da lui composto, tanto che egli in antichità era noto con l'epiteto di "compositore degli Elementi". Già Proclo (412-485), autore di un *Commentario sul primo Libro degli Elementi di Euclide*, afferma di poter solamente ricostruire in maniera indiretta il periodo di composizione degli *Elementi*: la loro scrittura risulta precedente a quella delle opere di Archimede, in quanto lo stesso Archimede menziona gli *Elementi* di Euclide, e successiva ai *Libri analitici* di Aristotele, che contengono una critica alla teoria delle parallele incompatibile con il testo di Euclide (e riferita quindi a compositori di *Elementi* precedenti a Euclide); poiché Euclide era un discepolo di Platone (filosofo che morì nel 347 a.C.) mentre Aristotele morì nel 322 a.C. e Archimede visse tra il 287 a.C. e il 212 a.C., si può assumere con buona approssimazione la data del 300 a.C. come convenzionale per la composizione degli *Elementi* e la maturità dello stesso Euclide. Per quanto riguarda la città dove Euclide operò, si può fare riferimento alle *Collectiones Mathematicae* di Pappo, dove l'autore greco è citato come "Euclide di Alessandria"; ed è possibile affermare dunque che ad Alessandria d'Egitto, durante il regno di Tolomeo I, Euclide abbia fondato una scuola. Le nozioni legate alla vita di Euclide sono tratte da [31].

Gli *Elementi* sono organizzati in 13 libri, in cui sono trattati argomenti di geometria e aritmetica. Alcuni problemi geometrici sono equivalenti a problemi risolvibili con equazioni di secondo grado, ma ciò non autorizza a parlare di algebra presente nel testo euclideo. Di fondamentale importanza è il carattere strettamente teorico dell'opera: nel testo Euclide non riporta né esempi né regole di misura o di calcolo, ma si limita a strutturare i presupposti teorici dei risultati organizzandoli rigorosamente a partire da assunti precedenti. In questo senso, il testo può essere visto come un gigantesco sistema di lemmi (intesi come risultati propedeutici) su cui è possibile fondare l'intera geometria euclidea. Altro aspetto interessante dell'opera, messo in evidenza da Pappo nelle sue *Collectiones Mathematicae*, è la volontà di Euclide di mantenere tracce degli autori precedenti: è così possibile ricondurre a Ippocrate di Chio i risultati dei libri I-IV e XI; ai Pitagorici i risultati aritmetici presenti nei libri VII-IX; a Eudosso di Cnido la teoria delle proporzioni del libro V e la teoria delle similitudini del libro VI, oltre al metodo di esaustione del libro XII; a Teeteto ateniese il lavoro riguardante gli irrazionali quadratici del libro X e dei poliedri regolari del libro XIII [62, p. 35].

Il livello di sistematicità dell'opera si apprezza già a partire dall'impostazione: fin nel libro I infatti Euclide elenca i principi su cui i suoi risultati si appoggeranno. Tali principi sono articolati in tre livelli: *termini* (*οροι*), *postulati* (*αιτηματα*) e *nozioni comuni* (*κοιναι εννοιαι*). I *termini* sono le definizioni di tutti gli enti geometrici o aritmetici presenti nella trattazione, i *postulati* sono assunti (quindi proposizioni non dimostrate) che rappresentano

le richieste minimali da porre come fondamento del discorso e le *nozioni comuni* sono ulteriori proposizioni indimostrate considerate in comune con altre scienze [31]. Vediamo nel dettaglio queste tre categorie.

I termini sono 23 e hanno lo scopo di identificare e descrivere gli oggetti con cui si lavorerà: nel rispetto della visione platonica essi non vengono "costruiti" ma devono solamente essere "riconoscibili", in quanto tali enti geometrici secondo Euclide esistono già. L'idealizzazione della geometria negli *Elementi* ha inizio proprio da questo approccio. Presentiamo, di seguito, l'elenco completo dei termini.

- I. Punto è ciò che non ha parti.
- II. Linea è lunghezza senza larghezza.
- III. Estremi di una linea sono punti¹.
- IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti).
- V. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
- VI. Estremi di una superficie sono linee.
- VII. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa (cioè, alle sue rette).
- VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciono in linea retta².
- IX. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo.
- X. Quando una retta innalzata su una [altra] retta forma gli angoli e adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata.
- XI. Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.
- XII. Angolo acuto è quello minore di un retto.
- XIII. Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.
- XIV. Figura è ciò che è compreso da uno o più termini.
- XV. Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea [, cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.

¹Si noti che negli *Elementi* la linea è considerata come terminata, con la proprietà di prolungarsi ad arbitrio. Quando dunque nel trattato si trova la locuzione "linea retta", si fa riferimento ad un segmento di retta.

²Euclide considera come angoli una categoria più ampia rispetto alla definizione moderna: negli *Elementi* gli angoli sono compresi tra due linee qualsiasi e non solo tra due linee rette.

- XVI. Quel punto si chiama centro del cerchio.
- XVII. Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.
- XVIII. Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.
- XIX. Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatera quelle comprese da tre rette, quadrilatera quelle comprese da quattro, e multilatera quelle comprese da più di quattro rette.
- XX. Delle figure trilatera, è triangolo equilatero quello che ha tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha tre lati disuguali.
- XXI. Infine, delle figure trilatera, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.
- XXII. Delle figure quadrilatera, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatera oltre a queste si chiamino trapezi³.
- XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

I postulati sono 5, un numero molto ridotto, ad indicare la volontà di Euclide di ridurre al minimo le richieste iniziali. I primi tre sono chiamati *assiomi di costruzione* e rappresentano richieste di esistenza per rette e cerchi. Il quarto è identificabile come una richiesta di omogeneità, cioè di invarianza delle figure, e il quinto è il noto Postulato delle parallele, problematico fin dal suo linguaggio.

1. Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.
2. E che una retta terminata (= finita) si possa prolungare continuamente in linea retta⁴.

³Dunque il termine "trapezio" non ha lo stesso significato che gli attribuiamo oggi: Euclide considera trapezi tutti i quadrilateri che non sono quadrati, rettangoli, rombi o romboidi.

⁴Tale postulato attribuisce alla linea retta il carattere di linea aperta, cioè di linea prolungabile senza che si chiuda su sé stessa [31]; ciò, secondo Attilio Frajese, permette di escludere la geometria sferica.

3. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio).
4. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro⁵.
5. E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti).

Mentre i primi quattro postulati risultano brevi e intuitivi e descrivono costruzioni geometriche semplici, il V postulato, detto Postulato delle parallele, ha caratteristiche più complesse: esso appare come un teorema nella sua scrittura e manca dell'evidenza immediata, in quanto richiede di immaginare il comportamento delle rette all'infinito. Ciononostante, questo V postulato è la base usata da Euclide per rendere rigorosa la sua teoria delle parallele; perciò esso viene descritto in come *la più valida finezza logica di Euclide, il quale rifiuta qui con massima energia di cedere alle lusinghe dell'intuizione* [31]. La teoria delle parallele sviluppata nel libro I degli *Elementi* è costituita fondamentalmente da due teoremi, uno l'inverso dell'altro. Il primo teorema (esposto nelle Proposizioni 27 e 28 del libro I degli *Elementi*, citate nell'Appendice A) afferma che se due rette, tagliate da una trasversale, formano con essa angoli alterni (interni o esterni) uguali o angoli corrispondenti uguali o angoli coniugati interni supplementari, allora le due rette, pur giacendo sullo stesso piano, non si incontrano. Euclide riesce a dimostrare tale teorema utilizzando solo i primi 4 postulati e le loro conseguenze, ma nel momento in cui si cimenta nella dimostrazione del teorema inverso (proposizione 29 del libro I), cioè quello che scambia tra loro ipotesi e tesi precedenti, si trova davanti un limite invalicabile che lo costringe a enunciare questo "teorema inverso" come postulato, generando il Postulato delle parallele. In realtà, infatti, il V postulato e il "teorema inverso", cioè la proposizione 29 del libro I, sono tra loro logicamente equivalenti. Si trova una giustificazione puntuale a tale affermazione in [31, pp. 52–54].

Oggi sappiamo che la difficoltà dimostrativa riscontrata da Euclide è giustificata dal fatto che il V postulato è indimostrabile: dimostrare il V postulato, infatti, significherebbe costruire una nuova geometria formata dalle prime 28 proposizioni del libro I degli *Elementi* e dalla negazione del V postulato e mostrare che tale sistema sia contraddittorio; ma così facendo, invece di creare un sistema contraddittorio, si strutturano le geometrie non euclidee. Il concetto si riassume perfettamente nella seguente frase [31, p. 56]:

È appunto la perfetta coerenza delle geometrie non-euclidee che fornisce la prova della indimostrabilità del quinto postulato di Euclide.

Prima di concentrarci sui tentativi di dimostrare il V postulato e sulla nascita delle geometrie non euclidee, concludiamo il discorso legato ai principi su cui

⁵È invece questo, seguendo l'interpretazione di Ivan Nikolaevic Veselovskij in [62], l'assioma che permette di escludere la possibilità della trigonometria sferica: infatti, in geometria sferica, gli angoli retti tra uno stesso meridiano e paralleli differenti sono diversi.

si fondano gli *Elementi*. Dopo i 5 postulati, Euclide elenca le nozioni comuni: si tratta di 9 considerazioni in linguaggio non tecnico che furono ridotte a 5 dallo studioso Johan Ludvig Heiberg, che escluse le nozioni *IV*, *V*, *VI* e *IX*, considerandole superflue (indichiamo tra parentesi quadre le nozioni comuni rimosse da Heiberg).

- I. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro⁶.
- II. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.
- III. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.
- [IV. E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali.]
- [V. E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro.]
- [VI. E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro.]
- VII. E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.
- VIII. Ed il tutto è maggiore della parte⁷.
- [IX. E se cose uguali sono sottratte da cose disuguali, i resti sono disuguali.]

In queste nozioni comuni si trovano in nuce i concetti, in parte sviluppati nei libri successivi degli *Elementi*, utili per isolare alcuni principi come il *Postulato di Eudosso-Archimede*⁸, l'*Assioma di continuità di Dedekind*⁹ e l'*Assioma di Pasch*¹⁰.

⁶Euclide con il termine "uguale" intende l'uguaglianza di grandezza: così per i poligoni si tratta di equivalenza, mentre per i segmenti di congruenza.

⁷Tale assunto è una caratteristica propria degli insiemi finiti, mentre negli insiemi infiniti non vale più. Accettando tale risultato infatti si incorrerebbe nel *Paradosso dell'infinito*: Galileo presenta il problema nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, osservando che è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei loro quadrati, associando a ogni numero naturale il suo quadrato e viceversa; in tal modo però si pone in corrispondenza biunivoca un insieme e un suo sottoinsieme proprio, negando la nozione comune *VIII*. Dedekind definirà un insieme infinito proprio sfruttando questa proprietà: *un insieme è infinito quando e soltanto quando può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria*.

⁸Date due grandezze omogenee A e B , con $A < B$, se da B si toglie almeno la sua metà, dalla parte residua almeno la sua metà, e così di seguito, dopo un numero finito di passi si ottiene una parte residua più piccola di A .

⁹Se i punti di una retta sono divisi in due insiemi A e B , tali che ogni punto $a \in A$ precede ogni punto $b \in B$, esiste un punto p che segue ogni a e precede ogni b , e si comporta dunque da elemento separatore dei due insiemi A e B , dovendo appartenere o all'uno o all'altro di essi.

¹⁰Dati in un piano tre punti non allineati A , B , C e una retta r , se r contiene un punto del segmento AB , allora r contiene anche un punto di uno dei due segmenti AC e BC , oppure contiene il loro punto comune.

1.2 I primi tentativi di dimostrazione del Postulato delle parallele

La complessità logica e lessicale del V postulato e, a posteriori, la mancanza di una risoluzione soddisfacente nella teoria delle parallele portò molti a interrogarsi circa la dimostrabilità del postulato stesso. Sembra che già **Archimede**, qualche decennio dopo la pubblicazione degli *Elementi*, abbia affrontato la questione in un trattato, oggi perduto, dal titolo *Sulle rette parallele* [62, p. 40].

Nel suo *Commentario sul primo Libro degli Elementi di Euclide* Proclo, vissuto nel V secolo d.C., prima di proporre la propria dimostrazione del V postulato, riferisce circa altri due tentativi di dedurlo attribuiti a Poseidonio, vissuto nel II secolo a.C., e a Tolomeo, vissuto nel II secolo d. C. **Poseidonio** basa il suo ragionamento su una definizione di rette parallele in termini di equidistanza e dunque diversa da quella euclidea [62, p. 41].

Definizione 1.1 (Rette parallele, Poseidonio). Rette parallele sono rette nello stesso piano che non si avvicinano né si allontanano, in modo che tutte le perpendicolari condotte dai punti di una all'altra siano uguali.

Tale definizione di rette parallele, basata sull'assunto che il luogo dei punti equidistanti da una retta e dalla stessa parte rispetto ad essa sia una retta, contiene un'affermazione equivalente al Postulato delle parallele (infatti, nella geometria di Lobačevskij, tale luogo geometrico non è una retta) e dunque non ne costituisce una dimostrazione. **Tolomeo**, d'altra parte, tenta di dimostrare che se due parallele sono tagliate da una trasversale, allora la somma delle ampiezze degli angoli coniugati interni è pari all'ampiezza di due angoli retti; ma anche questo risultato è equivalente al postulato che si sta cercando di dimostrare.

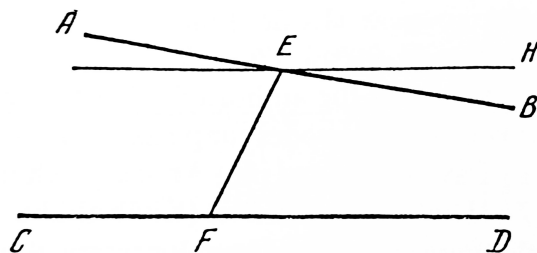


Figura 1.1

Infine, **Proclo** propone una dimostrazione basata su un assioma di Aristotele secondo cui *se due rette che formano un angolo sono prolungate all'infinito, la loro distanza supererà ogni grandezza finita*. Egli considera due rette AB e CD e una trasversale EF che forma con esse angoli coniugati interni $\angle BEF$ e $\angle EFD$ le cui ampiezze hanno somma inferiore a due angoli retti (Figura 1.1); una volta condotta la retta EH, parallela a CD e passante per il punto E, Proclo afferma che, dal momento che la distanza tra i punti sui lati dell'angolo

$\angle BEH$ può essere resa arbitrariamente grande allontanandosi da E , essa debba necessariamente superare la distanza tra le parallele CD ed EH . Di conseguenza, il lato EB del triangolo $\triangle EBH$ deve necessariamente intersecare la retta CD e dunque CD e AB si intersecano. La dimostrazione non è risolutiva poiché l'autore sta implicitamente assumendo che la distanza tra due rette parallele resti sempre limitata, assunto equivalente al V postulato [64, pp. 118–119].

Una definizione di rette parallele simile a quella di Poseidonio è proposta da **Aghānis**, studioso bizantino di origine armena vissuto anch'egli nel V secolo d.C., e riportata da Simplicio nel *Commentario agli Elementi di Euclide*: tale definizione, basata sull'equidistanza, è la base della struttura dimostrativa del V postulato realizzata da Aghānis [64, p. 119].

Definizione 1.2 (Rette parallele, Aghānis). Definiamo rette parallele le rette che sono nello stesso piano e tali che, se le si prolunga indefinitamente in entrambe le direzioni, la loro distanza resta sempre la stessa; la distanza è il segmento più corto che le congiunge.

Egli organizza la dimostrazione in quattro proposizioni, con l'obiettivo di costruire un quadrilatero con quattro angoli retti: date due rette AB e CD , si tracci la perpendicolare EG ad AB (Figura 1.2 a). Scelto un punto F su CD Aghānis traccia la perpendicolare FI a EG e sfrutta l'Assioma di Eudosso-Archimede per dire che, bisecando un numero abbastanza grande di volte il segmento EG , si può trovare M tale che $EM > EI$; a questo punto egli traccia da M la perpendicolare MN a EG e su CD riporta il segmento GQ tale che $GQ : GN = EG : GM$. Ciò permette di dedurre che $Q \in AB$ e dà la possibilità di costruire, fissato il punto A , il rettangolo con lato EG e diagonale GQ [64]. La costruzione appena realizzata è applicabile anche al caso in cui la trasversale EG non sia perpendicolare di AB (Figura 1.2 b), considerando parallelogrammi invece di rettangoli. Si noti che Aghānis considera la possibilità di costruire triangoli simili, fatto equivalente a sua volta al V postulato.

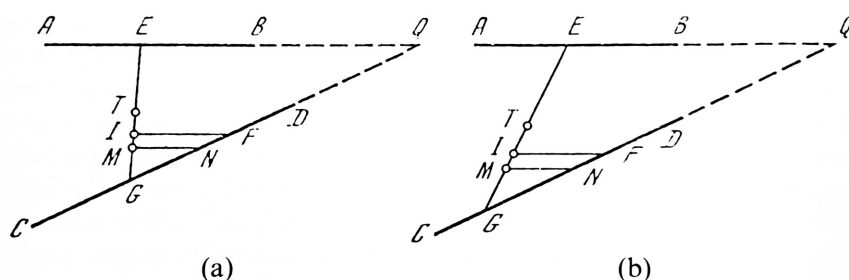


Figura 1.2

Inoltre, egli parte da una definizione di rette parallele per cui non è possibile raggiungere l'obiettivo auspicato.

Nel VI secolo d.C., anche il filosofo e matematico **Simplicio** si cimentò in un tentativo di dimostrazione del Postulato delle parallele: abbiamo testimonianza indiretta di ciò in una lettera scritta dal matematico egiziano Alam al-Dīn

Qaysar al-Hanafī all'astronomo e matematico persiano Nasīr al-Dīn al-Tūsī, in cui è descritta la dimostrazione di Simplicio nei suoi punti principali. Simplicio, secondo Al-Hanafī, utilizza il seguente lemma: *se una retta che interseca due rette forma i due angoli coniugati interni uguali a meno di due angoli retti, allora le due rette, se prolungate su quel lato, si incontreranno*. La dimostrazione di questo risultato parte dalla considerazione per cui ogni angolo può avere corde di lunghezza crescente condotte tra i propri lati, ognuna delle quali stacca sui lati dell'angolo segmenti uguali; considerate le rette AC e BD tagliate dalla retta AB (Figura 1.3), se l'angolo $\angle CAB$ è retto e l'angolo $\angle ABD$ è acuto, allora le rette AC e BD si incontreranno dalla parte di C e D . Costruendo sul punto B un angolo $\angle ABG$ uguale all'angolo $\angle ABD$, esistono (per l'osservazione iniziale) infinite corde di lunghezza crescente che sottendono l'angolo $\angle DBG$; allora almeno una delle corde, sia DEG cadrà oltre il punto A . Dato che i due angoli $\angle DEB$ e $\angle CAB$ sono retti, le rette AC ed ED non possono incontrarsi e dunque la retta AC incontrerà sicuramente la retta BD [62, pp. 44–45].

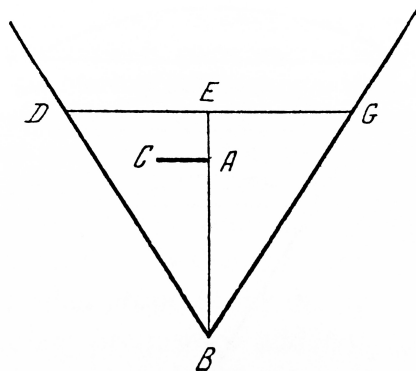


Figura 1.3

Il problema di questa dimostrazione è che Simplicio assume valido un risultato equivalente al V postulato: egli suppone che, siccome in un angolo si possono tracciare infinite corde che staccano dai suoi lati segmenti uguali, allora per ogni punto interno dell'angolo si possono condurre corde con questa proprietà che cadono oltre il punto in questione. Sebbene sia vero che nella geometria in cui non vale il Postulato delle parallele, cioè la geometria di Lobačevskij, è ancora possibile tracciare infinite corde interne a un angolo che staccano segmenti uguali sui lati dell'angolo stesso, è anche vero che, in tale geometria, ci sono punti interni all'angolo che risultano essere esterni a tutte le corde tracciate; tali punti sono i punti interni all'angolo che si trovano dalla parte opposta della retta che è considerata parallela nel senso di Lobačevskij a entrambi i lati dell'angolo. Ciò significa che l'assunto di Simplicio è equivalente all'assioma delle parallele [62, p. 45].

1.3 L'epoca d'oro islamica

Tra l'VIII e il XIII secolo, nel mondo islamico si assistette a un imponente movimento di traduzione del sapere greco, messo in atto non solo per conservarlo ma anche per effettuarne una rielaborazione critica; è appunto grazie a questa imponente opera che sono giunte fino a noi alcune delle dimostrazioni precedenti come quella di Aghānis o di Simplicio. L'epicentro culturale di tale periodo, detto "epoca d'oro islamica", fu Baghdad con la celebre *Bayt al-Hikma*, la Casa della Sapienza, una delle più importanti istituzioni culturali di tutto il mondo arabo-persiano: vi fu, tra le altre, anche la traduzione degli *Elementi* di Euclide, eseguita da studiosi come al-Haḡḡāḡ ibn Yūsuf ibn Matar e perfezionata da Ishāq ibn Hunayn. L'interesse per i problemi di natura matematica era stimolato anche dalla religione islamica, che poneva problemi di natura pratica non indifferenti, come la determinazione dell'esatta direzione della Mecca da qualsiasi punto del vasto impero o la necessità di calcolare le fasi lunari e gli orari esatti delle preghiere in base alle ombre solari.

Confrontando diverse versioni manoscritte dei testi provenienti dalla Grecia e dalla Siria, questi studiosi notarono numerose discrepanze e poterono individuare le debolezze logiche dell'opera euclidea, tra cui la natura sospetta del V postulato. Gli studiosi islamici svilupparono quindi dei veri e propri commenti critici, in cui emendavano le stesse opere che traducevano, cercando comunque di salvare la coerenza della geometria di Euclide, considerata il modello di ragionamento logico.

Per quanto riguarda il metodo, in questo periodo ci fu un notevole cambio concettuale relativamente alla questione delle parallele; l'attenzione fu concentrata non più sullo studio della posizione reciproca tra rette, ma sull'analisi degli angoli interni di un quadrilatero birettangolo. In questo modo fu possibile eliminare il forte disagio generato dal concetto di "infinito attuale", localizzando il problema all'interno di una figura geometrica chiusa e finita.

Il primo tentativo originale di dimostrazione del V postulato ad opera di un matematico arabo appartiene allo studioso Abbās ibn Saʿīd **al-Jawharī**, attivo a Baghdad nel IX secolo d.C., ed è presente nell'opera *Miglioramento del libro degli "Elementi"*. Il testo è sopravvissuto grazie a Nasīr al-Dīn al-Tūsī, che lo riportò in un suo lavoro successivo, e poggia anch'esso sull'Assioma di Eudosso-Archimede. Al-Jawharī dimostra, tra le altre cose, che le rette parallele sono equidistanti, ma implicitamente presuppone che se una retta interseca altre due rette con angoli alterni interni uguali, anche qualsiasi altra retta che le intersechi avrà angoli alterni interni uguali. Dimostrò quindi il Postulato delle parallele partendo da un risultato equivalente [62, pp. 46–47].

Successivamente lo scienziato arabo Thābit ibn **Qurra**, sempre vissuto nel IX secolo d.C., propose una dimostrazione del Postulato delle parallele che fa uso del moto rigido. L'uso del movimento per dimostrare risultati di geometria era stato evitato il più possibile da Euclide e osteggiato profondamente da Aristotele, secondo cui *gli oggetti della matematica, ad eccezione di quelli dell'astronomia, appartengono alla classe di cose prive di movimento* [62, p. 52]; al contrario Qurra sostiene che sia possibile dimostrare molte delle prime proposizioni degli *Elementi* muovendo *una delle due cose da misurare rispetto al-*

l'altra, spostandola dal suo posto e trasferendola nella nostra immaginazione senza cambiarne la forma grazie al movimento, in modo da collocarla con la sua forma [inalterata] nella posizione dove deve essere misurata [62, p. 52].

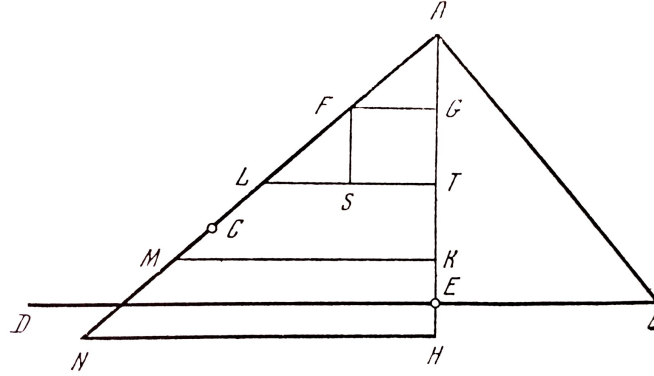


Figura 1.4

Dopo aver definito la traslazione, Qurra sfrutta considerazioni cinematiche per dimostrare l'esistenza dei rettangoli e affronta la dimostrazione del postulato: dalle estremità di un segmento AB egli traccia (Figura 1.4) due rette AC e BD in modo che la somma degli angoli $\angle BAC$ e $\angle ABD$ sia minore di due angoli retti. Per dimostrare che le rette AC e BD si incontrano nella parte contenente C e D , Qurra osserva che necessariamente uno dei due angoli $\angle BAC$ e $\angle ABD$, per esempio $\angle ABD$, deve essere minore di un angolo retto. Da A si tracci la perpendicolare AE a BD e si scelga un punto F su AC : da F sia tracciata FG perpendicolare ad AE . Poiché AG e AE sono finite e $AG < AE$, è possibile utilizzare il Postulato di Eudosso-Archimede per trovare un multiplo AH di AG tale che $AE < AH$. Si considerino ora su AH i segmenti $GT = TK = KH$ tutti uguali ad AG e su AC , eventualmente prolungato oltre C , un ugual numero di segmenti $FL = LM = MN$ tutti uguali ad AF ; tracciata da T la perpendicolare TS ad AE e da F la perpendicolare FS a ST , Qurra osserva che FS è perpendicolare a FG e tale che $FS = GT = AG$. Allora, dato che $\angle GFS$ è retto e $\angle AFG$ è minore di un angolo retto in quanto non è possibile ci siano due angoli retti in uno stesso triangolo, FL è esterno alla regione compresa tra FS e GT . Osservando che FG interseca sia AT sia FS ed è perpendicolare a entrambi, per la Proposizione I.27 degli *Elementi* AG e FS sono parallele e dunque $\angle LFS = \angle FAG$. Avendo mostrato allora che $AG = FS$, $AF = FL$ e $\angle LFS = \angle FAG$ i triangoli $\triangle AFG$ e $\triangle LFS$ sono congruenti; con ciò è possibile concludere che, poiché anche $\angle FSL$, $\angle AGF$ e $\angle FST$ sono retti, i punti T , S e L sono allineati e quindi TL è perpendicolare ad AH . Allo stesso modo si mostra che KM e NH sono perpendicolari ad AH e quindi in particolare $\angle AHN$ è retto e perciò le rette HN e BD sono tagliate dalla trasversale AH che forma angoli interni uguali; ciò implica che le rette BD e HN sono parallele e non possono incontrarsi e quindi, siccome HN incontra AC in N , l'unica possibilità è che AC intersechi anche BD [62, pp. 54–56].

Dal momento che Qurra basa la sua dimostrazione sull'ipotesi che se due rette divergono in una direzione allora convergono necessariamente nell'altra, affermazione equivalente al V postulato, siamo ancora di fronte a un ragionamento circolare. Come tutti i tentativi di dimostrazione considerati finora, anche questo è dunque affetto dalla *petitio principii*, un errore logico descritto da Aristotele nell'opera *Analytica Priora* che si manifesta con l'uso implicito di un'asserzione equivalente a quella che si sta dimostrando. Per trovare una dimostrazione del Postulato delle parallele che non sia basata sulla *petitio principii* è necessario aspettare Omar-i Khayyām, che porterà con sé anche l'innovativa idea di studiare le proprietà di un quadrilatero birettangolo.

Poco prima di Khayyām, anche Abū 'Alī al-Hasan ibn al-Hasan Ibn **al-Haitham**, fisico, matematico e astronomo egiziano vissuto tra il X e l'XI secolo, cercò di dimostrare il V postulato di Euclide introducendo una definizione di rette parallele fondata sul concetto di equidistanza [60, p. 276]. Come già nel lavoro di Qurra, il punto centrale della sua argomentazione è la dimostrazione dell'esistenza del rettangolo. Tale risultato viene fatto discendere dall'esistenza di rette equidistanti, la cui validità è giustificata mediante argomenti di carattere cinematico analoghi a quelli impiegati da Qurra. La dimostrazione si concentra sull'analisi di un quadrilatero con tre angoli retti, considerando le tre possibili configurazioni del quarto angolo-retto, acuto o ottuso-e mostrando l'impossibilità delle ultime due ipotesi. Questo quadrilatero, insieme alle tre ipotesi formulate sul suo quarto angolo, ha assunto un ruolo di grande importanza nella storia della geometria non euclidea: esso è oggi comunemente noto come "Quadrilatero di Lambert", dal nome del matematico del XVIII secolo che ne riprese e approfondì lo studio [62, p. 59].

Astronomo, matematico e poeta persiano, Omar-i **Khayyām** (1044-1123 circa) nacque nel Khorāsān, una regione dell'attuale Iran, e lavorò in diverse città dell'Impero Selgiuchide come Samarcanda, Bukhārā e Esfahān. Molto celebre per le sue *rubā iyyāt* (quartine) persiane, egli completò nel 1077 il *Commentario sulle difficoltà di certi postulati dell'opera di Euclide*, dove cercò di emendare e rettificare quelle che considerava le difficoltà più significative riscontrate negli *Elementi* di Euclide. Il testo, organizzato in tre libri, affronta nel primo libro la teoria delle parallele, nel secondo i concetti di rapporto e proporzionalità, e nel terzo la composizione dei rapporti.

Al contrario di quanto fatto dai suoi immediati predecessori, Khayyām si allinea alle posizioni filosofiche aristoteliche, ripudiando l'uso del movimento in geometria e cercando di ottenere la dimostrazione del V postulato come conseguenza diretta delle definizioni di retta e angolo. Nella parte del suo trattato dedicata alla teoria delle parallele, egli si propone di dimostrare la Proposizione I.29 degli *Elementi* e il V postulato, ma ciò che rende il suo tentativo particolarmente interessante è la posizione filosofica in merito.

Khayyām spiega che i tentativi dei suoi predecessori di dimostrare il Postulato delle parallele furono insoddisfacenti perché ognuno di loro aveva ammesso qualcosa di equivalente al postulato stesso; non solo: egli valuta l'errore di tali autori come ancora più profondo, poiché essi trascurarono i principi sanciti da Aristotele nei suoi scritti. Khayyām sostiene che il V postulato, indubbiamente vero, debba essere effettivamente dimostrato partendo da questi principi, che

sono una diretta conseguenza delle nozioni stesse di retta e angolo rettilineo e che per questo devono essere accettati senza dimostrazione.

Il primo libro del trattato di Khayyām, quello dedicato alla teoria delle parallele, è composto da due parti distinte che egli ha intrecciato, ma che ci chiede di distinguere: da un lato vengono presentati i principi che precedono la geometria e sono legati alla filosofia; dall'altro sono discusse otto proposizioni geometriche che dovrebbero idealmente sostituire le proposizioni 29-36 del Libro I degli *Elementi* di Euclide.

Nella parte filosofica dell'opera sono contenute le "verità prime" secondo l'autore, che non possono essere dimostrate geometricamente senza introdurre una *petitio principii*. Vengono innanzitutto identificati i principi di carattere generale di rette e grandezze nelle tre seguenti asserzioni [62, p. 38], tutte rintracciabili nella *Physica* di Aristotele.

1. Le grandezze sono infinitamente divisibili, cioè non sono costituite da indivisibili.
2. Una linea retta può essere prolungata all'infinito.
3. Di due grandezze limitate disuguali, la minore può essere presa con tale molteplicità da superare la maggiore¹¹.

Si trovano in questa sezione due definizioni legate alla distanza tra rette, di cui Khayyām giustifica l'esistenza grazie agli assunti appena elencati [60, pp. 281–282].

Definizione 1.3 (Distanza tra rette, Khayyām). La distanza tra due rette giacenti sullo stesso piano è la retta che le congiunge in modo tale che i due angoli interni siano uguali (Figura 1.5a).

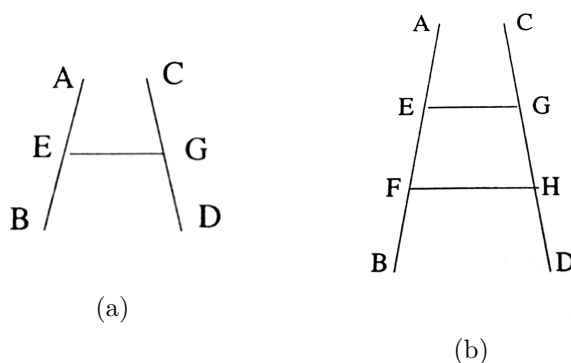


Figura 1.5

Definizione 1.4. Due rette giacenti sullo stesso piano divergono in una direzione quando la loro distanza reciproca aumenta in quella direzione. E due rette giacenti sullo stesso piano convergono in una direzione quando la loro distanza reciproca diminuisce in quella direzione. (Figura 1.5b).

¹¹Tale principio è il Postulato di Eudosso-Archimede.

Seguono a queste definizioni i tre principi che descrivono, secondo Khayyām, le rette parallele, le rette divergenti e le rette incidenti [60, pp. 283–284].

Principio 1.5 (Principio 1). *Due rette parallele sono equidistanti (Figura 1.6a).*

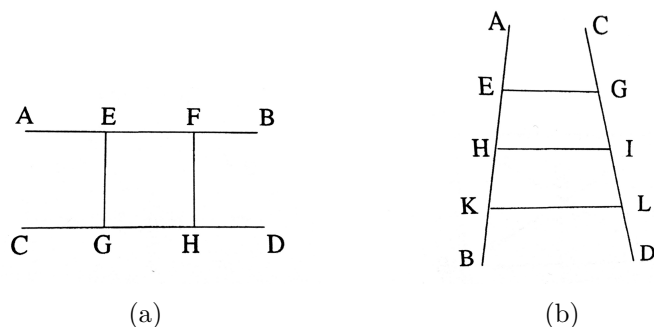


Figura 1.6

Principio 1.6 (Principio 2). *Se due rette giacenti sullo stesso piano divergono in una direzione, è impossibile che convergano nella stessa direzione. E se due rette giacenti sullo stesso piano convergono in una direzione, è impossibile che divergano nella stessa direzione (Figura 1.6b).*

Principio 1.7 (Principio 3). *Se due rette si intersecano in un punto, divergeranno indefinitamente allontanandosi dal punto di intersezione (Figura 1.7).*

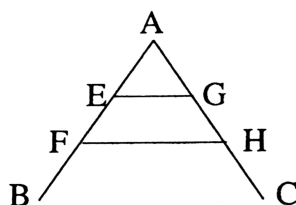


Figura 1.7

Il Principio 1.7 è equivalente ad una asserzione di Aristotele presente nel *De Caelo* [62, p. 39], mentre non vi sono corrispondenze nei lavori di Aristotele per il Principio 1.5 e il Principio 1.6.

L'avvio del ragionamento di Khayyām è dunque la definizione di distanza tra rette, definita come il segmento che congiunge le due rette e forma con esse angoli coniugati interni uguali: in riferimento alla Figura 1.5a, la distanza tra le due rette complanari AB e CD è il segmento EG , che forma gli angoli $\angle AEG = \angle CGE$. Su essa poggia direttamente la Definizione di rette parallele 1.5, cioè il primo principio (Principio 1.5) dell'opera di Khayyām, identificate appunto tramite equidistanza.

Chiariti i principi filosofici, la seconda parte del libro di Khayyam contiene le otto proposizioni che, nell'intenzione dell'autore, dovrebbero sostituire altrettante proposizioni euclidee. La prima proposizione intende sostituire la Proposizione I.29 di Euclide [60, pp. 284].

Proposizione 1.8 (Proposizione 1, Proposizione I.29 degli *Elementi*). *Siano AB una retta data, $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ e $AC = BD$ (si avrà dunque, secondo Euclide, Proposizione I.28, $AC \parallel BD$), e congiungiamo CD (Figura 1.8). Si avrà $\angle ACD = \angle BDC$.*

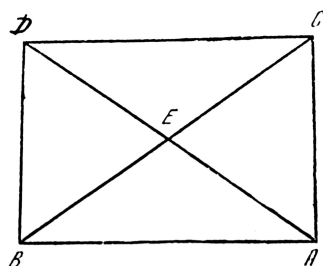


Figura 1.8

Dimostrazione. Congiungiamo CB e AD . Le relazioni $AC = BD$ e $\angle BAC = \angle ABD$ implicano $AD = BC$, $\angle ACB = \angle BDA$ e $\angle ABC = \angle BAD$ (Euclide, Proposizione I.4). Ora $\angle EAB = \angle EBA$ implica $AE = EB$ (Euclide, Proposizione I.6), dunque $CE = CB - EB = AD - AE = ED$. Allora $\angle ECD = \angle EDC$ (Euclide, Proposizione I.5), quindi $\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = \angle ADB + \angle ADC = \angle BDC$. ■

Fin da tale proposizione è evidente che il problema del V postulato è affrontato da Khayyām in modo innovativo, con l'introduzione del quadrilatero birettangolo $ABDC$ (Figura 1.8). A seguito di tale proposizione, sono presentate alcune proprietà del quadrilatero birettangolo $ABDC$: non è necessario che gli angoli $\angle CAB$ e $\angle DBA$ siano retti per ottenere la Proposizione 1.8 (Corollario 1), bisecando il segmento AB nel punto E e costruendo il segmento $EG \perp AB$ (Figura 1.9) si avrà che $CG = GD$ ed $EG \perp CD$ (Proposizione 2).

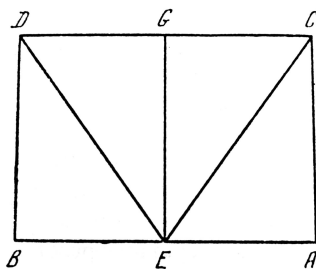


Figura 1.9

La Proposizione 3 (nella nostra trattazione la 1.9), che giunge a questo punto della trattazione, rappresenta il cuore dell'argomentazione di Khayyām: in essa egli esamina ancora una volta il quadrilatero birettangolo. Affronta tre possibili ipotesi (che saranno le famose ipotesi dell'angolo retto, dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso), considerando le possibili ampiezze degli angoli del quadrilatero non retti e tra loro uguali, e dimostra che, nel caso dell'ipotesi dell'angolo acuto, due rette intersecano un'altra retta ad angolo retto e divergono da entrambi i lati di quest'ultima; ciò contraddice il Principio 1.6 e dunque porta ad un assurdo. Khayyām spiega inoltre che una contraddizione simile si presenterà anche nell'ipotesi dell'angolo ottuso; pertanto, solo l'ipotesi dell'angolo retto può essere considerata valida [60, pp. 285–287].

Proposizione 1.9 (Proposizione 3, Proposizione I.31 degli *Elementi*). *Riprendiamo la figura $ABDC$. Si avrà $\angle ACD = \angle BDC = 90^\circ$.*

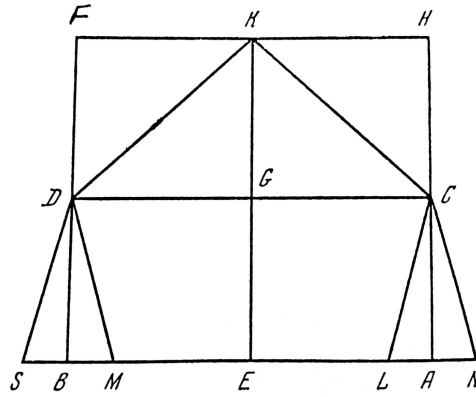


Figura 1.10

Dimostrazione. Dividiamo il segmento AB in due parti uguali nel punto E , e tracciamo il segmento $EG \perp AB$. Prolunghiamo EG in K in modo tale che $GK = EG$. Tracciamo $HKF \perp EK$ e prolunghiamo le rette AC e BD . Le rette AC e BD , essendo prolungate, incontreranno la retta HF prolungata in due punti H e F rispettivamente. Infatti, $AC \parallel EK$ e $HK \parallel GC$ (Euclide, Proposizione I.28 e Khayyām, Proposizione 2), dunque la distanza tra AC ed EK resta costante; allo stesso modo la distanza tra HK e GC resta costante (Principio 1.5). Dunque la retta AC , essendo prolungata, incontrerà necessariamente la retta HK prolungata; vale lo stesso per le rette BD e KF . Congiungiamo ora CK e DK . Poiché $GC = GD$ e che $\angle CGK = \angle DGK = 90^\circ$ (Proposizione 2), $CK = KD$, $\angle CKG = \angle DKG$ e $\angle GCK = \angle GDK$ (Euclide, Proposizione I.4).

Dunque $\angle HCK = 180^\circ - \angle ACG - \angle GCK = 180^\circ - \angle BDG - \angle GDK = \angle KDF$ (Euclide, Proposizione I.13, e Khayyām, Proposizione 1.8). Per ipotesi, $\angle GKH = \angle GKF = 90^\circ$. Allora $\angle CKH = 90^\circ - \angle CKG = 90^\circ - \angle DKG = \angle DKF$. Ma $CK = KD$ e $\angle HCK = \angle KDF$. Dunque $CH = DF$ e $HK = KF$ (Euclide, Proposizione I.26).

Se allora $\angle ACD = \angle BDC = 90^\circ$, la proposizione sarà vera. Altrimenti, si avrà o $\angle ACD = \angle BDC < 90^\circ$, o $\angle ACD = \angle BDC > 90^\circ$ (Proposizione 1.8).

Se questi angoli sono entrambi $< 90^\circ$, applichiamo allora $CDFH$ su $ABDC$. Il segmento GK si applicherà su GE , e HF su AB (poiché $GE = GK$ per ipotesi e $GK \perp CD$ ed $EG \perp CD$). Si avrà $HF = NS > AB$; infatti $\angle HCG > \angle ACG$ (poiché $\angle HCG + \angle ACG = 180^\circ$ e $\angle ACG < 90^\circ$). Allo stesso modo se si prolungano le rette AH e BF nello stesso verso, ogni segmento che le congiunge, staccando sulle rette segmenti uguali, sarà più grande di quello che lo precede; dunque le rette AC e BD divergono in direzione di C . E se le rette AC e BD sono prolungate nell'altra direzione, esse divergeranno ugualmente per la stessa ragione. Dunque due rette tagliano un segmento di retta ad angoli retti, ed esse divergono da entrambi i lati di questo segmento di retta. Ciò è assurdo (Principio 1.6).

Se gli angoli sono entrambi maggiori di 90° , si avrà allo stesso modo, applicando $CDFH$ su $ABDC$, $HF = LM < AB$. Si otterranno allora allo stesso modo due rette perpendicolari che tagliano una retta ad angoli retti, e che convergono da entrambi i lati di questa retta. Il che è ugualmente assurdo.

Allora $HF = AB$. Dunque $\angle ACG = \angle GCH$. Dunque $\angle ACG = \angle GCH = 90^\circ$ (Euclide, Definizione 10 del Libro I). Dunque $\angle ACG = \angle BDG = 90^\circ$. ■

A differenza di altri autori successivi, Khayyām con questa dimostrazione conclude la sua analisi riguardo alle ipotesi degli angoli acuti e ottusi, procedendo solo con l'ipotesi dell'angolo retto. Egli sarà quindi in grado di dimostrare facilmente la Proposizione I.23 di Euclide e il Postulato delle parallele. Fin dal principio, con la relazione creata da Khayyām tra definizione di parallelismo tra rette e di equidistanza, l'autore si pone di fatto in un contesto completamente euclideo: assume infatti grazie a tale Principio la somma degli angoli interni di un triangolo pari a 180° e esclude, fin dall'inizio, la possibilità di una posizione reciproca tra rette diversa dall'incidenza e dal parallelismo.

Un ulteriore autore che riprese in parte le idee sviluppate da Khayyām fu Naṣīr al-Dīn al-Tūsī (XIII secolo). Nel suo *Trattato per fugare i dubbi sulle linee parallele*¹² è presente un'esposizione critica delle teorie precedenti realizzate da al-Jawhārī, al-Haitham e Khayyām, a cui segue un tentativo di dimostrazione del V postulato da parte dell'autore. Egli dichiara di accogliere l'impostazione di Khayyām e di usare due delle proposizioni formulate dal suo predecessore nella dimostrazione [62, p. 74]:

Per quanto riguarda gli approcci con cui ho indagato su questo dopo aver studiato le parole di tali studiosi, esporremo il nostro discorso in sette proposizioni, due delle quali sono tratte dalle proposizioni di Khayyām; sono la nostra seconda e quarta, che sono la sua prima e quarta. Lasciamo invariato l'inizio degli *Elementi*, le ventotto proposizioni che non includono il postulato incerto, e poi aggiungeremo queste proposizioni.

¹²Il titolo originale dell'opera è: *Al-Risala al-shafiya 'an al-shakk fi al-khutut al-mutawaziyya*.

Le sette proposizioni che compongono il testo sono, per la maggior parte, rielaborazioni dei risultati ottenuti dagli autori precedenti; il nucleo della dimostrazione di al-Tūsī è la Proposizione 1.12, che coincide nella sua formulazione con la Proposizione 1.9 di Khayyām, ma differisce nella sua dimostrazione. Racogliamo di seguito gli enunciati delle prime tre proposizioni del trattato [62, pp. 74–75].

Proposizione 1.10 (Proposizione 1). *Il più breve dei segmenti tracciati da un punto a una qualsiasi retta, chiamato distanza da quel punto a quella linea, è la perpendicolare tracciata dal punto alla retta.*

Proposizione 1.11 (Proposizione 2). *Se si innalzano due segmenti perpendicolari uguali da una retta e si uniscono le loro estremità per mezzo di una retta, allora essi formano angoli uguali [con quest'ultima]¹³.*

Proposizione 1.12 (Proposizione 3). *Se si tracciano due perpendicolari uguali e se ne uniscono le estremità con una linea retta, gli angoli formati da esse sono angoli retti¹⁴.*

Per comprendere la configurazione della Proposizione 1.12 (si veda la Figura 1.11), consideriamo due segmenti AB e CD uguali tra loro ed entrambi perpendicolari alla retta BD e uniamo i loro estremi (non appartenenti alla retta BD) con il segmento AC ; la proposizione sostiene che gli angoli uguali $\angle BAC$ e $\angle DCA$ sono retti.

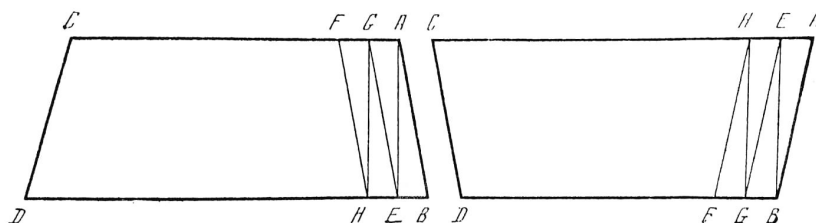


Figura 1.11

Qui al-Tūsī considera, di fatto, lo stesso quadrilatero $ABDC$ usato da Khayyām e analizza tre ipotesi sui propri angoli. Nel confutare le ipotesi dell'angolo ottuso e dell'angolo acuto, al-Tūsī dimostra che, dato un quadrilatero $ABDC$ di base BD con $AB = CD$, nel primo caso la lunghezza delle perpendicolari da lui tracciate aumenta spostandosi dal bordo della base verso il suo punto medio, mentre nel secondo caso le perpendicolari da lui tracciate diminuiscono in lunghezza dal bordo della base verso il suo punto medio; egli ritiene che ciò contraddica la simmetria di questi quadrilateri e dunque esclude le due ipotesi. Come già fatto dai suoi predecessori, al-Tūsī procede con le proposizioni che ritiene possano sostituire alcuni risultati di Euclide [62, pp. 76–77].

¹³La Proposizione 1.11 di al-Tūsī coincide con la Proposizione 1.8 di Khayyām.

¹⁴La Proposizione 1.12 di al-Tūsī, invece, coincide con la Proposizione 1.9 di Khayyām.

1.4 La teoria delle parallele nel XVI secolo

Anche nell'Europa medievale del XIII e XIV secolo si studiò il V postulato e furono analizzati gli autori che in precedenza tentarono la sua dimostrazione, ma il primo lavoro in lingua latina di questo periodo con una sezione dedicata alla teoria delle parallele fu lo *Speculum astronomicum terminans intellectum humanum in omni scientia*, pubblicato a Venezia nel 1507 e realizzato da Federik Bartolačić **Grisogono** (1472-1538). L'autore, nato a Zara e attivo a Padova, nel nono capitolo del suo testo critica molti matematici sia antichi sia arabi e latini, che hanno cercato di dimostrare il Postulato delle parallele di Euclide partendo dalla definizione di rette parallele come equidistanti. Pur ammettendo di non aver ancora trovato una soluzione, Grisogono mette in dubbio tale punto di partenza sostenendo di essere riuscito a tracciare, su una non meglio identificata *superficies*, due rette parallele ma non equidistanti [62, p. 93].

Ho immaginato un modo per disegnare su una superficie due rette non equidistanti che possono essere prolungate indefinitamente eppure potrebbero non incontrarsi mai.

Grisogono non esplicita in altri passaggi del capitolo le caratteristiche di tali *superficies*, ma è plausibile che facesse riferimento alle proprietà dei generatori rettilinei di un iperboloide a una falda piuttosto che al piano di Lobačevskij.

Un altro autore che si cimentò nel tentativo di dimostrazione del V postulato fu Cristoph Clau, detto **Clavio** (1528-1612), matematico tedesco che lavorò a Roma presso il Collegio Romano dei Gesuiti. Nell'*Euclidis Elementorum libri XV*¹⁵, un commento agli *Elementi* pubblicato nel 1574, Clavio dimostra un teorema partendo dalla definizione euclidea di retta presente nel Termine IV degli *Elementi*, secondo cui una linea retta è *quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti*; il teorema è il seguente [62, pp. 93–94]:

Teorema 1.13. *Una retta i cui punti sono tutti alla stessa distanza da una retta complanare è una retta.*

Clavio vuole sfruttare la proprietà che sembrano avere i punti di una retta, cioè di essere equidistanti da un'altra retta complanare, ma ciò è equivalente al V postulato. Tale idea nasce dal fatto che per Clavio solo la retta e la circonferenza hanno la proprietà di giacere allo stesso modo rispetto ai propri punti (il che significa che sono sovrapponibili a se stessi mediante una traslazione o una rotazione) ed è possibile escludere che questa retta sia un cerchio mostrando che una curva equidistante da un cerchio è anch'essa un cerchio. In geometria iperbolica, però, il luogo dei punti equidistanti da una retta non è una retta. Clavio introduce nel suo scritto anche il Quadrilatero di Khayyām, ma lo utilizza solo per dimostrare l'esistenza dei rettangoli, senza discutere le tre ipotesi dell'angolo.

Altri due tentativi di dimostrare il Postulato delle parallele, basati sull'idea che il luogo dei punti equidistanti da una retta sia una retta, furono, nel XVII secolo, dei matematici italiani Giovanni Alfonso **Borelli** (1608-1679) nell'*Euclides*

¹⁵*Euclidis Elementorum libri XV. Accessit XVI de solidorum regularium comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus, accuratisque scholiis illustrati, Romae 1574.*

restitutus del 1658 e Vitale **Giordano** da Bitonto (1633-1711) nell'*Euclides restituito* del 1680 [62, pp. 95–96].

Particolarmente istruttivo è l'approccio pubblicato nel 1693 nella terza parte del *De postulato quinto*¹⁶, scritto dall'inglese John **Wallis**. Nel testo, l'autore sceglie di sostituire il V postulato con un postulato che ritiene più accettabile [64, p. 218]:

Presuppongo infine come nozione comune (assunta come nota la natura dei rapporti e della definizione di figure simili): esiste sempre una figura di grandezza qualsiasi simile a una figura assegnata qualsiasi.

Wallis ritiene ci sia una profonda affinità tra questo postulato e il III Postulato euclideo, che afferma che è possibile tracciare circonferenze di raggio arbitrario: le due richieste condividono, per l'autore, lo stesso concetto di partenza, legato a una sorta di principio di continuità [64, pp. 218–219]:

Poiché le quantità continue sono divisibili all'infinito, allo stesso modo si possono anche accrescere all'infinito [...]; evidentemente una figura arbitraria si può accrescere o diminuire all'infinito (mantenendo la specie della figura).

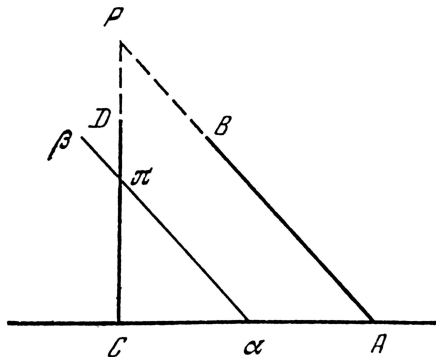


Figura 1.12

Wallis mostra quindi come ricavare il V postulato a partire dall'accettazione dell'esistenza delle figure simili. Siano due rette AB e CD tagliate dalla trasversale AC , tali che la somma delle ampiezze degli angoli $\angle BAC$ e $\angle DCA$ sia minore di due angoli retti (Figura 1.12). Si trasporti ora la retta AB lungo la trasversale AC fino a sovrapporre il punto A a un punto α interno a AC : se il punto α è sufficientemente vicino a C , Wallis sostiene che le rette $\alpha\beta$ (la traslata di AB) e CD si intersechino in π , individuando un triangolo $\triangle C\alpha\pi$. Utilizzando ora il suo postulato, è possibile costruire un triangolo $\triangle ACP$ che sia simile a $\triangle C\alpha\pi$ e abbia il lato AC corrispondente con il lato

¹⁶*De postulato quinto et definitione quinta lib. 6 Euclidis; disceptatio geometrica.*

αC . Dal momento che i triangoli $\triangle ACP$ e $\triangle C\alpha\pi$ sono simili, gli angoli $\angle PCA$ e $\angle \pi C\alpha = \angle DCA$ sono congruenti e quindi CP e CD coincidono; allo stesso modo $\angle PAC = \angle BAC = \angle \pi\alpha C$, quindi AP e AB sono la stessa retta. Pertanto AB e CD si intersecano in P e il V postulato è dimostrato. In realtà, dato che è possibile ottenere il postulato di Wallis dal V postulato di Euclide, i due assunti sono equivalenti [64, p. 219].

1.5 Il precursore italiano della geometria iperbolica

La ricerca di una dimostrazione del V postulato passò per Pavia nel XVIII secolo, grazie al gesuita italiano Giovanni Girolamo **Saccheri** (1667-1733). Nel trattato del 1733 *Euclides ab omni naevo vindicatus*, utilizzando la dimostrazione per assurdo, Saccheri riprende il Quadrilatero di Khayyām e lo analizza con profondità e attenzione (tanto che quel quadrilatero prenderà il nome di "Quadrilatero di Saccheri", nome che useremo anche noi nella trattazione successiva): egli isola, come gli autori precedenti che hanno utilizzato tale figura geometrica, tre possibili ipotesi relative agli angoli interni del quadrilatero e cerca di mostrare l'assurdità di quelle che negano il V postulato. Le tre ipotesi sono l'ipotesi dell'angolo retto, l'ipotesi dell'angolo acuto e l'ipotesi dell'angolo ottuso e corrispondono ai casi in cui gli angoli interni non necessariamente retti del quadrilatero sono retti, acuti o ottusi.

Saccheri affronta in primo luogo l'ipotesi dell'angolo ottuso, rigettandola poiché "distrugge se stessa": infatti, sotto tale ipotesi, Saccheri crede di riuscire a dimostrare la validità del V postulato e, di conseguenza, la non validità dell'ipotesi stessa. In realtà, l'autore assume implicitamente la natura infinita della retta ed è questo il motivo per cui riesce a eliminare l'ipotesi in questione¹⁷ [62, pp. 98-99].

In secondo luogo, volendo ottenere come unica ipotesi valida quella dell'angolo retto (corrispondente alla geometria euclidea), Saccheri cerca di mostrare l'assurdità dell'ipotesi dell'angolo acuto: a tale scopo sviluppa involontariamente un vasto insieme di teoremi perfettamente coerenti con quella che sarà la geometria di Lobačevskij, tra cui l'ipotesi che due rette complanari possono essere tra loro parallele, convergenti o divergenti. Non riuscendo però a trovare una contraddizione logica stringente, egli dichiara che l'ipotesi in questione è falsa in quanto "ripugna alla natura della linea retta".

La scoperta della geometria non euclidea, mai stata così vicina fino a quel punto, fu mancata non per un errore di calcolo, ma per un limite filosofico imposto dalla concezione assoluta dello spazio introdotta da Isaac Newton nei *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687) e dalla successiva convin-

¹⁷Saccheri anticipa con ciò i problemi legati alla definizione assiomatica della geometria ellittica: l'ipotesi dell'angolo ottuso, infatti, non è assurda, ma costituisce di fatto il nucleo di partenza della geometria sferica e della sua rigorosa formalizzazione proiettiva, la geometria ellittica, sviluppata da Bernhard Riemann nel 1854. In questo sistema, caratterizzato da uno spazio a curvatura costante positiva, non esistono rette parallele e la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di π ; inoltre, affinché questo modello abbia senso, è necessario un ulteriore salto concettuale: l'abbandono del II Postulato di Euclide sull'estensione infinita della retta.

zione kantiana, affermata dopo il 1781, che la geometria euclidea costituisse la forma necessaria dell'intuizione spaziale. [69, pp. 246–258]. La figura di Gerolamo Saccheri viene trattata più diffusamente nel Capitolo 2 di questa tesi.

Verso la fine dello stesso secolo, nel 1786, fu pubblicato un altro saggio sulla teoria delle parallele realizzato dall'alsaziano Johann Heinrich **Lambert** (1728–1777): *Die Theorie der Parallellinien*. Analogamente a Saccheri, Lambert si dedicò a mostrare l'impossibilità di una geometria diversa da quella euclidea, ma in realtà trovò molti risultati di quella che sarebbe diventata la geometria iperbolica. Come era già stato fatto da al-Haitham, la trattazione in questo caso prende avvio da un quadrilatero trirettangolo, cioè dotato di tre angoli interni retti (Figura 1.13), e affronta le tre possibilità relative all'ampiezza del quarto angolo interno, che può essere retto, acuto o ottuso.

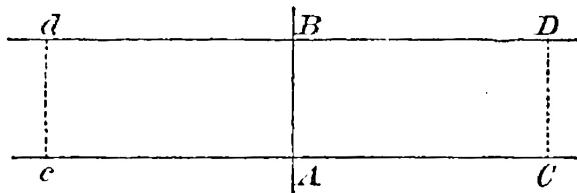


Figura 1.13

A differenza di Saccheri, Lambert non forzò una contraddizione nell'ipotesi dell'angolo acuto, ma non riuscì comunque a visualizzare una nuova geometria, in quanto limitato anch'egli dalla concezione assoluta di spazio dominante in quel periodo. In ogni caso, Lambert ottenne diversi risultati importanti: studiò la somma degli angoli interni di un triangolo nelle tre ipotesi, accennò all'angolo di parallelismo e rifletté sul fatto che, nell'ipotesi dell'angolo acuto, dovrebbe esistere una misura assoluta di lunghezza; le parole legate a quest'ultimo risultato sono particolarmente rilevanti, nell'ottica degli sviluppi successivi [64, pp. 231–237]:

La conseguenza più importante tra queste è che, qualora valesse la terza ipotesi, avremmo una misura assoluta della lunghezza di ogni linea, dell'estensione di ogni superficie e di ogni corpo solido.

Sempre nell'ipotesi dell'angolo acuto, Lambert ottenne un'importante relazione tra la superficie di un triangolo, cioè la sua area, e il suo difetto angolare, cioè la differenza tra un angolo piatto e la somma dei suoi angoli interni: il difetto angolare cresce al crescere dell'area. Quest'ultima affermazione permette di arrivare alla formula dell'area Δ di un triangolo di angoli α , β e γ in dipendenza della curvatura k della superficie a cui appartiene.

$$\Delta = k^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)) \quad (1.1)$$

Osservando poi che, nel caso dell'ipotesi dell'angolo ottuso, è possibile ottenere un risultato analogo utilizzando l'eccesso sferico¹⁸-cioè la differenza tra la somma degli angoli interni di un triangolo e un angolo piatto-al posto del difetto angolare, Lambert ipotizzò che l'ipotesi dell'angolo acuto descrivesse una geometria su una sfera di raggio immaginario¹⁹ [64, p. 239].

Da ciò sarei condotto a concludere che la terza ipotesi possa realizzarsi sulla superficie di una sfera di raggio immaginario.

1.6 Verso il cambio di paradigma del XIX secolo

Tra la fine del XVIII e l'inizio del XIX secolo, uno degli ultimi matematici che si cimentò nel tentativo di dimostrare il V postulato di Euclide è il francese Adrien-Marie **Legendre** (1752-1833). Nelle molteplici edizioni dei suoi *Éléments de géométrie*, egli propose diverse dimostrazioni del Postulato delle parallele, alcune delle quali sono confutate già da matematici contemporanei all'autore, e riuscì a dimostrare che, ipotizzando l'infinità della retta, la somma degli angoli interni di un triangolo non può essere maggiore di due retti, ma non riuscì a mostrare che essa non può essere minore.

L'altro autore di questo periodo che dedicò la sua intera attività scientifica al tentativo di dimostrazione del V postulato, intimamente convinto che fosse un teorema deducibile, è Farkas **Bòlyai** (1775-1856). Nato in Transilvania, egli studiò con Gauss all'Università di Gottinga, in Germania, e lì si appassionò alla teoria delle parallele. Accomunati dalla passione per la matematica e di età simili-Gauss era di due anni più giovane di Farkas Bòlyai-tra i due si instaurò un intenso legame di amicizia; per Farkas Bòlyai l'opinione di Gauss avrebbe rappresentato un importante riferimento per tutta la vita. A tal proposito, nel 1804, è proprio a Gauss che Bòlyai inviò il primo dei suoi lavori dedicati alla teoria delle parallele: la lunga nota *Theoria parallelarum*, interamente dedicata al tentativo di dimostrazione dell'esistenza di rette equidistanti. Gauss nella sua risposta individuò alcuni errori nell'opera, trovando un controesempio ad una delle proprietà utilizzate per dedurre il risultato. Dopo tale tentativo, Bòlyai si concentrò molte altre volte sull'elaborazione di dimostrazioni alternative, arrivando fino a sistematizzare i propri insuccessi e a creare una classificazione delle ipotesi alternative al V postulato: tra le richieste equivalenti spicca quella pubblicata nel 1851 nell'opera *Breve schema di un tentativo di rappresentare l'aritmetica in modo logicamente rigoroso e di definire con precisione i concet-*

¹⁸La formula analoga alla (1.1) era stata dimostrata indipendentemente da Bonaventura Cavalieri (1598–1647), Albert Girard (1595–1632) e Thomas Harriot (1560–1621) nel XVII secolo.

¹⁹Grazie ai suoi studi di trigonometria iperbolica, Lambert aveva già affrontato un problema simile: egli, infatti, condivide con il matematico italiano Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) l'intuizione di fare un'analogia tra l'equazione di una circonferenza ($x^2 + y^2 = a^2$) e quella di un'iperbole equilatera ($x^2 - y^2 = a^2$) per ricavare i risultati di trigonometria su un'iperbole equilatera e ciò è possibile mandando $y \mapsto iy$.

*ti in geometria*²⁰, che afferma che per tre punti non allineati passa una sola circonferenza [62, pp. 108–109]:

Teorema 1.14. *Tre punti qualunque non allineati giacciono sempre su una circonferenza.*

La vera rivoluzione avvenne agli inizi del XIX secolo, proprio grazie a János Bolyai (1802-1860), Nicolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

1.6.1 János Bolyai

János Bolyai, figlio di Farkas Bolyai, nacque nel 1802 a Kolozsvár (l'attuale città romena di Cluj-Napoca), in Transilvania. Formato prima privatamente, dal padre o da tutori accuratamente scelti dal padre, e poi presso il collegio di Maros-Vásárhely, dove il padre insegnava, sin da giovanissimo mostrò una spiccata attitudine per la matematica e, specialmente, per la geometria. Per garantire a János un'educazione di primo livello, Farkas Bolyai cercò nel 1816 di riallacciare i rapporti con il vecchio amico Gauss, interrotti alcuni anni prima, nella speranza di permettere al figlio di studiare con il grande matematico a Gottinga. Il 10 aprile 1816 Farkas scrive a Gauss [22, p. 265]:

Siamo stati come estranei l'uno per l'altro, separati non solo da poche miglia di spazio [...], ma anche da un periodo di diversi anni. Lascia che il sole primaverile torni a splendere sul ghiaccio della età! Sentiamo di nuovo il puro calore giovanile! [...] Vorrei tenerlo [János] con te per 3 anni, e se fosse possibile (vogliamo considerare tutte le circostanze in maniera franca e aperta) a casa tua, giacché non si può abbandonare un ragazzo di 15 anni e farlo accompagnare da un precettore supererebbe le mie forze economiche indebolite da molti eventi; tuttavia, potrei anche affidarlo a uno studente di qui, e gli darei un compenso. Se solo potessi trovarne uno di cui potessi fidarmi tanto! Ovviamente compenserei le spese di tua moglie per questo [...]. Organizzeremo tutto quando verrò da te con lui. Parlami apertamente riguardo a questo piano.

Senza alcun cenno di risposta da parte di Gauss, Farkas decise di iscrivere János alla scuola militare di ingegneria di Vienna, dove terminò gli studi nel 1822 per poi essere arruolato nel Genio Militare dell'esercito asburgico. Risale agli inizi del 1820 un primo confronto tra János Bolyai e suo padre sul V postulato di Euclide, ma tale crescente interesse nei confronti della teoria delle parallele esercitò una forte reazione in Farkas Bolyai, che nell'aprile del 1820 scrive al figlio [22, p. 267]:

Non devi investigare la teoria delle parallele seguendo quel percorso; conosco questa via sino alla fine - anch'io ho attraversato questa

²⁰*Kurzes Grundriss eines Versuches die Arithmetik logisch-streng darzustellen, in der Geometrie die Begriffe scharf zu bestimmen.*

notte senza fine, ogni luce, ogni gioia della mia vita si è spenta in essa - ti supplico, per Dio! Lascia in pace la dottrina delle parallele: dovresti provare per questa lo stesso orrore che provi per i rapporti dissoluti; essa può privarti di tutto il tuo tempo, della salute, della quiete e di tutta la tua felicità.

Da queste poche righe si può dedurre la tensione intellettuale di quel periodo intorno allo studio del V postulato. Nonostante la contrarietà di Farkas, János Bolyai procedette negli studi riguardanti la teoria delle parallele e, negli anni successivi, si dedicò a un'elaborazione sistematica delle conseguenze imposte dalla negazione del V postulato. Il risultato dei suoi sforzi fu pubblicato come appendice al libro del padre del 1832, il *Tentamen*²¹, una monumentale opera di sistematizzazione della matematica. L'*Appendix* venne accolta da Farkas Bolyai in maniera poco favorevole, almeno inizialmente: in particolare, il suo scetticismo proveniva dal fatto che in essa si accetta l'esistenza di infiniti sistemi non euclidei (corrispondenti alle infinite scelte possibili per il parametro arbitrario k presente nelle espressioni delle lunghezze); successivamente, Farkas si convinse dell'importanza dell'opera, tanto da insistere nel pubblicarla nel 1832. Poco prima della pubblicazione, egli ne inviò una copia manoscritta a Gauss per cercare un sostegno nella sua autorità. la risposta di Gauss fu molto fredda [22, pp. 268-269]:

Se comincio col dire che non posso lodare questo lavoro [di János], tu certamente per un istante resterai meravigliato; ma non posso dire altra cosa, lodarlo sarebbe lodare me stesso; infatti tutto il contenuto dell'Opera, la via percorsa da tuo figlio, i risultati ai quali egli fu condotto coincidono quasi interamente con le mie meditazioni, che hanno occupato la mia mente da trenta a trentacinque anni a questa parte. Così sono rimasto pienamente stupefatto. Quanto al mio lavoro personale, del quale fin qui ho ben poco affidato alla carta, era mia intenzione non lasciare che si pubblicasse nulla durante la mia vita. Infatti la maggioranza degli uomini non ha idee chiare sulle questioni di cui si parla, ed io ho trovato ben poche persone che prestassero uno speciale interesse a ciò che comunicavo loro su tale soggetto. Per poter coltivare questo interesse, bisogna prima di tutto aver sentito molto vivamente ciò che manca di essenziale, e su questa materia quasi tutti brancolano in una completa oscurità. Al contrario era mia idea di scrivere, col tempo, tutto ciò, perché esso almeno non perisse con me. È dunque per me una piacevole sorpresa vedere che questa fatica può ora essermi risparmiata, e sono estremamente contento che sia proprio il figlio del mio vecchio amico ad avermi preceduto in modo così notevole.

²¹Il titolo completo è: *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiali huius propria, introducendi: cum appendice triplici*. In italiano: *Un tentativo di avvicinare i giovani studiosi agli elementi della matematica pura, elementare e superiore, attraverso un metodo intuitivo e chiaro, proprio di questa disciplina, corredato da una triplice appendice*.

Le rivendicazioni di Gauss sulla paternità di alcune delle idee presenti all'interno dell'*Appendix* hanno trovato riscontro in alcune lettere private che egli aveva scritto molto prima di leggere l'opera di János Bolyai; tuttavia, ciò è molto lontano dall'affermare che Gauss avesse organizzato in maniera tanto sistematica e estesa quanto nell'*Appendix* tali risultati. In altri contesti, Gauss era stato molto più entusiasta del lavoro di János Bolyai, fino a definire l'autore "una testa eccellente" e "un genio di prima grandezza": non è chiaro il motivo per cui la reazione riservata a Farkas Bolyai sia stata così fredda [22, p. 269]. Sicura è invece la conseguenza che queste parole ebbero su János Bolyai, che aveva già da tempo mostrato alcuni segni di debolezza fisica e poca attitudine alle relazioni interpersonali: egli cadde in uno stato di isolamento e delusione. Nel 1833, egli ottenne il pensionamento per motivi di salute dall'esercito e non pubblicò più nulla sull'argomento. Morì nel 1860, pochi anni dopo il padre.

Il titolo completo dell'*Appendix* è *Un'appendice che presenta la vera scienza assoluta dello spazio: indipendente dalla veridicità o dalla falsità dell'undicesimo assioma di Euclide*²² (che non potrà mai essere stabilita a priori); aggiunta per il caso in cui fosse falso: la quadratura geometrica del cerchio²³: già da ciò si comprende come János Bolyai avesse cambiato prospettiva rispetto ai suoi predecessori, studiando la *vera scienza assoluta dello spazio*, cioè un'unica scienza dello spazio che comprende sia la geometria euclidea sia la geometria iperbolica. L'autore dell'*Appendix* sembra essere consapevole di questo nuovo approccio già dal 1823, quando in una lettera al padre scrive [22, p. 268]:

Sono ormai risoluto a pubblicare un'opera sulla teoria delle parallele, appena avrò ordinato la materia e le circostanze me lo permetteranno. Non l'ho ancora fatto, ma la via che ho seguito ha certamente, per così dire, quasi raggiunto lo scopo; lo scopo proprio non è raggiunto, ma ho scoperto cose sì belle che ne sono rimasto abbagliato, e che sarebbero rimpiante in eterno se sventuratamente andassero perdute. Quando le vedrete, lo riconoscerete voi pure. Nell'attesa non vi posso dire altro che questo: **ho dal nulla creato un nuovo universo**. Tutto ciò che vi ho comunicato fino ad ora non è che un palazzo di carta di fronte a questa torre. Sono tanto persuaso che questo mi farà onore come se ciò fosse già avvenuto.

In tale opera János Bolyai costruisce un sistema deduttivo di proposizioni valide in geometria neutrale, quella geometria cioè indipendente dal V postulato, e poi concentra il suo studio sulla geometria iperbolica. Egli indica la geometria euclidea con il simbolo Σ e quella iperbolica con il simbolo S e dimostra alcuni importanti teoremi assoluti, tra cui i seguenti [22, p. 270].

²²In alcune edizioni antiche degli *Elementi* il Postulato delle parallele è chiamato "XI postulato" anziché "V postulato" perché la numerazione viene effettuata considerando consecutivamente tutti i principi preliminari dell'opera di Euclide; si tratta comunque dello stesso enunciato.

²³*Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclides (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.*

Teorema 1.15. *In un triangolo rettilineo le circonferenze di raggio uguale ai lati stanno fra loro come i seni degli angoli opposti.*

Teorema 1.16. *In un triangolo sferico i seni degli angoli e i seni dei lati²⁴ sono proporzionali.*

Per quanto riguarda i sistemi S , infiniti in numero poiché dipendono da un parametro indeterminato k (che sarà, a posteriori, la curvatura dello spazio), János Bolyai parte da una nuova definizione di parallelismo tra semirette [22, pp. 271-272]:

Definizione 1.17 (Parallelismo per semirette, János Bolyai). Se una semiretta $\overrightarrow{BN}$ non interseca la semiretta complanare $\overrightarrow{AM}$, mentre ogni altra semiretta $\overrightarrow{BP}$ in $\angle ABN$ la interseca, allora scriveremo $\overrightarrow{BN} \parallel \overrightarrow{AM}$ (Figura 1.14).

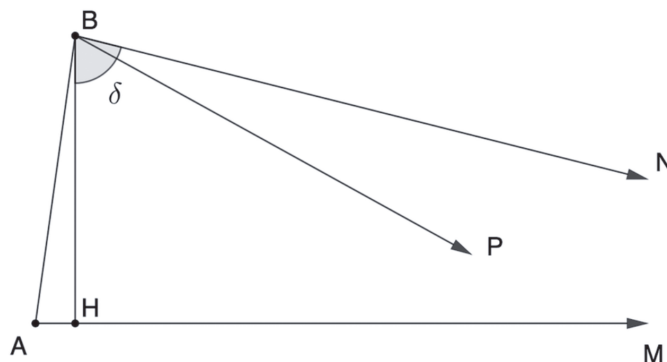


Figura 1.14

Il parallelismo così definito, a differenza di quello euclideo, dipende dal verso considerato e si può quindi parlare di *parallelismo destro* e *parallelismo sinistro*. Fissato poi un determinato verso, questo parallelismo gode della proprietà transitiva e, grazie a ciò, è possibile dare forma a un concetto fondamentale nella trattazione di János Bolyai, quello di punti corrispondenti: se $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{BN}$ (Figura 1.15) esiste un unico punto $B \in \overrightarrow{BN}$ tale che $\angle ABN = \angle BAM$; i punti A e B sono tra loro punti corrispondenti.

Utilizzando la definizione di punti corrispondenti, è possibile definire altri due enti indispensabili nella costruzione di János Bolyai: una curva piana indicata con L e una superficie dello spazio chiamata F (che corrispondono ai concetti di orociclo e orosfera per Lobačevskij). Considerando sempre la retta $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{BN}$ (Figura 1.15), il luogo dei punti B corrispondenti ad A e individuati al variare della retta $\overrightarrow{BN}$ tra le rette parallele ad $\overrightarrow{AM}$ è detto curva L . Al variare, nella stessa situazione, del piano passante per $\overrightarrow{AM}$, l'unione delle curve L

²⁴Dal momento che, in un triangolo sferico, i lati sono archi di cerchio massimo, ad ogni lato corrisponde un angolo al centro; la misura di un lato corrisponde allora alla misura dell'angolo al centro sotteso dall'arco di cerchio massimo che rappresenta il lato stesso. In questo senso si parla di "seno di un lato".

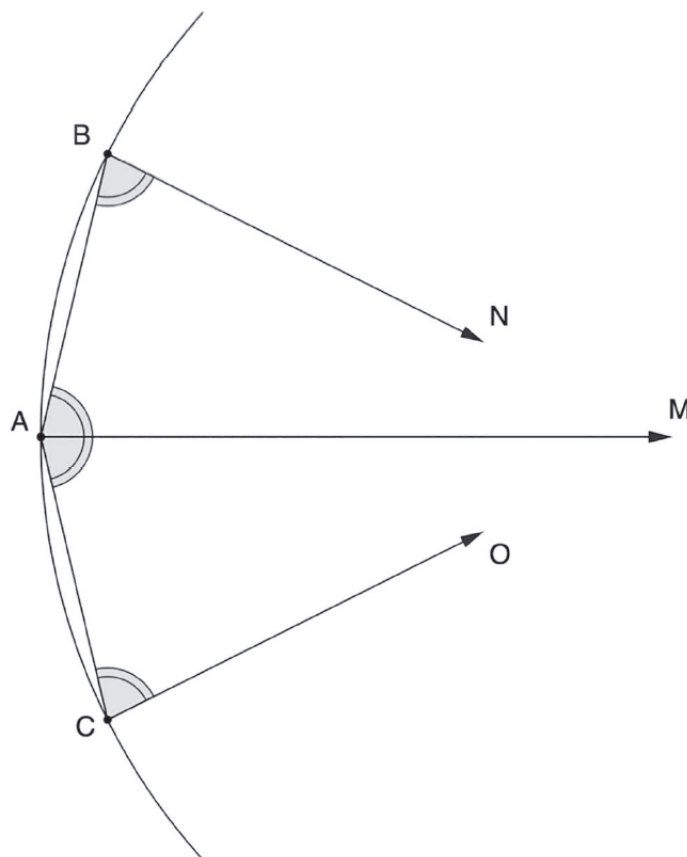


Figura 1.15

presenti in ognuno dei piani forma la superficie F . Tali superfici F acquisiscono un ruolo centrale per Bolyai, in quanto egli dimostra che su di esse, considerando come rette le curve L , valgono tutti gli assiomi della geometria euclidea; in particolare, vale l'equivalente del V postulato di Euclide [64, pp. 252-253]:

Due curve L , AP e BD , sulla stessa superficie F che formino con una terza curva $L - AB$ - angoli [coniugati] interni la cui somma è minore di due retti, si intersecano.

János Bolyai ricava la dimostrazione di tale risultato sfruttando l'estensione in dimensione tre del postulato di Playfair, che in realtà è indipendente dall'assunzione del Postulato delle parallele [22, p. 272].

Teorema 1.18 (Postulato di Playfair tridimensionale). *Data una retta r parallela ad un piano Π esiste uno e un solo piano passante per r e parallelo a Π .*

Grazie a tale proprietà delle superfici F , l'autore prosegue nell'*Appendix* con diversi risultati notevoli [22, p. 273], tutti dipendenti dal parametro arbitrario

k : calcola le relazioni trigonometriche per i sistemi S e ottiene la misura della circonferenza (iperbolica) C in funzione del raggio r , data da

$$C(r) = 2\pi k \sinh\left(\frac{r}{k}\right). \quad (1.2)$$

Inoltre, Bòlyai determina la misura dell'angolo di parallelismo: considerando l'angolo $\delta = \angle HBN$ (Figura 1.14) egli ricava infatti l'espressione della tangente di tale angolo in funzione della distanza $y = d(H, B)$, cioè della distanza tra il punto B e la sua proiezione ortogonale H sulla retta $\overrightarrow{AM}$; essa risulta

$$\tan(\angle HBN) = \frac{1}{\sinh \frac{y}{k}}. \quad (1.3)$$

Un altro risultato presente nell'*Appendix* e preliminare all'espressione precedente è l'equazione che lega il rapporto X fra le misure di due archi concentrici di curve L e la distanza relativa x tra essi, che è

$$X = e^{\frac{x}{k}}. \quad (1.4)$$

Seguono a tali risultati la determinazione dell'area del cerchio e del volume della sfera nei sistemi S , per cui Bòlyai introduce anche un sistema di coordinate dette ipercicliche (generalizzazione delle coordinate cartesiane ortogonali), e più in generale lo studio dell'espressione esplicita per la lunghezza di archi e per l'area di superfici chiuse nel piano. In conclusione, probabilmente inteso come culmine deduttivo della trattazione [22, p. 275], viene proposta la quadratura del cerchio iperbolico (nel caso in cui l'area delle due figure sia pari a $k^2\pi$), cioè la costruzione con riga e compasso di un quadrato equivalente ad un cerchio assegnato e di area pari a $k^2\pi$.

In conclusione, il genio di Bòlyai si manifesta certamente nello sviluppo della geometria neutrale e nella separazione definitiva tra il piano teorico e quello fisico e sensibile, ma è importante notare come, in tutto il discorso dell'*Appendix*, non vi è mai identificazione tra la geometria dei sistemi S e la geometria di una superficie con curvatura costante negativa: per tale ulteriore sviluppo sarà necessario aspettare l'opera di Reimann e, soprattutto, di Beltrami [22, p. 274].

1.6.2 Nicolaj Ivanovič Lobačevskij

Nicolaj Ivanovič **Lobačevskij** nacque in Russia nel 1792. Dopo la morte del padre, la famiglia si trasferì a Kazan', dove Lobačevskij frequentò il ginnasio e poi, nel 1807, si iscrisse all'Università; tra i suoi insegnanti universitari vi fu anche Martin Bartels (1769-1833), un matematico amico di Carl Friedrich Gauss e in contatto epistolare con lui. Conseguita la laurea in matematica e fisica nel 1811, Lobačevskij ricevette la nomina a professore ordinario presso la stessa Università di Kazan', dove avrebbe ricoperto anche la carica di rettore dal 1827 al 1846. Dopo aver passato gran parte della sua vita a tentare di diffondere le proprie idee, Lobačevskij morì nel 1856.

Fin dal 1817, Lobačevskij cercò di attuare una revisione critica dei principi della geometria: i primi risultati di tale opera furono presentati, nel 1826, ai suoi colleghi dell'Università di Kazan' durante una conferenza dal titolo *Una*

*breve esposizione dei principi della geometria con una dimostrazione rigorosa del teorema delle parallele*²⁵, di cui non si hanno copie, in quanto la commissione universitaria preposta non ne approvò la pubblicazione e in seguito fu smarrito. Nonostante ciò, la ricerca di Lobačevskij proseguì e la sua prima pubblicazione, frutto dello sviluppo dei risultati contenuti nella sua conferenza del 1826, avvenne all'interno delle edizioni del 1829-1830 del *Kazanski Vestnik* (Messaggero di Kazan'), con l'opera *Sui principi della geometria*²⁶: in tale opera, dopo aver introdotto i concetti geometrici che non dipendono dal Postulato delle parallele, Lobačevskij descrive il nuovo concetto di geometria a cui è pervenuto, che estende e ingloba la geometria euclidea come caso particolare; uno dei risultati che egli afferma e dimostra è legato alla somma degli angoli interni di un triangolo rettilineo o sferico [62, p. 206]:

La somma degli angoli di un triangolo rettilineo non può essere $> \pi$;
la somma degli angoli di un triangolo sferico è, al contrario, sempre
 $> \pi$.

Nell'opera del 1829 appare per la prima volta il termine "geometria immaginaria", con cui Lobačevskij fa riferimento alla nuova geometria appena scoperta: il termine enfatizza la relazione tra la geometria di Lobačevskij e quella euclidea, che nell'intenzione dell'autore è analoga alla relazione che esiste tra numeri complessi e numeri reali. In tal senso Lobačevskij ha ben chiaro che la geometria euclidea può essere ritrovata nella "geometria immaginaria" passando al limite. I suoi risultati sono cioè validi in tale sistema geometrico per distanze infinitamente piccole [50, p. 63]: è chiaro il tentativo dell'autore di mantenere in parte la validità della geometria euclidea, che aveva restituito fino ad allora risultati indiscutibili. Sono chiare le parole di Lobačevskij riferite al calcolo del valore di alcuni angoli astronomici [62, p. 208]:

Quindi, più piccolo è il triangolo, meno la somma dei suoi angoli differisce da due angoli retti. Dopo questo, si può immaginare in che misura questa differenza, su cui si basa la nostra teoria delle parallele, supporti l'accuratezza di tutti i calcoli della geometria ordinaria e dia supporto all'atteggiamento di considerare i principi di quest'ultima, con ogni probabilità, stabiliti rigorosamente.

Questo passaggio spiega anche il senso del titolo della conferenza di Lobačevskij del 1826, in cui con "una dimostrazione rigorosa" dei "principi della geometria ordinaria" egli intende l'impossibilità di determinare sperimentalmente quale delle due geometrie, quella "immaginaria" o quella euclidea, si verifichi nel mondo reale.

A seguito di alcuni tentativi infruttuosi di riconoscimento della sua teoria in Russia, e specialmente a San Pietroburgo, Lobačevskij pubblicò altri articoli, sempre a Kazan', intitolati *La geometria immaginaria* (1835), *Applicazioni della*

²⁵ *Exposition succincte des principes de la géométrie, avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles.*

²⁶ Si noti che tale data è di poco precedente alla pubblicazione dell'*Appendix* di Bolyai, garantendo a Lobačevskij il primato della pubblicazione di tale teoria.

geometria immaginaria a certi integrali (1836) e *Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele* (1835-1838). Nell'intento di far conoscere le sue teorie anche all'estero, Lobačevskij pubblicò nel 1837, all'interno del *Journal* di August Leopold Crelle²⁷, un articolo in lingua tedesca intitolato *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*²⁸; successivamente, apparve sul *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*²⁹ di Joseph Liouville³⁰ (1809-1882) una traduzione francese della *Geometria immaginaria*. L'ultima opera è del 1855 e si intitola *Pangeometria*, pubblicata a Kazan' e tradotta in francese l'anno seguente, stesso anno della morte dell'autore [62, pp. 208–210].

Come si nota fin dai titoli delle sue opere, Lobačevskij non si limita ad affrontare la questione delle parallele ma cerca una rifondazione globale della geometria: a differenza di Bòlyai, che cerca la realizzazione di una "geometria assoluta", egli sviluppa una trigonometria iperbolica completa, dimostrando che le sue formule sono analoghe a quelle della trigonometria sferica, sostituendo le funzioni trigonometriche con funzioni iperboliche; grazie a tale passaggio, se la geometria iperbolica fosse stata contraddittoria, allora lo sarebbe stata anche la trigonometria sferica.

Seguiamo il percorso tracciato nei *Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele* per descrivere i fondamenti della geometria di Lobačevskij, facendo riferimento a [50]. Lo sviluppo della posizione di Lobačevskij riguardo alla possibile esistenza di una geometria non euclidea è riassunto nell'introduzione all'opera [50, pp. 57–58].

A tutti è noto che, fino ad oggi, nella Geometria la teoria delle parallele era rimasta incompleta. I vani sforzi [compiuti] dai tempi di Euclide, per il corso di duemila anni, mi spinsero a sospettare che nei concetti stessi [della Geometria] non si racchiuda ancora quella verità che si voleva dimostrare, e che può essere controllata, in modo simile alle altre leggi fisiche, soltanto da esperienze quali, ad esempio, le osservazioni astronomiche. Essendo infine convinto della verità della mia congettura, e giudicando completamente risolto il difficoltoso problema, scrissi su di esso una comunicazione nel 1826. [...] La principale conclusione, alla quale io pervenni con l'ipotesi della dipendenza delle linee dagli angoli, è l'ammissione dell'esistenza della Geometria in un senso più largo di quello nel quale Euclide per primo ce la presentò. In questa estesa accezione io diedi alla

²⁷Il *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, fondato a Berlino nel 1826 da August Leopold Crelle e noto come *Journal di Crelle*, era una delle principali riviste matematiche europee del XIX secolo.

²⁸*Ricerche geometriche sulla teoria delle parallele*.

²⁹Il *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* fu una rivista matematica fondata a Parigi nel 1836 da Joseph Liouville; tra le più autorevoli del XIX secolo, contribuì alla diffusione di importanti risultati di ricerca.

³⁰Joseph Liouville fu un matematico francese, professore al *Collège de France* e membro dell'*Académie des Sciences*; diede contributi fondamentali all'analisi, alle equazioni differenziali e alla teoria dei numeri; il suo nome è legato, tra l'altro, al *Teorema di Liouville* sui numeri trascendenti e alla *Formula di Liouville* per le equazioni differenziali.

scienza il nome di "Geometria immaginaria", nella quale rientra la "Geometria ordinaria" come caso particolare, corrispondente a quelle limitazioni nelle ipotesi generali, che le misure effettive esigono.

Emerge già in queste prime frasi una delle principali differenze tra la geometria di Lobačevskij e quella euclidea: la "dipendenza delle linee dagli angoli". In tale geometria non euclidea, infatti, considerando un triangolo e assegnati i suoi angoli, le lunghezze dei lati sono già determinate: due triangoli sono quindi uguali se hanno tutti gli angoli uguali e non esistono triangoli simili non uguali.

Nello sviluppo del ragionamento, viene presentato l'innovativo tentativo dell'autore di costruire la geometria partendo dall'esperienza sensibile: Lobačevskij sostiene che *spazio, dimensione, luogo, corpo, superficie, linea, punto, direzione, angolo sono parole con le quali si comincia la Geometria, alle quali però non si congiunge mai un chiaro significato* [50, p. 68], e che l'approccio geometrico euclideo ha quindi un problema di precisione del linguaggio [50, p. 67].

Si comincia usualmente la geometria assegnando ai corpi tre dimensioni, alle superficie due, alle linee una, e non ammettendone nessuna nel punto. Chiamando le tre dimensioni: lunghezza, larghezza e altezza, e intendendo con queste denominazioni a proprio dire le tre coordinate, ci si affretta così ad enunciare concetti prematuri con parole, alle quali la lingua parlata conferisce un certo significato, significato però ancora non ben definito per la scienza esatta.

Al contrario, per Lobačevskij [50, p. 61] l'approccio è opposto:

Nella natura noi abbiamo cognizione, propriamente, soltanto del movimento, senza il quale le impressioni sensoriali sono impossibili. Pertanto tutti i rimanenti concetti, per esempio quelli geometrici, sono creazioni artificiali della nostra mente, tratte dalle proprietà del movimento; ecco perché lo spazio, in sé, separatamente [preso], per noi non esiste.

Pertanto, al fine di costruire una geometria basata sulla concretezza del reale, Lobačevskij contrappone all'astrattezza dei concetti geometrici classici la scelta dei corpi come punto di partenza della sua geometria [50, p. 68]:

Le superfici, le linee, i punti così come li definisce la Geometria, sussistono soltanto nella nostra immaginazione; mentre noi operiamo la misura delle superfici e delle linee servendoci a questo scopo di corpi. Ecco perché è il caso di parlare di superfici, linee e punti solo nel senso in cui esse debbono essere intese nelle misure effettive; verremo in questo modo ad attenerci proprio a quei concetti, che sono immediatamente congiunti nella nostra mente con la rappresentazione dei corpi, ai quali la nostra immaginazione è avvezzata, che possiamo controllare direttamente nella natura, senza prima ricorrere ad altri concetti, artificiali ed estranei.

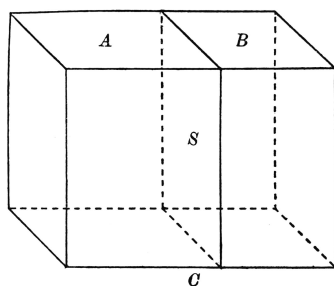


Figura 1.16

L'altro aspetto su cui l'autore pone l'attenzione in questa introduzione è il *passaggio dal cerchio alla linea retta*: mentre in geometria euclidea, al crescere indefinitamente del raggio di una circonferenza, si ha il passaggio da una circonferenza a una retta, con la conseguente perdita della proprietà di chiusura della curva stessa, nella geometria di Lobačevskij ciò non avviene, poiché l'aumento del raggio di una circonferenza porta alla nascita di un "cerchio limite", cioè un orociclo [50, pp. 65–66]:

Il difetto si vede qui del resto alla prima nella rottura della continuità: una curva, la quale non cessa dall'essere chiusa, per quanto grande sia, dovrebbe di colpo mutarsi in una retta indefinita, perdendo, in questo modo, una proprietà essenziale. Sotto questo rapporto la Geometria immaginaria compie il passaggio in modo di gran lunga migliore. In essa, ingrandendo un cerchio, tutti i raggi del quale convergono in un punto, perveniamo alla fine a una linea di tal fatta, che le normali ad essa si avvicinano indefinitamente, pur non potendo già intersecarsi. Tale proprietà non appartiene tuttavia alla retta, ma alla linea curva che io ho chiamato cerchio-limite [orociclo] nel mio scritto *Sui principi della geometria*.

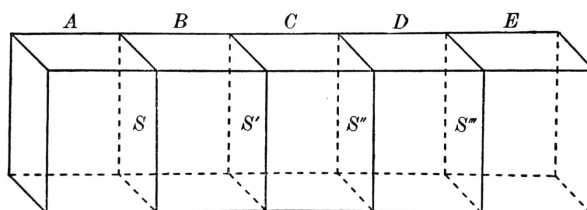


Figura 1.17

Forte di queste posizioni, Lobačevskij inizia la sua trattazione affermando che la caratteristica essenziale dei corpi geometrici è il "contatto": tale attributo viene utilizzato per definire nuovi corpi, "sezioni" di corpi e, infine, lo "spazio" [50, p. 73]. Venendo a contatto, due corpi A e B formano un unico nuovo corpo geometrico C (Figura 1.16), in cui le parti restano distinguibili; viceversa, una sezione S qualunque di un corpo C lo divide in due parti A e B . In questo

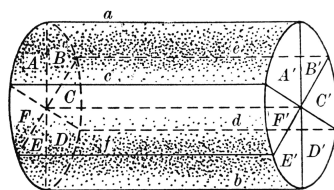


Figura 1.18

modo, tutti i corpi sono considerati *parti di un unico corpo globale*, che è lo spazio.

Sono descritte a questo punto le diverse tipologie di sezioni: sono *sezioni consecutive* quelle per cui le parti di un corpo *non si toccano tra di loro se non una ad una* (Figura 1.17); sono *sezioni rotanti* (Figura 1.18) quelle che dividono il corpo in modo che, aggiungendo una nuova sezione, *a ogni passo sia aumentato di due il numero delle parti, le quali si toccano tutte l'una con l'altra*; infine, sono *sezioni principali* (Figura 1.19) quelle per cui vale l'affermazione seguente [64, pp. 275–276]:

Per mezzo di tre sezioni si può scomporre ogni corpo in otto parti che si toccano tra di loro in modo tale che sezioni consecutive a ognuna di queste tre sezioni staccano sempre quattro parti che si toccano tra di loro.

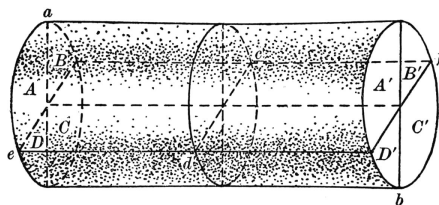


Figura 1.19

Grazie alle sezioni principali è possibile classificare la tipologia di contatto, operazione fondamentale per la definizione di punti, rette e piani [64, pp. 276–277].

Se si fissano in un corpo tre sezioni principali, con la qual cosa nel tempo stesso vengono a prodursi nel corpo otto parti che si toccano l'una con l'altra, allora rispetto alla prima sezione due parti si toccano *superficialmente*, rispetto a due sezioni, due parti poste in croce si toccano *linearmente*, mentre due parti che si trovano da parti opposte rispetto a ognuna delle tre sezioni si toccano tra di loro *in un punto*.

Emergono così, finalmente, i concetti di superficie, linea e punto, risultato di una costruzione che ha richiesto come definizione iniziale solo quella di corpo, per Lobačevskij più accettabile [50, pp. 81–85].

A seguito della definizione di sfera come corpo la cui *superficie sferica* ha tutti i punti ad uguale distanza da un punto interno, Lobačevskij dimostra che sfere di raggio uguale sono congruenti e ottiene l'unicità del centro di una sfera; dopodiché fornisce la definizione di *piano* tramite le sfere [64, p. 278].

Si chiama *piano* la superficie nella quale si intersecano superfici sferiche uguali attorno a due punti fissi: i *poli*³¹.

La definizione di *retta* risulta meno chiara, volendo forse alludere al fatto che tutti i movimenti che ne fissano due punti la mandano in se stessa [50, p. 100].

Si chiama *retta* quella linea, la quale tra due punti copre se stessa in tutte le posizioni.

La parte più innovativa dell'opera si trova a partire dal capitolo dedicato alle *Linee parallele* (Capitolo VII), in cui viene definito un concetto di parallelismo molto simile a quello che abbiamo già descritto in János Bolyai: considerando in un piano le rette passanti per un punto esterno a una retta data, sono identificate tre possibili posizioni reciproche tra rette, rette *secanti* o *convergenti*, rette *non secanti* o *non convergenti* e rette *divergenti*; le rette *parallele* vengono considerate separatamente, come caso particolare delle rette *non secanti* o *non convergenti* [50, p. 210].

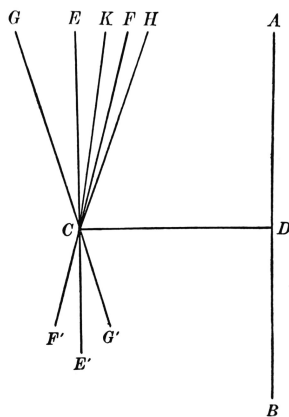


Figura 1.20

Le linee che escono da un punto o intersecano una data retta nel medesimo piano oppure non si incontrano mai con essa, per quanto vengano prolungate. È necessario, di conseguenza, distinguere tra tali linee, relativamente a una retta data: le *secanti* o *convergenti*, e le *non secanti* o *non convergenti*, alle quali ultime appartengono le

³¹I poli in questione sono i centri dei due fasci di superfici sferiche che si intersecano per formare il piano.

parallele, che costituiscono il passaggio dalle une alle altre, le *divergenti*. Due parallele ad una retta data dividono il piano in quattro parti: in due parti opposte sono racchiuse le rette convergenti, nelle rimanenti due le divergenti.

Fissata la retta AB , sia $C \notin AB$ e si tracci la perpendicolare CD ad AB (Figura 1.20). Lobačevskij afferma che tutte le rette del piano passanti per C devono o intersecare AB o non incontrarsi con AB : rispetto ad AB , la retta CD è ovviamente secante, poiché $AB \cap CD = \{D\} \neq \emptyset$, e la retta CE è non secante, in quanto condivide la stessa perpendicolare CD di AB ; facendo ruotare la retta CD attorno a C in un senso e poi nell'altro, essa passerà da essere una retta convergente ad AB a essere non convergente, e l'elemento di separazione tra questi due insiemi di rette è chiamato dall'autore retta parallela. In riferimento alla Figura 1.20, tutte le rette che passano per gli angoli $\angle FCG'$ e $\angle GCF'$ sono rette secanti con AB , tutte le rette passanti per gli angoli $\angle FCG$ e $\angle G'CF'$ sono divergenti e le due rette parallele ad AB sono CF e CG' . Come già quello di Bòlyai, anche il parallelismo di Lobačevskij ha due versi, a seconda della parte di piano che si considera rispetto alla perpendicolare CD .

Si noti che Lobačevskij dà per scontata l'esistenza di un elemento di separazione tra le due classi che rappresentano le rette passanti per C e che costituiscono due classi contigue di grandezze. In realtà, la dimostrazione rigorosa dell'esistenza di tale elemento di separazione (e quindi della retta parallela a una retta data) necessita dell'assioma di continuità di Dedekind³².

Un altro aspetto fondamentale nella trattazione di Lobačevskij è lo studio dell'*angolo di parallelismo* [64, p. 280].

L'inclinazione di una linea rispetto alla perpendicolare a un'altra, parallela alla prima, sarà da noi chiamata angolo di parallelismo relativo a questa perpendicolare.

Tale angolo è l'angolo che una retta parallela alla retta data forma con la perpendicolare alla retta data passante per un punto della retta parallela: riferendoci sempre alla Figura 1.20, data la retta AB , l'angolo di parallelismo della retta CF è l'angolo $\angle FCD$; indicando con p il segmento di perpendicolare CD ,

³²Diamo un'idea più rigorosa dell'utilizzo dell'assioma di Dedekind. Consideriamo un solo verso di parallelismo (in riferimento alla Figura 1.20 consideriamo solo le rette per C che entrano nell'angolo $\angle DCE$); siano le rette passanti per C suddivise in due insiemi, $\mathcal{S} = \{\text{rette che intersecano } AB\}$ e $\mathcal{D} = \{\text{rette che non intersecano } AB\}$. Dato che $\mathcal{S} \neq \emptyset$ e $\mathcal{D} \neq \emptyset$ (poiché esiste una retta per C perpendicolare ad AB e esiste una retta per C che condivide la perpendicolare CD con AB e quindi non interseca AB stessa) e che $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ e $\mathcal{S} \cup \mathcal{D} = \{\text{tutte le rette per } C\}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{D}$ costituiscono una partizione dell'insieme delle rette per C . Associando a ogni retta per C l'ampiezza dell'angolo che essa forma con CD , appartenente all'intervallo $[0, 90] \in \mathbb{R}$ (in gradi), è possibile definire una relazione d'ordine nell'insieme $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}$ ed è sempre possibile trovare un numero $\alpha \in I$ (insieme dei numeri associati agli elementi di $\mathcal{S}$) e un numero $\beta \in D$ (insieme dei numeri associati agli elementi di $\mathcal{D}$) tali che $\beta - \alpha$ sia più piccolo di un qualunque $\varepsilon > 0$; è dunque ora possibile utilizzare l'assioma di continuità di Dedekind, per cui esiste un unico elemento $\gamma \in [0, 90]$ tale che $\gamma > I$ e $\gamma < D$, perciò esiste un'unica retta r (associata a γ) che forma un angolo maggiore di tutte le rette secanti ad AB e minore di tutte le rette divergenti ad AB , che è proprio la retta parallela ad AB in questo verso [66, pp. 103–105].

l'angolo di parallelismo $\angle FCD$ viene indicato da Lobačevskij con $\pi(p)$, sottolineando la dipendenza di quest'ultimo dal segmento p . Dopo alcuni teoremi riguardanti rette e triangoli, infatti, egli enuncia e dimostra un risultato molto interessante [64, pp. 283–284].

Teorema 1.19 (Dipendenza dell'angolo di parallelismo dalla distanza). *Nell'ipotesi che la somma di tutti gli angoli di un triangolo sia $< \pi$, l'angolo [di parallelismo] $\pi(p)$ diminuisce costantemente all'aumentare di p , cominciando con $\pi(p) = \frac{\pi}{2}$ per $p = 0$ e tendendo al limite $\pi(p) = 0$ per $p = \infty$.*

Lobačevskij sostiene quindi che $\pi(p)$ è una funzione monotona decrescente di p che assume valori tra $\frac{\pi}{2}$ e 0; in seguito egli definisce l'angolo di parallelismo per segmenti di lunghezza negativa (cioè dall'altra parte del piano rispetto alla retta data inizialmente) con la formula:

$$\pi(-p) + \pi(p) = \pi. \quad (1.5)$$

Nella chiusura del capitolo VII si trovano altri teoremi, tra cui il Teorema di Pitagora per la geometria immaginaria e alcuni risultati sugli assi dei lati dei triangoli. Con il capitolo VIII, invece, fa la sua comparsa anche l'*orociclo*, il caso limite della circonferenza quando il raggio tende all'infinito: tale curva ha molte somiglianze con la curva L introdotta da János Bolyai. Lobačevskij fissa una semiretta AB e, a partire dal punto A traccia un angolo acuto $\angle CAB$; per le proprietà dell'angolo di parallelismo:

$$\forall \alpha = \angle CAB < \frac{\pi}{2} \exists! p > 0 : \alpha = \pi(p). \quad (1.6)$$

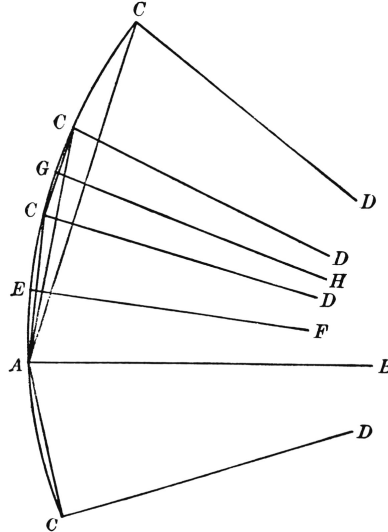


Figura 1.21

Fissato quindi un certo angolo $\alpha = \angle CAB$ egli considera su AC un segmento di lunghezza pari a $2p$ (Figura 1.21) e, detto E il punto medio di AC , traccia l'asse EF del segmento AC . Dato che $AE = EC = p$, EF è parallela ad AB

e anche alla semiretta CD costruita in modo che $\angle ACD = \alpha$; inoltre, per la proprietà transitiva del parallelismo, anche AB e CD sono tra loro parallele. Il luogo dei punti C del piano al variare dell'angolo acuto $\angle BAC$ è proprio la curva che Lobačevskij chiama orociclo. Sfruttando a questo punto i risultati ottenuti nei capitoli precedenti, l'autore prosegue il confronto tra orocicli e circonferenze e dimostra le seguenti Proposizioni:

Proposizione 1.20. *Nell'ipotesi di angoli di parallelismo retti un cerchio si trasforma in una linea retta quando se ne accresce il raggio.*

Proposizione 1.21. *Nell'ipotesi di angoli di parallelismo variabili, un cerchio all'accrescersi del raggio si trasforma in un oriciclo.*

A chiusura di tutto il discorso, come nell'*Appendix* di Bòlyai, Lobačevskij introduce una superficie (corrispondente alla superficie F di Bòlyai) detta *orosfera*:

Una *superficie limite* (= orosfera) dà un orociclo quando è intersecata dai piani passanti per una retta, che chiameremo *asse*, mentre chiameremo i piani stessi *diametri*.

Di qui segue che l'orosfera dev'essere il limite al quale tende la sfera all'aumentare del suo raggio, mentre i cerchi massimi su di essa si trasformano in orocicli.

La riflessione profonda di Lobačevskij sui fondamenti della geometria rappresentò senza dubbio un importante avanzamento teorico nella teoria delle parallele; tuttavia, durante la sua vita, tale elaborazione rimase sul piano astratto e non trovò una piena realizzazione concreta. Per una formulazione più compiuta e applicata della teoria, sarà necessario attendere il contributo di Eugenio Beltrami.

1.6.3 Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich **Gauss** nacque nel 1777 a Braunschweig, in Germania, in una famiglia di modeste condizioni economiche; fin dall'infanzia manifestò un talento matematico eccezionale, attirando l'attenzione di importanti mecenati che gli permisero di proseguire i suoi studi, prima al *Collegium Carolinum* e poi all'Università di Gottinga, dove sviluppò molte delle sue idee più innovative. Già in giovane età ottenne risultati straordinari, come la dimostrazione della costruibilità, con riga e compasso, del poligono regolare di 17 lati; successivamente, nel 1801, pubblicò le *Disquisitiones Arithmeticae*, opera che segna una svolta decisiva nella teoria dei numeri grazie al suo approccio rigoroso e sistematico. Ma Gauss, nella sua vita, si occupò di numerosi altri ambiti, tra cui l'algebra, la geometria, la statistica e la fisica, mostrando una costante attenzione al legame tra teoria e applicazione; in questo contesto, a partire dal 1807, ricoprì il ruolo di direttore dell'osservatorio di Gottinga, dedicandosi anche a ricerche in astronomia, geodesia e magnetismo terrestre. Morì nel 1855. Per la profondità e l'ampiezza della sua opera, Gauss è ricordato ancora oggi come il *Princeps mathematicorum* [38].

Nonostante la vastità dei suoi contributi, è molto difficile valutare la natura e la rilevanza delle ricerche di Gauss, in quanto egli pubblicò con estrema cautela, rendendo noti solo i risultati che ritenne pienamente maturi: tale pensiero è reso molto chiaramente in una lettera del 1827 all'amico e collega astronomo Heinrich Christian Schumacher³³ (1780-1850), in cui Gauss lamenta le difficoltà incontrate nel completare la redazione di uno dei suoi lavori [23, p. 66]:

Trovo in questa attività numerose difficoltà ma, ciò che a buon diritto potrebbe essere chiamato desiderio di perfezione o forma non è ciò che produce un ritardo significativo (a meno di escludere la fragilità della lingua latina³⁴); piuttosto è l'intima concatenazione delle verità nella loro reciproca connessione. Tale lavoro può avere successo solo se il lettore non è più in grado di riconoscere l'enorme sforzo che è stato compiuto nel realizzarlo. Non posso quindi negare di non avere un'idea chiara di come potrei procedere diversamente da come sono abituato, senza consegnare dei mattoni invece che un edificio.

La volontà di Gauss di non voler *consegnare dei mattoni invece che un edificio* ai suoi lettori è una delle principali difficoltà che si incontrano nel ricostruire il pensiero del matematico: nelle opere pubblicate, infatti, egli non spiega come abbia raggiunto i vari risultati, ma cerca di rendere solo la struttura finale dei concetti. La ritrosia nel pubblicare i suoi risultati può anche essere riferita al fatto che egli abbia voluto evitare a ogni costo le *proteste dei Beoti*, cioè probabilmente i filosofi kantiani che ritengono la geometria una forma sintetica a priori, indipendente dall'esperienza. Ecco cosa scrisse in una lettera all'astronomo Friedrich Wilhelm Bessel³⁵ (1784-1846) nel 1829:

Anche su un altro argomento, che mi accompagna ormai da quasi 40 anni, ho a volte riflettuto di nuovo in qualche ora libera; intendo i fondamenti della geometria; non so se Le ho mai parlato delle mie opinioni al riguardo. Anche in questo campo ho ulteriormente consolidato diverse cose, e la mia convinzione che non si possa fondare la geometria completamente a priori è diventata, se possibile, ancora più salda. Nel frattempo, credo che non arriverò molto presto

³³Fu un astronomo, matematico e geodeta tedesco-danese, noto soprattutto per aver fondato nel 1821 la rivista scientifica *Astronomische Nachrichten* e per il suo contributo alle campagne geodetiche in Danimarca e nello Schleswig-Holstein (Germania). Collaborò strettamente con Gauss nello sviluppo delle reti di triangolazione geodetica europee e svolse un ruolo fondamentale nella promozione della cooperazione scientifica internazionale tra astronomi del suo tempo.

³⁴Gauss è uno degli ultimi autori matematici che utilizza il latino come lingua delle sue opere. Una delle problematiche principali di ciò, che egli lamenta in questo passaggio, è la mancanza di una terminologia specifica per i concetti che egli ha la necessità di descrivere: per tale ragione, nell'opera di Gauss, si incontrano diversi neologismi, inventati dall'autore per colmare questa mancanza.

³⁵Fu una delle figure centrali della geodesia moderna; le sue ricerche sulla determinazione dell'ellissoide terrestre e sulle tecniche di triangolazione contribuirono significativamente alla modellizzazione geometrica della Terra e alla costruzione di sistemi cartografici più accurati.

a elaborare le mie vastissime ricerche in merito per renderle pubbliche, e forse questo non avverrà mai durante la mia vita, poiché temo le proteste dei Beoti se volessi esprimere fino in fondo il mio pensiero³⁶.

Per quanto riguarda la geometria, e in particolare la geometria differenziale, la principale opera che Gauss pubblica è quella presentata all'Accademia delle Scienze di Gottinga nel 1827 e pubblicata l'anno successivo, dal titolo *Disquisitiones generales circa superficies curvas*; tale opera, destinata a lasciare un segno indelebile nell'evoluzione della geometria, raccoglie i risultati sviluppati nel corso di un decennio da Gauss ed è di straordinaria densità concettuale. Grazie anche all'analisi di manoscritti e documenti inediti di Gauss, Paul Stäckel³⁷ (1862-1919) propose, nel 1917, una ricostruzione cronologica dello sviluppo delle idee che confluirono successivamente nelle *Disquisitiones generales*. Secondo tale ricostruzione, i principali risultati sarebbero stati ottenuti da Gauss nelle seguenti fasi [23, pp. 66-67]:

- **1799-1813:** introduzione della *mappa di Gauss* e del concetto di curvatura gaussiana come misura intrinseca della curvatura di una superficie;
- **circa 1816:** dimostrazione dell'invarianza della curvatura totale di una superficie rispetto alle isometrie;
- **1823-1825:** espressione della curvatura gaussiana in coordinate conformi e in coordinate polari geodetiche;
- **1825:** studio della somma degli angoli interni di un triangolo geodetico ed espressione della curvatura gaussiana in un sistema di coordinate generiche.

L'idea di ricorrere a una sfera per studiare la curvatura di una superficie nasce da un'osservazione di Gauss secondo cui le proprietà geometriche legate alle direzioni risultano particolarmente semplici da descrivere sulla sfera unitaria [64, p. 260]:

Le considerazioni nelle quali si tratta delle direzioni di varie rette nello spazio sono il più delle volte trasportate al massimo di chiarezza e semplicità se si ricorre all'aiuto di una sfera di raggio = 1 e

³⁶Testo originale: *Auch über ein anderes Thema, das bei mir schon fast 40 Jahr alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht; ich meine die ersten Gründe der Geometrie; ich weiss nicht, ob ich Ihnen je über meine Ansichten darüber gesprochen habe. Auch hier habe ich manches noch weiter consolidirt, und meine Ueberzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist wo möglich noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird diess auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Boeoter scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte.*

³⁷Matematico e storico della matematica tedesco, noto soprattutto per i suoi studi sulla storia delle geometrie non euclidee; a lui si devono importanti ricerche sulla corrispondenza e sui manoscritti di Gauss, Bolyai e Lobačevskij, che contribuirono a chiarire il ruolo svolto da Gauss nello sviluppo della geometria differenziale e della geometria non euclidea.

centro arbitrario i cui punti si richiede che rappresentino le direzioni di rette parallele ai raggi che terminano in quei punti [della sfera].

Più precisamente, associando a ciascun punto di una superficie il corrispondente vettore normale unitario, le variazioni dell'orientazione della superficie possono essere tradotte nello studio di una trasformazione avente come codominio la sfera di raggio unitario; in questo modo, il problema della curvatura viene ricondotto all'analisi di come i vettori normali si distribuiscono e variano sulla sfera. Questa idea conduce alla definizione di una delle nozioni fondamentali introdotte da Gauss nelle *Disquisitiones generales*: la *mappa di Gauss*.

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientabile e sia assegnato su di essa un campo normale unitario. Detta $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ la sfera unitaria, si definisce mappa di Gauss l'applicazione

$$N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2, \quad (1.7)$$

che associa a ogni punto $p \in S$ il vettore normale unitario $N(p)$ applicato nell'origine. In altre parole, la mappa di Gauss manda ciascun punto della superficie nel punto della sfera unitaria individuato dalla sua normale orientata. Dal punto di vista geometrico, la mappa di Gauss misura il modo in cui la direzione della normale varia lungo la superficie. Proprio questa relazione tra la variazione delle normali e la geometria della superficie suggerì a Gauss il legame tra questa applicazione e il concetto di curvatura: per analizzare tale variazione si considera il differenziale della mappa di Gauss in un punto p :

$$dN_p : T_p S \longrightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2, \quad (1.8)$$

dove $T_p S$ denota il *piano tangente* alla superficie nel punto p , mentre $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ indica il piano tangente alla sfera unitaria nel punto $N(p)$. Il differenziale dN_p descrive quindi il modo in cui il vettore normale varia quando ci si muove infinitesimalmente sulla superficie a partire da p . Il contenuto delle *Disquisitiones generales* è trattato con maggior profondità nell'Appendice B.

Nonostante la mancanza di pubblicazioni a riguardo, la riflessione di Gauss circa la teoria delle parallele è testimoniata fin dal 1799, in una lettera a Farkas Bolyai, in cui Gauss lamenta l'occasione perduta di approfondire l'argomento insieme [64, pp. 248–249]:

Mi rincresce di non aver sfruttato la nostra precedente maggiore vicinanza per saperne di più sul tuo lavoro sui fondamenti della geometria. Mi sarei sicuramente risparmiato molti sforzi inutili e mi sarei tranquillizzato, nella misura in cui ciò è possibile per qualcuno come me, dal momento che ancora così tanto resta da fare in un tale oggetto. Io stesso ho fatto molti progressi nel mio lavoro anche se le mie altre attività, molto eterogenee, non mi lasciano molto tempo; il cammino che ho intrapreso non porta all'obiettivo desiderato e che tu stesso hai assicurato di aver raggiunto, ma piuttosto, conduce a dubitare della verità della geometria. Ho trovato ciò che per i più si qualificerebbe come una dimostrazione [del Postulato delle

parallele], ma che ai miei occhi non prova alcunché; ad esempio, se si potesse dimostrare che esistono triangoli rettilinei la cui area è maggiore di ogni regione assegnata³⁸, allora sarei nelle condizioni di giustificare rigorosamente l'intera geometria. I più sarebbero portati a considerare ciò alla stregua di un assioma; non io, però. Sarebbe possibile che, per quanto lontani gli uni dagli altri siano assunti i vertici di un triangolo nello spazio, tuttavia l'area si mantenga sempre inferiore ad un certo limite. Dispongo di molti risultati simili, ma in nessuno io scorgo nulla di soddisfacente.

Grazie a tale estratto, è possibile comprendere quali fossero gli studi di Gauss in quel periodo riguardo al V postulato: egli sta cercando formulazioni equivalenti che risultino evidenti, senza però aver ancora incontrato risultati concreti. Continuando gli studi negli anni seguenti, Gauss trovò sempre più conseguenze della negazione del Postulato delle parallele: nel 1816, in una lettera all'astronomo Christian Ludwig Gerling³⁹ (1788-1864), suo ex studente, sostiene che tale ipotesi implichi l'esistenza di una misura assoluta di lunghezza [62, p. 215]:

Sembra paradossale che possa esistere una linea retta costante data come se fosse a priori, ma non trovo in questo alcuna contraddizione. In effetti, sarebbe auspicabile che la geometria euclidea non fosse vera, perché avremmo allora una misura universale a priori.

Anche qui le parole *sarebbe auspicabile che la geometria euclidea non fosse vera* mostrano la posizione immutata di Gauss nel considerare il V postulato vero. È nel 1817 che Gauss, in una lettera al suo vecchio amico Heinrich Wilhelm Olbers⁴⁰ (1758-1840), riflettè sulla possibilità di dover cambiare l'approccio ai fondamenti della geometria: egli, infatti, sostiene che, mentre i concetti dell'aritmetica sono a priori, i concetti della geometria, come quelli della meccanica, sono astratti dal mondo materiale [62, p. 215]:

Sono sempre più convinto che la necessità della nostra geometria non possa essere dimostrata, almeno non dalla ragione umana per la ragione umana. È possibile che in un'altra vita giungeremo ad altre conclusioni sulla natura dello spazio a cui ora non abbiamo accesso.

³⁸Gauss fa riferimento in questo passaggio ad un fatto vero nella geometria di Lobačevskij: l'area di un triangolo è proporzionale al suo difetto (cioè la differenza tra π e la somma degli angoli interni del triangolo); per tale motivo, se il difetto di un triangolo è δ e l'area è $k\delta$, allora, poiché $\delta < \pi$, si ha che $k\delta \leq k\pi$, cioè l'affermazione di Gauss nell'estratto.

³⁹Matematico, astronomo e geodeta tedesco, fu allievo di Gauss e professore all'Università di Marburgo; è ricordato soprattutto per i suoi lavori di geodesia e per aver diretto la prima grande triangolazione del territorio dell'Assia (Germania), che fornì le basi per la cartografia moderna della regione. I suoi studi contribuirono inoltre alla determinazione della forma della Terra e allo sviluppo delle tecniche di misurazione geodetica del XIX secolo.

⁴⁰Fu un medico e astronomo tedesco noto per aver sviluppato innovativi metodi per il calcolo delle orbite delle comete e per la scoperta degli asteroidi Pallade (1802) e Vesta (1807); figura di grande rilievo nella comunità scientifica europea, intrattenne rapporti con numerosi matematici e astronomi dell'epoca, tra cui Gauss e Bessel.

Nel frattempo non dobbiamo mettere la geometria sullo stesso piano dell'aritmetica che esiste puramente a priori, ma piuttosto della meccanica.

Riconoscere l'assenza di contraddizioni nella geometria nata dalla negazione del V postulato, aspetto messo in luce dalla precedente lettera a Bessel del 1829, rappresenta una tappa fondamentale nel ripensamento di Gauss del modello euclideo; Gauss chiama tale nuova geometria inizialmente "anti-euclidea", poi "geometria astrale" e infine "non euclidea" [19, p. 38].

Sono particolarmente significative alcune lettere della corrispondenza tra Gauss e Schumacher nel maggio 1831, proprio alla vigilia della pubblicazione dell'*Appendix* di János Bolyai. In una prima lettera, Schumacher propone a Gauss un tentativo di dimostrazione del Postulato delle parallele [22, pp. 278–279]:

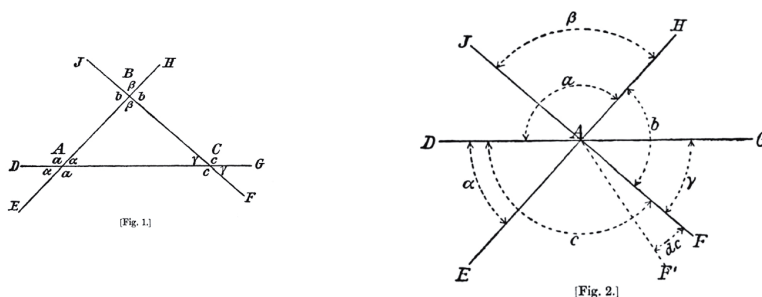


Figura 1.22

Mi concedo la libertà di inviarvi un tentativo di dimostrazione del teorema che la somma di tutti e tre gli angoli di un triangolo rettilineo [è] $= 180^\circ$, che non fa uso di rette parallele e della loro teoria. Da cui seguirebbe la prova dell'assioma euclideo. Altro non suppongo che la somma di tutti gli angoli attorno a un punto [sia] $= 360^\circ = 4R$ e che gli angoli opposti sono uguali. Dal momento che so per esperienza quanto si possa essere ciechi (almeno nel mio caso) nei confronti del proprio lavoro, ho molta paura che alla sua base vi sia una *petitio principii*. Ma ora non sono in grado di rintracciarla e aspetto dunque da voi istruzioni.

[Supplemento] Si prolunghino i lati di un triangolo rettilineo $\triangle ABC$ qualunque oppure, il che è lo stesso, si consideri un sistema di tre rette in un piano, le cui intersezioni determinano il triangolo $\triangle ABC$; allora i tre angoli al vertice ci restituiscono le equazioni:

$$2a + 2\alpha = 4R, \quad 2b + 2\beta = 4R, \quad 2c + 2\gamma = 4R;$$

allora sarà:

$$\alpha + \beta + \gamma = 6R - (a + b + c).$$

Poiché questa relazione sussiste qualunque sia la posizione dei punti A, B, C , o ciò che è indifferente, comunque siano tracciate le linee

nello spazio, si lascino le rette DG , EH immutate e si tracci la retta JF in maniera che formi con EH , lo stesso angolo individuato nella precedente posizione o, poiché questo angolo è arbitrario purché cada entro l'angolo a , abbiamo [...] $a + b + c = 4R$, e dunque $\alpha + \beta + \gamma = 2R$. Ma a partire dall'ipotesi che b (Fig. 1 in 1.22) $= b$ (Fig. 2 in 1.22) l'affermazione che c (Fig. 1 in 1.22) $= c$ (Fig. 2 in 1.22) deve essere dimostrata? A me pare che per l'arbitrarietà dell'angolo questa dimostrazione non sia necessaria. Queste sono le idee direttrici della dimostrazione. Aspetto il tuo parere [...].

I dubbi di *petitio principii* di Schumacher sono confermati da Gauss nella risposta a questa lettera, dove viene spiegato che è stata utilizzata una condizione equivalente al V postulato [22, p. 279]:

Rispetto a quanto mi scrivete sulle parallele avete visto bene. Nei vostri sillogismi avete fatto uso di un'affermazione intermedia senza che l'abbiate resa esplicita. È la seguente: se due rette (1) e (2) formano con una terza retta (3), che le taglia, rispettivamente angoli A' e A'' e se una quarta (4), nel medesimo piano, è tagliata da (1) sotto il medesimo angolo, allora (4) sarà tagliata da (2) sotto l'angolo A'' .

Il fatto è che questa affermazione non solo necessita di una dimostrazione ma anzi, si può dire, che è essa stessa l'affermazione che si intende dimostrare⁴¹.

Nella stessa lettera, Gauss riporta anche alcune sue considerazioni riguardanti certe nuove scoperte sulla teoria delle parallele [22, pp. 279–280]:

Da alcune settimane ho cominciato a scrivere qualcosa delle mie riflessioni a riguardo, ormai vecchie (almeno in parte) di 40 anni, delle quali non ho mai scritto nulla e che per 3 o 4 volte ho dovuto ripensare da capo. Non vorrei che questi miei pensieri scomparissero con me.

Può essere che Gauss faccia riferimento, in queste righe, a una nuova definizione di parallelismo per semirette molto simile a quella di Bolyai, rinvenuta nel suo *Nachlass*. Segue, dopo poco tempo, un nuovo tentativo dimostrativo di Schumacher, che sfrutta questa volta il concetto di triangolo infinito [22, p. 280]:

Si prolunghino i lati di un triangolo rettilineo qualunque e si prenda un raggio R così grande che a/R , b/R , c/R sono più piccoli di

⁴¹Gauss sostiene qui che l'assunto di Schumacher e il V postulato siano equivalenti: è possibile convincersi di ciò grazie alla Proposizione I.28 degli *Elementi* di Euclide. Siano le rette r_1 , r_2 , r_3 , r_4 nella configurazione data da Schumacher; per la Proposizione I.28, se due rette qualsiasi tagliate da una trasversale formano angoli corrispondenti uguali, allora le rette sono parallele. Ciò che dipende dal V postulato è l'affermazione, usata da Schumacher, che la retta r_4 è tagliata da r_2 sotto l'angolo A'' : infatti, quest'ultima affermazione è equivalente alla Proposizione I.29 degli *Elementi*, che dipende dal Postulato delle parallele.

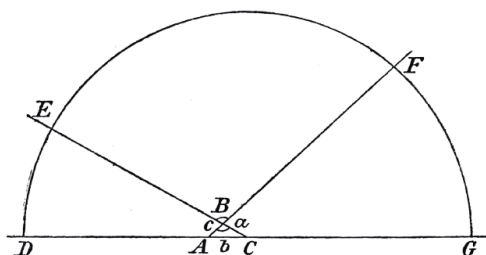


Figura 1.23

qualunque grandezza data. Con questo raggio e con centro in C si descriva la semicirconfenza $DEFG$ [Figura 1.23]. Poiché rispetto a questa semicirconfenza i lati a, b, c possono essere trattati come nulli, così che i punti A, B risultano coincidere con C , allora questa semicirconfenza è la misura dei tre angoli del triangolo, che dunque non possono differire da 180° . Mi sembra pertanto che se non si esclude il concetto di una crescita indefinita, allora questa dimostrazione molto semplice prova che in ogni triangolo finito e rettilineo la somma degli angoli è $= 180^\circ$ [...].

La puntuale risposta di Gauss a tale lettera, oltre a smontare l'argomentazione di Schumacher, chiarisce il livello di profondità a cui sono arrivati i suoi studi. In particolare, il testo della lettera chiarisce senza dubbio che, prima di venire a conoscenza dell'opera di Bolyai e Lobačevskij, Gauss aveva già indagato molti dei risultati delle geometrie non euclidee [22, pp. 280–281]:

Per quanto riguarda le linee parallele, mi sarebbe piaciuto molto scrivervi il mio giudizio sulla vostra prima lettera, se non avessi dovuto presumere che vi sarebbe stato di scarsa utilità senza sviluppi completi. Tali sviluppi completi, se vogliono essere veramente convincenti, richiederebbero forse argomenti concernenti la lunghezza di arco in risposta a ciò che in sostanza avete accennato solo in poche righe, ma per i quali attualmente non ho la disposizione mentale richiesta. Per assicurarvi della mia buona volontà, vorrei aggiungere quanto segue. Voi considerate subito punti propri su ogni triangolo, ma potreste impiegare sostanzialmente il solito ragionamento se consideraste dapprima il caso più semplice e formulaste il teorema: 1) In ogni triangolo un lato del quale è finito, mentre il secondo lato, e di conseguenza anche il terzo sono infiniti, la somma dei due angoli è $= 180^\circ$. Dimostrazione secondo la vostra maniera:

L'arco di circonferenza $\widehat{CD}$ dà la misura dell'angolo $\angle CAD$ così come dell'angolo $\angle CBD$, giacché in una circonferenza di raggio infinito uno spostamento finito del centro deve essere considerato come nullo. Così:

$$\angle CAD = \angle CBD, \angle CAD + \angle CBA = \angle CBD + \angle CBA = 180^\circ.$$

Il resto si ottiene da sé facilmente. Infatti da questo teorema si ha:

$$\alpha + \beta + \delta = 180^\circ, \quad 180^\circ = \varepsilon + \delta, \quad \gamma + \varepsilon = 180^\circ.$$

Così sommando si ha: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ Ma per quanto riguarda la vostra dimostrazione per 1), in primo luogo protesto contro l'uso di una grandezza infinita come di una finita, cosa che non è mai consentita in matematica. L'infinito è solo una *façon de parler*, quando si parla in realtà di limiti a cui certi rapporti si avvicinano, mentre altri crescono senza restrizioni. In questo senso, la geometria non euclidea non contiene nulla di contraddittorio in se stessa, anche se coloro [che imparano a conoscerla] devono inizialmente considerare molti dei suoi risultati come paradossali, ma ciò che è considerato contraddittorio sarebbe solo un inganno, causato dalla precedente abitudine di considerare la geometria euclidea come rigorosamente vera. Nella geometria non euclidea non esistono figure simili senza uguaglianza, ad es., gli angoli di un triangolo equilatero non sono solo diversi da $2/3R$, ma [in triangoli diversi] a seconda delle dimensioni dei lati, se il lato cresce indefinitamente, possono diventare piccoli quanto si voglia. [...]

Nella geometria euclidea non esiste una grandezza assoluta come invece accade nella geometria non euclidea; questo è precisamente il suo carattere essenziale e coloro che non lo ammettono presuppongono già, *eo ipso*, l'intera geometria euclidea. Tuttavia, come detto, secondo me si tratta di un semplice autoinganno.

Per il caso in questione, non vi è alcuna contraddizione nel fatto che se i punti A, B e la direzione AC sono dati, e se C può crescere senza restrizioni, allora, sebbene $\angle DBC$ si avvicini a $\angle DAC$, la differenza non può mai essere portata sotto una certa differenza finita.

Il tuo ricorso all'arco $\widehat{CD}$ rende la conclusione tanto più capziosa, ma se vuoi sviluppare chiaramente ciò che hai soltanto accennato, dovresti procedere così. Vale

$$\angle CAB : \angle CBD = \frac{\widehat{CD}}{\widehat{ECD}} : \frac{\widehat{CD'}}{\widehat{E'CD'}}$$

e al crescere di AC all'infinito, $\widehat{CD}$ e $\widehat{CD'}$ da un lato e $\widehat{ECD}$, $\widehat{E'CD'}$ dall'altro tendono ad avvicinarsi sempre più [Figura 1.24].

Entrambe queste circostanze non si presentano nella geometria non euclidea, se si intende con ciò che i rapporti geometrici si avvicinano quanto si voglia alla uguaglianza. Infatti, nella geometria non euclidea la semicirconferenza di un circolo, il cui raggio è $= r$ è:

$$= \frac{1}{2} \pi k (e^{r/k} - e^{-r/k}), \quad (1.9)$$

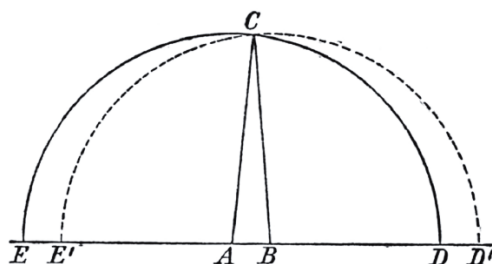


Figura 1.24

dove k è una costante, della quale attraverso l'esperienza sappiamo che essa deve essere enormemente grande rispetto a tutto ciò che possiamo misurare. Nella geometria di Euclide è infinita.

Si fa menzione, in tale risposta, a diversi risultati validi in geometria non euclidea. In primo luogo, Gauss sostiene che in geometria non euclidea *esiste una grandezza assoluta*: tale convinzione è testimoniata nei suoi scritti a partire dal 1808 (si veda, ad esempio, la lettera a Gerling del 1816 riportata a p. 55) ed è spiegata in questo contesto sfruttando un altro fatto valido nella stessa geometria non euclidea, quello per cui due figure simili sono necessariamente congruenti (*non esistono figure simili senza uguaglianza*). Successivamente, per negare la dimostrazione tentata da Schumacher, Gauss cita la formula della misura della semicirconferenza in geometria iperbolica (Formula 1.9): tale risultato proviene dal calcolo, fissata la costante k , della misura di una circonferenza iperbolica di raggio r , data da:

$$C(r) = 2\pi k \sinh \frac{r}{k}. \quad (1.10)$$

Inoltre, altre caratteristiche della geometria non euclidea citate sono: angoli corrispondenti individuati da una trasversale che taglia due rette parallele non sono congruenti; le semicirconferenze ECD ed $E'CD'$ hanno rapporto distinto dall'unità al tendere di C all'infinito.

Nel 1832, Gauss lesse l'*Appendix* di János Bolyai e si attribuì, come abbiamo visto, i meriti dei risultati in essa contenuti: forte dei molti risultati che aveva scoperto e che abbiamo citato solo in parte, egli sembra mancare, comunque, della sistematicità necessaria per la realizzazione di un'opera completa. L'approccio che lo convincerà maggiormente sarà quello che troverà leggendo le opere di Lobačevskij. In una lettera a Schumacher del 1846, Gauss torna a evidenziare analogie e differenze tra l'approccio del matematico russo e il proprio [22, 62, pp. 283–284, p. 220]:

Di recente ho avuto l'occasione di rivedere il lavoro di Lobačevskij [...]. Esso contiene le caratteristiche essenziali della geometria che dovrebbero avere luogo e potrebbero aver luogo rigorosamente se la geometria euclidea non fosse quella vera. Schweikart chiamava tale

geometria, geometria astrale, geometria immaginaria la chiama Lobačevskij. Sai che ho coltivato la stessa convinzione per 54 anni (dal 1792) [...]. Ma nello sviluppare l'argomento l'autore ha seguito una strada diversa da quella che ho intrapreso io; Lobačevskij ha svolto il compito in modo magistrale e con un vero spirito geometrico. Ritengo mio dovere richiamare la vostra attenzione su quest'opera che vi darà sicuramente un piacere davvero eccezionale.

Non viene mai spiegato il metodo con cui Gauss sia arrivato, nel corso degli anni, ai molti risultati validi in geometria non euclidea. Non è chiaro nemmeno se, anche dopo la lettura delle opere di Bòlyai e Lobačevskij, egli abbia elaborato una connessione tra la teoria delle superfici, trattata nelle sue *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, e tale geometria. A tale proposito citiamo le considerazioni di Alberto Cogliati [22, p. 284]:

Una tale interpretazione imporrebbe tuttavia di attribuire a Gauss l'idea secondo la quale una superficie può essere definita in maniera puramente astratta sulla base del semplice dato di una metrica e di un opportuno ambito di variabilità per le coordinate dei punti del piano. Ma questa è una prospettiva che appare totalmente estranea al punto di vista elaborato nelle *Disquisitiones*, dove, nonostante l'enfasi posta sullo studio delle proprietà intrinseche, Gauss si limitò a considerare superfici immerse nello spazio euclideo.

1.7 Dalla legittimazione della geometria iperbolica alla sistematizzazione delle geometrie

La scoperta delle geometrie non euclidee da parte di Gauss, Bòlyai e Lobačevskij rappresentò una delle più profonde rivoluzioni concettuali della geometria. Tuttavia, per diversi decenni, tali teorie non furono unanimemente condivise dalla comunità scientifica. Il principale ostacolo era costituito dall'assenza di un quadro generale capace di contestualizzare in modo convincente la geometria euclidea e quella non euclidea: se la geometria iperbolica non conduceva a contraddizioni, allora il V postulato di Euclide non poteva più essere considerato necessario, ma solamente una possibile scelta assiomatica.

In questo processo di legittimazione un ruolo decisivo fu svolto da Eugenio Beltrami, che nel 1868 pubblicò il *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, opera nella quale mostrò che la geometria di Lobačevskij poteva essere rappresentata attraverso la geometria intrinseca della pseudosfera, cioè sfruttando una superficie a curvatura costante negativa. Sebbene tale rappresentazione fosse soltanto locale, essa poneva per la prima volta in corrispondenza la geometria non euclidea e la teoria delle superfici curve sviluppata da Gauss nelle *Disquisitiones*, una teoria ampiamente riconosciuta e consolidata. L'anno seguente, con la pubblicazione della *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, Beltrami sviluppò ulteriormente queste idee, integrando le idee di Riemann in questa sua nuova concezione e realizzando analiticamente

una rappresentazione n -dimensionale della geometria di Lobačevskij e Bòlyai. Il contributo di Beltrami è diffusamente affrontato nei capitoli successivi di questa trattazione.

Beltrami riuscì, grazie al suo modello, ad interpretare la geometria non euclidea all'interno della geometria euclidea, mostrando che ogni eventuale contraddizione della geometria non euclidea avrebbe implicato una contraddizione nella stessa geometria euclidea: Beltrami aveva così posto fine alla questione relativa alla dimostrazione del V postulato di Euclide, mostrando che attraverso la negazione di esso è ancora possibile strutturare un modello geometrico coerente [4]. La geometria euclidea cessò così progressivamente di essere considerata l'unica descrizione possibile dello spazio e divenne una tra diverse strutture geometriche ammissibili.

Parallelamente, la riflessione geometrica venne profondamente influenzata dalle idee di Bernhard Riemann. Nel lavoro *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, originariamente presentato nel 1854 e pubblicato postumo nel 1868, Riemann introdusse una concezione radicalmente nuova dello spazio geometrico [61]: lo spazio non doveva più essere necessariamente identificato con lo spazio euclideo tridimensionale, ma poteva essere interpretato come una varietà dotata di una struttura metrica, le cui proprietà geometriche venivano descritte mediante il concetto di curvatura. In questo quadro concettuale, le geometrie euclidea, ellittica e iperbolica apparivano come casi particolari di spazi a curvatura costante rispettivamente nulla, positiva e negativa. La prospettiva riemanniana permise di collocare la geometria iperbolica all'interno di una teoria molto più generale, nella quale le differenti geometrie emergevano come manifestazioni di una stessa struttura matematica fondamentale: la metrica.

Nel corso della seconda metà dell'Ottocento e dei primi decenni del Novecento, matematici come Elwin Bruno Christoffel⁴² (1829-1900), Gregorio Ricci-Curbastro⁴³ (1853-1925), Tullio Levi-Civita⁴⁴ (1873-1941) ed Élie Cartan⁴⁵ (1869-1951) svilupparono strumenti sempre più sofisticati per lo studio delle varietà differenziabili e delle loro proprietà metriche. In tale contesto, la geo-

⁴²Matematico e fisico tedesco che diede contributi fondamentali alla geometria differenziale; il suo nome è associato ai *simboli di Christoffel*, introdotti nello studio delle varietà differenziabili e delle connessioni, che costituiscono uno strumento essenziale per la descrizione della curvatura e delle geodetiche. I suoi lavori aprirono la strada allo sviluppo del calcolo tensoriale e della geometria riemanniana moderna.

⁴³Fu un matematico italiano e uno dei fondatori della geometria differenziale moderna. Professore all'Università di Padova, elaborò il calcolo differenziale assoluto, oggi noto come calcolo tensoriale, fornendo un linguaggio matematico fondamentale per lo studio delle varietà riemanniane e delle loro proprietà geometriche.

⁴⁴Allievo di Ricci-Curbastro, sviluppò e approfondì gli aspetti geometrici del calcolo tensoriale; tra i suoi contributi più importanti figurano l'introduzione del trasporto parallelo e la formalizzazione della derivazione covariante, strumenti essenziali nella moderna geometria riemanniana e nello studio delle geodetiche.

⁴⁵Élie Cartan fu uno dei maggiori matematici del XX secolo; sviluppò profondamente la geometria differenziale attraverso l'introduzione delle forme differenziali, del metodo dei riferimenti mobili e della teoria delle connessioni. I suoi lavori sui gruppi di Lie e sugli spazi geometrici generalizzati contribuirono in modo decisivo alla formulazione moderna della geometria e influenzarono numerosi sviluppi successivi, dalla topologia alla fisica matematica.

metria iperbolica venne reinterpretata come uno degli esempi fondamentali di varietà a curvatura costante negativa, acquisendo un ruolo centrale nello sviluppo della geometria moderna. La crescente molteplicità di teorie geometriche rese tuttavia necessario individuare un principio generale capace di organizzarle e metterle in relazione. Questo obiettivo fu perseguito da Felix Klein⁴⁶ (1849-1925) nel celebre *Programma di Erlangen* del 1872, una delle opere più influenti nella storia della geometria [41]. L'idea fondamentale di Klein consistette nel classificare le geometrie attraverso i gruppi di trasformazioni che ne preservano le proprietà essenziali: la geometria euclidea corrisponde, dunque, al gruppo delle isometrie euclidee, la geometria affine al gruppo delle trasformazioni affini e la geometria proiettiva al gruppo delle trasformazioni proiettive. La geometria iperbolica, in quest'ottica, può essere interpretata, grazie alle idee precedentemente sviluppate da Arthur Cayley⁴⁷ (1821-1895) e portate avanti dallo stesso Klein, tramite opportune trasformazioni proiettive che conservano una conica fondamentale.

Alla fine del XIX secolo emerse inoltre l'esigenza di una maggiore chiarezza nei fondamenti della disciplina. In tale contesto si colloca il lavoro di David Hilbert⁴⁸ (1862-1943), culminato nella pubblicazione dei *Grundlagen der Geometrie* nel 1899 [39]. Questo lavoro contribuì in modo decisivo a chiarire le relazioni logiche tra gli assiomi geometrici e a formalizzare concetti quali coerenza, indipendenza e completezza. La geometria iperbolica venne così definitivamente riconosciuta come una teoria matematica rigorosa e legittima, al pari della geometria euclidea.

L'evoluzione della geometria tra la seconda metà dell'Ottocento e i primi decenni del Novecento segna una delle più profonde trasformazioni concettuali nella storia della matematica. Il problema del Postulato delle parallele, che aveva alimentato per secoli il dibattito geometrico, portò infine al riconoscimento dell'esistenza di differenti sistemi geometrici logicamente coerenti. Grazie ai

⁴⁶Fu uno dei matematici più influenti della seconda metà dell'Ottocento. Dopo la formazione a Bonn sotto la guida di Julius Plücker, insegnò a Erlangen, Monaco, Lipsia e Göttinga, contribuendo in maniera decisiva allo sviluppo di quest'ultima sede universitaria, rendendola uno dei principali centri matematici europei. La sua produzione scientifica abbraccia numerosi settori della matematica, dalla geometria alla teoria delle funzioni: tra i suoi contributi più importanti, oltre al *Programma di Erlangen*, si ricordano gli studi sulle superfici di Riemann, le ricerche sulle funzioni automorfe e il fondamentale ruolo svolto nel rinnovamento dell'insegnamento della matematica. Nell'ambito della geometria non euclidea, il suo nome è legato sia alla diffusione dei modelli materiali utilizzati per la visualizzazione delle superfici e degli enti geometrici, sia all'interpretazione proiettiva della geometria iperbolica, concretizzata nel modello oggi noto come modello di Beltrami-Klein.

⁴⁷Cayley fu un matematico inglese che contribuì in modo determinante allo sviluppo dell'algebra lineare, della teoria dei gruppi e della geometria proiettiva. Nel saggio *On the Theory of Distance* (1859) introdusse l'idea di definire una metrica mediante il birapporto e una conica o quadrica privilegiata, detta *assoluto*. Tale impostazione fornì una descrizione unificata delle geometrie euclidea e non euclidee nell'ambito della geometria proiettiva. Per approfondire l'argomento si veda la *Teoria dell'assoluto* di Cayley [15, pp. 21-23].

⁴⁸Matematico tedesco noto per i suoi contributi ai fondamenti della matematica; nelle *Grundlagen der Geometrie* (1899) riformulò gli assiomi della geometria secondo criteri di rigore logico e coerenza formale, dando origine a uno dei più importanti programmi di fondazione della geometria moderna. L'argomento è trattato più diffusamente nell'Appendice C.

contributi di Beltrami, Riemann, Klein e Hilbert, la geometria cessò di essere identificata esclusivamente con la descrizione dello spazio euclideo e divenne lo studio di strutture logicamente coerenti. In questa prospettiva, la geometria iperbolica non apparve più come una semplice deviazione dalla tradizione euclidea, ma come una componente essenziale della moderna visione della geometria e uno dei fondamenti su cui si è sviluppata la matematica contemporanea.

1.8 I modelli della geometria iperbolica

L'opera di Eugenio Beltrami aprì la strada alla visualizzazione delle geometrie non euclidee, grazie agli strumenti sia dell'analisi sia della geometria. Forniamo di seguito una descrizione dei principali modelli nati a seguito di tali sviluppi, che realizzano la geometria del piano iperbolico e rappresentano varietà a curvatura costante negativa: il modello del disco di Poincaré, il modello del semipiano di Poincaré e il modello di Beltrami-Klein. Oltre a essi, descriviamo brevemente anche il modello della geometria sferica, che rappresenta una varietà a curvatura costante positiva [1].

Nell'ottica di fare una presentazione moderna dei modelli, si consideri la struttura logico-deduttiva della geometria neutrale attuale, basata su un sistema di assiomi organizzati in quattro gruppi: incidenza, ordinamento, congruenza e continuità. Per una visione dettagliata della struttura assiomatica della geometria neutrale si veda l'Appendice C.

1.8.1 Modello del disco di Poincaré

Il modello del disco di Poincaré, detto più propriamente *modello conforme del disco di Riemann-Beltrami-Poincaré*, fu descritto brevemente per la prima volta da Bernhard Riemann durante una conferenza del 1854⁴⁹ (il testo relativo fu pubblicato solo successivamente, nel 1868); quest'opera fu la stessa che ispirò l'articolo di Eugenio Beltrami del 1869⁵⁰, dove il modello fu ripreso e sviluppato. Più tardi, Henri Poincaré⁵¹ (1854-1912) impiegò questo modello sia nel suo studio del 1882 sulle funzioni iperboliche, paraboliche ed ellittiche⁵², sia nel suo trattato filosofico⁵³, del 1905, l'opera che rese il modello definitivamente celebre. Il grande merito di Poincaré fu quello di aver impiegato per primo il modello per comprendere fenomeni originariamente ritenuti estranei alla geometria non euclidea; in questo modo, egli conferì a tale strumento un ruolo chiave nel progresso di diverse discipline scientifiche.

⁴⁹ *Habilitationsvortrag: über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Tradotto: *Conferenza di abilitazione: sulle ipotesi che stanno alla base della geometria.*

⁵⁰ *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante.*

⁵¹ Matematico, fisico e filosofo della scienza francese, spesso considerato l'ultimo grande matematico universalista; i suoi contributi alla geometria e alla topologia furono fondamentali: introdusse concetti che diedero origine alla topologia algebrica moderna, studiò le proprietà globali delle varietà e formulò la celebre *Congettura di Poincaré*, che avrebbe influenzato profondamente la ricerca matematica del XX secolo.

⁵² *Théorie des groupes fuchsians.* Tradotto: *Teoria dei gruppi fuchsiani.*

⁵³ *La science et l'hypothèse.* Tradotto: *La scienza e l'ipotesi.*

Il modello $\mathbb{D}$ del disco di Poincaré è un modello di geometria piana iperbolica, che deve il suo nome al fatto che il piano in tale modello è il disco unitario, immerso nel piano complesso [66]:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}. \quad (1.11)$$

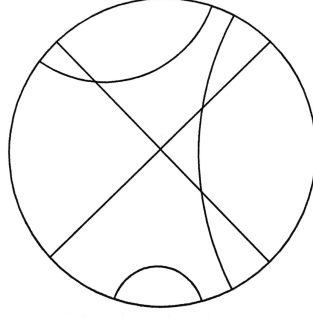


Figura 1.25

Detta $\omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circonferenza unitaria, in esso i punti sono i punti interni a Ω e le rette sono i diametri di Ω e gli archi di circonferenza contenuti in Ω e ortogonali a ω (Figura 1.25); la misura angolare è quella euclidea e la metrica definita su $\mathbb{D}$ è detta metrica di Poincaré ed è ottenuta in questo modo [72, p. 194]:

$$ds^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - (x^2 + y^2))^2}. \quad (1.12)$$

Ciò ci permette di calcolare la lunghezza iperbolica $l(\gamma)$ di una curva arbitraria, di classe C^1 , $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, parametrizzata $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, come segue:

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \frac{2\sqrt{dx^2(t) + dy^2(t)}}{(1 - x^2(t) - y^2(t))} dt. \quad (1.13)$$

Osservazione 1.22. Si noti che il disco Ω è privo della circonferenza, così come archi di circonferenza e diametri non includono gli estremi; i punti della circonferenza rappresentano i punti all'infinito del piano iperbolico.

Per comprendere il modello, sono necessarie alcune definizioni preliminari, quali quelle di *inversione circolare*, di *birapporto* e di *Trasformazione di Möbius*, che indichiamo di seguito con alcune delle loro principali proprietà [66].

Definizione 1.23 (Inversione Circolare). Siano Π il piano euclideo, $C \in \Pi$ e $\gamma \subset \Pi$ la circonferenza di centro C e raggio $R \in \mathbb{R}$ fissato. L'inversione circolare rispetto a γ è una trasformazione

$$I_{\gamma} : \Pi \setminus \{C\} \rightarrow \Pi \setminus \{C\} \quad (1.14)$$

tale che, $\forall A \in \Pi \setminus \{C\}$ valgono:

- $A' = I_\gamma(A)$ appartiene alla semiretta di origine C che contiene A ;
- $d(A, C)d(A', C) = R^2$.

Il cerchio delimitato da γ è detto *cerchio di inversione*.

Osservazione 1.24. *Si può estendere l'inversione circolare I_γ a tutto il piano euclideo associando al punto C il punto all'infinito ∞ , in modo che si abbia:*

$$I_\gamma(C) = \infty, \quad I_\gamma(\infty) = C. \quad (1.15)$$

Chiamiamo $\Pi \cup \{\infty\}$ *piano inversivo*.

Elenchiamo alcune delle principali proprietà dell'inversione circolare. Consideriamo I_γ l'inversione circolare rispetto alla circonferenza γ di centro C e raggio R [66]:

- (P1) L'inversione circolare è un'**involuzione**; dunque, se viene applicata due volte, dà l'identità: se $I_\gamma(A) = A'$, allora $I_\gamma(A') = A$, ovvero $I_\gamma^2(A) = A$;
- (P2) I punti fissi dell'inversione circolare I_γ sono i punti della circonferenza γ ;
- (P3) Ogni semiretta l con origine in C è tale che $I_\gamma(l) = l$; i punti di l non sono in generale punti fissi;
- (P4) Ogni circonferenza δ ortogonale a γ è tale che $I_\gamma(\delta) = \delta$; i punti di δ non sono in generale punti fissi;
- (P5) L'inversione circolare è una trasformazione **conforme**, cioè conserva gli angoli;
- (P6) L'inversione circolare manda rette e circonferenze in rette e circonferenze: in particolare si ha che:
 - se la retta $s \in \Pi$ è tale che $C \in s$, allora $I_\gamma(s) = s$ per la proprietà (P3) e quindi è ancora una retta;
 - se la retta $s \in \Pi$ è tale che $C \notin s$, allora $I_\gamma(s)$ è una circonferenza tale che $C \in I_\gamma(s)$; viceversa, se la circonferenza $\delta \subset \Pi$ è tale che $C \in \delta$, allora $I_\gamma(\delta)$ è una retta tale che $C \notin I_\gamma(\delta)$;
 - se la circonferenza $\delta \subset \Pi$ è tale che $C \notin \delta$, allora $I_\gamma(\delta)$ è ancora una circonferenza che non contiene C .
- (P7) Si consideri la corrispondenza canonica tra i punti del piano euclideo e i numeri complessi: sia $z = \rho e^{i\vartheta}$ il numero complesso associato ad $A \in \Pi$ e sia z' il numero complesso associato ad $A' = I_\gamma(A)$; la rappresentazione analitica dell'inversione circolare I_γ , con γ centrata nell'origine, è:

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z}} e^{i\vartheta} = \frac{R^2}{\rho e^{-i\vartheta}} = \frac{R^2}{\bar{z}}, \quad (1.16)$$

dove $\bar{z}$ è il complesso coniugato di z . Se si considerano, sempre nel caso di un'inversione circolare I_γ con γ centrata nell'origine, $z = x + iy$ e

$z' = x' + iy'$, chiamando $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, è possibile riscrivere la formula (1.16) in questo modo:

$$z' = \frac{R^2}{\varrho} e^{i\vartheta} = \frac{R^2}{\varrho^2} \varrho e^{i\vartheta} = \frac{R^2}{\varrho^2} z = \frac{R^2}{x^2 + y^2} x + i \frac{R^2}{x^2 + y^2} y. \quad (1.17)$$

L'inversione circolare non è un'isometria del piano euclideo. Vale infatti il risultato seguente.

Teorema 1.25. *Siano A e B due punti di $\Pi \setminus \{O\}$ e siano A' e B' le loro immagini secondo l'inversione circolare I_γ rispetto alla circonferenza γ di centro O e raggio $R \in \mathbb{R}$, allora vale l'equazione:*

$$A'B' = \frac{R^2}{OA \times OB} AB \quad (1.18)$$

Per trovare degli invarianti rispetto ad inversioni circolari, partiamo dalla definizione di birapporto di quattro punti nel piano complesso, introdotta nel 1875 da Ludwig Wedekind⁵⁴ (1843-1908), uno studente di Felix Klein:

Definizione 1.26 (Birapporto). Il birapporto di quattro numeri complessi, nell'ordine $z_A, z_B, z_C, z_D \in \mathbb{C}$, è il numero complesso

$$(z_A, z_B; z_C, z_D) := \frac{\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}}{\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}} = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}. \quad (1.19)$$

Per quanto riguarda le proprietà del birapporto per numeri complessi, consideriamo il seguente risultato [66]:

Teorema 1.27. *Condizione necessaria e sufficiente perché il birapporto di quattro punti nel piano inversivo sia reale è che i punti siano allineati o appartengano ad una circonferenza.*

Osservazione 1.28. *Il birapporto può essere definito anche tra quattro punti allineati come segue: dati quattro punti A, B, C, D sulla stessa retta r , il birapporto $(A, B; C, D)$ dei quattro punti nell'ordine dato, considerando con segno le distanze tra i punti, è*

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD} \frac{BD}{BC}. \quad (1.20)$$

In tal caso, se la retta r a cui appartengono i punti del birapporto contiene il centro di una certa circonferenza γ , allora il birapporto è invariante per l'inversione circolare rispetto a tale circonferenza.

Definizione 1.29 (Trasformazione di Möbius). Una Trasformazione di Möbius è un'applicazione

$$\mathcal{M} : \Pi \cup \infty \rightarrow \Pi \cup \infty, \quad z \mapsto z' = \frac{az + b}{cz + d} = \mathcal{M}(z), \quad (1.21)$$

⁵⁴Matematico tedesco che studiò le forme binarie e la loro interpretazione geometrica.

dove si considera la corrispondenza canonica tra i punti del piano euclideo e i numeri complessi, per cui ogni $P \in \Pi \cup \infty$ di coordinate (x, y) corrisponde a $z = x + iy \in \mathbb{C}$. I coefficienti a, b, c, d sono numeri complessi tali che:

$$\Delta := ad - bc \neq 0. \quad (1.22)$$

Osservazione 1.30. *La condizione (1.22) è necessaria per fare in modo che le Trasformazioni di Möbius siano invertibili: se fosse infatti $\Delta = 0$ è facile mostrare che la trasformazione $\mathcal{M}$ manderebbe tutto Π in un solo punto, che può anche essere ∞ . Se $\Delta \neq 0$, allora è possibile far corrispondere a $z = -c/d$ il punto all'infinito e viceversa, così da poter ottenere la trasformazione inversa di $\mathcal{M}$:*

$$\mathcal{M}^{-1}(z') = \frac{-dz' + b}{cz' - a}. \quad (1.23)$$

Per chiarire le proprietà delle Trasformazioni di Möbius, è possibile scomporle come segue [66]; nel caso in cui $c \neq 0$ si ha:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{acz + bc}{c(cz + d)} = \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c^2} \left(\frac{1}{z + d/c} \right) = \mathcal{M}(z), \quad (1.24)$$

da cui è possibile scomporre $\mathcal{M}(z)$ in quattro trasformazioni:

- traslazione orizzontale: $z \mapsto z_1 = T_{\frac{d}{c}}(z) = z + \frac{d}{c}$;
- inversione rispetto al cerchio unitario e riflessione intorno all'asse reale: $z_1 \mapsto z_2 = N(z_1) = \frac{1}{z_1}$;
- omotetia combinata con una rotazione: $z_2 \mapsto z_3 = D(z_2) = \frac{-\Delta}{c^2} z_2$;
- traslazione orizzontale: $z_3 \mapsto z_4 = T_{\frac{a}{c}}(z_3) = z_3 + \frac{a}{c}$.

Vale quindi la formula:

$$\mathcal{M}(z) = T_{\frac{a}{c}} D N T_{\frac{d}{c}}(z). \quad (1.25)$$

Nel caso in cui $c = 0$, dal momento che a e d non possono annullarsi, si ha:

$$z' = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}, \quad (1.26)$$

cioè la composizione di una dilatazione combinata con una rotazione D e di una traslazione $T_{\frac{b}{d}}$, per cui:

$$\mathcal{M}(z) = T_{\frac{b}{d}} D(z). \quad (1.27)$$

Elenchiamo alcune delle principali proprietà delle Trasformazioni di Möbius [66]:

- (P1) Le Trasformazioni di Möbius conservano gli angoli in misura e in verso;
- (P2) Le Trasformazioni di Möbius mandano rette e circonferenze in rette e circonferenze;

- (P3) Le Trasformazioni di Möbius formano un gruppo $\mathcal{G}$ con la composizione tra applicazioni come prodotto;
- (P4) Il birapporto di quattro punti del piano inversivo è invariante sotto l'azione di una Trasformazione di Möbius;
- (P5) Se una Trasformazione di Möbius manda una circonferenza $\mathcal{C}$ in una circonferenza $\mathcal{C}'$, l'interno di $\mathcal{C}$ è mandato o nell'interno o nell'esterno di $\mathcal{C}'$.

Definizione 1.31 (Trasformazione di Möbius speciale). Una Trasformazione di Möbius che manda Ω in sé è detta Trasformazione di Möbius speciale.

Tornando al modello $\mathbb{D}$ del disco di Poincaré, si assuma che le rette in $\mathbb{D}$ soddisfino le stesse proprietà dello "stare tra" delle rette e circonferenze euclidee. Si può verificare che le proprietà di incidenza delle rette in $\mathbb{D}$ sono quelle tipiche di ogni geometria di incidenza e che due rette iperboliche non possono avere più di un punto in comune senza coincidere, perciò è soddisfatto anche l'assioma di separazione del piano (*Assioma di Pasch*). In $\mathbb{D}$ il criterio di congruenza è il seguente [66].

Definizione 1.32 (Segmenti congruenti in $\mathbb{D}$). Due segmenti AB e CD in Ω sono congruenti se esiste una Trasformazione di Möbius speciale $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M}(A) = C$ e $\mathcal{M}(B) = D$.

Il triangolo viene invece definito nel seguente modo.

Definizione 1.33 (Triangolo in $\mathbb{D}$). Un triangolo $\triangle ABC$ in Ω è l'insieme $\{AB\} \cup \{BC\} \cup \{CA\}$, dove AB, BC, CA sono rette in Ω . Due triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ in Ω sono congruenti se esiste una Trasformazione di Möbius speciale che mandi A in A' , B in B' e C in C' .

Nel rispetto di tale definizione, è possibile verificare i criteri di congruenza dei triangoli. Per quanto riguarda il parallelismo, in $\mathbb{D}$ si definiscono parallele due rette iperboliche che non si incontrano; è dunque semplice verificare che il V postulato non è valido, essendo invece valido il seguente [20, p. 21]:

Data una retta e un punto esterno ad essa, è possibile tracciare più di una retta passante per il punto e parallela alla retta data.

Dati, inoltre, una retta e un punto esterno ad essa, è possibile definire l'angolo di parallelismo.

Definizione 1.34 (Angolo di parallelismo). Siano $l \in \Omega$ una retta iperbolica e $P \in \Omega \setminus l$ un punto qualsiasi, siano A e B i due punti di intersezione di l con ω e sia s l'unica retta iperbolica passante per P e perpendicolare a l ; detto $Q = s \cap l$, l'angolo di parallelismo di l rispetto a P è l'angolo tra il segmento PQ e una delle due rette asintoticamente parallele a l e passanti per P , dove con rette asintoticamente parallele a l e passanti per P si intendono le due rette iperboliche passanti una per P e A e l'altra per P e B .

La metrica definita su $\mathbb{D}$ tramite le Trasformazioni di Möbius, compatibile con il criterio di congruenza fornito (oltre che con la definizione precedente di metrica), è la seguente [66].

Definizione 1.35 (Metrica in $\mathbb{D}$). Siano A e B in Ω due punti e si consideri l'unica retta iperbolica che li congiunge, siano α e β i due punti di intersezione di tale retta con ω in modo che sia $\alpha - A - B - \beta$. La metrica di Poincaré è la metrica $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ definita in modo tale che

$$d(A, B) := |\log(\alpha, \beta; A, B)|. \quad (1.28)$$

Per le proprietà del birapporto la metrica di Poincaré è ben definita e soddisfa la disuguaglianza triangolare. Le circonferenze in $\mathbb{D}$ sono ancora circonferenze, ma il centro iperbolico non coincide con il centro euclideo; infine, in $\mathbb{D}$ gli orocicli assumono la forma di circonferenze interne a Ω , tangenti in un punto di ω e private del punto di tangenza.

1.8.2 Modello del semipiano di Poincaré

Sebbene porti il nome di Poincaré, il modello del semipiano fu originariamente descritto da Joseph Liouville in una nota al trattato di Gaspard Monge *Application de l'analyse à la géométrie*⁵⁵, del 1850, in cui il modello è utilizzato come esempio di superficie a curvatura costante negativa. In seguito, Eugenio Beltrami nella *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* del 1869, utilizzò tale modello per dimostrare che la geometria iperbolica era coerente quanto quella euclidea. Dopo che Felix Klein inquadrò il modello nella teoria dei gruppi con un suo lavoro⁵⁶ del 1871, Henri Poincaré lo riscoprì: nella stessa opera⁵⁷ del 1882 in cui venne descritto il disco, Poincaré lo utilizzò per risolvere problemi legati a equazioni differenziali e funzioni automorfe, formalizzandone il legame con l'analisi complessa. A fronte di tali vicissitudini, il modello può essere più propriamente chiamato *modello conforme del semipiano di Liouville-Beltrami* [1].

Il modello $\mathbb{H}$ del semipiano di Poincaré è un modello di geometria iperbolica piana, avente come piano il semipiano superiore del piano euclideo [66]:

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}(z) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}. \quad (1.29)$$

I punti di $\mathbb{H}$ sono i punti di $\mathcal{H}$, mentre le rette iperboliche di $\mathbb{H}$ sono di due tipi (Figura 1.26) [56, p. 5]:

- (i) rette parallele all'asse delle y : $\{(x, y) \in \mathcal{H} : x = k\}$ per qualche $k \in \mathbb{R}$;

⁵⁵Il trattato di G. Monge, in cui la nota di J. Liouville è ospitata, è: *Application de l'analyse à la géométrie*, 5ème éd., revue, corrigée et annotée par J. Liouville, Bachelier, Paris 1850; la nota in questione è: Note II: *Expressions diverses de la distance de deux points infiniment voisins et de la courbure géodésique des lignes sur une surface*, pp. 569-576.

⁵⁶Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Tradotto: *Sulla cosiddetta geometria non euclidea*.

⁵⁷*Théorie des groupes fuchsians*.

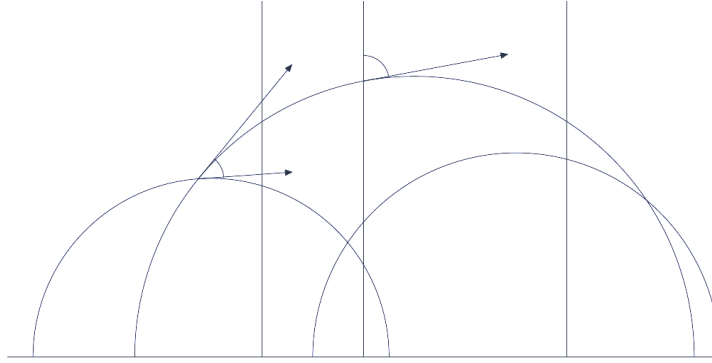


Figura 1.26

- (i) semicirconferenze ortogonali all'asse delle x : $\{(x, y) \in \mathcal{H} : (x - k)^2 + y^2 = r^2\}$ per qualche $k, r \in \mathbb{R}$.

La misura angolare è quella euclidea e la metrica definita su $\mathbb{H}$ è detta metrica di Riemann ed è data da [20, p. 35]:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \quad (1.30)$$

Ciò ci permette di calcolare la lunghezza iperbolica $l(\gamma)$ di una curva arbitraria, di classe C^1 , $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}$, parametrizzata $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, come segue:

$$l(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \frac{\sqrt{dx^2(t) + dy^2(t)}}{y(t)} dt. \quad (1.31)$$

Osservazione 1.36. *Si noti che, come nel modello $\mathbb{D}$ del disco i punti della circonferenza rappresentavano i punti all'infinito del piano iperbolico, nel modello $\mathbb{H}$ del semipiano i punti all'infinito sono rappresentati dai punti dell'asse delle ascisse.*

Grazie a tali definizioni, è possibile dimostrare che il modello $\mathbb{H}$ soddisfa gli assiomi di incidenza e gli assiomi di ordine. Considerando inoltre le Trasformazioni di Möbius speciali che mandano $\mathcal{H}$ in sé, è possibile definire la congruenza in $\mathbb{H}$ [56, pp. 5–10].

Definizione 1.37 (Segmenti congruenti in $\mathbb{H}$). Due segmenti AB e CD in $\mathcal{H}$ sono congruenti se esiste una Trasformazione di Möbius speciale $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M}(A) = C$ e $\mathcal{M}(B) = D$.

Un triangolo iperbolico in $\mathbb{H}$ è un triangolo i cui lati sono segmenti iperbolici in $\mathbb{H}$, di cui al più uno è contenuto in una retta del tipo (i); valgono i criteri di congruenza per triangoli. In $\mathbb{H}$ è facile dimostrare che non vale il V postulato di Euclide, ma per un punto esterno a una retta iperbolica passano infinite rette iperboliche che non intersecano la retta iperbolica data; è possibile, anche in questo caso, definire l'angolo di parallelismo come segue [66].

Definizione 1.38 (Angolo di parallelismo in $\mathbb{H}$). Siano l e s due rette iperboliche del tipo (ii) tra loro parallele (esse saranno due semicirconferenze tangenti in un punto, sia N , dell'asse x), si tracci una retta iperbolica t del tipo (i) che intersechi l e s rispettivamente in A e B e tale che t sia ortogonale a l . L'angolo di parallelismo di l rispetto ad AB è l'angolo tra AB e l'arco $\widehat{BN}$.

Per quanto riguarda la metrica (compatibile con quella definita in precedenza) su $\mathbb{H}$, essa può essere definita distinguendo due possibilità [56, pp. 11–12]:

- se $A, B \in \mathcal{H}$ hanno la stessa ascissa x (appartengono perciò a una retta del tipo (i)), dette y_A e y_B le ordinate rispettivamente di A e B , la distanza tra i due punti è:

$$d(A, B) := \left| \log \frac{y_A}{y_B} \right| \quad (1.32)$$

- se $A, B \in \mathcal{H}$, di coordinate rispettivamente (x_A, y_A) e (x_B, y_B) , non hanno la stessa ascissa x (appartengono perciò a una retta del tipo (ii)), detta $\mathcal{C}$ la retta iperbolica passante per A e B con centro C di coordinate $(c, 0)$ e raggio $R \in \mathbb{R}$, la distanza tra i due punti è:

$$d(A, B) := \left| \log \left(\frac{\frac{R+c-x_B}{y_B}}{\frac{R+c-x_A}{y_A}} \right) \right| \quad (1.33)$$

Le circonferenze in $\mathbb{H}$ sono ancora circonferenze euclidee e, anche in questo caso, il centro iperbolico non coincide con il centro euclideo; infine, gli orocicli in $\mathbb{H}$ assumono due possibili rappresentazioni geometriche: circonferenze tangenti in un punto dell'asse delle ascisse e private di quel punto, oppure rette parallele all'asse delle ascisse.

I modelli $\mathbb{D}$ e $\mathbb{H}$ possono essere messi in corrispondenza grazie al seguente risultato [64]:

Teorema 1.39. *Sia $z_0 \in \bar{\mathcal{H}} := \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}(z) \geq 0\}$ semipiano superiore chiuso del piano complesso e sia $\vartheta \in [0, 2\pi)$, allora la più generale Trasformazione di Möbius che manda $\bar{\mathcal{H}}$ nel disco unitario chiuso $\bar{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ è del tipo*

$$M(z) = e^{i\vartheta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (1.34)$$

con $\vartheta \in [0, 2\pi)$ e $z_0 \in \mathcal{H}$

Tale trasformazione conserva le distanze e gli angoli tra il semipiano superiore e il disco unitario e può essere utilizzata per ritrovare in un modello i risultati ottenuti nell'altro.

1.8.3 Modello proiettivo di Beltrami-Klein

Il modello di Beltrami-Klein $\mathbb{K}$, propriamente detto *modello proiettivo del disco di Beltrami-Klein*, è il primo, in ordine cronologico, dei modelli di geometria iperbolica realizzati per fornire una base concreta alla geometria iperbolica. La sua prima comparsa è nella pubblicazione di Eugenio Beltrami del 1868 dal

titolo *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, ma la piena valorizzazione del modello risale al 1871 grazie al contributo di Felix Klein: nella sua opera sui fondamenti della geometria⁵⁸, testo fondamentale in cui viene esaminato anche il modello del semipiano di Poincaré, Klein dimostra che il modello geometrico di Beltrami-Klein può essere interpretato come un caso particolare della geometria proiettiva di Cayley e, anche grazie a tale inquadramento, fu possibile sfruttare il modello come un valido strumento per provare che la geometria iperbolica è logicamente coerente tanto quanto quella euclidea [1].

Nel modello $\mathbb{K}$ di Beltrami-Klein, il piano è il disco unitario Ω , lo stesso piano del modello $\mathbb{D}$ e i punti sono i punti interni a tale cerchio; le rette di $\mathbb{K}$ sono invece rappresentate dalle corde del cerchio Ω private degli estremi (Figura 1.27) [66].

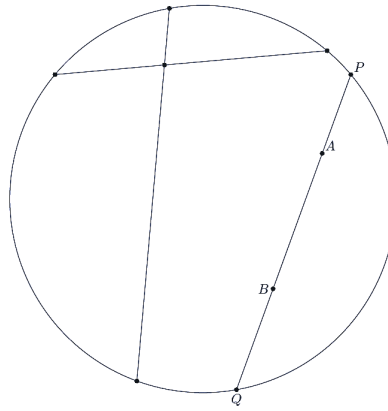


Figura 1.27

Osservazione 1.40. *I punti della circonferenza ω , non appartenenti al piano in questo modello, rappresentano i punti all'infinito della geometria e sono detti punti ideali [20, p. 29].*

Due rette di $\mathbb{K}$ si dicono parallele se non si intersecano, cioè se le corde che le rappresentano non hanno punti comuni all'interno del cerchio unitario Ω ; è quindi evidente che non è valido il V postulato di Euclide, poiché esistono infinite rette parallele ad una retta data e passanti per un punto esterno.

La metrica definita su $\mathbb{K}$, detta metrica di Beltrami-Klein, è definita da [20, p. 30]:

$$ds^2 = \frac{(1 - y^2)dx^2 + 2xy \, dx \, dy + (1 - x^2)dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad (1.35)$$

Ciò ci permette di calcolare la lunghezza iperbolica $l(\gamma)$ di una curva arbitraria, di classe C^1 , $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, parametrizzata $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, come segue:

⁵⁸ *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.*

$$\int_{\gamma} ds = \int_a^b \sqrt{\frac{(1 - y^2(t))dx^2(t) + 2x(t)y(t)dx(t)dy(t) + (1 - x^2(t))dy^2(t)}{(1 - x^2(t) - y^2(t))^2}} dt \quad (1.36)$$

La distanza tra due punti è, quindi, la lunghezza iperbolica del segmento di retta che li congiunge; in accordo con la precedente definizione, è possibile definire la distanza tra due punti anche utilizzando il birapporto come segue [66].

Definizione 1.41 (Metrica in $\mathbb{K}$). Siano A e B in Ω due punti e si consideri l'unica retta iperbolica che li congiunge, siano P e Q i due punti di intersezione di tale retta con ω in modo che sia $P - A - B - Q$. La metrica di Beltrami-Klein è la metrica $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ definita in modo tale che

$$d(A, B) := \frac{1}{2} |\log(P, Q; A, B)|. \quad (1.37)$$

Osservazione 1.42. Per rendere più esplicito il calcolo della distanza tra due punti è possibile utilizzare la definizione di birapporto: considerando la quaterna di punti $P - A - B - Q$ come nella definizione precedente e le lunghezze con segno dei segmenti, la formula della distanza tra i due punti A e B diventa:

$$d(A, B) := \frac{1}{2} \left| \log \left(\frac{AP \cdot BQ}{BP \cdot AQ} \right) \right|. \quad (1.38)$$

Ricordando che il birapporto è invariante per Trasformazioni di Möbius, questa definizione permette di concludere immediatamente anche la verifica del fatto che le rette siano infinite. Valgono, infatti [20, p. 30]:

$$\lim_{B \rightarrow Q} d(A, B) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{A \rightarrow P} d(A, B) = +\infty. \quad (1.39)$$

A differenza degli altri modelli di geometria iperbolica piana, il modello $\mathbb{K}$ non è un modello conforme, in quanto non conserva gli angoli. Per determinare l'ampiezza angolare in tale modello sono necessari alcuni risultati preliminari, che elenchiamo di seguito [66, p. 146]:

Teorema 1.43 (Fondamentale). *Una retta iperbolica nel modello del disco $\mathbb{D}$ (arco di circonferenza perpendicolare a ω) di Poincaré corrisponde a una retta iperbolica nel senso di $\mathbb{K}$ se condivide con essa gli stessi estremi su ω . Sia $P \in \Omega$ un punto qualunque del disco unitario, allora le rette iperboliche nel senso di $\mathbb{D}$ (archi di circonferenza perpendicolari a ω) passanti per P corrispondono a rette iperboliche nel senso di $\mathbb{K}$ (corde di ω) che passano tutte per uno stesso punto.*

Osservazione 1.44. *Il teorema appena citato afferma che, considerando tutti gli archi di circonferenza ortogonali a ω , interni a Ω e passanti per un certo punto $P \in \Omega$, nel momento in cui si tracciano tutte le corde sottese a tali archi si determina un punto $M' \in \Omega$ che appartiene a tutte le corde considerate. La rappresentazione analitica del passaggio è la seguente:*

$$\beta : \Omega \rightarrow \Omega, \quad P \mapsto M'. \quad (1.40)$$

Detto $z \in \mathbb{C}$ il numero complesso associato a P secondo la corrispondenza canonica, allora si ha che:

$$\beta(z) = \frac{2}{1 + |z|^2} z. \quad (1.41)$$

D'altra parte, l'inverso di tale funzione è:

$$\beta^{-1}(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - |z|^2}}{|z|^2} z. \quad (1.42)$$

Siamo ora in grado di definire la misura angolare in $\mathbb{K}$ [66].

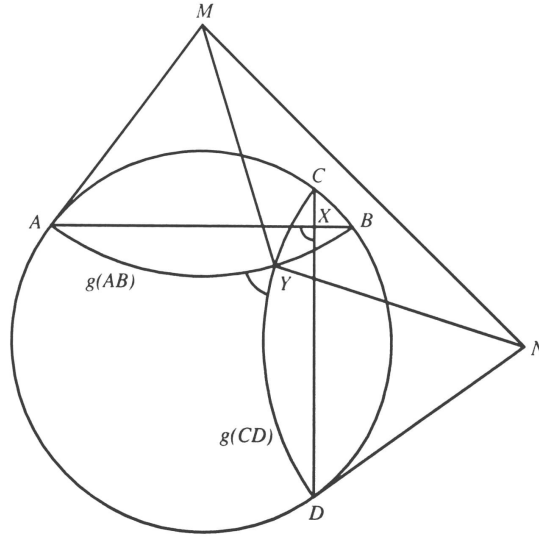


Figura 1.28

Definizione 1.45 (Misura angolare in $\mathbb{K}$). Siano AB e CD due rette iperboliche in $\mathbb{K}$ e sia $X \in \Omega$ il loro punto di intersezione. Tracciate le rette iperboliche nel senso di $\mathbb{D}$ corrispondenti ad AB e CD , siano M e N i centri delle circonferenze a cui gli archi $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ appartengono, rispettivamente, e sia Y il punto di intersezione tra i due archi (Figura 1.28). La misura angolare di $\angle AXD$ in $\mathbb{K}$ è data da:

$$(\angle AXD)_{\mathbb{K}} := 180^\circ - \angle MYN. \quad (1.43)$$

Osservazione 1.46. Si noti che la misura angolare in $\mathbb{K}$, per come è stata definita, è la misura angolare euclidea dell'angolo formato tra le rette iperboliche nel modello $\mathbb{D}$ corrispondenti a quelle considerate.

Grazie alle definizioni fornite, in $\mathbb{K}$ sono rispettati gli assiomi delle geometrie neutrali, in quanto si opera con segmenti di retta, ed è anche possibile per tale ragione definire i triangoli come i triangoli rettilinei canonici interni a Ω . In $\mathbb{K}$ le circonferenze sono ellissi euclidee, mentre gli orocicli sono ellissi tangenti internamente in un punto a ω .

1.8.4 Modello della geometria sferica

Uno dei primi riferimenti sistematici relativi alla geometria sferica si trova nella *Sphaerica*, un'opera di Menelao di Alessandria composta intorno al 100 d.C. e organizzata in tre volumi, che introduce il concetto di triangolo sferico e il celebre teorema che porta il suo nome, distaccandosi dal concetto di piano euclideo per studiare le geodetiche sulla superficie curva. L'approccio moderno al sistema della geometria sferica si deve invece a Bernhard Riemann, sempre nella sua opera del 1854⁵⁹: in questo testo, Riemann formalizza la geometria ellittica (sferica) come una varietà a curvatura costante positiva e ne definisce rigorosamente la struttura logica. Seguiamo la definizione assiomatica della geometria sferica presente in [63].

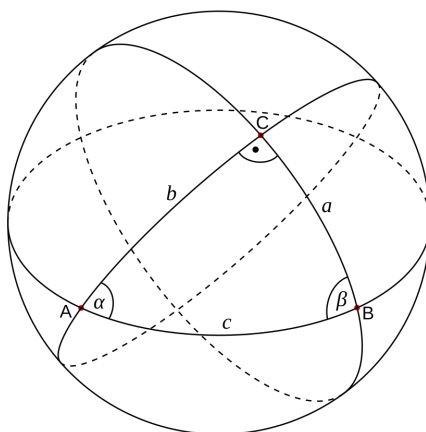


Figura 1.29

La geometria sferica $\mathbb{S}$ è un modello della geometria ellittica avente per piano la superficie sferica S^2 , per punti i punti della superficie sferica e per rette i cerchi massimi della sfera stessa. I concetti primitivi in questa geometria sono quindi punti, cerchi massimi e superficie sferica (Figura 1.29).

Osservazione 1.47. Considerando una sfera $\mathbb{S}$ di centro S , un cerchio massimo, definito in modo estrinseco, è l'intersezione tra la superficie sferica di $\mathbb{S}$ e un piano Π passante per S .

Gli assiomi costitutivi della geometria sferica richiedono che esistano almeno due punti appartenenti alla sfera e che esista una corrispondenza biunivoca tra i punti di un cerchio massimo e quelli di $\mathbb{R}/2\pi$; grazie a tali assunti si definiscono i punti antipodali.

Definizione 1.48 (Punti antipodali). Due punti A e B di una sfera $\mathbb{S}$ sono antipodali, e in tal caso si indica $B := A^a$, se esiste un cerchio massimo passante per entrambi e avente corrispondenza l con $\mathbb{R}/2\pi$ in modo che

$$l(B) - l(A) = \pi \pmod{2\pi}. \quad (1.44)$$

⁵⁹ *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.*

In tale rappresentazione, la prolungabilità della retta è data dal fatto che un cerchio massimo può essere percorso infinite volte, mentre i segmenti, detti archi sferici, vengono definiti come archi di cerchio massimo. Assumendo inoltre che ogni punto su S^2 ammetta uno e un solo punto antipodale e che per due punti non antipodali passi uno e un solo cerchio massimo, è facile osservare come, dati due cerchi massimi, la loro intersezione non sia vuota: dunque, detti paralleli due cerchi massimi che non hanno punti in comune, da quest'ultima affermazione si evince che il V postulato euclideo non è valido, ma vale il seguente [20, p. 21]:

Data una retta e un punto esterno ad essa, non è possibile tracciare nessuna retta passante per il punto e parallela alla retta data.

La metrica su $\mathbb{S}$ è definita in questo modo [63].

Definizione 1.49 (Distanza sferica). Siano A e B due punti su una sfera e Γ un cerchio massimo passante per A e B . Dato che esiste una corrispondenza biunivoca $l : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}/\pi$ tale che $A \mapsto l(A)$ e $B \mapsto l(B)$, si ponga

$$\delta := l(A) - l(B) \in (-\pi, \pi]. \quad (1.45)$$

La distanza sferica tra A e B è $d(A, B) = |\delta| \geq 0$.

La lunghezza di un arco sferico è data, nel rispetto della metrica, dalla distanza dei suoi estremi; dati quindi A e B su S^2 la misura dell'arco $\widehat{AB}$ è data da:

$$m(\widehat{AB}) = d(A, B) = |l(A) - l(B)|. \quad (1.46)$$

Grazie a ciò, è possibile considerare due archi congruenti se hanno la stessa misura. Per quanto riguarda gli angoli, essi vengono definiti utilizzando gli archi sferici: un arco sferico $\widehat{AB}$, scelti due punti A e B non antipodali su una sfera, è l'arco sferico del cerchio massimo che li contiene, avente estremi A e A^a e passante per B , privato di A^a . Si può dunque definire un angolo sferico [63].

Definizione 1.50 (Angolo sferico). Dati A , B e C punti su S^2 non appartenenti allo stesso cerchio massimo, l'angolo sferico $\angle ABC$, con vertice in B e lati $\widehat{BA}$ e $\widehat{BC}$ è definito come $\angle ABC := \widehat{BA} \cup \widehat{BC}$.

Osservazione 1.51. *Da un punto di vista estrinseco, l'angolo tra due cerchi massimi è l'angolo formato dai due piani cui appartengono i cerchi massimi che contengono i suoi lati.*

La misura di un angolo sferico è data dalla misura dell'arco di cerchio massimo che congiunge i punti medi dei suoi lati: dato $\angle ABC$ e scelti $D \neq B$ tale che $D \in \widehat{BA}$, $d(D, B) = \frac{\pi}{2}$ e $E \neq B$ tale che $E \in \widehat{BC}$, $d(E, B) = \frac{\pi}{2}$, la misura dell'angolo $\angle ABC$ è data da:

$$m(\angle ABC) := m(\widehat{DE}). \quad (1.47)$$

Osservazione 1.52. *Mentre la lunghezza di un arco sferico appartiene all'intervallo $(0, \pi]$, la lunghezza di un angolo sferico appartiene all'intervallo $(0, \pi)$, in quanto i lati di un angolo non possono giacere sullo stesso cerchio massimo.*

Un triangolo sferico è una porzione di S^2 delimitata da tre segmenti, cioè da tre archi di cerchi massimi (Figura 1.29). Si può mostrare come la somma degli angoli interni di un triangolo sferico sia maggiore di 2π . Definito inoltre l'eccesso sferico di un triangolo $\triangle ABC \subset S^2$, con angoli α, β e γ , come $E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, il teorema di Girard-Cavalieri-Harriot afferma che l'area A del triangolo sferico $\triangle ABC$ su una sfera di raggio R è direttamente proporzionale al suo eccesso sferico. Vale infatti:

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2 E. \quad (1.48)$$

Capitolo 2

Giovanni Girolamo Saccheri

Considerato da molti il padre inconsapevole delle geometrie non euclidee, Giovanni Girolamo Saccheri è, tra coloro che hanno insegnato presso l'Università di Pavia, uno dei matematici più importanti del XVIII secolo; già nel 1889 Eugenio Beltrami lo definisce *Un precursore italiano di Legendre e Lobatschewsky* nel suo articolo dall'omonimo titolo e lo riporta alla luce *dalla polvere delle biblioteche, in cui giaceva dimenticato da oltre un secolo* [67]. Anche se non era il vero obiettivo, il suo merito più grande è quello di aver aperto la strada alla giusta interpretazione del V postulato di Euclide, che come abbiamo ricordato recita:

Se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

Egli infatti, anticipando di quasi un secolo János Bolyai e Nicolaj Ivanovič Lobačevskij, riesce ad ottenere e a presentare in maniera organica alcuni importanti risultati di geometria iperbolica, creando un primo nucleo di proposizioni che contribuiranno alla sua realizzazione.

Giovanni Girolamo Saccheri nasce a Sanremo il 5 settembre 1667: bambino dall'ingegno precoce e dalla memoria prodigiosa, studia presso il collegio dei Gesuiti di Genova e presso il collegio di Brera a Milano. Entrato nella Compagnia di Gesù, insegna grammatica, filosofia e teologia in diverse località italiane quali Cremona, Pavia e Torino. Nel 1699 il Senato Milanese lo designa come docente presso la Cattedra di matematica nell'Università di Pavia, ruolo che manterrà fino alla morte; nella stessa città, egli ricopre nel corso degli anni anche altri incarichi di insegnamento per materie religiose e filosofiche. Muore a Milano il 25 ottobre 1733.

Tra le opere pubblicate dal gesuita ricordiamo i *Quaesita geometrica*¹ (prima

¹Quaesita geometrica a Comite Rugerio de Vigintimilliis omnibus proposita ab Hieronymo Saccherio Genuensi Soc. Iesu soluta sub auspiciis Excellentissimi Domini D. Didaci Phelippe de Guzman Marchionis de Leganes &c. totius Mediolanensis Provinciae Status, et belli pro Cath. Rege Supremi Moderatoris &c. Mediolani, MDCXCIII in Regio Ducali Palatio, apud Marcum Antonium Panduphum Malatestam Regium, ac Cameralem Typographum.

sua opera matematica, pubblicata nel 1693), la *Logica demonstrativa*² (pubblicata nel 1697 sotto il nome di Giovanni Francesco Caselette, suo allievo) e la sua opera più importante, ovvero l'*Euclides ab omni naevo vindicatus*, pubblicata nel 1733³.

Le informazioni riguardanti la vita del matematico gesuita sono tratte dalla *Appendice V: Vita e scritti di Girolamo Saccheri* [69, pp. 246–258]. Nel seguito di questo capitolo le proposizioni citate con i numeri I.1-I.26 fanno riferimento all'Appendice A. Le immagini sono tratte da [67].

2.1 L'*Euclides ab omni naevo vindicatus*

Parmi perciò degnissimo di menzione un libro che porta la data del 1733 ed una buona metà del quale è dedicata ad una critica veramente accurata e profonda del postulato d'Euclide, critica nella quale vengono messi in sodo alcuni dei principi più fondamentali dell'odierna teoria delle parallele, in quella stessa forma, può dirsi, in cui si potrebbero oggi enunciare da noi. Che se disgraziatamente l'Autore finisce col concludere all'assoluta verità (di cui allora niuno dubitava) del famoso postulato, non bisogna fargliene soverchio addebito, tanto più che la bonarietà con la quale egli si adopera, all'ultimo, a demolire tutto il proprio edificio è di gran lunga superata dall'acume e dal retto senso geometrico di cui fa prova nell'innalzarlo.

Con queste parole, Eugenio Beltrami esprime, nella nota del 1889 [8, p. 348], la propria ammirazione verso la più importante delle opere di Saccheri: L'*Euclides ab omni naevo vindicatus*; inoltre è lo stesso Beltrami a sottolineare come, nonostante la ferma convinzione (errata!) di Saccheri riguardante la verità del V postulato, il contenuto dell'opera sia di grande valore.

Il titolo dell'opera, pubblicata a Milano lo stesso anno della morte di Saccheri, si riferisce al fatto che Sir Henry Savile (1549-1622), professore di Matematica di Oxford, aveva utilizzato proprio il termine "naevi" (cioè "nei") per parlare del problema delle parallele e di altri punti non completamente chiariti riguardanti la teoria delle proporzioni, già presente negli *Elementi* di Euclide. L'*Euclides ab omni naevo vindicatus* è organizzato in due libri, preceduti dalla dedica dell'autore *All'Eccellentissimo Senato Milanese* e dalla prefazione; ciascun libro è ulteriormente diviso in due parti.

Già nella dedica l'autore presenta il metodo rigoroso con cui intende operare: egli infatti afferma che è fondamentale stabilire rigorosamente i principi

²Logica demonstrativa, quam una cum thesibus ex tota philosophia decerpitis, defendendam proponit Ioannes Franciscus Caselette Graveriarum Comes Sub auspiciis Regiae Celsitudinis Victoris Amedei II Sabaudiae Ducis, Pedemontium Principis, Cypri Regis &c. Augustae Taurinorum, Typis Ioannis Baptistae Zappatae, 1697. Superiorum permissu.

³Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur Prima ipsa universae Geometriae Principia. Auctore Hieronymo Saccherio Societatis Jesu In Ticinensi Universitate Matheseos Professore. Opusculum Ex.mo Senatui Mediolanensi Ab Auctore Dicatum. Mediolani, MDCCXXXIII. Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

fondamentali di qualsiasi scienza, al fine di evitare che la struttura della scienza stessa crolli, e in questo la geometria non è diversa; anche se vi sono stati molti tentativi di organizzare la materia, resta ancora del lavoro che Saccheri si propone di fare proprio con quest'opera.

Con la prefazione comincia il discorso legato agli *Elementi* di Euclide: è proprio Saccheri che, dopo aver espresso la grande ammirazione nei confronti dell'autore greco, volge l'attenzione sulle questioni (i "nei") che hanno creato controversie negli studiosi successivi. La prima grande questione è la definizione delle parallele e il V postulato del libro I, la seconda riguarda la definizione 6 del libro V⁴ e la terza è riferita alla definizione 5 del libro VI⁵. Lo scopo esplicito di Saccheri è quindi, con quest'opera, di correggere tali "nei".

Nel primo libro si trova la parte che più interessa ai nostri scopi, cioè la discussione sul postulato d'Euclide: il libro è organizzato in 39 proposizioni e cerca di porre sullo stesso piano, fin quando è possibile, le tre condizioni che l'autore è riuscito ad isolare; le prime 33 proposizioni costituiscono la prima parte del libro, mentre le successive 6 rappresentano un ulteriore tentativo di dimostrazione della trentatreesima proposizione.

Il secondo libro discute invece nella prima parte la definizione 6 del libro V degli *Elementi* e anche, in parte, della Proposizione 2 del libro XII⁶ e nella seconda parte della definizione 5 del libro VI.

È importante sottolineare come Saccheri sia a priori convinto della dimostrabilità del V postulato, oltre che della sua verità e che sia completamente immerso nella concezione sua contemporanea per cui l'unica geometria possibile possa essere quella euclidea. Durante tutta la sua opera, dunque, vi è un pregiudizio nei confronti delle ipotesi avverse al V postulato che il nostro autore cercherà di demolire sistematicamente.

2.2 Il quadrilatero di Saccheri

Rispettando quanto promesso nella dedica, all'inizio del primo libro vengono chiariti i requisiti necessari alla comprensione della trattazione: l'autore richiede la conoscenza delle prime 26 proposizioni del libro I degli *Elementi* di Euclide. Ciò detto il discorso dell'autore prende il via dal quadrilatero birettangolo che prende il suo nome:

Definizione 2.1 (Quadrilatero di Saccheri). Chiamo **quadrilatero di Saccheri** un quadrilatero $ABCD$ avente i lati AC e BD uguali e gli angoli $\angle ABD$ e $\angle BAC$ retti.

Tale figura, in realtà, fa la sua comparsa a partire dalla Proposizione 2.4, mentre nelle prime due proposizioni viene utilizzato un quadrilatero $ABCD$

⁴La definizione 6 del libro V afferma: *Grandezze che hanno lo stesso rapporto si chiamino proporzionali* [31, p. 300]

⁵La definizione 5 del libro VI, ritenuta da alcuni autori interpolata negli *Elementi*, afferma: *Un rapporto si dice composto di altri rapporti, quando le quantità di tali rapporti moltiplicate fra loro ne danno un altro* [31, p. 359].

⁶La Proposizione XII.2 afferma: *Cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri* [31, p. 931].

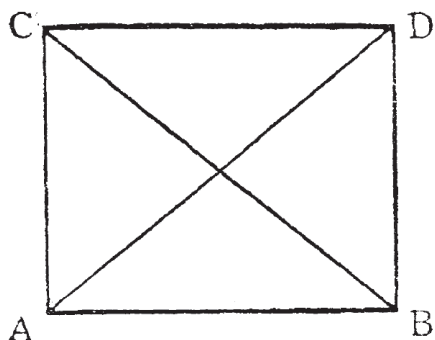


Figura 2.1 Il quadrilatero di Saccheri

analogo in cui gli angoli $\angle ABD$ e $\angle BAC$, invece di essere retti, sono solamente uguali tra loro. Nelle prime proposizioni vengono studiate alcune proprietà fondamentali di tali quadrilateri⁷.

Proposizione 2.2 (Proposizione I). *Nel quadrilatero $ABCD$ (figura 2.1) i lati AC , BD sieno uguali e formino con AB gli angoli $\angle CAB$ e $\angle DBA$ uguali; dico che gli angoli $\angle ACD$, $\angle BDC$ sono uguali.*

Dimostrazione. Si traccino i segmenti AD e CB e si considerino i triangoli $\triangle CAB$ e $\triangle DBA$. Per la Proposizione I.4 (si veda l'Appendice A), si ha $CB = AD$. Consideriamo ora i triangoli $\triangle ACD$ e $\triangle BDC$. Dalla Proposizione I.8 segue che $\angle ACD = \angle BDC$. La tesi segue immediatamente. ■

Poiché i lati AC e DB hanno AB come perpendicolare comune, essi sono paralleli. Con la prossima proposizione, Saccheri dimostra che anche AB e CD hanno una perpendicolare comune, precisamente la congiungente i loro punti medi.

Proposizione 2.3 (Proposizione II). *Nello stesso quadrilatero $ABCD$ i lati AB , CD si dividano per metà (figura 2.2) nei punti M ed H . Dico che la congiungente MH è perpendicolare ad AB e a CD .*

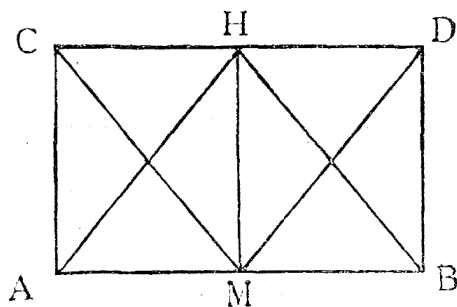


Figura 2.2

⁷Nelle proposizioni, tra parentesi, ho posto la numerazione delle proposizioni nell'originale di Saccheri.

Dimostrazione. Si traccino AH , BH , CM , DM . Poiché nel quadrilatero $ABCD$ gli angoli nei vertici A e B sono, per ipotesi, uguali, dalla Proposizione I.4 (si veda l'Appendice A) segue che $CM = DM$. Analogamente, poiché gli angoli nei vertici C e D sono uguali per la Proposizione 2.2, si ha $AH = BH$. Consideriamo ora i triangoli $\triangle CHM$ e $\triangle DHM$. Dalla Proposizione I.8 si deduce che $\angle CHM = \angle DHM$. Analogamente, applicando ancora la Proposizione I.8 ai triangoli $\triangle AMH$ e $\triangle BMH$, si ottiene $\angle AMH = \angle BMH$. Da queste uguaglianze segue la tesi. ■

Proposizione 2.4 (Proposizione III). *Nel quadrilatero $ABCD$ (Figura 2.3) rettangolo in A e in B i lati AC e BD sieno uguali; dico che CD sarà uguale, minore o maggiore della base AB secondoché gli angoli uguali in C e in D sono retti, ottusi o acuti.*

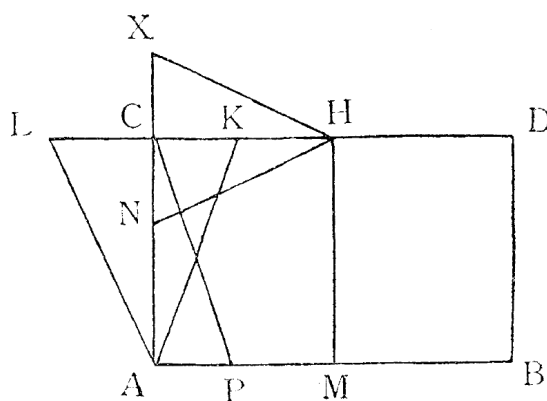


Figura 2.3

Dimostrazione. Supponiamo anzitutto che gli angoli nei vertici C e D siano retti e, per assurdo, che $CD > AB$. Si prenda allora sul lato DC un segmento DK tale che $DK = AB$ e si tracci AK . Il quadrilatero $ABDK$ risulta avere gli angoli nei vertici B e D retti e i lati AB e KD uguali; dunque, esso è dunque un quadrilatero di Saccheri. Ne segue che gli angoli $\angle BAK$ e $\angle DKA$ dovrebbero essere uguali. Ciò è però impossibile, poiché l'angolo $\angle BAK$ è, per costruzione, minore dell'angolo retto $\angle BAC$, mentre $\angle DKA$ è maggiore dell'angolo retto $\angle DCA$, essendo un angolo esterno del triangolo $\triangle DAK$ per la Proposizione I.16.

Con un ragionamento analogo si esclude anche che $CD < AB$. Pertanto si conclude che $CD = AB$. Supponiamo ora che gli angoli nei vertici C e D siano ottusi. Saccheri mostra che in tal caso $CD < AB$. Si dividano a metà i segmenti AB e CD nei punti M e H , rispettivamente. Consideriamo il quadrilatero di Saccheri $AMHC$, i cui angoli nei vertici M e H sono retti. Non può essere $CH = AM$, poiché l'angolo $\angle MAC$ è retto, mentre l'angolo $\angle HCA$ è ottuso. Non può nemmeno essere $CH > AM$: infatti, preso sul segmento HC un punto K tale che $HK = MA$ e tracciato KA , gli angoli $\angle MAK$ e $\angle HKA$ risulterebbero uguali, il che è impossibile, essendo il primo minore di un angolo

retto e il secondo maggiore di un angolo ottuso, per la Proposizione I.16. Si deve quindi avere $CH < AM$ e, di conseguenza, $CD < AB$.

Infine, supponiamo che gli angoli nei vertici C e D siano acuti. Considerando ancora il quadrilatero $AMHC$, non può essere $CH = AM$, poiché l'angolo $\angle MAC$ è retto, mentre l'angolo $\angle HCA$ è acuto. Non può neppure essere $CH < AM$: infatti, prolungato il segmento HC oltre H e preso su tale prolungamento un punto L tale che $HL = AM$, congiungendo A con L si otterrebbero gli angoli $\angle MAL$ e $\angle HLA$ uguali, il che è impossibile, poiché il primo è maggiore di un angolo retto mentre il secondo è minore di un angolo acuto, sempre in virtù della Proposizione I.16. Pertanto si ha $CH > AM$ e quindi $CD > AB$. ■

Osservazione 2.5. *Saccheri non affronta la questione ma, perché la costruzione realizzata sul quadrilatero di Saccheri nella Proposizione 2.4 sia possibile è necessario che tale figura sia convessa. Si può dimostrare che ciò è vero come conseguenza delle Proposizioni I.12 e I.16.*

Osservazione 2.6. *L'autore suppone in tutto il testo che sia sempre vera la Proposizione I.16 e la conseguente Proposizione I.17, che riguardano l'angolo esterno di un triangolo (maggiore degli angoli interni opposti) e la somma di due angoli interni di un triangolo (minore di un angolo retto). In realtà, la Proposizione I.16 non è valida in geometria ellittica: infatti, in tale geometria, la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di due angoli retti e si possono costruire triangoli per cui un angolo esterno non è maggiore di ciascun angolo interno opposto.*

A questo punto, Saccheri espone alcune dirette conseguenze della Proposizione 2.4, che saranno riprese successivamente.

Corollario 2.7 (Corollario I). *In ogni quadrilatero trirettangolo ciascuno dei due lati che stanno intorno all'angolo non retto è minore o maggiore del suo opposto a seconda che il quarto angolo sia ottuso o acuto. Ciò fu dimostrato dal lato CH rispetto ad AM e con dimostrazione per assurdo, analoga alla precedente, si dimostrerebbe del lato CA rispetto ad HM .*

Corollario 2.8 (Corollario II). *Nel quadrilatero trirettangolo $AMHC$, in cui il quarto angolo in C sia supposto acuto, il lato CH (figura 2.3) a fortiori sarà maggiore di una parte di AM da una retta CP che forma con la CH un angolo $\angle HCP$ minore dell'angolo acuto $\angle HCA$ e con la PM un angolo $\angle CPM$ ottuso.*

Corollario 2.9 (Corollario III). *Tutte le proprietà precedenti sono vere se i lati AC e BD del quadrilatero di Saccheri $ABCD$ sono infinitamente piccoli.*

Inizia con la Proposizione 2.4 la distinzione delle tre condizioni che ci accompagneranno nel corso dell'intero libro e saranno descritte immediatamente dopo aver dimostrato l'inverso del risultato appena visto. Notiamo anche che è nel Corollario 2.9 della Proposizione appena menzionata (Proposizione 2.4) che compare per la prima volta il concetto di "infinitamente piccolo": l'autore

ha un'idea sbagliata di tale concetto e questo lo porterà a commettere diversi errori nell'opera. Citiamo le parole di Paul Mansion⁸ ([67, p. 33]):

Con ciò [infinitamente piccoli] egli intende gli pseudo-infinitamente piccoli di Giovanni Bernoulli, vale a dire "delle così dette quantità fisse differenti da zero e che sono tuttavia più piccole di qualsiasi quantità data". È questa nozione contraddittoria che lo ha condotto agli errori che offuscano il suo bel libro e gli ha impedito di fare la scoperta della geometria di Lobatschewsky di cui possedeva gli elementi.

Proposizione 2.10 (Proposizione IV). *Reciprocamente, nello stesso quadrilatero di Saccheri $ABCD$ gli angoli ai vertici in C e in D saranno retti, ottusi o acuti secondoché il lato CD è uguale, minore o maggiore della base AB .*

Dimostrazione. Infatti, se $CD = AB$, gli angoli nei vertici C e D non possono essere ottusi, poiché in tal caso, per il risultato precedente, si avrebbe $CD < AB$, in contraddizione con l'ipotesi. Analogamente, essi non possono essere acuti, poiché ne seguirebbe $CD > AB$, ancora in contraddizione con l'ipotesi. Si conclude pertanto che gli angoli nei vertici C e D sono retti. Gli altri due casi si dimostrano in modo del tutto analogo. ■

Dal punto di vista storico è importante ricordare che non è stato Saccheri il primo ad utilizzare un siffatto quadrilatero (Figura 2.1) nel tentativo di dimostrazione del V postulato: già Al-Khayyam infatti aveva ottenuto alcuni dei risultati del gesuita seguendo questa strada⁹. D'altra parte, anche dopo la pubblicazione dell'*Euclides* del 1733 vi fu, ad opera di Lambert, il tentativo di sviluppare una dimostrazione del V postulato seguendo la strada delle tre ipotesi.

2.3 Le tre *hypotesis anguli*

Poiché in ogni quadrilatero di Saccheri gli angoli ai vertici sono uguali, si possono distinguere tre ipotesi circa la natura di questi angoli; chiameremo "ipotesi dell'angolo retto, ipotesi dell'angolo ottuso, ipotesi dell'angolo acuto".

Sono queste le parole con cui Saccheri introduce i tre possibili casi di studio legati al quadrilatero di Saccheri (Figura 2.1): l'autore considera, almeno inizialmente, tutte e tre le ipotesi ugualmente possibili, seppur avendo posto esplicitamente nella prefazione al trattato l'obiettivo di dimostrare la veridicità

⁸Paul Mansion (1844-1919) fu un matematico belga e professore all'Università di Gand. Autore di oltre trecento lavori scientifici, si occupò in particolare di geometria non euclidea, equazioni differenziali e storia della matematica; contribuì inoltre alla diffusione della cultura matematica attraverso la fondazione delle riviste *Nouvelle Correspondance Mathématique* e *Mathesis*, che ebbero un ruolo importante nella circolazione delle idee geometriche della fine del XIX secolo.

⁹Per maggiori dettagli su questo punto si consulti la pagina 25.

del V postulato d'Euclide e quindi di verificare che l'unica ipotesi che permette di non giungere a un assurdo è l'ipotesi dell'angolo retto. Considerando il quadrilatero di Saccheri $ABCD$, le tre ipotesi sono legate all'ampiezza dei suoi due angoli non retti C e D (uguali tra loro per la Proposizione 2.2):

1. *Hypotesis anguli recti* (ipotesi dell'angolo retto): tale ipotesi è valida se gli angoli $\angle ACD$ e $\angle BDC$ sono retti.
2. *Hypotesis anguli obtusi* (ipotesi dell'angolo ottuso): tale ipotesi è valida se gli angoli $\angle ACD$ e $\angle BDC$ sono ottusi.
3. *Hypotesis anguli acuti* (ipotesi dell'angolo acuto): tale ipotesi è valida se gli angoli $\angle ACD$ e $\angle BDC$ sono acuti.

Seguono nella trattazione le Proposizioni (2.11, 2.12, 2.13) che permettono di affermare che le tre ipotesi sono mutuamente esclusive. Ciò significa che non è possibile che siano vere contemporaneamente due delle tre ipotesi (infatti, se in un determinato contesto vale una ed una sola di queste ipotesi, in ogni altro contesto varrà la stessa ipotesi e non potranno dunque valere le altre due).

Proposizione 2.11 (Proposizione V). *Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo retto, essa è vera in ogni altro caso.*

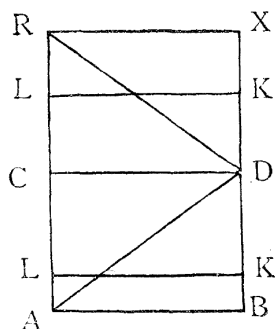


Figura 2.4

Dimostrazione. Nel quadrilatero di Saccheri $ABCD$ (Figura 2.4), supponiamo che, oltre agli angoli nei vertici A e B , siano retti anche gli angoli nei vertici C e D . In tal caso risulta $CD = AB$. Sui prolungamenti dei lati AC e BD si prendano i segmenti $CR = AC$ e $DX = BD$, e si tracci RX . Osservando la figura, si può immaginare di ribaltarla attorno al lato CD : il punto A viene così portato in R e il punto B in X . Ne segue che $RX = AB$ e che gli angoli nei vertici R e X sono retti. Una dimostrazione più rigorosa procede come segue. I triangoli $\triangle ACD$ e $\triangle RCD$ sono congruenti per la Proposizione I.4; di conseguenza $AD = RD$ e $\angle ADC = \angle RDC$. Pertanto, risultano uguali anche i rispettivi angoli complementari, ossia $\angle ADB$ e $\angle RDX$. Applicando nuovamente la Proposizione I.4 ai triangoli $\triangle ADB$ e $\triangle RDX$, si conclude che $RX = AB$. Ne segue che gli angoli nei vertici R e X sono retti.

Saccheri mostra quindi che i lati AC e BD possono essere prolungati indefinitamente senza che venga meno l'ipotesi dell'angolo retto. Egli dimostra inoltre che tale ipotesi continua a valere anche riducendo arbitrariamente la lunghezza di tali lati. A questo scopo, si prendano su AR e BX due segmenti uguali AL e BK , e si tracci LK . Se gli angoli nei vertici L e K non fossero retti, essi sarebbero comunque uguali; di conseguenza, da un lato della base AB sarebbero ottusi e dall'altro acuti. Per la Proposizione 2.4 seguirebbe allora che $LK > RX$ e, al tempo stesso, $LK < AB$. Ciò è impossibile, poiché $RX = AB$. Si conclude quindi che anche gli angoli nei vertici L e K sono retti.

Infine, considerando il quadrilatero $ABXR$ con base BX e lati uguali AB e RX , è immediato verificare che l'ipotesi dell'angolo retto rimane valida per qualsiasi aumento o diminuzione della base AB . Pertanto, il teorema risulta completamente dimostrato. ■

Proposizione 2.12 (Proposizione VI). *Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo ottuso, essa è vera in ogni altro caso.*

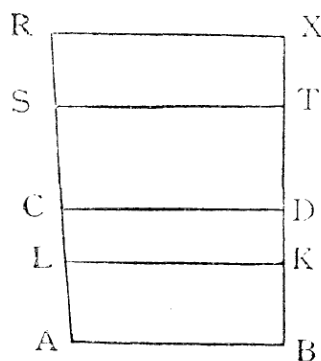


Figura 2.5

Dimostrazione. Supponiamo che nel quadrilatero di Saccheri $ABCD$ (Figura 2.5) gli angoli nei vertici C e D siano ottusi. In tal caso si ha $CD < AB$. Sui prolungamenti dei lati AC e BD si prendano due segmenti CR e DX rispettivamente uguali ad AC e BD , e si congiungano tracci RX .

Se gli angoli nei vertici R e X sono ottusi, la tesi è dimostrata. Ora, essi non possono essere retti, poiché in tal caso varrebbe l'ipotesi dell'angolo retto e, per la Proposizione 2.11, dovrebbero essere retti anche gli angoli nei vertici C e D , contro l'ipotesi. Non possono nemmeno essere acuti. Infatti, se lo fossero, si avrebbe $RX > AB$ e quindi, a maggior ragione, $RX > CD$. Consideriamo allora il quadrilatero $CDXR$ come riempito da segmenti paralleli a CD e RX , ottenuti staccando sulle rette CR e DX parti uguali. In tal modo si passa dal segmento CD , che è minore di AB , al segmento RX , che è maggiore di AB . Di conseguenza deve esistere un segmento intermedio ST tale che $ST = AB$. In corrispondenza di tale segmento risulterebbe verificata l'ipotesi dell'angolo retto e, per la Proposizione 2.11, essa continuerebbe a sussistere in tutto il processo. Ciò contraddice l'ipotesi iniziale. Pertanto, gli angoli nei vertici R e X devono essere ottusi.

Si prendano ora sui lati AC e BD due segmenti uguali AL e BK e si tracci LK . Con un ragionamento analogo al precedente si mostra che gli angoli nei vertici L e K non possono essere né retti né acuti; essi sono quindi ottusi. Ne segue che, mantenendo fissa la base AB , l'ipotesi dell'angolo ottuso continua a valere qualunque sia l'aumento o la diminuzione dei lati AC e BD . Resta da mostrare che tale ipotesi sussiste anche al variare della base. Consideriamo dunque il quadrilatero di Saccheri $ABRX$ (Figura 2.6), nel quale gli angoli nei vertici R e X sono, come appena visto, ottusi, e assumiamo BX come nuova base. Siano M e H i punti medi rispettivamente di AB e RX , e si tracci il segmento MH , che sappiamo essere perpendicolare sia ad AB sia ad RX .

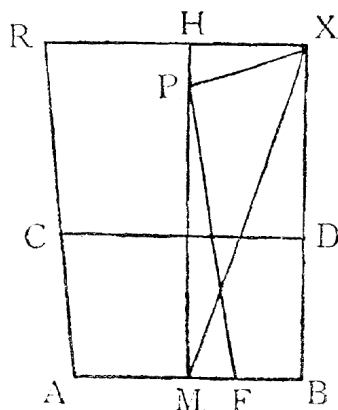


Figura 2.6

Il quadrilatero $MBXH$ possiede tre angoli retti e un angolo ottuso nel vertice X . Si costruisca l'angolo retto $\angle BXP$. Il lato XP incontra il segmento MH in un punto P compreso tra M e H , poiché l'angolo $\angle BXH$ è ottuso mentre l'angolo $\angle BXM$, ottenuto congiungendo B con M , è acuto. Il quadrilatero $XBMP$ presenta allora tre angoli retti e un angolo ottuso nel vertice P ; per il Corollario 2.7 della Proposizione 2.4 segue che $XP < BM$. Si prenda quindi sul segmento BM un punto F tale che $BF = XP$. Gli angoli $\angle BFP$ e $\angle XPF$ risultano uguali e sono pertanto ottusi, poiché $\angle BFP$ è maggiore dell'angolo retto $\angle FMP$. Si conclude così che l'ipotesi dell'angolo ottuso sussiste anche sotto qualsiasi base BX . Il teorema risulta pertanto completamente dimostrato. ■

In realtà questa dimostrazione manca di alcuni passaggi per essere del tutto rigorosa: è necessario infatti dimostrare che nel quadrilatero di Saccheri $ABCD$, se AC e BD sono sufficientemente piccoli, CD può differire da AB tanto poco quanto si vuole e che una grandezza continua passi per tutti i valori intermedi tra due dei suoi valori effettivi; tali risultati sono effettivamente dimostrabili (grazie alle proprietà di continuità delle misure e al *teorema dei valori intermedi*), quindi la dimostrazione può essere emendata.

Proposizione 2.13 (Proposizione VII). *Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo acuto essa è vera in ogni altro caso.*

Dimostrazione. (Conseguenza delle Proposizioni 2.11 e 2.12 precedenti.) Infatti, se anche in un solo caso risultasse verificata l'ipotesi dell'angolo retto oppure quella dell'angolo ottuso, dalle Proposizioni 2.11 e 2.12 seguirebbe che la medesima ipotesi dovrebbe valere in ogni altro caso. Ciò contrasta con l'ipotesi del teorema. Pertanto, deve verificarsi in ogni caso l'ipotesi dell'angolo acuto. ■

Vengono tratte a questo punto alcune conseguenze legate alla geometria dei triangoli, sfruttando il *teorema dell'angolo esterno*.

Proposizione 2.14 (Proposizione VIII). *Nel triangolo $\triangle ABD$ (figura 2.7) rettangolo in B si prolunghi DA sino ad un punto qualunque X e per A si innalzi alla AB la perpendicolare HAC essendo il punto H entro l'angolo $\angle XAB$; dico che l'angolo esterno $\angle XAH$ sarà uguale, minore o maggiore dell'interno opposto $\angle ADB$ secondoché è vera l'ipotesi dell'angolo retto, ottuso o acuto; e reciprocamente.*

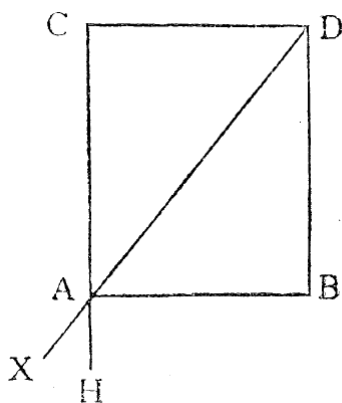


Figura 2.7

Dimostrazione. Si prenda sul segmento HC una parte AC uguale a BD e si tracci CD .

Nell'ipotesi dell'angolo retto si ha $CD = AB$; pertanto, per la Proposizione I.8, l'angolo $\angle DAC = \angle XAH$ è uguale all'angolo $\angle ADB$. Nell'ipotesi dell'angolo ottuso, invece, risulta $CD < AB$. Di conseguenza, applicando la Proposizione I.25 ai triangoli $\triangle ADB$ e $\triangle DAC$, si deduce che l'angolo $\angle DAC = \angle XAH$ è minore dell'angolo $\angle ADB$. Infine, nell'ipotesi dell'angolo acuto si ha $CD > AB$; pertanto, sempre in virtù della Proposizione I.25, nei triangoli $\triangle ADB$ e $\triangle DAC$ l'angolo $\angle DAC = \angle XAH$ risulta maggiore dell'angolo $\angle ADB$.

Viceversa, supponiamo che l'angolo $\angle XAH = \angle CAD$ sia uguale all'angolo $\angle ADB$. Dalla Proposizione I.4 segue allora che $CD = AB$ e, di conseguenza, è verificata l'ipotesi dell'angolo retto.

Se invece l'angolo $\angle XAH = \angle CAD$, è minore oppure maggiore di $\angle ADB$, dalla Proposizione I.24 segue rispettivamente che $CD < AB$ oppure $CD > AB$. Ne consegue che è verificata l'ipotesi dell'angolo ottuso nel primo caso e quella dell'angolo acuto nel secondo. La dimostrazione è così completata. ■

Arriviamo finalmente, con la Proposizione 2.15, ad uno dei più importanti risultati ottenuti da Saccheri: se è verificata l'ipotesi dell'angolo retto, dell'angolo ottuso o dell'angolo acuto (e una soltanto di queste lo può essere per le Proposizioni 2.11, 2.12, 2.13) allora la somma degli angoli interni di un triangolo è rispettivamente uguale, maggiore o minore della somma di due angoli retti; vale anche il viceversa, come vedremo nella Proposizione 2.25.

Proposizione 2.15 (Proposizione IX). *In ogni triangolo rettangolo la somma degli angoli acuti è uguale, maggiore o minore di un angolo retto a seconda che sia vera l'ipotesi dell'angolo retto, dell'angolo ottuso o dell'angolo acuto.*

Dimostrazione. Nell'ipotesi dell'angolo retto, il lemma precedente garantisce che l'angolo $\angle XAH$ (Figura 2.7) è uguale all'angolo $\angle ADB$. Ne segue che la somma degli angoli $\angle ADB$ e $\angle HAD$ è pari a due angoli retti. Sottraendo da tale somma l'angolo retto $\angle HAB$, si ottiene che la somma degli angoli $\angle ADB$ e $\angle BAD$ è pari a un angolo retto.

Nell'ipotesi dell'angolo ottuso, l'angolo $\angle XAH$ è minore di $\angle ADB$. Di conseguenza, la somma degli angoli $\angle ADB$ e $\angle HAD$ è maggiore di due angoli retti. Sottraendo da essa l'angolo retto $\angle HAB$, risulta che la somma degli angoli $\angle ADB$ e $\angle BAD$ sia maggiore di un angolo retto.

Infine, nell'ipotesi dell'angolo acuto, l'angolo $\angle XAH$ è maggiore di $\angle ADB$. Pertanto, la somma degli angoli $\angle ADB$ e $\angle HAD$ è minore di due angoli retti. Sottraendo ancora l'angolo retto $\angle HAB$, si conclude che la somma degli angoli $\angle ADB$ e $\angle BAD$ sia minore di un angolo retto, come si voleva dimostrare. ■

2.4 La falsità dell'ipotesi dell'angolo ottuso

A partire dalla Proposizione 2.17, le tre ipotesi iniziano a perdere la loro complementarità: Saccheri cerca quindi di eliminare, con la serie seguente di Proposizioni (2.17, 2.18, 2.21 e 2.24), l'ipotesi dell'angolo ottuso.

La Proposizione 2.16 è ancora valida in tutte e tre le ipotesi, oggi diremmo in geometria neutrale, cioè quella geometria che si basa sui primi quattro postulati di Euclide, non assumendo a priori la verità o falsità del V postulato.

Proposizione 2.16 (Proposizione X). *Di due oblique disuguali, condotte da un punto a una retta, la maggiore ha proiezione maggiore; e reciprocamente.*

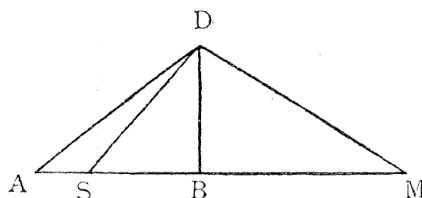


Figura 2.8

Dimostrazione. Sia DB la perpendicolare¹⁰ ad AM (Figura 2.8) e si supponga che $DM > DA$. Si vuole mostrare che $BM > BA$. Anzitutto, BM non può

¹⁰L'unicità della perpendicolare a una retta vale in geometria neutrale.

essere uguale a BA , poiché in tal caso dalla Proposizione I.4 seguirebbe $DM = DA$, in contraddizione con l'ipotesi. Inoltre, BM non può essere minore di BA . Infatti, preso sul segmento BA un punto S tale che $BS = BM$ e tracciato SD , dalla Proposizione I.4 si avrebbe $\angle BMD = \angle BSD$. Quest'ultimo angolo è maggiore dell'angolo interno opposto $\angle BAD$; ne seguirebbe allora, per la Proposizione I.18, che nel triangolo $\triangle MAD$ sia $DM < DA$, ancora contro l'ipotesi. Pertanto deve essere $BM > BA$.

Viceversa, supponiamo che $BA > BM$. Si dimostrerà che $DA > DM$. Si prenda sul segmento BA un punto S tale che $BS = BM$. Dalla Proposizione I.4 segue che $DS = DM$. Inoltre, l'angolo $\angle DSA$ è ottuso per la Proposizione I.16, mentre l'angolo $\angle DAS$ è acuto. Applicando la Proposizione I.18, si ottiene quindi $DA > DS$. Poiché $DS = DM$, concludiamo che $DA > DM$, come volevasi dimostrare. ■

La proposizione appena dimostrata afferma che le proiezioni conservano gli ordinamenti. Il discorso procede con due Proposizioni (2.17, 2.18) che mettono in relazione le posizioni reciproche di tre rette.

Proposizione 2.17 (Proposizione XI). *Nell'ipotesi dell'angolo retto, una perpendicolare e una obliqua a una medesima retta si incontrano.*

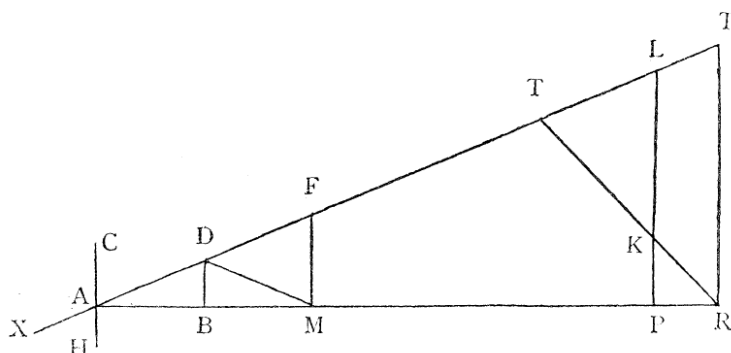


Figura 2.9

Dimostrazione. Siano PL un segmento perpendicolare ad AP e AD un segmento obliquo ad AP (Figura 2.9). Si vuole dimostrare che le rette cui appartengono AD e PL si incontrano dalla parte di AP in cui la somma degli angoli interni è minore di due angoli retti. Si prolunghi il segmento DA oltre A fino a un punto arbitrario X e, per il punto A , si conduca la perpendicolare HAC ad AP , con H interno all'angolo $\angle XAP$. Sul prolungamento di AD dalla parte di PL si prendano due segmenti consecutivi uguali, $AD = DF$, e dai punti D ed F si conducano le perpendicolari DB e FM ad AP . Per la Proposizione I.17, tali perpendicolari cadono dalla parte dell'angolo acuto $\angle DAP$. Si tracci infine DM . Mostriamo anzitutto che $DM = DF$, e quindi anche $DM = DA$. Supponiamo per assurdo che $DM > DF$. Dalla Proposizione I.18 seguirebbe allora che l'angolo $\angle DMF$ è minore di $\angle DFM$; inoltre, per la Proposizione 2.14, esso sarebbe minore di $\angle XAH$, cioè di $\angle CAD$. Ne conseguirebbe che

il complementare $\angle DMA$ di $\angle DMF$ è maggiore del complementare $\angle DAM$ di $\angle CAD$. Ciò contraddice ancora la Proposizione I.18, poiché si è supposto $DM > DF = DA$. Con un analogo ragionamento per assurdo si esclude anche il caso $DM < DF$. Pertanto si conclude che $DM = DF = DA$. Nel triangolo $\triangle DAM$, essendo $DM = DA$, gli angoli $\angle DAB$ e $\angle DMB$ risultano uguali per la Proposizione I.15. Applicando quindi la Proposizione I.26 ai triangoli $\triangle DAB$ e $\triangle DMB$, si ottiene $AB = BM$.

Nell'ipotesi dell'angolo retto risulta così stabilito che a segmenti uguali segmento obliquo AD corrispondono proiezioni uguali sul segmento AP . Di conseguenza, sul prolungamento di AD si può costruire un segmento AT , multiplo di AD , la cui proiezione AR superi AP , qualunque sia la lunghezza finita di quest'ultimo segmento. È evidente che ciò può avvenire soltanto dopo che la retta contenente AD abbia incontrato la retta di PL . Infatti, se il punto T esistesse prima di tale intersezione, la perpendicolare ad AP contenente TR incontrerebbe PL in un punto K . Nel triangolo $\triangle KPR$ si avrebbero allora due angoli retti, uno nel vertice P e l'altro nel vertice R , in contraddizione con la Proposizione 2.2. Pertanto le rette di AD e di PL devono necessariamente incontrarsi nel punto richiesto. ■

Nella dimostrazione appena terminata, come in quella che seguirà, Saccheri fa uso tacitamente del *Postulato di Eudosso-Archimede*.

Proposizione 2.18 (Proposizione XII). *Nell'ipotesi dell'angolo ottuso, una perpendicolare e una obliqua a una medesima retta si incontrano.*

Dimostrazione. Come nel caso precedente, siano PL un segmento perpendicolare ad AP e AD un segmento obliquo rispetto ad AP (Figura 2.9). Si vuole mostrare che le rette contenenti AD e PL si incontrano anche nell'ipotesi dell'angolo ottuso. Si prenda sul prolungamento di AD un segmento $DF = AD$ e si conducano dai punti D ed F le perpendicolari DB e FM alla retta AP ; si tracci infine il segmento DM .

Mostriamo anzitutto che DM è maggiore di DF e quindi di DA . DM non può essere uguale a DF . Infatti, in tal caso l'angolo $\angle DMF$ sarebbe uguale all'angolo $\angle DFM$. Quest'ultimo, nell'ipotesi dell'angolo ottuso, è maggiore dell'angolo esterno $\angle XAH$, o equivalentemente del suo opposto al vertice $\angle CAD$. Ne seguirebbe che $\angle DMF > \angle CAD$ e quindi $\angle DMA < \angle DAM$, in contrasto con la Proposizione I.5, poiché si è supposto $DM = DF = DA$. Con un ragionamento analogo si esclude anche la possibilità che $DM < DF$. Pertanto deve essere $DM > DF$, ossia $DM > DA$. Applicando allora la Proposizione 2.16, si conclude che $BM > BA$. Risulta così dimostrato che, nell'ipotesi dell'angolo ottuso, se un segmento dell'obliqua di AD è il doppio di un altro, la sua proiezione sulla retta contenente AP è più che doppia della proiezione del secondo. Ripetendo ora il ragionamento utilizzato nel caso precedente, si deduce che la retta di AD deve necessariamente incontrare la retta di PL . Anzi, tale incontro avviene ancor prima che nell'ipotesi dell'angolo retto. La dimostrazione è pertanto completata. ■

Osservazione 2.19. *Si può mostrare che, nell'ipotesi dell'angolo ottuso, con riferimento alla Figura 2.9, la retta contenente AD incontra la retta contenente*

PL anche quando l'angolo $\angle DAP$ è retto, come l'angolo in P . Ne segue che due rette, entrambe perpendicolari alla stessa retta AP , non risultano parallele, ma si incontrano da entrambi i lati della trasversale AP . Indicando con O e O' i due punti di intersezione, si può inoltre dimostrare che ogni retta passante per O passa necessariamente anche per O' . I punti O e O' si comportano pertanto come una coppia di punti antipodali e possono essere considerati come rappresentazioni di uno stesso punto ideale; da questa proprietà segue che, nel caso valga l'ipotesi dell'angolo ottuso, due rette qualsiasi del piano si intersecano sempre. Nel modello della geometria sferica, scelti due cerchi massimi qualunque (che rappresentano le rette in quel modello), essi si incontrano in due punti detti antipodali; identificando tali punti, si ottiene il piano ellittico. In questo senso l'ipotesi dell'angolo ottuso conduce a una geometria di tipo ellittico.

Osservazione 2.20. La configurazione appena descritta (relativa all'osservazione precedente) richiama una questione che ha avuto una certa fortuna nella letteratura geometrica tra XVIII e XX secolo. Diversi autori ritennero infatti che l'ipotesi dell'angolo ottuso dovesse essere respinta perché incompatibile con un principio, tradizionalmente indicato come VI postulato di Euclide [31, 67, p. 77, pp. 21–24], secondo il quale due rette non possono avere due punti distinti in comune senza coincidere; in forma equivalente, due rette non possono racchiudere uno spazio.

Tale principio non compare tra i postulati degli Elementi, ma venne spesso considerato una proprietà essenziale della retta. A questo argomento fecero ricorso anche alcuni commentatori italiani del primo Novecento: Frajese, nelle sue note agli Elementi, e Boccardini, nel commento all'opera di Saccheri, richiamano il cosiddetto VI postulato per evidenziare le difficoltà derivanti dall'eventualità che due rette distinte abbiano due punti di intersezione. Se si indicano con O e O' i due punti di intersezione, le due rette sembrano delimitare una regione del piano, contraddicendo il cosiddetto VI postulato; per tale ragione l'ipotesi dell'angolo ottuso veniva considerata assurda.

Dal punto di vista moderno, tuttavia, tale argomentazione ha perso gran parte della sua forza: nell'assiomatica di Hilbert (vedi Appendice C) non c'è la proprietà per cui due rette non possano racchiudere uno spazio, bensì vale che per due punti distinti passi una e una sola retta. Inoltre, la geometria ellittica ha mostrato come la presenza di due punti di intersezione non conduca ad alcuna contraddizione: nel modello sferico, infatti, due geodetiche si incontrano in una coppia di punti antipodali, ma nel passaggio al piano ellittico tali punti vengono identificati e rappresentano un unico punto geometrico; in questo modo viene eliminata l'apparente incongruenza che aveva indotto molti autori a rigettare l'ipotesi dell'angolo ottuso e diventa chiaro che essa non conduce a un assurdo logico, ma a una geometria diversa da quella euclidea.

Il metodo utilizzato per dimostrare le Proposizioni precedenti (2.17, 2.18), nell'ipotesi dell'angolo retto e dell'angolo ottuso, non può essere utilizzato per dimostrare lo stesso risultato nell'ipotesi dell'angolo acuto: in tal caso, infatti, se un segmento dell'obliqua AD è doppio di un altro (Figura 2.10) la proiezione del primo su AP è meno che doppia della proiezione dell'altro, perciò non si può dimostrare che AD e PL si devono incontrare; al contrario infatti si dimostra

che si può sempre assegnare una lunghezza tale che la proiezione di AD su AP non possa superare mai tale valore (*Teorema di Lobačevskij*). In questo caso non è valido il V postulato di Euclide.

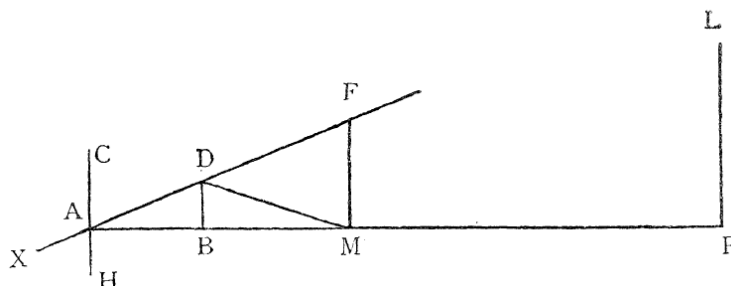


Figura 2.10

Indebolendo le proposizioni precedenti Saccheri ottiene un risultato che gli sarà propedeutico per l'eliminazione dell'ipotesi dell'angolo ottuso.

Proposizione 2.21 (Proposizione XIII). *Nell'ipotesi dell'angolo retto e dell'angolo ottuso il postulato V d'Euclide è vero, cioè due rette AD , XL , che fanno con una terza XA (Figura 2.11) da una medesima parte angoli interni la cui somma è minore di due retti, si incontrano da questa parte.*

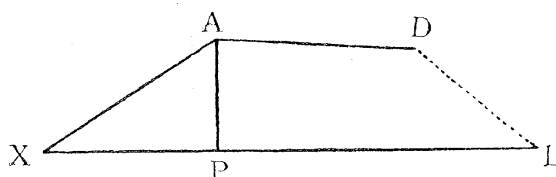


Figura 2.11

Dimostrazione. Infatti, uno dei due angoli, ad esempio $\angle AXL$, è acuto. Dal vertice dell'altro angolo si conduca la perpendicolare AP alla retta contenente XL ; per la Proposizione I.17, essa cade dalla parte dell'angolo acuto $\angle AXL$. Nel triangolo rettangolo $\triangle APX$, rettangolo nel vertice P , gli angoli acuti $\angle PAX$ e $\angle PXA$ hanno, nelle ipotesi considerate, una somma non minore di un angolo retto. Poiché, per ipotesi, la somma degli angoli $\angle XAD$ e $\angle AXL$ è minore di due angoli retti, sottraendo da essa la somma degli angoli $\angle PAX$ e $\angle PXA$, si ottiene che l'angolo rimanente $\angle PAD$ è minore di un angolo retto. Ne segue che la retta contenente AD è obliqua rispetto a quella contenente AP , mentre quella di PL , che è la stessa che contiene XL , è perpendicolare alla retta che contiene AP . Ci si trova quindi nelle ipotesi dei due teoremi precedenti; di conseguenza, le rette contenenti AD e PL , oppure quelle contenenti AD e XL , devono incontrarsi. Questo conclude la dimostrazione. ■

Ed è proprio a questo punto che l'autore crede di essere riuscito ad eliminare l'ipotesi dell'angolo ottuso. Vi sono due tentativi di dimostrazione della

seguinte Proposizione 2.24. Seguendo il primo ragionamento, Saccheri afferma che, accogliendo l'ipotesi dell'angolo ottuso, si verifica il V postulato di Euclide e, di conseguenza, sono vere tutte le proposizioni del libro I di Euclide che dipendono da tale postulato; in particolare, quindi, vale la proposizione I.32, che afferma [31]:

Proposizione 2.22 (Proposizione I.32 di Euclide). *In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti.*

Tale proposizione ha come diretta conseguenza la seguente:

Proposizione 2.23. *La somma degli angoli interni di ogni quadrilatero è uguale a quattro retti.*

Come conseguenza, nel quadrilatero di Saccheri $ABCD$ (figura 2.1) gli angoli in C e D sono retti, quindi vale l'ipotesi dell'angolo retto; dal momento che non è possibile che valgano contemporaneamente l'ipotesi dell'angolo ottuso e quella dell'angolo retto (Proposizioni 2.11, 2.12) siamo giunti a un assurdo, che rende l'ipotesi dell'angolo ottuso inutilizzabile.

Nel secondo metodo dimostrativo l'autore sfrutta la Proposizione I.17 che, come abbiamo visto, è una conseguenza della Proposizione I.16, la quale non è sempre vera nell'ipotesi dell'angolo ottuso. Anche in questo caso, quindi, il percorso dimostrativo svolto da Saccheri è incompleto.

Proposizione 2.24 (Proposizione XIV). *L'ipotesi dell'angolo ottuso è falsa perché distrugge se stessa.*

Dimostrazione. Dall'ipotesi dell'angolo ottuso si è appena dedotta la validità del V postulato di Euclide. Poiché tale postulato è il fondamento delle dimostrazioni sviluppate da Euclide a partire dalla Proposizione 28 del Libro I, ne segue, secondo la concezione dei geometri, che l'unica ipotesi compatibile è quella dell'angolo retto; pertanto non vi è più spazio per l'ipotesi dell'angolo ottuso.

Si può tuttavia giungere alla stessa conclusione in modo più diretto. Nell'ipotesi dell'angolo ottuso, infatti, gli angoli acuti del triangolo rettangolo $\triangle APX$ (Figura 2.11) hanno somma maggiore di un angolo retto. È quindi sempre possibile scegliere un angolo acuto $\angle PAD$ tale che la somma di esso con i due precedenti angoli acuti sia uguale a due angoli retti. In tal caso, in virtù del teorema precedente, la retta contenente AD dovrebbe incontrare la retta contenente PL , cioè quella contenente XL , considerando la secante che contiene AP . Tuttavia ciò contraddice la Proposizione I.17 se si considera la secante contenente AX . Si ottiene quindi un assurdo, dal quale segue l'impossibilità dell'ipotesi dell'angolo ottuso. ■

Nell'osservare quindi la lucidità del percorso logico di Saccheri per arrivare a tale risultato, è importante evidenziare che vi sono alcuni contesti specifici che non sono stati tenuti in considerazione dall'autore e che portano allo sviluppo di modelli geometrici assiomatici validi (come la geometria sferica). Inoltre, come osserva Beltrami nella sua nota [8, p. 351]:

anche dopo avere così esclusa quest'ipotesi, egli non la perde del tutto di vista e ne fa di nuovo menzione, se avviene che essa si presti ad una tal quale simmetria di deduzione.

Anche grazie a ciò Saccheri otterrà importanti risultati anche nel seguito della sua opera.

2.5 L'*inimicam anguli acuti hypotesim*

Nel discorso successivo alla Proposizione 2.24, Saccheri isola alcuni risultati intermedi utili all'analisi dell'ipotesi dell'angolo acuto. Prima di iniziare la discussione accurata riguardo a tale ipotesi, che si svilupperà dalla Proposizione 2.27 fino alla conclusione della prima parte del primo libro con la Proposizione 2.52, ci concentriamo sulla Proposizione 2.25. Come anticipato, questa proposizione rappresenta l'inverso del risultato ottenuto con la Proposizione 2.15; il risultato viene poi esteso al contesto dei quadrilateri con la Proposizione 2.26.

Proposizione 2.25 (Proposizione XV). *Dall'esistenza di un triangolo in cui la somma degli angoli (figura 2.12) sia uguale, maggiore o minore di due retti, si deduce che è soddisfatta rispettivamente l'ipotesi dell'angolo retto, ottuso, acuto.*

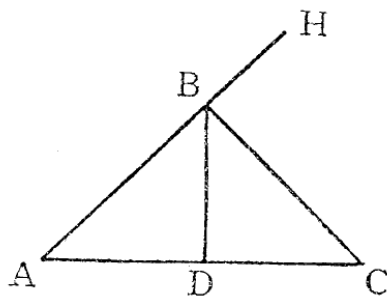


Figura 2.12

Dimostrazione. Infatti, per la I.17, almeno due angoli del triangolo devono essere acuti; supponiamo che siano gli angoli A e C . Di conseguenza, il piede della perpendicolare BD condotta da B alla retta contenente AC cade nel segmento AC . Se si assume che la somma degli angoli del triangolo $\triangle ABC$ sia uguale a due angoli retti, allora la somma degli angoli dei due triangoli $\triangle ADB$ e $\triangle CDB$ risulta uguale a quattro angoli retti. In queste condizioni, la somma degli angoli di ciascuno dei due triangoli non può essere né minore né maggiore di due retti. Se infatti fosse minore in uno dei due, sarebbe necessariamente maggiore nell'altro; viceversa, se fosse maggiore in uno, sarebbe minore nell'altro. Per la Proposizione 2.15, da un triangolo si dedurrebbe la validità dell'ipotesi dell'angolo acuto e dall'altro quella dell'ipotesi dell'angolo ottuso, in contraddizione con le Proposizioni 2.12 e 2.13. Ne segue che la somma degli angoli di ciascuno dei due triangoli deve essere esattamente uguale a due retti; pertanto si verifica l'ipotesi dell'angolo retto.

Supponiamo ora che la somma degli angoli del triangolo $\triangle ABC$ sia maggiore di due retti. In tal caso, la somma degli angoli dei triangoli $\triangle ADB$ e $\triangle CDB$ sarà maggiore di quattro retti. Di conseguenza, la somma degli angoli di ciascuno dei due triangoli non può essere uguale a due retti né minore di due retti; altrimenti, nell'altro triangolo essa sarebbe maggiore di due retti. Si avrebbe così, da una parte, la validità dell'ipotesi dell'angolo retto oppure acuto e, dall'altra, quella dell'ipotesi dell'angolo ottuso, contro quanto stabilito dalle Proposizioni 2.11, 2.12 e 2.13. Pertanto, la somma degli angoli di entrambi i triangoli deve essere maggiore di due retti e, dunque, si verifica l'ipotesi dell'angolo ottuso.

Infine, se si assume che la somma degli angoli del triangolo $\triangle ABC$ sia minore di due retti, allora la somma degli angoli dei triangoli $\triangle ADB$ e $\triangle CDB$ sarà necessariamente minore di quattro retti. In questo caso, la somma degli angoli di ciascuno dei due triangoli non può essere uguale a due retti né maggiore di due retti; diversamente, nell'altro triangolo essa risulterebbe minore di due retti. Si dedurrebbe allora, da un triangolo, la validità dell'ipotesi dell'angolo acuto e, dall'altro, quella dell'ipotesi dell'angolo retto oppure ottuso, in contrasto ancora con le Proposizioni V, VI e VII. Perciò la somma degli angoli di ciascuno dei due triangoli deve essere minore di due retti e quindi si verifica l'ipotesi dell'angolo acuto. ■

Con ciò il discorso legato alla somma degli angoli interni di un triangolo è completo e Saccheri è in grado di associare ad ognuna delle sue tre ipotesi un risultato per la somma degli angoli interni di un triangolo:

- Vale l'ipotesi dell'angolo retto $\iff$ la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale alla somma di due angoli retti.
(**Teorema di Euclide**, caratteristico per la geometria euclidea)
- Vale l'ipotesi dell'angolo ottuso $\iff$ La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore della somma di due angoli retti.
(**Teorema di Saccheri**, caratteristico per la geometria sferica)
- Vale l'ipotesi dell'angolo acuto $\iff$ La somma degli angoli interni di un triangolo è minore della somma di due angoli retti.
(**Teorema di Saccheri e Legendre**, caratteristico per la geometria iperbolica)

Proposizione 2.26 (Proposizione XVI). *Se esiste un quadrilatero $ABCD$ (Figura 2.13) in cui la somma degli angoli sia uguale, maggiore o minore di quattro retti, si deduce che è soddisfatta rispettivamente l'ipotesi dell'angolo retto, ottuso o acuto.*

Con la Proposizione 2.27, Saccheri comincia ad elaborare il ragionamento che lo porterà ad uno degli altri risultati notevoli dell'opera, quello della Proposizione 2.34: mantenendo l'ipotesi dell'angolo acuto, infatti, egli otterrà che due rette in un piano possono assumere tre posizioni reciproche (incidenti, parallele o divergenti).

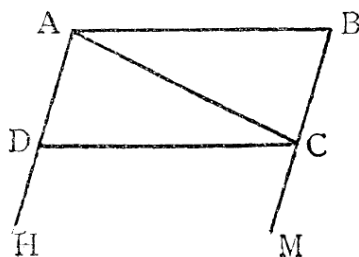


Figura 2.13

Proposizione 2.27 (Proposizione XVII). *Nell'ipotesi dell'angolo acuto si può trovare una perpendicolare e una obliqua a una medesima retta, le quali non si incontrano.*

Prima dimostrazione. Poiché $\triangle ABH$ (Figura 2.14) è un triangolo rettangolo in A , si tracci il segmento HD in modo che l'angolo $\angle BHD$ sia uguale all'angolo $\angle HBA$; si conduca quindi da B la perpendicolare BD al segmento HD . Per la Proposizione I.26, i triangoli $\triangle AHB$ e $\triangle DHB$ sono congruenti. Ne segue che gli angoli $\angle HBD$ e $\angle BHA$ sono uguali; di conseguenza, l'intero angolo $\angle DBA$ risulta uguale all'intero angolo $\angle AHD$. Ora, questi due angoli uguali non possono essere entrambi ottusi, poiché in tal caso si ricadrebbe, in virtù della proposizione precedente, nell'ipotesi dell'angolo ottuso, già esclusa. Non possono nemmeno essere entrambi retti, perché si verificherebbe l'ipotesi dell'angolo retto. Pertanto, essi devono essere necessariamente acuti.

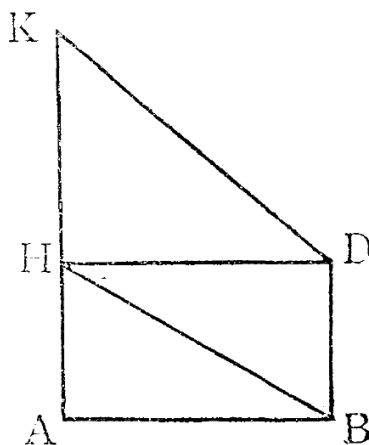


Figura 2.14

Stabilito ciò, le rette contenenti BD e AH non possono incontrarsi in un punto K . Se infatti si intersecassero, nel triangolo $\triangle HDK$ vi sarebbero sia l'angolo retto in D sia l'angolo ottuso in H , in contraddizione con la Proposizione I.17, secondo la quale un triangolo non può avere contemporaneamente un angolo retto e un angolo ottuso. ■

Seconda dimostrazione. Sia (Figura 2.15) $AHMB$ un quadrilatero trirettangolo, con angoli retti nei vertici A , B e H , e si tracci la diagonale BH . Per ipotesi, l'angolo $\angle BMH$ è acuto; inoltre, nel triangolo $\triangle BHM$, anche l'angolo $\angle BHM$ è acuto.

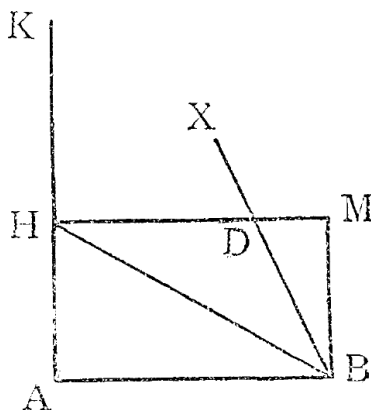


Figura 2.15

Di conseguenza, la perpendicolare BDX condotta da B alla retta contenente HM incontra quest'ultima in un punto D compreso tra H e M . Ne segue che l'angolo $\angle XBA$ è acuto. A questo punto, le rette AHK e BDX non possono intersecarsi. Infatti, un loro eventuale punto d'incontro darebbe luogo a un triangolo avente due angoli retti, rispettivamente nei punti H e D , in contraddizione con la Proposizione I.17. Pertanto, le due rette non si incontrano e la tesi segue immediatamente. ■

Elenchiamo ora le Proposizioni 2.28, 2.29 e 2.30 che riportano alcuni risultati legati ai triangoli rettangoli.

Proposizione 2.28 (Proposizione XVIII). *A seconda che un angolo inscritto in mezzo cerchio è retto, ottuso od acuto, si deduce che è vera l'ipotesi dell'angolo retto, ottuso, acuto.*

Proposizione 2.29 (Proposizione XIX). *Se si prolunga l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di una lunghezza uguale a se stessa e si proietta il prolungamento sul prolungamento del cateto non adiacente sarà vera l'ipotesi dell'angolo retto, ottuso od acuto secondoché la proiezione è uguale maggiore o minore del cateto.*

Proposizione 2.30 (Proposizione XX). *Nell'ipotesi dell'angolo acuto se B è il punto di mezzo dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo $\triangle AMC$ (Figura 2.16) e se BD è perpendicolare ad AC , sarà BD non maggiore della metà di MC .*

Osservazione 2.31. *Facendo riferimento alla Figura 2.16 e considerando il triangolo $\triangle AMC$, nell'ipotesi dell'angolo retto la congiungente i punti medi BD di due lati è uguale alla metà del terzo lato MC (secondo la Proposizione VI.2 degli Elementi [31, p. 363]); nell'ipotesi dell'angolo ottuso BD è maggiore della metà di MC [63] (Teorema di Menelao) e nell'ipotesi dell'angolo acuto è invece minore di MC [66].*

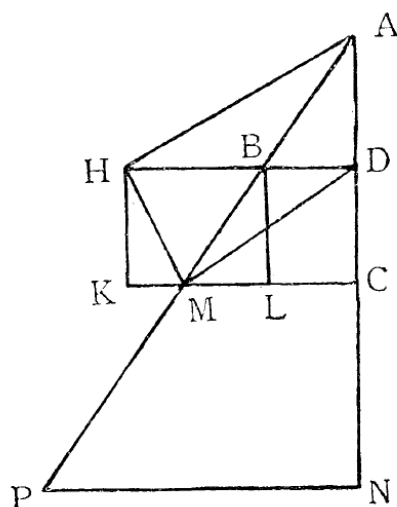


Figura 2.16

La seguente Proposizione 2.32 è un risultato attribuito ad Aristotele che si basa sul *Postulato di Eudosso-Archimede*, già citato.

Proposizione 2.32 (Proposizione XXI). *Nell'ipotesi dell'angolo retto e in quella dell'angolo acuto, la distanza di un punto, preso sopra uno dei lati di un angolo, dall'altro lato cresce indefinitamente con l'allontanarsi indefinitamente del punto sul lato considerato.*

Dimostrazione. Infatti, si consideri (Figura 2.16) l'angolo $\angle MAC$ e si prolunghino entrambi i suoi lati. Sul lato contenente il segmento AM si scelga un punto P in modo che AP sia il doppio di AM , così come AM è il doppio di AB . Dal punto P si conduca quindi la perpendicolare PN all'altro lato dell'angolo. Per la proposizione precedente, il segmento MC non supera la metà di PN ; equivalentemente, PN è almeno il doppio di MC . Poiché, a sua volta, MC è almeno il doppio di BD , e lo stesso ragionamento può essere reiterato indefinitamente, si ottiene una successione di segmenti ciascuno almeno doppio del precedente. Ne consegue che sul lato AM è sempre possibile individuare un segmento AP , multiplo di AB , tale che la distanza del punto P dall'altro lato dell'angolo superi qualsiasi lunghezza assegnata. Questo conclude la dimostrazione. ■

A questo punto Saccheri elabora un percorso storico-critico articolato in quattro osservazioni, in cui analizza i tentativi di Proclo, Borelli, Nassareddin e Wallis di dimostrare il V postulato di Euclide: l'autore mette in relazione i vari tentativi e il proprio lavoro, evidenziando i punti in cui i ragionamenti dei suoi predecessori hanno delle lacune. In particolare l'autore critica l'ipotesi di Borelli (Osservazione II) secondo cui *il luogo geometrico dei punti equidistanti da una retta data è una linea retta*, sostenendo che tale affermazione vada dimostrata e rimanda alla sua Proposizione 2.57; dopodiché, analizza la scelta di Wallis (Osservazione III) di assumere a priori l'esistenza di figure simili, mostrando che

in realtà ciò è equivalente a ammettere il V postulato, grazie alla Proposizione 2.21.

I prossimi risultati sono legati alla posizione reciproca delle rette (Proposizioni 2.33, 2.34, 2.36) e portano alla Proposizione 2.37 per cui due rette che si avvicinano sempre di più tra loro si avvicinano indefinitamente, cioè sono una l'asintoto dell'altra.

Proposizione 2.33 (Proposizione XXII). *Se il quadrilatero $ABCD$ è rettangolo in B e in D (figura 2.17) e gli angoli $\angle BAC$, $\angle DCA$ sono acuti si può condurre tra AB e CD una retta perpendicolare tanto a BD che ad AC .*

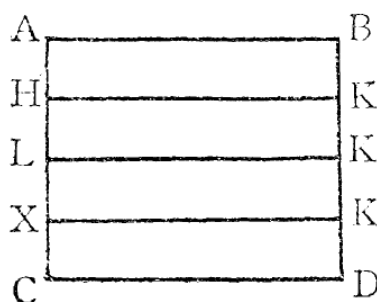


Figura 2.17

Proposizione 2.34 (Proposizione XXIII). *Due rette (Figura 2.18) AX e BX situate nel medesimo piano o hanno una perpendicolare comune, o si incontrano a una distanza finita, o vanno sempre più accostandosi l'una all'altra.*

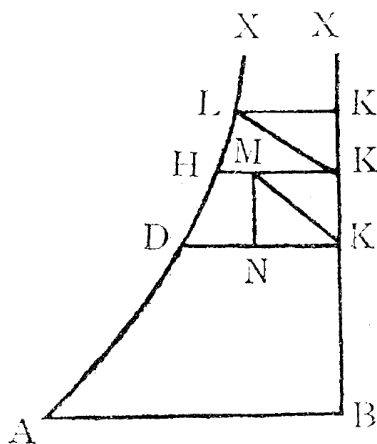


Figura 2.18

Corollario 2.35 (Corollario I). *Se due rette AX e BX si avvicinano sempre più l'una all'altra, le perpendicolari abbassate dai punti della prima sulla seconda fanno colla prima angoli ottusi dalla parte delle perpendicolari più lunghe.*

Come conseguenza di quest'ultimo Corollario, Saccheri realizza anche, nel caso in cui due rette AX e BX segate da una terza $PFHD$ (Figura 2.19) formino angoli coniugati interni supplementari, la costruzione della perpendicolare comune (in realtà questo risultato vale in tutte e tre le ipotesi dell'angolo).

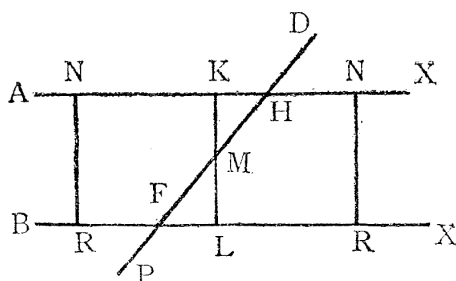


Figura 2.19

Proposizione 2.36 (Proposizione XXIV). *Date due rette qualunque AX e BX (Figura 2.18) la seconda BX perpendicolare ad AB , a DK , a HK , a LK , essendo i punti D, H, L su AX a distanze crescenti da A ed essendo KK^{11} , la somma degli angoli del quadrilatero $KDHK$ è minore della somma degli angoli del quadrilatero $KHLK$ se è $DK > HK > LK$ e ciò, sia che le rette AX e BX si incontrino, o si avvicinino sempre più, o abbiano una perpendicolare comune a partire dalla quale divergano.*

Ecco, a questo punto, la Proposizione 2.37 e la sua dimostrazione:

Proposizione 2.37 (Proposizione XXV). *Se due rette AX e BX (Figura 2.20), l'una obliqua e l'altra perpendicolare ad AB , si avvicinano sempre più in modo che la loro distanza sia sempre maggiore di una certa lunghezza data, l'ipotesi dell'angolo acuto viene distrutta.*

Dimostrazione. Sia R la lunghezza assegnata. Sul lato BX si scelga un segmento BK uguale a un multiplo arbitrario di R . Per l'osservazione precedente, la perpendicolare condotta da K alla retta BX incontra la retta AX in un punto L e, per l'ipotesi del teorema, risulta $KL > R$. Si suddivida quindi il segmento BK in parti consecutive uguali a R . Dai punti di divisione si conducano le perpendicolari a BX , che incontrano la retta AX nei punti L, H, D, M, N , con N il più vicino ad A . In virtù del teorema precedente, la somma degli angoli del quadrilatero $KHLK$ è maggiore della somma degli angoli del quadrilatero $KDHK$; quest'ultima, a sua volta, è maggiore della somma degli angoli del quadrilatero $KMDK$, e così via fino al quadrilatero $KNAB$, il cui totale angolare è il minimo tra quelli dei quadrilateri considerati.

Calcoliamo ora la somma complessiva degli angoli di tutti questi quadrilateri. Il loro numero coincide evidentemente con il numero delle perpendicolari condotte a BX dai punti di divisione di BK , esclusa la perpendicolare iniziale AB . Supponiamo, per esempio, che tali perpendicolari siano nove; avremo allora nove quadrilateri. Ciascuna perpendicolare determina due angoli con AX

¹¹Saccheri indica con la stessa lettera K punti di BX equidistanti tra loro.

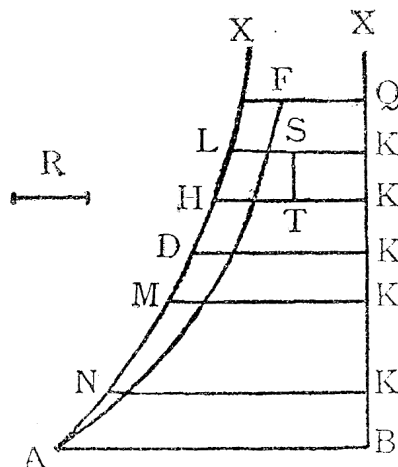


Figura 2.20

e due con BX , la cui somma è uguale a quattro retti. Pertanto, gli angoli generati dalle otto perpendicolari comprese tra la prima AB e l'ultima LK sommano complessivamente a trentadue retti. A questi si aggiungano i due angoli retti $\angle LKB$ e $\angle KBA$ e l'angolo ottuso $\angle KLA$; anche trascurando l'angolo acuto $\angle BAL$, si ottiene una somma superiore a trentacinque retti. Ne segue che la somma degli angoli dei nove quadrilateri supera trentacinque retti. Di conseguenza, la deficienza angolare del quadrilatero più esterno $KHLK$ risulta inferiore alla nona parte di un angolo retto. Poiché è sempre possibile scegliere il segmento BK , multiplo di R , in modo da ottenere un numero arbitrariamente grande di quadrilateri del tipo descritto, la deficienza angolare del quadrilatero più lontano $KHLK$ può essere resa minore di qualsiasi angolo assegnato. Osserviamo inoltre che i segmenti KL e KH restano sempre maggiori di R . Pertanto, sui lati KL e KH si possono prendere rispettivamente i segmenti KS e KT , entrambi uguali a KK , cioè a R . Congiungendo i punti S e T , si ottiene il segmento ST . Nell'ipotesi dell'angolo acuto, la somma degli angoli $\angle KST$ e $\angle KTS$ è maggiore della somma degli angoli $\angle KLH$ e $\angle KHL$. Di conseguenza, la somma degli angoli del quadrilatero $KTSK$ è maggiore di quella del quadrilatero $KHLK$. Ora, il quadrilatero $KTSK$ è completamente determinato: esso ha base $KK = R$, presenta due angoli retti nel vertice K e possiede i lati KT e KS entrambi uguali a R . Poiché la somma dei suoi angoli è sempre maggiore della somma degli angoli del quadrilatero $KHLK$, e quest'ultima può differire da quattro retti per una quantità inferiore a qualsiasi angolo assegnato, segue che la somma degli angoli del quadrilatero $KTSK$ non può essere inferiore a quattro retti di una quantità apprezzabile. Essa deve quindi essere uguale a quattro retti oppure maggiore di quattro retti. Ma ciò implica che sia verificata l'ipotesi dell'angolo retto oppure quella dell'angolo ottuso. Ne consegue che l'ipotesi dell'angolo acuto è impossibile e deve essere esclusa. ■

Corollario 2.38 (Corollario II). *Non si può stabilire la geometria euclidea chiamando parallele due rette perpendicolari a una terza e concludendo da questa*

definizione che due rette che fanno con una terza angoli interni la cui somma è minore di due retti si incontrano a distanza finita o infinita, perché bisognerebbe aver prima dimostrato che queste due rette non possono altrove mai ricevere una perpendicolare comune.

Grazie alla profondità dell'analisi dell'autore, è possibile rivedere nei risultati del trattato l'intero discorso riguardante la posizione reciproca di due rette in geometria pseudosferica. Sappiamo infatti che la situazione cambia in base all'ipotesi dell'angolo considerata.

In geometria euclidea, date due rette appartenenti allo stesso piano, esse possono essere secanti o parallele (eventualmente coincidenti): in questo caso il concetto di parallelismo, detto *parallelismo euclideo*, è caratterizzato dall'invarianza della distanza tra le due rette (per ogni punto di una delle due rette, la distanza dall'altra è costante).

Nell'ipotesi dell'angolo ottuso, invece, due rette complanari qualunque sono sempre secanti (come abbiamo già messo in evidenza precedentemente), questo risultato non viene trovato da Saccheri poiché egli è convinto erroneamente del fatto che accettare l'ipotesi dell'angolo ottuso equivalga a trovare un assurdo.

Nell'ipotesi dell'angolo acuto, infine, due rette appartenenti allo stesso piano possono essere secanti, parallele o divergenti: in questo caso, il parallelismo, detto *parallelismo di Lobačevskij*, è caratterizzato dal fatto che le due rette parallele hanno una perpendicolare comune a partire dalla quale divergono, come riuscirà a mostrare anche Saccheri.

Avviandosi alla chiusura del discorso sull'ipotesi dell'angolo acuto, Saccheri ottiene con la Proposizione 2.51 una precisa descrizione di quello che sarà chiamato da Lobačevskij **angolo di parallelismo**. Indichiamo le proposizioni che lo hanno portato a questo notevole risultato.

Proposizione 2.39 (Proposizione XXVI). *Nell'ipotesi dell'angolo acuto, se AX è obliqua ad AB (Figura 2.21) e asintoto a BX perpendicolare ad AB , ogni perpendicolare ad AB , condotta da un punto T qualunque situato fra A e B , incontrerà AX .*

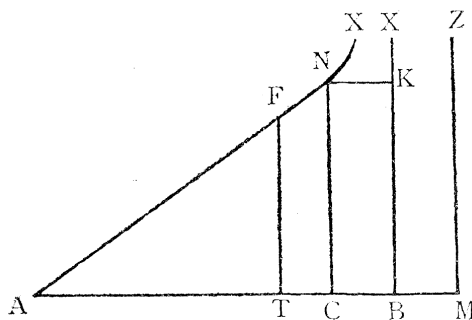


Figura 2.21

Corollario 2.40 (Corollario I). *Ogni perpendicolare MZ condotta ad AB da un punto M situato al di là di B non incontra la AX , nemmeno all'infinito.*

Già in questo risultato si trova la parallela AX , nel senso di Lobačevskij, rispetto alla retta BX : in questa configurazione, l'angolo $\angle BAX$ è proprio quello che diventerà l'angolo di parallelismo corrispondente alla distanza AB .

Corollario 2.41 (Corollario II). *Una perpendicolare ad AB in un punto sufficientemente vicino ad A incontra la AX .*

Proposizione 2.42 (Proposizione XXVII). *Se una obliqua AX ad AB (Figura 2.22), per un angolo $\angle BAX$ sufficientemente piccolo, incontra sempre, a distanza finita o infinita, qualsiasi perpendicolare BX ad AB , qualunque sia la distanza del punto B dal punto A , dico che si può stabilire la falsità dell'ipotesi dell'angolo acuto.*

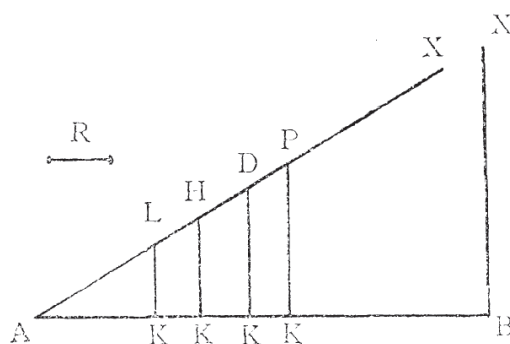


Figura 2.22

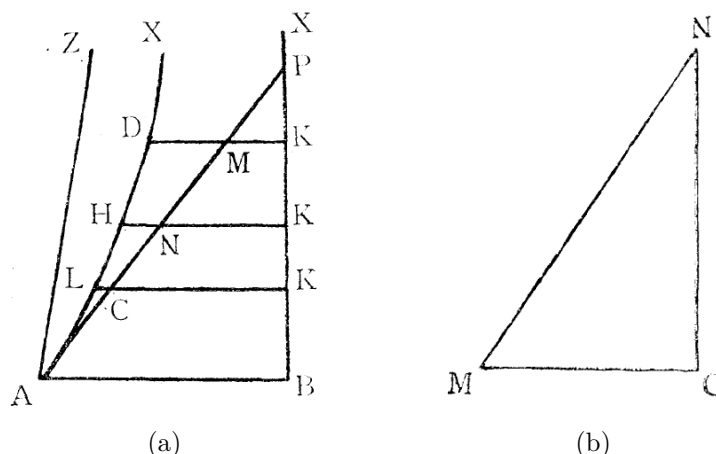
Dalla dimostrazione della Proposizione 2.42 segue immediatamente il teorema: *se vale l'ipotesi dell'angolo acuto, data una retta AX obliqua ad AB , fra le perpendicolari ad AB ne esistono di quelle che incontrano AX e di quelle che non la incontrano.* Utilizzando l'Assioma di continuità di Dedekind, è possibile dimostrare che esiste sempre una retta che separa le perpendicolari incidenti alla AX dalle rette perpendicolari non incidenti (e tale retta è proprio la parallela nel senso di Lobačevskij) [66].

La seguente Proposizione 2.43 determina la relazione tra angolo di parallelismo e distanza tra le rette: afferma infatti che al diminuire della distanza fra due rette, l'angolo acuto che essa forma con la retta da cui è calata cresce continuamente, tendendo a un angolo retto.

Proposizione 2.43 (Proposizione XXVIII). *Se AX è obliqua ad AB e asintoto a BX , perpendicolare ad AB (Figura 2.23a), gli angoli nei punti L, H, D ecc. della AX dai quali stanno condotte a BX le perpendicolari LK, HK, DK ecc. sono tutti ottusi dalla parte delle perpendicolari più lunghe, decrescono coll'allontanarsi del punto L sulla AX e hanno per limite un angolo retto.*

Dimostrazione. La prima affermazione segue immediatamente dal Corollario 2.35 della Proposizione 2.34.

Per la seconda, basta osservare che la somma degli angoli (in riferimento alla Figura 2.23a) $\angle ALK$ e $\angle BKL$ è maggiore della somma degli angoli $\angle AHK$ e



$\angle BKH$. Poiché gli angoli in K sono retti, ne consegue che $\angle ALK > \angle AHK$. Analogamente, si ha $\angle AHK > \angle ADK$, e così via per tutti gli angoli successivi della successione. Per dimostrare che questa successione decrescente di angoli ottusi ha come limite un angolo retto, Saccheri mostra che essa contiene sempre un angolo il cui eccesso rispetto a un angolo retto è minore di qualsiasi angolo assegnato. Sia dunque dato un angolo $\angle MNC$ (si veda la Figura 2.23b). Supponiamo, per assurdo, che l'eccesso di ciascun angolo della successione rispetto a un angolo retto non sia mai minore di $\angle MNC$. Dalla Proposizione 2.32 sappiamo che esiste sempre un punto M sul lato NM tale che la distanza MC dall'altro lato superi qualunque lunghezza assegnata; in particolare, possiamo scegliere M in modo che $MC > AB$.

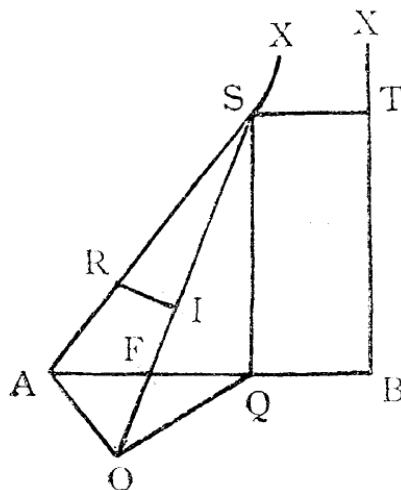


Figura 2.24

Fissata questa costruzione, si consideri sulla retta BX (Figura 2.24) un segmento BT uguale a CN , e si conduca per T la perpendicolare TS a BX , che incontra la retta AX nel punto S . Dal punto S si tracci poi la perpendicolare SQ ad AB . Per I.17, il piede Q di tale perpendicolare cade tra A e B . Nel quadri-

latero trirettangolo $QSTB$, l'angolo $\angle QST$ è acuto; pertanto $SQ > BT = CN$. Inoltre, l'angolo $\angle ASQ$ è maggiore della differenza tra l'angolo ottuso $\angle AST$ e un angolo retto; di conseguenza $\angle ASQ > \angle MNC$. Si tracci allora la retta SF , formante con SA un angolo uguale a $\angle MNC$, e sia F il punto in cui essa incontra AQ . Dal punto A si conduca poi la perpendicolare AO alla retta SF , opportunamente prolungata. Per I.17, il punto O si trova al di sotto di F , poiché $\angle AFS$ è ottuso in virtù di I.16. Poiché, per I.18, il segmento FS è maggiore di QS e quindi anche di $BT = CN$, possiamo individuare su FS un punto I tale che $IS = CN$. Dal punto I si conduca quindi la perpendicolare IR a FS , che incontra SA in un punto R ; ancora per I.17, tale punto si trova tra A e S . A questo punto, nel quadrilatero $AOIR$ gli angoli in O e in I sono retti; l'angolo in A è acuto e, per I.16, quello in R è ottuso. Applicando il Corollario 2.8 della Proposizione 2.4, si ottiene quindi $AO > IR$. Congiungendo i punti O e Q , dalla Proposizione I.18 segue inoltre che $AQ > AO > IR$. Ora, poiché $IR = MC$, si ha $AQ > MC > AB$, e, dunque, $AQ > AB$. Ma ciò è impossibile, perché AQ è una parte del segmento AB e non può essere maggiore del tutto. L'assurdo deriva dall'ipotesi iniziale. Pertanto, nella successione considerata di angoli ottusi decrescenti esiste sempre un angolo il cui eccesso rispetto a un angolo retto è minore di qualunque angolo assegnato. Ne segue che la successione ha come limite un angolo retto. ■

Corollario 2.44 (Corollario). *Segue da qui che le due rette AX e BX tendono ad avere una perpendicolare comune in un punto comune all'infinito.*

Proposizione 2.45 (Proposizione XXIX). *Ogni retta AC (Figura 2.23a) condotta nell'angolo acuto $\angle BAX$ incontra la perpendicolare BX ad AB , se AX è asintoto di BX , in un punto P a distanza finita.*

Corollario 2.46 (Corollario I). *Segue da qui che ogni retta AZ , che forma con AB un angolo acuto $\angle ZAB$ maggiore di $\angle XAB$, non è asintoto di BX .*

Corollario 2.47 (Corollario II). *Segue inoltre che se P è un punto della perpendicolare BX ad AB , l'angolo $\angle PAB$, quando PB cresce indefinitamente, non ha valore massimo, ma tende verso il limite inaccessibile $\angle XAB$.*

Le seguenti tre Proposizioni (2.48, 2.50, 2.51) segnano il progressivo avvicinamento al tentativo di confutazione dell'ipotesi dell'angolo acuto, che giunge con la Proposizione 2.52. Saccheri opera in queste proposizioni con una retta mobile: presa una retta fissa BX , egli traccia una retta mobile, cioè una retta che possa ruotare intorno al suo punto A fissato (Figura 2.25). Muovendosi, a partire dalla posizione di AB , la retta mobile incontra la retta BX in un punto che si allontana sempre di più da B ; se invece la retta mobile parte dalla posizione AY , perpendicolare ad AB e ruota nel verso opposto al caso precedente, assumendo una delle posizioni indicate con AL , essa si avvicina alla retta BX : mentre partendo da AB , l'angolo $\angle LAB$ aumenta, in questo secondo caso esso diminuisce.

Proposizione 2.48 (Proposizione XXX). *Se BX è perpendicolare ad AB una prima retta avente con BX una perpendicolare comune è AY perpendicolare ad*

AB (Figura 2.25). Ora dico che non esiste un'ultima obliqua AN ad AB avente con BY una perpendicolare comune.

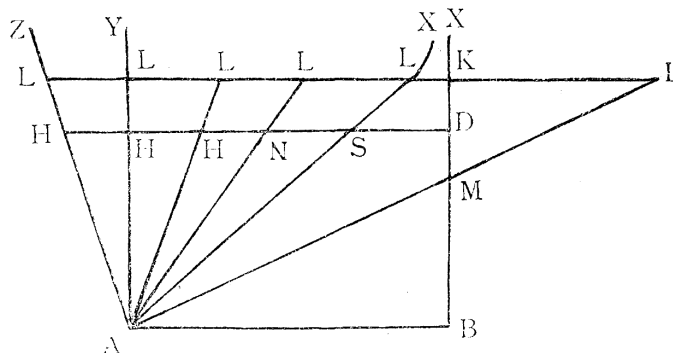


Figura 2.25

Corollario 2.49 (Corollario). Nel quadrilatero trirettangolo (si veda la Figura 2.25) $LKSD$ l'angolo in S è acuto, perciò il lato LK è minore di SD . Quindi segue che la perpendicolare comune, quando esiste, per una obliqua AX e una perpendicolare BX ad AB è tanto più piccola quanto più piccolo è l'angolo $\angle XAB$.

Proposizione 2.50 (Proposizione XXXI). La perpendicolare comune per un'obliqua AX e una perpendicolare BX ad AB (Figura 2.20), al decrescere dell'angolo $\angle XAB$, ha per limite zero.

Proposizione 2.51 (Proposizione XXXII). Nell'ipotesi dell'angolo acuto esiste un angolo $\angle XAB$ (figura 2.25) tale che AX non incontra BX perpendicolare ad AB ; ogni obliqua compresa nell'angolo $\angle XAB$ incontra BX ; ogni obliqua che fa con AB un angolo acuto maggiore di $\angle XAB$, o un angolo retto, ha con BX una perpendicolare comune a una distanza finita.

Con quest'ultima proposizione, Saccheri riesce a fornire una descrizione molto dettagliata dell'angolo di parallelismo: il ragionamento presente nell'opera è legato allo studio dell'ampiezza degli angoli che si formano tra la retta mobile e la perpendicolare alla retta fissata (cioè gli angoli tra la retta AX e la retta AB nella Figura 2.26) e alla considerazione che esiste un limite comune tra le rette secanti e quelle non secanti rispetto a BX passanti per A .

In maniera molto articolata e segnando un cambio di linguaggio a svantaggio della chiarezza rispetto alle precedenti proposizioni, Saccheri giunge finalmente alla presunta dimostrazione dell'impossibilità dell'ipotesi dell'angolo acuto con la Proposizione 2.52. Come afferma Beltrami nel suo saggio [8, p. 353]:

Or chi crederebbe che subito dopo la proposizione testé citata il lettore dovesse vedersi comparire innanzi quest'altra (Prop. 33): *Ipotesis anguli acuti est absolute falsa quia repugnant Nature lineae Recte*¹²? Eppure è proprio così. L'autore fa un lunghissimo discorso

¹²L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa, perché ripugna alla natura della linea retta.

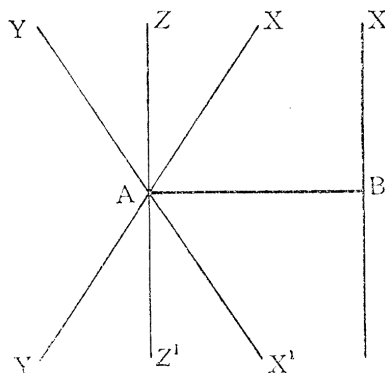


Figura 2.26

per contestare, piuttosto che per dimostrare cotesto suo asserto, che per noi, oggi, è poco meno che inconcepibile. La sua pretesa dimostrazione si trascina innanzi a stento, per la distesa di 16 fittissime pagine, appoggiata a 5 lemmi e spalleggiata da quattro corollari, con qualche scolio per giunta. Si direbbe quasi che l'Autore, più che a convincere altrui, si adoperi a persuadere se stesso, con argomentazioni prolisse e diffuse, nelle quali più non si riconosce l'esperto e sicuro geometra di prima.

Ecco, allora, la Proposizione 2.52:

Proposizione 2.52 (Proposizione XXXIII). *L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa, perché ripugna alla natura della linea retta.*

Dimostrazione. Infatti, se tale ipotesi fosse vera, la retta AX , obliqua rispetto ad AB e asintotica alla retta BX , perpendicolare ad AB , avrebbe con quest'ultima una perpendicolare comune avente il proprio punto d'intersezione all'infinito. Una simile conclusione, secondo Saccheri, è incompatibile con la natura della linea retta. Questa tesi sarà giustificata nei lemmi che seguono. ■

Anche in questo percorso dimostrativo, l'autore si appoggia all'erronea nozione di infinito di cui abbiamo già parlato e, isolando alcuni risultati in parte già ottenuti in precedenza, cerca di concludere la trattazione affermando [67]:

Poiché due rette non possono finire coll'avere un segmento comune, poiché una retta non può avere biforcazioni, poiché la perpendicolare ad una retta in un punto è assolutamente unica, segue che l'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa.

2.6 La seconda parte del primo libro

A questo punto comincia la seconda parte del primo libro, che riporta un ulteriore tentativo di dimostrazione della falsità dell'ipotesi dell'angolo acuto.

L'autore, ponendosi nel contesto dell'ipotesi dell'angolo acuto, considera la linea luogo dei punti equidistante da una retta, che egli nomina *l'equidistante*, e ne fornisce alcune proprietà: in particolare mette in evidenza che tale curva ha le corde che giacciono fra essa e la retta inizialmente fissata (Proposizione 2.53) e inoltre, costruita la tangente ad un punto dell'equidistante, non è possibile che tra tale tangente e l'equidistante giaccia una retta (Proposizioni 2.54, 2.55), risultato che porta all'unicità della tangente in un punto (Corollario della Proposizione 2.55).

Proposizione 2.53 (Proposizione XXXIV). *Nell'ipotesi dell'angolo acuto, l'equidistante di una retta è situata al di sopra delle sue corde; cioè la corda è situata tra la retta e la equidistante.*

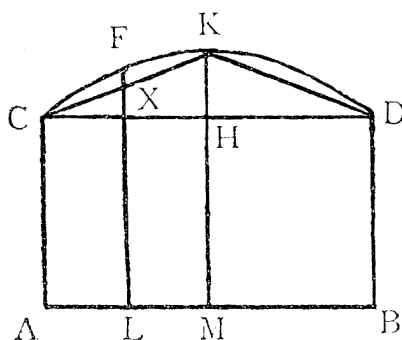


Figura 2.27

Dimostrazione. Si consideri il quadrilatero birettangolo isoscele $ABCD$ (Figura 2.27). Siano M e H i punti medi, rispettivamente, dei lati opposti AB e CD . È noto che il segmento MH costituisce una perpendicolare comune ad AB e CD e che, nell'ipotesi dell'angolo acuto, risulta $MH < BD$. Prolunghiamo allora MH oltre H e scegliamo un punto K tale che $MK = BD$. I punti C , K e D risultano così equidistanti dalla retta AB . Si consideri ora il quadrilatero birettangolo isoscele $AMCK$. Tracciamo la retta LX , perpendicolare ai lati opposti nei loro punti medi L e X , e prolunghiamola oltre L fino a individuare un punto F tale che $LF = BD$. Anche il punto F appartiene alla medesima equidistante. È evidente che, ripetendo indefinitamente questa costruzione, si possono ottenere sulla stessa equidistante tanti punti quanti se ne desiderano. Dalla costruzione segue inoltre che l'equidistante giace sempre al di sopra delle proprie corde. ■

Proposizione 2.54 (Proposizione XXXV). *L'equidistante è al di sotto di ogni perpendicolare in un punto di essa a una delle sue ordinate; cioè l'equidistante è situata tra la retta e la perpendicolare.*

Dimostrazione. Sia data (Figura 2.28) la retta NFX , perpendicolare all'ordinata LF nel punto F dell'equidistante. Si vuole mostrare che essa giace interamente dalla parte esterna dell'equidistante, ossia dal lato verso cui l'equidistante presenta la propria convessità. Supponiamo per assurdo che un

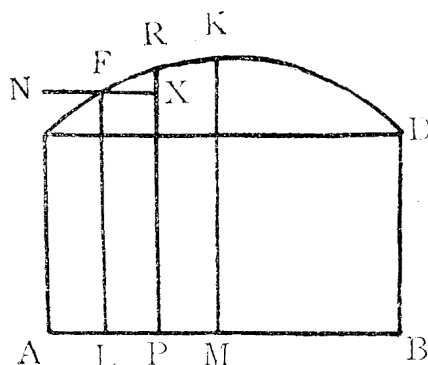


Figura 2.28

punto X della retta NFX appartenga invece alla parte di piano opposta, cioè alla regione verso cui è rivolta la concavità dell'equidistante. Dal punto X si conduca la perpendicolare XP alla base AB e si indichi con R il punto in cui tale retta incontra l'equidistante. Nel quadrilatero trirettangolo $LFXP$, l'angolo in X non può essere né retto né ottuso, poiché entrambe le eventualità sarebbero incompatibili con l'ipotesi dell'angolo acuto. Ne segue che l'angolo in X è necessariamente acuto. Di conseguenza, il lato PX risulta maggiore di LF e, a maggior ragione, anche PR è maggiore di LF . Ma ciò contraddice la definizione stessa di equidistante, poiché tutti i suoi punti devono trovarsi alla medesima distanza dalla base AB . L'assurdo mostra che nessun punto della perpendicolare NFX può trovarsi dal lato della concavità dell'equidistante, cioè tra l'equidistante e la retta AB . Pertanto, la retta NFX giace interamente dalla parte esterna dell'equidistante, ossia dal lato verso cui essa presenta la propria convessità, e il teorema è dimostrato. La perpendicolare così ottenuta costituisce quindi la tangente all'equidistante nel punto F . ■

Proposizione 2.55 (Proposizione XXXVI). *Ogni retta che fa un angolo acuto con l'ordinata dell'equidistante in un punto di questa, ed ha un punto dalla banda della convessità dell'equidistante¹³, la taglia in un secondo punto¹⁴.*

Dimostrazione. Sia data una retta XF che forma con l'ordinata LF l'angolo acuto $\angle XFL$ e sia X un suo punto situato dalla parte esterna dell'equidistante, ossia dal lato verso cui la curva presenta la propria convessità (Figura 2.29). Si vuole mostrare che la retta XF incontra nuovamente l'equidistante in un secondo punto O . Tracciamo LX e indichiamo con S il punto in cui il segmento LX incontra l'equidistante. Dal punto S si conduca la perpendicolare SP alla base AB . Per definizione di equidistante, risulta $SP = LF$. D'altra parte, per I.8, si ha $SP < LS$; ne segue che $FL < LS < LX$. Pertanto, applicando I.18 al triangolo $\triangle LXF$, si deduce che l'angolo $\angle LXF$ è acuto, essendo minore

¹³Per "banda della convessità" si intende la regione del piano situata al di sopra dell'equidistante, opposta alla base AB , che si trova dalla parte della concavità.

¹⁴Un enunciato più chiaro è: Ogni retta che forma un angolo acuto con l'ordinata dell'equidistante in un suo punto e possiede almeno un punto dalla parte esterna dell'equidistante incontra nuovamente l'equidistante in un secondo punto.

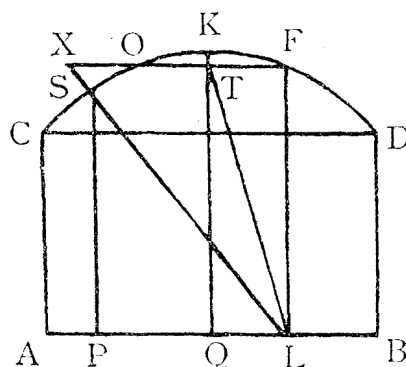


Figura 2.29

dell'angolo $\angle XFL$, che è acuto per ipotesi. Di conseguenza, il piede T della perpendicolare LT condotta alla retta XF cade tra F e X , in virtù di I.17. Dal punto T si conduca ora la perpendicolare TQ alla base AB . Poiché l'angolo $\angle LTF$ è retto, si ha $LF > TL$; inoltre, essendo $TL > TQ$, segue che $LF > TQ$. Prolungando quindi TQ oltre Q , si scelga un punto K tale che $QK = LF$. Per la definizione di equidistante, il punto K appartiene all'equidistante. Poiché $TQ < LF = QK$, il punto T si trova dalla parte interna della curva, cioè dal lato verso cui è rivolta la sua concavità. La retta XF contiene dunque un punto X posto dalla parte esterna dell'equidistante, verso la convessità della curva, e un punto T posto dalla parte opposta, verso la concavità. Ne consegue che essa deve necessariamente intersecare l'equidistante in un punto O compreso tra S e K . Questo conclude la dimostrazione. ■

Corollario 2.56. *La tangente in un punto dell'equidistante è unica.*

Segue, a questo punto, la Proposizione 2.57, che è falsa per come è posta da Saccheri, cioè nel caso dell'ipotesi dell'angolo acuto; tale asserzione, infatti, vale solo nell'ipotesi dell'angolo retto.

Proposizione 2.57 (Proposizione XXXVII). *L'equidistante è uguale alla sua base.*

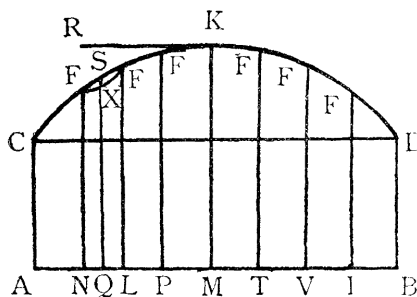


Figura 2.30

Nel tentare di dimostrare tale proposizione Saccheri *ha voluto uscire qui dal suo terreno, da quello della geometria greca, per mettere il piede su quello della geometria infinitesimale, che evidentemente non gli era familiare* [8, p. 354], come afferma Beltrami. Egli presenta infatti un assioma che chiama in causa il concetto di infinitesimo [67]:

Se due linee si dividono per metà, ciascuna metà per metà, ciascun quarto per metà e così via indefinitamente le due linee date saranno uguali ogniquale volta si possa provare che, in questo procedimento di successive divisioni, si deve giungere a due parti corrispondenti uguali fra loro.

Come afferma Giovanni Boccardini in [67, pp. 116–117] tale enunciato è vero solo se si provi che è possibile giungere a due parti corrispondenti uguali *dopo un numero finito di divisioni*: in tal caso il risultato è equivalente alla proposizione *Le grandezze equimolteplici di grandezze uguali sono uguali*, conseguenza della Proposizione V.1 di Euclide *L'equimultiplo della somma è la somma degli equimultipli* [31, p. 307]; nel caso in cui però sia necessario effettuare un numero infinito di ripartizioni della linea non è più possibile parlare di parti e dunque l'assioma è falso. La dimostrazione procede confondendo il concetto di infinitesimo e di punto e, sempre sfruttando le parole di Boccardini, considerando l'equidistante uguale alla sua base poiché è possibile dividerla in 2^n parti uguali, in cui ciascuna, per $n = \infty$, è infinitamente piccola e di conseguenza uguale alla tangente e quindi alla parte corrispondente della base.

Nel tentativo di chiarire quest'ultima asserzione, Saccheri propone un esempio basato sul rotolamento di un cerchio lungo la base del quadrilatero di Saccheri (Figura 2.31).

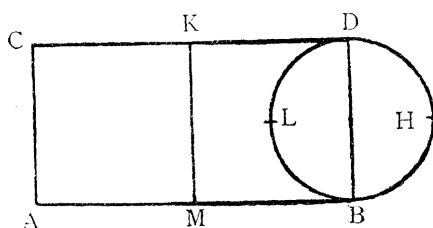


Figura 2.31

L'errore di Saccheri in questo ragionamento è legato al fatto che porzioni infinitesime della circonferenza vengono assimilate alle rispettive tangenti: ciò, infatti, è ritenuto da Saccheri sufficiente per identificare l'intero arco di circonferenza con il segmento sul quale esso rotola. Il punto critico della dimostrazione risiede proprio in questo passaggio dall'infinitesimo al globale: se fosse realmente lecito dedurre l'uguaglianza delle lunghezze complessive dall'uguaglianza dei singoli elementi infinitesimi, il medesimo argomento potrebbe essere applicato a due circonferenze concentriche qualsiasi. Poiché localmente ciascun arco infinitesimo può essere approssimato dalla propria tangente, si giungerebbe quindi a concludere che tutte le circonferenze concentriche hanno la stessa lunghezza; l'assurdità di tale conseguenza mette in luce l'errore del ragionamento di

Saccheri: una corrispondenza locale tra elementi infinitesimi non è sufficiente a garantire l'uguaglianza globale delle curve considerate.

Forte di questo suo risultato (ricordiamolo, falso!) Saccheri conclude il suo ragionamento con le Proposizioni 2.58 e 2.59.

Proposizione 2.58 (Proposizione XXXVIII). *L'ipotesi dell'angolo acuto è falsa.*

Proposizione 2.59 (Proposizione XXXIX). *Se due rette, segate da una terza, formano con questa angoli interni dalla medesima parte la cui somma è minore di due retti, esse si incontrano da questa parte.*

Nella dimostrazione di quest'ultima proposizione, Saccheri riassume il proprio lavoro, affermando di aver dimostrato il V postulato di Euclide come conseguenza della Proposizione 2.21 e del fatto che egli sia riuscito a confutare sia l'ipotesi dell'angolo ottuso, con la Proposizione 2.24, sia l'ipotesi dell'angolo acuto, nei due modi presenti in Proposizione 2.52 e in Proposizione 2.59.

Nonostante questa conclusione, Saccheri termina il proprio libro con alcune considerazioni meno nette sui risultati ottenuti: osserva infatti che l'ipotesi dell'angolo acuto presenta una confutazione imperfetta [67, p. 121].

Nam circa hypothesin angoli obtusi res est meridiana luce clarior; quandoquidem ex ea assumpta ut vera demonstratur absoluta universalis veritas controversi Pronunciati Euclidæi, ex quo postea demonstratur absoluta falsitas ipsius talis hypothesis, prout constat ex XIII et XIV huius. Contra vero non devenio ad probandam falsitatem alterius hypothesis, quæ est anguli acuti, nisi prius demonstrando; quod linea, cujus omnia puncta æquidistant a quadam supposita recta linea in eodem cum ipsa plano existente, æqualis sit ipsi tali rectæ; quod ipsum tamen non videor demonstrare ex visceribus ipsiusmet hypothesis, prout opus foret ad perfectam redargutionem.

Passaggio che, nella traduzione italiana presente in [68], è espresso nei termini seguenti:

Infatti quella [confutazione] riguardante l'ipotesi dell'angolo ottuso è più chiara della luce meridiana, dal momento che da essa, assunta come vera, si dimostra l'assoluta e universale verità del controverso enunciato euclideo, dal quale poi si dimostra l'assoluta falsità di tale stessa ipotesi; come risulta da (2.21) e (2.24). Non giungo invece, in realtà, a provare la falsità dell'altra ipotesi, se non dimostrando prima che la linea, tutti i punti della quale sono equidistanti da certa data linea retta (giacente con essa nello stesso piano), sia uguale a tale retta stessa; e quindi non sembra che io giunga a dimostrazione tratta dal cuore della stessa ipotesi, come sarebbe necessario a una perfetta confutazione.

Terminata l'analisi della struttura deduttiva dell'opera, risulta naturale interrogarsi sul significato che Saccheri attribuì ai risultati ottenuti e sulle ragioni che gli impedirono di riconoscere nell'ipotesi dell'angolo acuto il nucleo di una geometria autonoma. Si può notare, dunque, che Saccheri non giunse mai a mettere realmente in discussione la validità del V postulato di Euclide. Sebbene la sua analisi dell'ipotesi dell'angolo acuto conduca a risultati che oggi riconosciamo come autentici teoremi di geometria iperbolica, egli continuò a interpretare tale ipotesi esclusivamente come uno strumento finalizzato a una dimostrazione per assurdo. Come osserva Beltrami in [8, p. 350], tale atteggiamento deriva dal *costante preconceito di lui contro quella ch'egli altrove appella inimicam anguli acuti hypothesim*. D'altra parte, la convinzione che l'ipotesi dell'angolo acuto fosse intrinsecamente falsa era condivisa dalla quasi totalità dei matematici dell'epoca.

Il contesto culturale del primo Settecento, inoltre, difficilmente avrebbe consentito di concepire l'esistenza di una geometria alternativa a quella euclidea, considerata allora il modello stesso della razionalità matematica. Saccheri operava in un quadro teorico precedente sia alla figura di Gauss sia agli sviluppi ottocenteschi dell'analisi e della teoria dell'infinito. In tale prospettiva, le difficoltà incontrate dall'autore nell'interpretare alcune conseguenze dell'ipotesi dell'angolo acuto appaiono meno come limiti individuali e più come l'espressione dei vincoli concettuali propri dell'epoca storica in cui egli operò.

2.7 La riscoperta di Saccheri

L'Euclides ab omni naevo vindicatus, come abbiamo già avuto modo di accennare, non ebbe al momento della pubblicazione un'influenza paragonabile a quella che avrebbe successivamente assunto nella storia delle geometrie non euclidee. Per oltre un secolo, l'opera rimase sostanzialmente dimenticata, mentre il problema delle parallele continuò a essere affrontato indipendentemente da altri studiosi.

Nella seconda metà dell'Ottocento, fu Eugenio Beltrami a riportare all'attenzione degli storici e dei matematici l'opera di Saccheri, dedicandole l'articolo [8] dove riassume i principali risultati ottenuti da Saccheri e mostrò come molte delle proprietà ottenute dal matematico ligure sotto l'ipotesi dell'angolo acuto anticipassero risultati che sarebbero divenuti centrali nella geometria iperbolica ottocentesca.

Particolarmente significativo fu il modo in cui Beltrami stesso raccontò le circostanze che lo condussero alla scoperta dell'opera. Nelle righe conclusive dell'articolo del 1889, egli dichiara [8, p. 354]:

E qui, dando fine a questa mia forse troppo lunga recensione, debbo dire in qual modo io sia venuto a conoscenza del curioso libro di cui ho cercato di dare notizia agli studiosi; giacché non è mio il merito d'averlo dissepolto dal lungo oblio in cui giaceva da più d'un secolo e mezzo. Essendo venuto per caso a sapere che un dotto gesuita vivente, il P. MANGANOTTI, aveva messo le mani sopra un vecchio Trattato, nel quale egli ravvisava importanti correlazioni

colle dottrine della nuova geometria, mi venne desiderio di conoscere quest'opera.

Secondo Beltrami, dunque, il vero artefice della riscoperta dell'*Euclides* fu il gesuita Angelo Manganotti¹⁵ (1828-1907) che, pertanto, occupa un ruolo centrale nella riscoperta di Saccheri.

Manganotti intrattenne con Beltrami un rapporto scientifico e personale documentato da uno scambio epistolare (di cui, nell'Appendice D, sono riportate e trascritte due lettere) che testimonia l'interesse condiviso dai due studiosi per i fondamenti della geometria e per la storia delle geometrie non euclidee. Dalle lettere, inoltre, emerge la reciproca stima che legò Manganotti e Beltrami, nonché il ruolo svolto dal primo nella diffusione degli studi relativi a Saccheri: nella lettera del 9 gennaio 1891 (si veda la pagina 290), ad esempio, Beltrami ringrazia Manganotti per l'invio dell'opuscolo di Paul Mansion [53] dedicato a Saccheri e ne sottolinea il valore formativo per gli allievi della Scuola Normale di Pavia¹⁶.

L'intervento di Beltrami ebbe conseguenze rilevanti anche sul piano storiografico. Una volta riportata all'attenzione della comunità matematica, l'opera di Saccheri divenne infatti oggetto di ulteriori studi e rivalutazioni critiche. In particolare ricordiamo proprio il lavoro di Paul Mansion dal titolo *Analyse des recherches du P. Saccheri, S. J., sur le postulatum d'Euclide*¹⁷, che contribuì a consolidare l'immagine di Saccheri come autentico precursore delle geometrie non euclidee. La conclusione del saggio di Mansion costituisce una delle più efficaci sintesi del significato storico dell'*Euclides ab omni naevo vindicatus*. Secondo il matematico belga, il trattato di Saccheri è scritto con un rigore autenticamente euclideo, fatta eccezione per i passaggi nei quali intervengono le sue concezioni errate dell'infinito e degli infinitesimi; se l'autore avesse posseduto una più matura padronanza degli strumenti sviluppati da Archimede e Newton, avrebbe probabilmente riconosciuto, con oltre un secolo di anticipo rispetto a Lobačevskij e Bòlyai, la possibilità di costruire un sistema geometrico perfettamente coerente e distinto da quello euclideo. Mansion conclude infine affermando che Saccheri deve essere considerato, in ordine cronologico, il primo autore ad aver sviluppato un autentico studio critico del V postulato di Euclide e, per questo motivo, è il vero precursore dei moderni geometri non euclidei [53, p. 59].

Il libro di padre Saccheri è scritto con un rigore veramente euclideo, salvo nei passaggi in cui intervengono le sue errate concezioni sull'infinito e sugli infinitesimi. Se l'autore avesse studiato Archimede e Newton con la stessa cura con cui studiò gli *Elementi* di Euclide, avrebbe imparato a usare con precisione e sicurezza queste espressioni convenzionali del linguaggio matematico e, probabilmente, sarebbe giunto, un secolo prima di Lobachevskij e Bolyai,

¹⁵Gesuita italiano interessato alle questioni scientifiche e matematiche, mantenne contatti epistolari con Beltrami negli anni 1889-1891.

¹⁶La Scuola Normale di Pavia è citata a pagina 199.

¹⁷Tradotto: *Analisi delle ricerche di padre Saccheri, S.J. (Societas Jesu-Compagnia di Gesù cioè Gesuita), sul postulato di Euclide*.

a questa conclusione: si può costruire un sistema geometrico perfettamente rigoroso, diverso da quello di Euclide. Forse avrebbe persino scoperto la geometria riemanniana, poiché il suo libro contiene alcune proposizioni che vi si riferiscono, accanto a molte altre che appartengono alla geometria di Lobachevskij.

Ma, nonostante i suoi difetti, l'*Euclides ab omni naevo vindicatus* è l'opera più notevole che sia stata scritta sugli *Elementi* prima di Lobachevskij e Bolyai. È probabile che non sia stata priva di influenza sullo sviluppo della scienza. Non rimase sconosciuta: nel 1736 fu oggetto di una recensione (sia pure superficiale) negli *Acta Eruditorum*. Probabilmente si trovava nella biblioteca di Göttingen intorno al 1800, poiché è contrassegnata da un asterisco nella *Bibliotheca mathematica* di Murhard; in quest'opera è citata (vol. II, p. 43) tra gli scritti dedicati alla spiegazione, alla critica o alla difesa di Euclide (Scritti introduttivi ed esplicativi, nonché attacchi e difese di Euclide). Essa ebbe dunque una certa notorietà e si può supporre che non sia sfuggita né a Gauss né agli altri geometri che, nella prima metà di questo secolo, si occuparono dei principi fondamentali della geometria. Comunque sia, padre Saccheri è, cronologicamente, il primo ad aver scritto un vero studio critico sul postulato, e deve essere considerato il precursore dei moderni geometri non euclidei.

Capitolo 3

Eugenio Beltrami

Il diciannovesimo secolo rappresenta, come abbiamo visto nel primo capitolo, un momento di profonda trasformazione nella storia della geometria, segnato in modo indelebile dall'emancipazione dal V postulato di Euclide. In questo panorama di transizione, le geometrie non euclidee faticavano a trovare una piena accettazione all'interno della comunità scientifica: prima degli interventi di Eugenio Beltrami, infatti, le costruzioni geometriche di Lobačevskij e János Bolyai, pur ineccepibili dal punto di vista logico-deduttivo, erano largamente percepite come pure astrazioni formali. Esse descrivevano un universo teoricamente coerente, ma apparentemente privo di un substrato spaziale intuitivo, rimanendo esposte al sospetto di nascondere contraddizioni interne non ancora portate alla luce.

La figura di Beltrami è fondamentale nella matematica ottocentesca proprio per aver risolto questo stallo. La sua scoperta decisiva consiste nell'aver notato la profonda analogia tra la geometria non euclidea di Lobačevskij e la teoria delle superfici curve elaborata da Carl Friedrich Gauss nelle *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, due teorie che fino ad allora erano state considerate solo separatamente. Studiando le superfici a curvatura costante negativa, e in particolare la pseudosfera, Beltrami osservò infatti che le proprietà metriche e le geodetiche di tali superfici seguono le stesse leggi della geometria non euclidea. Ciò permise alla geometria non euclidea di passare da costruzione teorica a teoria geometricamente rappresentabile.

L'aspetto centrale del lavoro di Beltrami risiede nell'aver fornito il primo modello reale per la geometria non euclidea: attraverso l'utilizzo della geometria differenziale intrinseca delle superfici. Mostrando di aver profondamente compreso l'impostazione delle *Disquisitiones*, Beltrami riuscì a tradurre un problema legato ai fondamenti assiomatici della geometria in una questione di geometria analitica e differenziale. Egli fornì la prima dimostrazione della coerenza relativa della geometria iperbolica, dimostrando che, se la geometria euclidea è priva di contraddizioni, lo deve necessariamente essere anche la geometria realizzata da Lobačevskij e Bolyai, poiché quest'ultima può essere interamente interpretata a partire dalla prima.

Il nucleo del suo eccezionale apporto si concentra in due memorie, pubblicate nel 1868 e nel 1869, che segnarono l'inizio della moderna geometria

differenziale globale. Nel celebre *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Beltrami dimostrò che la geometria piana di Lobačevskij è localmente isometrica alla geometria intrinseca di una superficie immersa nello spazio euclideo tridimensionale, dotata di curvatura gaussiana negativa costante. Beltrami denominò questa superficie *pseudosfera*, generandola matematicamente dalla rotazione di una curva trattrice attorno al suo asintoto. Per la prima volta, le astrazioni non euclidee trovavano una realizzazione visibile e calcolabile, rendendo evidente che i teoremi della nuova geometria corrispondevano di fatto ai teoremi della geometria intrinseca di tale superficie. Consapevole, tuttavia, dei limiti topologici della pseudosfera, la quale fornisce solamente un'interpretazione locale e presenta inevitabili singolarità, Beltrami si spinse oltre nella sua seconda memoria, la *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*.

Con questi lavori, Beltrami riuscì non solo a chiarire il legame intimo tra la metrica di uno spazio e la sua curvatura, ma dimostrò anche in modo inequivocabile che la geometria euclidea, quella sferica e quella iperbolica esauriscono le uniche tre tipologie possibili per le varietà a curvatura costante, rispettivamente nulla, positiva e negativa. Questo risultato unificò le interpretazioni metriche di Bernhard Riemann e le specifiche scoperte assiomatiche dei suoi predecessori, ponendo le basi per creare un quadro teorico rigoroso e generale.

3.1 La vita di Beltrami

Eugenio Beltrami nacque il 16 novembre 1835 a Cremona, città dove frequentò anche il liceo ginnasio. Nel 1853 si iscrisse al corso di laurea di matematica dell'Università di Pavia, dove ebbe l'opportunità di seguire le lezioni di Francesco Brioschi (1824-1897). Nello stesso anno fu ammesso al collegio Ghislieri ma l'esperienza collegiale si interruppe nel 1855, quando fu espulso con l'accusa di aver fomentato disordini contro il rettore. A causa di questo episodio e delle difficili condizioni economiche in cui si trovava, Beltrami fu costretto ad abbandonare gli studi universitari, che non completerà mai. Nel 1856 iniziò quindi a lavorare per l'amministrazione delle strade ferrate del Regno Lombardo-Veneto, all'epoca parte dell'Impero austriaco, ma nel 1859 ne venne licenziato per ragioni politiche. In quello stesso periodo scoppiò la seconda guerra d'indipendenza italiana, che portò alla liberazione della Lombardia, e Beltrami decise di trasferirsi a Milano per cercare impiego come insegnante nelle scuole secondarie, obiettivo complicato dalla mancanza di un titolo di laurea. A Milano, Beltrami riprese per un breve periodo gli studi universitari e conobbe Luigi Cremona¹ (1830-1903), che orientò i suoi primi studi verso la geometria delle curve e delle superfici. La svolta per la sua carriera arrivò all'inizio degli anni '60 con la pubblicazione di due memorie che catturarono l'attenzione del suo vecchio maestro, il professor Brioschi, a quel tempo segretario generale del Ministero dell'Istruzione: grazie all'intercessione di quest'ultimo, nel 1862 Beltrami ottenne la nomina

¹Fu uno dei maggiori geometri italiani dell'Ottocento, i suoi contributi più importanti riguardano la geometria proiettiva e la geometria algebrica; in particolare, il suo nome è legato alle trasformazioni birazionali del piano proiettivo, oggi note come *Trasformazioni cremoniane*. Fu inoltre tra i fondatori della statica grafica e svolse un ruolo fondamentale nello sviluppo della scuola geometrica italiana nella seconda metà del XIX secolo.

a professore straordinario di algebra complementare e geometria analitica all'Università di Bologna. Successivamente, gli venne offerta la cattedra di geodesia all'Università di Pisa e, per tale ragione, dopo un periodo di studio a Milano presso l'osservatorio astronomico di Brera con Giovanni Virginio Schiaparelli (1835-1910), si trasferì nella città toscana. Beltrami visse a Pisa dal 1864 al 1866; in questi anni strinse una profonda amicizia con i matematici Enrico Betti (1823-1892) e Bernhard Riemann (1826-1866), i quali esercitarono una grande influenza sulle sue future ricerche. Ricordiamo che Riemann si trovava a Pisa nella speranza che il clima caldo della città lo aiutasse a migliorare la propria salute. Betti tentò anche di far avere una cattedra a Pisa a Riemann ma il suo progetto non andò in porto per le resistenze dell'Università di Gottinga, dove Riemann insegnava. Dopo tale periodo, fece ritorno a Bologna per assumere la cattedra di meccanica razionale e, nel 1873, si trasferì a Roma, dove gli furono assegnati la cattedra di meccanica razionale e l'incarico di insegnante di analisi superiore: Roma era stata proclamata capitale del Regno d'Italia nel 1870 e la sua nomina rientrava in un piano del Ministro dell'Istruzione volto a potenziare il sistema universitario romano, chiamando i più illustri studiosi della penisola a occuparne le cattedre vacanti. Beltrami rimase a Roma fino al 1876, anno in cui passò all'Università di Pavia come docente di fisica matematica e meccanica superiore. Durante il periodo pavese, Beltrami instaurò un forte legame con Felice Casorati (1835-1890) che fu tra gli artefici della fondazione della Scuola Normale² annessa alla Facoltà di Scienze, e con Eugenio Bertini (1846-1933) che raggiunse l'ateneo pavese nel 1880. In seguito alla prematura scomparsa dell'amico Casorati, Beltrami scelse di fare ritorno a Roma, dove trascorse gli ultimi anni della sua vita e morì il 3 febbraio 1900 [64, 15, p. 291, pp. 1-3].

I contributi di Beltrami furono fondamentali in diverse branche della matematica, ma sono soprattutto gli scritti relativi alla geometria non euclidea, e in particolare il *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* e la *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*, che "diedero al Beltrami quasi di slancio quella reputazione che si andò sempre più diffondendo sino a divenire ammirazione universale"³, come scrisse Cremona. Le due opere furono infatti tradotte da Guillaume-Jules Hoüel⁴ (1823-1886) e comparvero nel 1869 sugli *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*⁵, facilitandone la diffusione soprattutto in Francia, Germania e Inghilterra [15, pp. 2-3].

L'insegnamento contribuì a orientare e ispirare la direzione delle ricerche di Beltrami: dopo le importanti pubblicazioni in ambito geometrico del 1868-1869,

²Istituto con lo scopo di formare i futuri insegnanti delle scuole secondarie, garantendo una classe docente uniformata e istruita.

³G. Loria, *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche*, in "Bibliotheca Mathematica", serie III, volume 2 (1901), pp. 392-440, in particolare pp. 416-417.

⁴Guillaume-Jules Hoüel fu un insegnante di analisi reale e complessa presso la facoltà di scienze di Bordeaux dal 1859 al 1884; professore molto attento ai suoi insegnamenti, poliglotta, è ampiamente riconosciuto come pedagogo ed è ritenuto uno dei diffusori delle geometrie non euclidee in Francia e in Europa [58].

⁵E. Beltrami, *Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne* (traduzione di J. Hoüel), in "Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure", serie I, volume 6 (1869), pp. 251-288; *Théorie fondamentale des espaces de courbure constante* (traduzione di J. Hoüel), ivi, pp. 347-377.

infatti, poiché stava ricoprendo il ruolo di insegnante di meccanica razionale, dedicò particolare attenzione alla fisica matematica. Gli argomenti per cui in questi anni pubblica più di cinquanta articoli sono la teoria del potenziale, la cinematica dei fluidi, l'elettrostatica, l'elettrodinamica, il magnetismo, l'elettromagnetismo e la propagazione del calore. I principali scopi di questi lavori sono rendere rigorose le analisi dei fenomeni fisici dal punto di vista matematico e chiarire questioni matematiche relative alla fisica sperimentale o, in altri casi, integrare alcune teorie della fisica matematica classica estendendole a spazi non euclidei e a un numero qualunque di dimensioni [15, p. 3].

L'interesse di Beltrami non si limitò all'attività scientifica, seppur molto intensa ma ebbe anche una componente politica. Egli, infatti, fu nominato dal Re Senatore del Regno d'Italia e membro a più riprese del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione; partecipò anche a un'inchiesta generale sull'istruzione secondaria. Ciò mostra l'interesse di Beltrami per le questioni relative all'insegnamento, specialmente quello della geometria nelle scuole, che in quegli anni si basava sugli *Elementi* di Euclide.

Il grande numero di pubblicazioni di Beltrami (oltre 100 scritti⁶), come abbiamo visto, presenta una grande alternanza di temi, dall'analisi alla geometria, alla fisica matematica. Tra le più importanti opere ricordiamo: *Ricerche di analisi applicata alla geometria*⁷, *Intorno ad alcune proprietà delle superfici di rivoluzione*⁸, *Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette*⁹, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*¹⁰, *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*¹¹, *Teorema di geometria pseudosferica*¹², *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superfici pseudosferiche*¹³ *Ricerche*

⁶L'elenco completo delle opere si può trovare in *Opere matematiche di Eugenio Beltrami*, pubblicato in quattro volumi a cura della facoltà di scienze dell'università di Roma (Milano 1902-1920) [9, 10, 11, 12].

⁷[2]. A partire da questo lavoro fondamentale, servendosi dei risultati del matematico ed ingegnere francese Gabriel Lamé, Beltrami introdusse sistematicamente nelle ricerche di fisica matematica il concetto di "parametro differenziale"

⁸Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo VI (1864), pp. 271-279. Beltrami in tale pubblicazione, oltre a ricavare altri risultati sulla pseudosfera, espone un suo teorema sulla curvatura di una superficie di rotazione, legato al teorema di Liouville sulla pseudosfera.

⁹Annali di Matematica pura ed applicata, serie I, tomo VII (1865), pp. 185-204. Nell'opera viene dimostrato che tali superfici devono avere necessariamente la curvatura costante.

¹⁰Giornale di Matematiche del professor Battaglini, volume VI (1868), pp. 284-312. Beltrami dimostrò per la prima volta, in questa opera fondamentale, come tutti i teoremi della geometria non-euclidea ammettano una effettiva interpretazione sulle superfici a curvatura costante negativa situate nello spazio euclideo.

¹¹Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo II (1868-1869), pp. 232-255. Ulteriore opera dall'importanza indiscussa, in cui, seguendo gli studi di Riemann, sono estese le ricerche precedenti nell'ambito della geometria non euclidea ad uno spazio dimensione qualunque.

¹²Giornale di Matematiche del professor Battaglini, volume X (1872), p. 53. Nella breve pubblicazione in questione, Beltrami dimostra l'importante teorema secondo cui, conducendo dai punti di una retta, nel piano euclideo, le parallele nel senso di Lobačevskij a un'altra retta e perpendicolare alla prima, l'inviluppo di quelle è precisamente la trattrice, cioè la curva meridiana dello pseudosfera.

¹³Giornale di Matematiche del professor Battaglini, volume X (1872), pp. 147-159.

di geometria analitica¹⁴.

L'attività di scienziato e di docente, oltre che di politico, valse a Beltrami molti riconoscimenti. Fu socio dell'Accademia delle scienze di Bologna, dell'Accademia dei Lincei, dell'Accademia delle scienze di Torino, dell'Accademia delle scienze di Parigi, di Berlino, di Monaco, della Società di Gottinga, della Società matematica di Londra; a Beltrami furono conferite onorificenze dalle università di Kazan e di Halle¹⁵.

3.2 Il problema delle carte geografiche

Beltrami iniziò a occuparsi di geodesia nel 1861, anno in cui tradusse in italiano una memoria di Gauss del 1822¹⁶ dedicata alla rappresentazione conforme di una superficie su un'altra. L'opera, dal titolo *Soluzione generale del problema: rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca, nelle sue parti infinitesime, una figura simile alla figura rappresentata*¹⁷, tratta un argomento teorico essenziale per la geodesia, tanto che il problema in questione è spesso chiamato *problema delle carte geografiche* [15, pp. 3–4]. Analizzando tale opera di Gauss si possono notare alcuni dei ragionamenti che Beltrami applicherà nei suoi scritti successivi.

Gauss inizia la trattazione presentando due superfici, descritte tramite due equazioni in tre variabili, x, y, z e X, Y, Z rispettivamente, ciascuna delle quali è considerata in funzione di due variabili ausiliarie t e u per la prima, e T e U per la seconda. Data tale configurazione, egli spiega il significato che è attribuito al termine "rappresentare" [35, p. 214]:

Rappresentare la prima superficie sopra alla seconda significa: stabilire una legge secondo la quale a ciascun punto della prima corrisponda un punto individuato della seconda.

¹⁴Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie III, tomo X (1879), pp. 233-312. In tale opera Beltrami ottiene alcuni risultati riguardanti le superfici sviluppabili e le curve cubiche e quadriche "gobbe", cioè curve algebriche spaziali di ordine tre o quattro.

¹⁵La motivazione del riconoscimento da parte dell'Università di Kazan è:

Il Consiglio dell'Università di Kazan testimonia che, a seguito della proposta della Facoltà Fisico-Matematica, nella sua seduta, tenuta il 28 maggio 1893, all'unanimità ha nominato il Professore dell'Università di Roma

EUGENIO BELTRAMI,

in considerazione dei suoi preclari meriti nella storia della geometria non euclidea, membro onorario dell'Università Imperiale di Kazan.

¹⁶La memoria di Gauss in questione fu redatta nel 1822 come risposta al problema proposto dalla Reale Società delle Scienze di Copenaghen per il concorso di quell'anno, avente per oggetto la rappresentazione conforme di una superficie sopra un'altra. Sebbene il lavoro risalga al 1822, esso fu pubblicato soltanto nel 1825 con il titolo *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*, nel terzo fascicolo delle *Astronomische Abhandlungen*, edite da H. C. Schumacher ad Altona, alle pp. 1–30.

¹⁷Come nella pubblicazione: di C. F. Gauss, traduzione del Sig. Eugenio Beltrami, in "Annali di Matematica Pura ed Applicata", volume IV (1861), pp. 214-232.

In più, è richiesto nel problema che *la rappresentazione debba, nelle sue parti infinitesime, essere simile alla figura rappresentata*, condizione che Gauss spiega nel modo seguente [35, p. 215]:

La prescritta condizione richiede, primieramente, che tutti gli archetti infinitamente piccoli uscenti da uno stesso punto della prima superficie, ed in essa giacenti, sieno rispettivamente proporzionali agli archetti corrispondenti nella seconda superficie, e, in secondo luogo, che quelli facciano fra loro gli stessi angoli di questi.

Per discutere il problema, Gauss scrive i differenziali delle variabili con cui le superfici sono descritte, in funzione delle variabili ausiliarie t e u , ottenendo:

$$\begin{aligned} dx &= adt + a'du & dy &= bdt + b'du & dz &= cdt + c'du \\ dX &= Adt + A'du & dY &= Bdt + B'du & dZ &= Cdt + C'du. \end{aligned}$$

Successivamente, viene indicata l'espressione dell'elemento lineare della prima superficie,

$$\sqrt{(aa + bb + cc)dt^2 + 2(aa' + bb' + cc')dtdu + (a'a' + b'b' + c'c')du^2},$$

a cui segue l'elemento lineare della seconda, analogo:

$$\sqrt{(AA + BB + CC)dt^2 + 2(AA' + BB' + CC')dtdu + (A'A' + B'B' + C'C')du^2}.$$

Considerando che la seconda condizione richiesta dal problema è contenuta nella prima, Gauss afferma che i *coefficienti delle superfici*, cioè i coefficienti delle prime forme fondamentali delle superfici, devono rispettare la seguente espressione analitica:

$$\frac{AA + BB + CC}{aa + bb + cc} = \frac{AA' + BB' + CC'}{aa' + bb' + cc'} = \frac{A'A' + B'B' + C'C'}{a'a' + b'b' + c'c'} = mm,$$

cioè devono essere proporzionali tra loro¹⁸. In tale scrittura, m rappresenta il rapporto con cui le grandezze della prima superficie vengono ingrandite (se $m > 1$) o rimpicciolite (se $m < 1$) nella loro rappresentazione sulla seconda, e generalmente può variare da punto a punto. Nel caso particolare in cui m sia costante, invece, si realizza una similitudine tra le superfici; inoltre, se $m = 1$, le due superfici risultano uguali tra loro.

Detto a questo punto

$$\omega = (aa + bb + cc) dt^2 + 2(aa' + bb' + cc') dtdu + (a'a' + b'b' + c'c') du^2,$$

l'equazione differenziale $\omega = 0$ è un'equazione algebrico-differenziale perché ha una dipendenza algebrica dalla derivata $\frac{dt}{du}$ o, seguendo la notazione di Gauss, nei differenziali dt e du . Trattandola come equazione algebrica di secondo grado, si fattorizza in due differenziali lineari di primo grado che danno luogo a due

¹⁸Si noti che, invece di usare m^2 , Gauss utilizza la scrittura, tipica dell'Ottocento, mm .

soluzioni complesse immaginarie, dal momento che ω , come prima forma fondamentale, è definita positiva. Pertanto, Gauss può assumere che gli integrali dell'equazione $\omega = 0$ siano

$$p + iq = \text{cost.}, \quad p - iq = \text{cost.},$$

dove p e q sono funzioni reali di t e u e $i = \sqrt{-1}$; da ciò si ottiene che

$$\omega = n(dp^2 + dq^2), \quad (3.1)$$

con n funzione finita di t e u .

Analogamente, detto Ω il quadrato dell'elemento lineare della seconda superficie, si ottiene l'espressione

$$\Omega = N(dP^2 + dQ^2), \quad (3.2)$$

dove P , Q , N sono funzioni reali in T e U .

Imponendo che la trasformazione sia conforme, si deve avere $\Omega = mm\omega$ e dunque:

$$\frac{(dP + idQ)(dP - idQ)}{(dp + idq)(dp - idq)} = \frac{mmn}{N}. \quad (3.3)$$

Il numeratore del primo membro dell'Equazione 3.3 diventa divisibile per il denominatore solo in due casi:

- se $dP + idQ$ è divisibile per $dp + idq$ e $dP - idQ$ è divisibile per $dp - idq$;
- se $dP + idQ$ è divisibile per $dp - idq$ e $dP - idQ$ è divisibile per $dp + idq$.

Considerando il primo caso (il discorso è analogo per il secondo): $dP + idQ$ viene annullato da $dp + idq = 0$, cioè $P + iQ$ è costante quando $p + iq$ è costante; quindi, si avrà $P + iQ$ funzione soltanto di $p + iq$ e, analogamente, $P - iQ$ funzione soltanto di $p - iq$:

$$P + iQ = f(p + iq), \quad P - iQ = f'(p - iq). \quad (3.4)$$

Inoltre, essendo valide anche le reciproche conseguenze (cioè, ammettendo le equazioni 3.4, sussiste la divisibilità finita di Ω per ω e, di conseguenza, la proporzionalità), si ottiene che la natura della funzione f' dipende da quella di f , creando una corrispondenza tra i valori reali di p e q e i valori reali di P e Q e, allo stesso modo, tra i valori immaginari di p e q e i valori immaginari di P e Q . Dai risultati precedenti è quindi possibile esprimere:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}f(p + iq) + \frac{1}{2}f'(p - iq), \\ iQ &= \frac{1}{2}f(p + iq) - \frac{1}{2}f'(p - iq). \end{aligned}$$

Dunque, scelta la funzione f , si è posto P uguale alla sua parte reale e iQ uguale alla sua parte immaginaria, ricavando in funzione di $p + iq$ e di $p - iq$ le equazioni integrali di Ω , e si è così risolto completamente il problema.

Seguono, a questo punto, nella trattazione di Gauss, alcuni esempi, tra cui il più interessante per Beltrami e per i nostri scopi è la rappresentazione della superficie sferica su un piano. Considerando una sfera di raggio a , Gauss pone

$$x = a \cos t \sin u, \quad y = a \sin t \sin u, \quad z = a \cos u, \quad (3.5)$$

da cui si ottiene l'elemento lineare:

$$\omega = aa \sin^2 u \, dt^2 + aa \, du^2. \quad (3.6)$$

Da ciò si ricava che l'equazione differenziale $\omega = 0$ dà

$$dt \mp i \frac{du}{\sin u} = 0, \quad (3.7)$$

che integrata fornisce

$$t \pm i \log \cot \frac{1}{2}u = \text{cost}. \quad (3.8)$$

Scelta quindi, come nel caso generale, una f arbitraria, è necessario porre X e iY pari rispettivamente alla parte reale e immaginaria di $f(t + i \log \cot \frac{1}{2}u)$.

Nel caso specifico in cui venga scelta come f una funzione lineare, ad esempio $fv = kv$, si ottiene:

$$X = kt, \quad Y = k \log \cot \frac{1}{2}u; \quad (3.9)$$

questo caso corrisponde alla proiezione di Mercatore, con t la longitudine geografica e $-u$ la latitudine.

Nel caso in cui, invece, f sia scelta come funzione esponenziale immaginaria, ponendo $fv = ke^{iv}$, si ricava:

$$f(t + i \log \cot \frac{1}{2}u) = ke^{\log \tan \frac{1}{2}u + it} = k \tan \frac{1}{2}u (\cos t + i \sin t) \quad (3.10)$$

e dunque:

$$X = k \tan \frac{1}{2}u \cos t, \quad Y = k \tan \frac{1}{2}u \sin t; \quad (3.11)$$

questo caso corrisponde alla proiezione stereografica polare. A conclusione di tale esempio, Gauss propone un'interessante riflessione che mette in relazione rette e circonferenze con alcune costanti[35, p. 223]:

Si scorge che nel caso attuale la rappresentazione di tutti i punti pei quali u è costante ha luogo in una circonferenza, e quella di tutti i punti pei quali t è costante in una retta; come pare che le circonferenze corrispondenti a tutti i diversi valori di u sono concentriche.

Lo studio di questo argomento fu per Beltrami utile anche per l'incarico assunto a Pisa come docente di geodesia. In tale contesto, Beltrami lesse un'opera

di Lagrange del 1779¹⁹, in cui si trova un'osservazione che gli fu di ispirazione per ricerche ulteriori. Lagrange aveva osservato che nella proiezione centrale di una sfera su un piano, i raggi condotti dal centro della sfera sul piano di proiezione mandano tutti i cerchi massimi, che sono geodetiche sulla sfera, in rette del piano, che invece lo sono nel piano. Beltrami si pose l'obiettivo di generalizzare questo risultato e tale proposito si concretizzò nell'articolo [3] del 1865 [64, p. 292].

Una geodetica è definita come una curva che minimizza localmente la distanza tra due punti su una superficie; mentre nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ la condizione è soddisfatta dalle rette e sulla sfera dagli archi di cerchio massimo, su una superficie generica, una geodetica segue una traiettoria che si adatta al comportamento locale della curvatura della superficie, in modo che la sua curvatura tangenziale rimanga nulla in ogni punto. Beltrami vuole considerare il problema in cui, facendo corrispondere ai punti di una superficie qualsiasi i punti di un piano, le linee geodetiche sulla superficie stessa sono mandate in rette nel piano, cioè nelle linee geodetiche del piano stesso.

Beltrami, partendo dal contesto applicativo della teoria delle carte geografiche, presenta la sua ricerca con queste parole [3, pp. 262-263]:

Se la carta [geografica] dovesse principalmente servire alla misura delle distanze, converrebbe escludere quelle proiezioni per le quali le curve di minima distanza²⁰ sulla superficie terrestre venissero ad essere rappresentate da linee troppo sensibilmente diverse dalla retta. Fra quelle considerate fin qui, la sola proiezione centrale nella sfera ha la proprietà di trasformare in linee rette le curve summenzionate; e LAGRANGE riguarda a ragione questa proprietà come un pregio speciale di essa.

Siccome, fra le proprietà di cui può essere dotata una carta, quella di prestarsi alla facile misura delle distanze non è certamente la meno utile, così io aveva pensato che la risoluzione generale del problema formulato nel titolo di questo scritto potrebbe essere di qualche giovamento. Oltre la sua applicazione alla teoria delle carte geografiche, essa mi sembrava promettere un nuovo metodo di calcolo geodetico, nel quale tutte le questioni relative a triangoli formati da linee geodetiche sopra una superficie sarebbero ridotte a semplici questioni di trigonometria piana²¹.

Ma l'investigazione da me istituita in proposito mi ha condotto a riconoscere che il detto problema non ammette una risoluzione generale, e che il caso della proiezione centrale nella sfera è sostanzialmente il solo nel quale sia realizzabile la condizione prescritta.

¹⁹Sur la construction des cartes géographiques, di J. L. Lagrange, in "Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin", Berlin (1779), pp. 161-210

²⁰Cioè le geodetiche; nel caso della superficie terrestre sono approssimate a cerchi massimi.

²¹Tale auspicio si concretizzò grazie all'introduzione del triangolo di Giuseppe Cesàro, fratello del più noto Ernesto, che riporta su un piano un triangolo sferico proprio grazie all'uso della proiezione stereografica [63] e che era stato introdotto già nel XIX secolo da Jean-Alfred Serret.

Beltrami assume l'esistenza di un piano e di una superficie che soddisfino le condizioni del problema, al fine di dedurre quali proprietà debba possedere la superficie perché non si giunga a una contraddizione. Siano (x, y) le coordinate di un punto arbitrario del piano e (X, Y) le coordinate del punto corrispondente sulla superficie considerata. La corrispondenza tra i due spazi è descritta dalle relazioni:

$$x = u(X, Y), \quad y = v(X, Y). \quad (3.12)$$

Affinché tale rappresentazione realizzi le condizioni poste dal problema, è necessario che a ogni retta del piano di equazione

$$ax + by + c = 0 \quad (3.13)$$

corrisponda una linea geodetica della superficie. In termini delle coordinate curvilinee (X, Y) , ciò implica che la curva definita da

$$au(X, Y) + bv(X, Y) + c = 0 \quad (3.14)$$

debba rappresentare una geodetica per qualunque scelta delle costanti arbitrarie a, b e c . Osserva allora Beltrami che, proprio in virtù dell'arbitrarietà di tali parametri, l'Equazione (3.14) deve costituire l'integrale completo dell'equazione differenziale delle linee geodetiche. Limitandosi alla sola dipendenza dalle coordinate curvilinee, il problema è pertanto ricondotto alla determinazione delle condizioni sotto cui l'equazione delle geodetiche risulti integrabile mediante la relazione lineare

$$au + bv + c = 0. \quad (3.15)$$

In forma equivalente, si tratta di stabilire quando l'equazione differenziale delle linee geodetiche possa essere ridotta alla forma canonica

$$du \, d^2v - dv \, d^2u = 0. \quad (3.16)$$

Una volta stabilita la superficie e le variabili per cui le condizioni sono verificate, Beltrami osserva che sia sufficiente assegnare a x e y i valori corrispondenti a una generica trasformazione omografica²² di $x = u, y = v$, ottenendo

$$x = \frac{au + bv + c}{a''u + b''v + c''}, \quad y = \frac{a'u + b'v + c'}{a''u + b''v + c''}, \quad (3.17)$$

per risolvere il problema completamente.

Beltrami inizia, a questo punto, la ricerca delle condizioni necessarie affinché l'equazione differenziale delle linee geodetiche sia riconducibile alla forma (3.16). Sfruttando la formula del quadrato dell'elemento lineare della superficie, data da

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu \, dv + Gdv^2, \quad (3.18)$$

l'equazione differenziale $au + bv + c = 0$ diventa:

²²Trasformazione proiettiva biunivoca che preserva la struttura di incidenza, i birapporti e mappa rette in rette.

$$\begin{aligned}
0 &= (EG - F^2)(du \, d^2v - dv \, d^2u) \\
&+ (Edu + Fdv) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) du^2 + \frac{\partial G}{\partial u} du \, dv + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} dv^2 \right] \\
&- (Fdu + Gdv) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) dv^2 + \frac{\partial E}{\partial v} du \, dv + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} du^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Dal momento che devono annullarsi i coefficienti di du^3 , $du^2 dv$, $du dv^2$ e dv^3 , è necessario che siano rispettate le seguenti quattro condizioni:

$$\begin{aligned}
(I) \quad & E \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial u} = 0, \\
(II) \quad & E \frac{\partial G}{\partial u} + F \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) - F \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial u} = 0, \\
(III) \quad & G \frac{\partial E}{\partial v} + F \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) - F \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial v} = 0, \\
(IV) \quad & G \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial v} = 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Il problema si è ridotto, perciò, all'integrazione contemporanea delle quattro equazioni individuate. Beltrami osserva inoltre che, avendo quattro condizioni da soddisfare e due funzioni da determinare, è già possibile prevedere che il problema non possa essere risolto in generale, come affermato all'inizio dell'articolo.

Seguono nella ricerca di Beltrami diverse sezioni in cui vengono svolti i calcoli e le considerazioni necessarie all'integrazione delle condizioni (3.20). Le equazioni (I) e (IV) sono verificate nel caso in cui i due binomi

$$\frac{E \, du + F \, dv}{\sqrt{E}}, \quad \frac{F \, du + G \, dv}{\sqrt{G}} \tag{3.21}$$

siano differenziali esatti; tale condizione non impone, sottolinea Beltrami, *alla superficie veruna condizione speciale*, ma assicura che $du = 0$ e $dv = 0$ soddisfano l'equazione differenziale e ciò significa che le linee coordinate $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ devono essere geodetiche. Dalla (II) e dalla (III) si possono invece ottenere due equazioni contenenti le derivate relative a una sola delle variabili, riducibili alla forma

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{EG - F^2}{E\sqrt{E}} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{EG - F^2}{G\sqrt{G}} \right) = 0; \tag{3.22}$$

dette ora U e V due funzioni rispettivamente solo di u e solo di v , è possibile

porre da tali condizioni

$$\frac{EG - F^2}{E\sqrt{E}} = V^3, \quad \frac{EG - F^2}{G\sqrt{G}} = U^3 \quad (3.23)$$

e ricondurre il problema alla determinazione delle due funzioni U e V in modo che i differenziali in (3.21) siano esatti.

Tramite una funzione incognita $\lambda(u, v)$ e introducendo $\mu = \sqrt{\lambda(\lambda - UV)}$, è possibile soddisfare la (3.23), ponendo

$$\sqrt{E} = \lambda U, \quad F = \lambda \mu UV, \quad \sqrt{G} = \lambda V. \quad (3.24)$$

Ora, per rispettare la condizione sui differenziali in (3.21), si ottengono le due equazioni:

$$\lambda + \mu = 2\varphi(u_1 + v_1), \quad \lambda - \mu = 2\psi(u_1 - v_1), \quad (3.25)$$

dove φ, ψ indicano due funzioni arbitrarie e u_1 e v_1 sono tali che $du_1 = Udu$ e $dv_1 = Vdv$; chiamando ora $u_1 + v_1 = \alpha$, $u_1 - v_1 = \beta$, le Equazioni (3.24) diventano:

$$\lambda = \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad \mu = \varphi(\alpha) - \psi(\beta). \quad (3.26)$$

Esclusi i casi particolari, affrontati in seguito, e quelli di dipendenza tra le variabili (Beltrami osserva che, nel caso in cui siano costanti sia φ sia ψ , la superficie risulterebbe sviluppabile), sono introdotte

$$\varphi = \frac{1}{\Phi}, \quad \psi = \frac{1}{\Psi} \quad (3.27)$$

e, dal fatto che devono essere rispettate le relazioni (3.26), segue la validità dell'equazione

$$\Phi(\alpha) + \Psi(\beta) = \frac{4}{UV}, \quad (3.28)$$

da cui si ottiene

$$\frac{d^3\Phi}{d\alpha^3} = r^2 \frac{d\Phi}{d\alpha}, \quad \frac{d^3\Psi}{d\beta^3} = r^2 \frac{d\Psi}{d\beta}, \quad (3.29)$$

con r una costante reale o immaginaria (e, in tal caso, della forma $r'i$) sempre diversa da zero.

Grazie alle considerazioni esposte finora, Beltrami è dunque in grado di ricavare dapprima Φ e Ψ , che risultano essere

$$\begin{cases} \Phi = A(e^{r\alpha} + kk'e^{-r\alpha}) - 2h, \\ \Psi = A(k'e^{r\beta} + ke^{-r\beta}) + 2h, \end{cases} \quad (3.30)$$

con A , k , k' e h costanti, poi U e V , pari a

$$\begin{cases} U = \frac{2}{m(e^{ru_1} + ke^{-ru_1})}, \\ V = \frac{2}{m'(e^{rv_1} + k'e^{-rv_1})}, \end{cases} \quad (3.31)$$

con $mm' = A$; infine, vengono espresse E , F e G :

$$\begin{cases} E = (\varphi + \psi)^2 U^2, \\ F = (\varphi^2 - \psi^2) UV, \\ G = (\varphi + \psi)^2 V^2. \end{cases} \quad (3.32)$$

Osservazione 3.1. *Dal sistema (3.32) si ottiene un'ulteriore scrittura per il quadrato dell'elemento lineare:*

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\varphi + \psi) [\varphi(U du + V dv)^2 + \psi(U du - V dv)^2], \\ &= (\varphi + \psi)(\varphi d\alpha^2 + \psi d\beta^2), \\ &= (\varphi d\alpha \pm \psi d\beta)^2 + \varphi\psi(d\alpha \mp d\beta)^2, \\ &= dt^2 + 4\varphi\psi du_1^2 = d\tau^2 + 4\varphi\psi dv_1^2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dalla prima e dalla seconda scrittura di ds^2 si ricava che α e β sono coordinate isoterme²³ della superficie e tale forma dell'elemento lineare fornisce l'integrazione completa del problema; dalle ultime tre scritture, invece, dove vengono poste $\varphi d\alpha - \psi d\beta = dt$ e $\varphi d\alpha + \psi d\beta = d\tau$, si deduce che le linee geodetiche $u_1 = \text{cost.}$, $v_1 = \text{cost.}$ sono ortogonali rispettivamente alle linee $t = \text{cost.}$, $\tau = \text{cost.}$

L'articolo di Beltrami giunge allora alla determinazione esplicita dei valori di E , F e G in funzione di u e v : ottenuti i valori di U e V in funzione di u e v come

$$\begin{cases} U = \frac{1}{\sqrt{r^2 u^2 + k m^2}}, \\ V = \frac{1}{\sqrt{r^2 v^2 + k' m'^2}}, \end{cases} \quad (3.34)$$

ricordando che r , k , m , k' e m' sono costanti, e introdotta per semplicità

$$W^2 = (r^2 u^2 + k)(r^2 v^2 + k'), \quad (3.35)$$

²³Coordinate per cui la prima forma fondamentale è conforme alla metrica euclidea; in altre parole, esse realizzano localmente una mappa conforme da una varietà riemanniana bidimensionale al piano Euclideo.

il risultato ottenuto da Beltrami è:

$$\begin{cases} E = \frac{r^2 v^2 + k'}{[W^2 - (r^2 uv - b)^2]^2}, \\ F = -\frac{r^2 uv - b}{[W^2 - (r^2 uv - b)^2]^2}, \\ G = \frac{r^2 u^2 + k}{[W^2 - (r^2 uv - b)^2]^2}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Da ciò $EG - F^2 = \frac{1}{[W^2 - (r^2 uv - b)^2]^3}$. In modo equivalente, tramite un cambio di variabili, considerate certe costanti a e R , si possono esprimere E , F e G come:

$$\begin{cases} E = \frac{R^2(v^2 + a^2)}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}, \\ F = \frac{-R^2 uv}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}, \\ G = \frac{R^2(u^2 + a^2)}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Le varie scritture ottenute da Beltrami per gli elementi E , F e G permettono dunque di determinare il quadrato dell'elemento lineare ds^2 e danno così la possibilità di trovare una classe di superfici applicabili l'una sull'altra che soddisfi il problema. Tali superfici, continua Beltrami, sono quelle a curvatura costante: la spiegazione di ciò parte dalla formula, già ottenuta da Beltrami in un lavoro precedente²⁴, della curvatura di una superficie:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\frac{\partial E}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right];$$

nel caso specifico del problema, essa diventa

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \quad (3.38)$$

e, dunque, si ottiene che

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{R^2}, \quad (3.39)$$

cioè il fatto che la curvatura è costante su tutta la superficie. In particolare, se la curvatura è positiva, cioè se $R \in \mathbb{R}$, le superfici che rispettano tale condizione sono tutte quelle applicabili sulla sfera di raggio R .

Beltrami amplia il ragionamento riguardante il caso della curvatura costante positiva, e quindi delle superfici applicabili alla sfera, spiegando il significato geometrico di u e v in tale contesto. Per la superficie sferica, le espressioni delle

²⁴ *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, articolo XXIV in [9, pp. 188–192]

coordinate ordinarie X , Y e Z in funzione di u e v sono date da

$$\begin{cases} X &= \alpha + \frac{Ru}{\sqrt{u^2+v^2+a^2}}, \\ Y &= \beta + \frac{Rv}{\sqrt{u^2+v^2+a^2}}, \\ Z &= \gamma + \frac{Ra}{\sqrt{u^2+v^2+a^2}}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Infatti, considerate α , β e γ costanti arbitrarie ed eliminando u e v , si ottiene proprio $(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + (Z - \gamma)^2 = R^2$; trasportando il centro della sfera nel punto $(X = 0, Y = 0, Z = -a)$, il raggio passante per il punto (X, Y, Z) è rappresentato dalle equazioni

$$\frac{\xi}{X} = \frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta + a}{Z + a} \quad (3.41)$$

e le coordinate del punto di intersezione con il piano XY corrispondono a:

$$\xi = \frac{aX}{Z + a}, \quad \eta = \frac{aY}{Z + a}, \quad (3.42)$$

ovvero, grazie alle equazioni della superficie sferica

$$\xi = u, \quad \eta = v. \quad (3.43)$$

Dunque per Beltrami le variabili u e v sono le coordinate corrispondenti alla proiezione centrale rispetto alla sfera a cui tutte le superfici possono essere applicate [3, p. 276]:

Le variabili u , v non sono altro che le coordinate rettangole della proiezione centrale di quella sfera sulla quale tutte le nostre superficie sono applicabili, e queste proiezione, insieme colle sue trasformazioni omografiche, costituisce l'unica soluzione del problema, almeno finché si considerano le equazioni (3.29) dalle quali siamo partiti.

A seguito di tale affermazione, Beltrami affronta i casi particolari trascurati in precedenza, mostrando che anch'essi conducono agli stessi risultati. In particolare, egli ottiene superfici di curvatura costante pari a $-A^2$ e osserva che, nel caso in cui A sia immaginario della forma iA' , la superficie è di nuovo applicabile a una sfera, questa volta di raggio $1/A'$.

Giunti al termine dell'articolo, Beltrami raccoglie in un teorema il risultato ottenuto [3, pp. 279-280]:

Le sole superfici suscettibili di essere rappresentate sopra un piano, in modo che ad ogni punto corrisponda un punto e ad ogni linea geodetica una linea retta, sono quelle la cui curvatura è dovunque costante (positiva, negativa o nulla). Quando questa curvatura costante è nulla, la legge di corrispondenza non differisce dalla

normale omografia²⁵. Quando non è nulla, questa legge è riducibile alla proiezione centrale nella sfera ed alle sue trasformazioni omografiche.

E continua [3, p. 280]:

Siccome fra tutte le superficie di curvatura costante, la sola che possa ricevere applicazioni nella teoria delle carte geografiche e nella geodesia è probabilmente la superficie sferica, così dal punto di vista di queste applicazioni viene in tal modo ad essere confermato quello che si asserì in principio, cioè che la sola soluzione del problema è fornita in sostanza dalla proiezione centrale.

Si nota che Beltrami, in questo contesto, si concentra molto di più sul caso delle superfici a curvatura costante positiva: egli, infatti, rende esplicita la formula del quadrato dell'elemento lineare, data da

$$ds^2 = R^2 \frac{[(v^2 + a^2) du^2 - 2uv du dv + (u^2 + a^2) dv^2]}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}, \quad (3.44)$$

solo in questo caso e trae tutte le conclusioni concentrandosi specificatamente su di esso. Ciò è dovuto al fatto che il suo principale obiettivo era, fin dall'inizio dell'articolo, determinare una possibile applicazione alla teoria delle carte geografiche, argomento che è strettamente collegato alla teoria delle superfici a curvatura costante positiva. Probabilmente, Beltrami aveva già elaborato un'espressione analoga alla (3.44), per il caso di curvatura negativa, ma non la scrisse nell'articolo *per abbreviare il discorso* [1, p. 7]; l'espressione di ds^2 nel caso di curvatura negativa sarà il punto di partenza del discorso sviluppato nel *Saggio*.

Ciononostante, Beltrami avanza due possibili generalizzazioni del risultato ottenuto. Nella prima, egli considera la sola corrispondenza tra rette e linee geodetiche, eliminando la corrispondenza tra punti: il problema allora si riduce alla determinazione di due condizioni sui parametri e, nello specifico, risulta che ad ogni punto della superficie corrisponde l'involuppo delle rette corrispondenti sul piano, che non necessariamente è un punto. Nella seconda generalizzazione, mantenendo la corrispondenza tra punti, Beltrami cerca di mappare linee geodetiche di una superficie in linee geodetiche di un'altra superficie qualunque (non più rette di un piano); in tal caso, egli ottiene il seguente teorema [3, p. 280]:

Affinché i punti di una superficie possano essere riportati sopra una superficie di curvatura costante, in modo che le linee geodetiche di quella siano rappresentate da linee geodetiche di questa, è necessario e sufficiente che anche la prima superficie abbia la curvatura costante.

²⁵[Nota di Beltrami] Cioè distendendo la superficie sopra un piano, si ottiene una figura omografica colla rappresentazione.

3.3 Il *Saggio* del 1868

Prima di analizzare il lavoro che portò Beltrami alla descrizione del suo primo modello reale della geometria non euclidea, è necessario considerare alcuni risultati che ebbero il merito di ispirare e fornire le basi ad alcuni dei teoremi presenti nel *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*.

Nel 1866, Jules Hoüel pubblicò *Études géométriques sur la théorie des parallèles*²⁶, traduzione in lingua francese dell'opera di Lobačevskij del 1840 *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, inizialmente edita a Berlino con lo scopo di diffondere il modello di geometria non euclidea realizzato dal matematico russo nell'ambiente accademico europeo. Dalla lettura in francese dell'opera, Beltrami sviluppò alcune riflessioni che verranno raccolte proprio nel *Saggio* e forniranno alcune delle basi per l'approccio di Beltrami sulla geometria non euclidea. Un'altra delle fonti di ispirazione del *Saggio* furono le *Disquisitiones generales circa superficies curvas* di Gauss, pubblicate nel 1827, che ebbero grande diffusione negli anni successivi e servirono a Beltrami per l'orientamento generale dell'opera: in particolare, per Beltrami, risultò fondamentale l'idea secondo cui le proprietà intrinseche delle superfici sono completamente determinate dall'espressione dell'elemento lineare (come abbiamo già visto nel suo articolo del 1865 [3]). Gauss esprimeva tale concetto nel modo seguente [15, pp. 13–14]:

Infatti, se si considera una superficie non come il limite di un solido, ma piuttosto come un solido flessibile e inestensibile, di cui si assume che una dimensione si annulli, le proprietà della superficie dipenderanno in parte dalla forma particolare che essa può assumere, in seguito a una flessione a piacere, e saranno, in parte, assolute e invariabili, qualunque sia tale forma. È a quest'ultimo tipo di proprietà, il cui studio apre alla geometria un campo nuovo e vastissimo, che si riferiscono la misura della curvatura e la curvatura integrale, nel senso che diamo a queste espressioni; si può concepire sotto lo stesso punto di vista la teoria delle linee geodetiche e di altri argomenti che ci riserviamo di trattare più tardi. In base a questa concezione, una superficie piana o una superficie che è sviluppabile su un piano, come, ad esempio, una superficie cilindrica o conica, ecc., sono considerate come essenzialmente identiche. Di conseguenza, il modo corretto per caratterizzare queste superfici consiste nel servirsi dell'espressione generale

$$\sqrt{E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2}, \quad (3.45)$$

che lega un elemento lineare qualsiasi alle indeterminate p, q .

Beltrami assunse proprio questo punto di vista per legare la teoria di Gauss e la geometria non euclidea. Ulteriori spunti di riflessione giunsero dalle memorie

²⁶Tradotto: Indagini geometriche sulla teoria delle parallele. La prima traduzione italiana dell'opera è [50], realizzata nel 1963.

pubblicate sulla teoria delle superfici da Domenico Chelini (1802-1878), Delfino Codazzi (1824-1873) e Gaspare Mainardi (1800-1879), oltre che da alcuni risultati ottenuti da Ernst Ferdinand Adolf Minding (1806-1885) tra il 1839 e il 1840, che raccogliamo di seguito.

Minding fu tra i primi geometri a sviluppare le ricerche di Gauss sulle superfici curve, dando un contributo fondamentale alla disciplina. In una memoria del 1839²⁷, egli affrontò il problema di determinare le condizioni necessarie affinché due superfici siano reciprocamente sviluppabili, focalizzandosi poi sulle proprietà delle superfici a curvatura costante. Il punto di partenza di Minding fu il celebre risultato di Gauss (il *Teorema Egregium*) che afferma che, nel caso della deformazione di una superficie, la misura di curvatura in ciascuno dei suoi punti resta invariata; da questo presupposto, egli ricavò nuovi sviluppi analitici e, successivamente, tentando di dimostrare che due superfici aventi la stessa misura di curvatura costante devono poter essere sviluppate l'una sull'altra, giunse alla formulazione della seguente proposizione generale [15, p. 15]:

[...] Due superfici che hanno la stessa misura di curvatura costante possono, in generale, essere sviluppate l'una sull'altra in un numero infinito di modi, a condizione che si possano far corrispondere due punti qualsiasi presi su una di esse con due punti qualsiasi presi sull'altra; inoltre, ciò avviene solo quando le lunghezze delle linee di minima distanza sulla superficie²⁸, tracciate tra queste coppie di punti, coincidono fra loro.

Questo risultato corrisponde al celebre teorema seguente [54]:

Teorema 3.2 (Teorema di Minding). *Due superfici regolari aventi la stessa curvatura gaussiana costante sono localmente isometriche.*

Come conseguenza, Minding deduce due corollari per i casi specifici di superfici a curvatura nulla e positiva:

Corollario 3.3. *Ogni superficie a curvatura identicamente nulla è localmente isometrica al piano.*

Corollario 3.4. *Ogni superficie a curvatura costante positiva k è localmente isometrica ad una sfera di raggio $1/\sqrt{k}$.*

Nella trattazione di Minding, le superfici vengono "applicate con una semplice flessione" e il termine *flessione* ha proprio il significato di isometria locale tra superfici. Per quanto riguarda le superfici a curvatura costante negativa, Minding ottiene invece tre tipologie di superfici. A tale scopo, egli considera una superficie assegnata come grafico cartesiano di una funzione $z = z(x, y)$ e

²⁷ *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaasse*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 19 (1839), 370-387. Tradotto: Come decidere se due superfici curve date possono essere sviluppate l'una sull'altra o no; insieme a osservazioni sulle superfici a curvatura costante.

²⁸ Cioè le geodetiche.

utilizza l'equazione di Gauss, che esprime la relazione tra la curvatura gaussiana della superficie e le derivate prime e seconde della funzione che la rappresenta. Nel caso di una curvatura costante k , tale relazione assume la forma

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \frac{d^2 z}{dy^2} - \left(\frac{d^2 z}{dx dy} \right)^2 = k \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right]^2, \quad (3.46)$$

la cui integrazione per $k \neq 0$ costante non era ancora stata ottenuta; a questo punto, egli pone $x = r \cos \psi$, $y = r \sin \psi$ e ottiene l'espressione:

$$dz = h d\psi \pm \sqrt{\frac{1}{a - kr^2} - 1 - \frac{h^2}{r^2}} dr, \quad (3.47)$$

dove $\frac{dz}{d\psi} = h = \text{cost.}$, $a = \text{cost.}$ Dopo aver considerato la classe delle superfici di rivoluzione che si ottiene per $h = 0$, Minding analizza nello specifico le due classi di superfici a curvatura costante positiva e negativa. Nel secondo caso, di interesse per la nostra trattazione, pone $k = -1$, $h = 0$ e sostituisce a con $\pm a^2$: così facendo ricava

$$dz = \pm dr \sqrt{\frac{1}{r^2 \pm a^2} - 1}, \quad (3.48)$$

scrittura utile per identificare, a seconda che si consideri a^2 , $-a^2$ o $a^2 = 0$, tre tipi di superfici di rivoluzione. Le tre tipologie vengono illustrate alla fine del suo articolo con i disegni riprodotti in Figura 3.1.

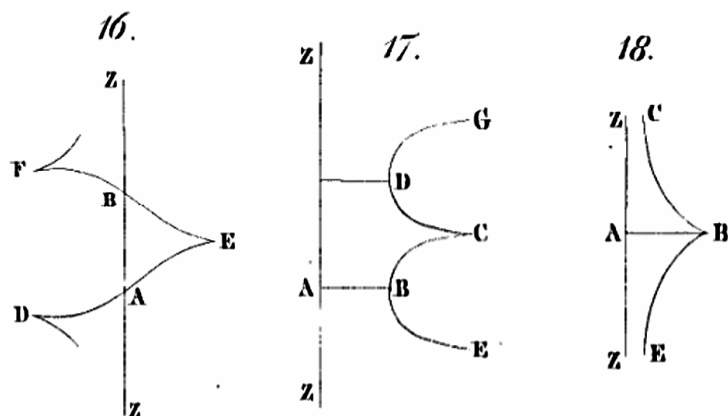


Figura 3.1 Schizzi riportati da Minding per le tipologie di superficie a curvatura costante negativa: sotto il n. 16 è illustrato il caso $a^2 > 0$; sotto il numero 17, il caso $a^2 < 0$; sotto il numero 18, il caso $a^2 = 0$.

Per $a^2 = 0$ Minding ottiene l'equazione della *pseudosfera*, sfruttata poi da Beltrami come modello per l'interpretazione reale della geometria non euclidea:

$$a = 0, \quad r = \frac{1}{\cosh \psi}, \quad z = \psi - \tanh \psi. \quad (3.49)$$

Dai risultati ottenuti da Minding segue che tutte le superfici a curvatura costante negativa possono essere sviluppate l'una sull'altra e, in particolare, sulla pseudosfera, analogamente a quanto accade per le superfici a curvatura costante positiva, che risultano sviluppabili sulla sfera. Occorre tuttavia sottolineare che tali risultati sono validi solo localmente.

Considerazioni ancora più importanti furono scritte da Minding in un articolo del 1840²⁹. Nella ricerca, dopo aver ricavato l'equazione differenziale per le geodetiche su una superficie curva e averla applicata alle superfici sviluppabili, egli osserva che per i triangoli geodetici tracciati sulle superfici a curvatura costante negativa $k = -1/R^2$, se al posto delle funzioni trigonometriche si utilizzano le funzioni iperboliche (ossia si sostituisce alla quantità che esprime il raggio della sfera la quantità immaginaria $R\sqrt{-1} = Ri$), si verificano le formule della trigonometria sferica. Uno sviluppo ulteriore in questo senso sarà compiuto indipendentemente da Codazzi in un articolo dal titolo *Intorno alle superficie le quali hanno costante il prodotto dei due raggi di curvatura*³⁰. L'importante passaggio in cui Minding compie tale osservazione è il seguente [15, pp. 16–17]:

Il fatto che su ogni superficie a curvatura costante positiva, tra i lati e gli angoli di un triangolo formato da linee di minima distanza [geodetiche], le formule della trigonometria sferica siano verificate è una conseguenza immediata del fatto che ogni superficie di questo tipo può essere sviluppata su una sfera. Ora supponiamo che la curvatura sia negativa: valgono le stesse formule, con la sola differenza che al posto delle funzioni trigonometriche vengono introdotte funzioni iperboliche dei lati del triangolo. Siano infatti a, b, c i lati del triangolo, A l'angolo opposto ad a , e k la misura costante di curvatura, sia essa positiva o negativa, non è allora difficile dimostrare la validità della seguente equazione:

$$\cos(a\sqrt{k}) = \cos(b\sqrt{k}) \cos(c\sqrt{k}) + \sin(b\sqrt{k}) \sin(c\sqrt{k}) \cos(A). \quad (3.50)$$

La corrispondenza tra la trigonometria sferica e quella iperbolica, ipotizzata già da Lambert, veniva in questo modo confermata da Minding. In realtà egli non fu il primo a ricavare tale risultato: le formule di Minding coincidono, attraverso un cambio di notazione, con quelle di trigonometria ottenute da Lobačevskij; inoltre, anche Gauss aveva già dimostrato che, su una qualsiasi superficie (anche a curvatura variabile K), l'eccesso sferico di un triangolo geodetico sugli angoli retti è dato da

$$\int K d\sigma = A + B + C - \pi, \quad (3.51)$$

dove $d\sigma$ rappresenta l'elemento di superficie, A, B, C sono gli angoli del triangolo e l'integrale deve essere esteso a tutto il triangolo e conferma il risultato del

²⁹ *Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, volume 20 (1840), pp. 323-327. Tradotto: Contributi alla teoria delle linee più brevi sulle superfici curve.

³⁰ Annali di scienze matematiche e fisiche, volume 8 (1857), pp. 346-355

teorema di Cavalieri-Girard-Harriot. Su una superficie a curvatura costante negativa $-1/R^2$, l'area di un triangolo geodetico è invece pari a $R^2(\pi - A - B - C)$. In ogni caso, pur riconoscendo il grande valore dei risultati ottenuti da Minding, sembra chiaro che essi non bastarono per fargli intuire il legame tra la geometria intrinseca delle superfici a curvatura costante negativa e la geometria non euclidea.

Grazie ai molteplici stimoli che lo raggiunsero in quel periodo, nell'autunno del 1867 Beltrami scrisse la sua prima opera dedicata alla geometria non euclidea, il *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*.

L'influenza scientifica di Gauss si manifesta in modo particolarmente evidente anche in questo testo. Nell'illustrare il fine della propria ricerca, ossia la costruzione di un modello concreto della geometria di Lobačevskij, Beltrami invoca l'autorevole parere favorevole di Gauss come motivo sufficiente per sospendere ogni giudizio definitivo sulla validità della geometria non euclidea. In un contesto in cui molti matematici tendevano ancora a considerarla priva di adeguati fondamenti, infatti, il riconoscimento di Gauss costituiva un motivo rilevante per non escludere la geometria non euclidea a priori. Ecco le parole di Beltrami [9, pp. 374–375]:

In questi ultimi tempi il pubblico matematico ha incominciato ad occuparsi di alcuni nuovi concetti i quali sembrano destinati, in caso che prevalgano, a mutare profondamente tutto l'ordito della classica geometria.

Questi concetti non sono di data recente. Il sommo GAUSS li aveva abbracciati fin dai suoi primi passi nella carriera delle scienze, e benché nessuno dei suoi scritti ne contenga l'esplicita esposizione, le sue lettere fanno fede della predilezione con cui li ha sempre coltivati e attestano la piena adesione che ha data alla dottrina di LOBATSCHESKY³¹.

Siffatti tentativi di rinnovamento radicale dei principî si incontrano non di rado nella storia dello scibile. Oggi poi essi sono un portato naturale dello spirito critico cui a buon diritto si vanno sempre più informando tutte le indagini scientifiche. Quando questi tentativi si presentano come frutto di investigazioni coscienziose e di convinzioni sincere, quando essi trovano il patrocinio di un'autorità imponente e fin qui indisputata, il dovere degli uomini di scienza è di discuterli con animo sereno, tenendosi lontani egualmente dall'entusiasmo e dal disprezzo. D'altronde nella scienza matematica il trionfo dei concetti nuovi non può mai infirmare le verità già acquisite: esso può soltanto mutarne il posto o la ragion logica, e crescerne o scemarne il pregio e l'uso.

³¹Si nota chiaramente il riferimento al principio di autorità da parte di Beltrami che si fa forte dell'opinione emessa da Gauss sulla fondatezza della teoria per giustificare l'opportunità di studiare la nuova geometria.

Né la critica profonda dei principî può mai nuocere alla solidità dell'edificio scientifico, quando pure non conduca a scoprirne e riconoscerne meglio le basi vere e proprie.

Mossi da questi intendimenti noi abbiamo cercato, per quanto le nostre forze lo consentivano, di dar ragione a noi stessi dei risultati a cui conduce la dottrina di LOBATSCHESKY; e, seguendo un processo che ci sembra in tutto conforme alle buone tradizioni della ricerca scientifica, abbiamo tentato di trovare un substrato reale a quella dottrina, prima di ammettere per essa la necessità di un nuovo ordine di enti e di concetti. Crediamo d'aver raggiunto questo intento per la parte planimetrica di quella dottrina, ma crediamo impossibile raggiungerlo in quanto al resto³².

Il legame con la realtà è ancora molto forte, ma l'allontanamento dal concetto di piano euclideo e l'uso delle superfici curve sta favorendo l'uso della logica e del metodo assiomatico, demolendo progressivamente lo scetticismo nei confronti di un modello che non aveva ancora convinto del tutto la comunità accademica.

Il *Saggio* prende avvio, a questo punto, con alcune considerazioni metodologiche, allo scopo di identificare la classe delle superfici a curvatura costante negativa come quelle che sono adatte allo scopo che Beltrami si prefiggeva. Egli afferma che, per la geometria euclidea piana, il criterio dimostrativo fondamentale è la *sovrapponibilità delle figure*: la possibilità di utilizzare la flessione, una deformazione (isometria locale) di una superficie che ne conserva la prima forma fondamentale, per sovrapporre due porzioni di superficie stessa rende infatti possibile confrontare tra loro figure geometriche, indipendentemente dalla loro posizione iniziale. Riferendosi alla sovrapponibilità delle figure, Beltrami afferma [9, p. 375]:

Questo criterio non è applicabile soltanto al piano, ma a tutte quelle superfici su cui possono esistere figure eguali in differenti posizioni, cioè a tutte quelle superficie di cui una porzione qualunque può essere adagiata esattamente, per via di una semplice flessione, sopra una qualunque altra porzione della superficie stessa. Ognun vede infatti che la rigidezza delle superficie sulle quali le figure si concepiscono non è una condizione essenziale dell'applicazione di quel criterio, talché p. es. non nuocerebbe all'esattezza delle dimostrazioni della geometria piana euclidea il concepirne le figure come esistenti sulla superficie di un cilindro o di un cono, anziché su quella di un piano.

Tale caratteristica, sostiene Beltrami, non è propria solo del piano, ma è comune a tutte le superfici che hanno curvatura costante [9, p. 375].

³²Tale posizione cambierà solo qualche mese più tardi, grazie alla lettura dell'*Habilitationsvortrag* di Riemann.

Le superficie per le quali si avvera incondizionatamente la proprietà anzidetta sono, in virtù di un celebre teorema di GAUSS³³, tutte quelle che hanno costante in ogni punto il prodotto dei due raggi di curvatura principale, ossia tutte quelle la cui curvatura sferica è costante. Le altre superficie non ammettono l'applicazione incondizionata del principio di sovrapposizione al confronto delle figure tracciate sovr'esse, e quindi queste figure non possono avere una struttura affatto indipendente dalla loro posizione.

Per convincersi di ciò, Beltrami sceglie "l'elemento più essenziale delle figure e delle costruzioni della geometria elementare", cioè la retta, mostrando che il principio di sovrapposizione permette di ottenere l'unicità della retta per due punti distinti. Il risultato sulla retta viene legato al postulato secondo cui, dati due piani che contengono almeno una retta ciascuno e facendoli combaciare, se le due rette si sovrappongono in almeno due punti, allora esse sono interamente sovrapposte; ciò è utile a Beltrami perché è un principio valido anche per due geodetiche su due superfici a curvatura costante qualsiasi [9, pp. 374–375]:

Ora questo carattere, così circoscritto, non è peculiare alle linee rette rapporto al piano; esso sussiste eziandio (in generale) per le linee geodetiche di una superficie di curvatura costante rapporto a questa superficie. Una linea geodetica ha già sopra qualsivoglia superficie la proprietà di essere (generalmente parlando) determinata senza ambiguità da due suoi punti. Ma per le superficie di curvatura costante, e per queste sole, sussiste integralmente la proprietà analoga a quella della retta nel piano, cioè: se si hanno due superficie, la cui curvatura sia costante in ogni punto ed eguale in entrambe, e se su ciascuna di esse esiste una linea geodetica, facendo combaciare le due superficie in modo che le geodetiche si sovrappongano in due punti, esse riescono sovrapposte (generalmente) in tutta la loro estensione.

Sembra allora che, salvo eccezioni, tutti i teoremi riguardanti figure piane formate da rette, validi in geometria euclidea piana e dimostrati per mezzo del principio di sovrapposizione e del postulato della retta, siano validi anche per tutte le figure costituite da geodetiche su superfici di curvatura costante. Beltrami identifica in questo fatto le molte analogie tra la geometria piana e quella sferica, e sottolinea che [9, p. 376]:

Se altre analogie, di specie diversa ma di eguale origine, non sono state del pari notate prima d'ora, lo si deve ascrivere a ciò che il concetto di superficie flessibili ed applicabili le une sulle altre, non è diventato familiare che in questi ultimi tempi.

³³Presente nell'articolo del 1822 *Soluzione generale del problema: rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca, nelle sue parti infinitesime, una figura simile alla figura rappresentata*, di cui abbiamo trattato a partire da pagina 122.

Beltrami fa riferimento ai limiti tecnici e filosofici che sono stati risolti solo nel XIX secolo: il concetto kantiano *a priori* di piano fu rivoluzionato da Lobachevskij, mentre fu grazie alle *Disquisitiones* di Gauss che un nuovo modo di trattare le superfici permise la nascita di nuovi strumenti e metodi risolutivi.

Restano da discutere le possibili eccezioni in cui tale proprietà può incorrere: non sempre, infatti, su una superficie sferica, due punti distinti non sempre individuano univocamente un cerchio massimo. Beltrami fa riferimento, a tal proposito, a due punti sulla superficie sferica diametralmente opposti (antipodali), i quali non individuano un unico cerchio massimo; è noto, infatti, che per due punti antipodali in una superficie sferica passano infiniti cerchi massimi. Tale eccezione è dunque il motivo per cui non vi è una completa corrispondenza tra i teoremi della planimetria e i teoremi della geometria sferica; l'esempio di teorema, valido solamente in geometria piana, portato da Beltrami, è *due rette perpendicolari ad una terza non possono incontrarsi*.

La mancanza di una totale corrispondenza nei risultati dei due sistemi geometrici porta quindi Beltrami a identificare un gruppo di proprietà comuni tra enti apparentemente diversi, per poi generalizzare tali risultati [64, p. 296]. La riflessione si sviluppa in questo modo [9, pp. 376–377]:

[...] le conseguenze di una dimostrazione abbracciano necessariamente l'intera categoria degli enti nei quali esistono tutte le condizioni necessarie alla sua legittimità. Se la dimostrazione è stata concepita in vista di una determinata categoria di enti, senza che in essa sieno state effettivamente introdotte quelle determinazioni che individuano la categoria stessa in confronto di una categoria più estesa, è chiaro che le conseguenze della dimostrazione acquistano una generalità più grande di quella che si cercava.

Pertanto, volendo accettare tutti i risultati dipendenti solamente dal principio di sovrapposizione e dal postulato della retta, Beltrami afferma di dover operare con superfici di curvatura costante in cui, però, non siano verificate le eccezioni sopracitate. In definitiva, è quindi necessario escludere le superfici a curvatura costante positiva. Beltrami dà così spazio alle superfici a curvatura costante negativa, occupandosi di mostrare che in esse non sussistono eccezioni [9, p. 377].

La sussistenza del principio di sovrapposizione non patisce eccezione per alcuna delle dette superficie. Ma rispetto al postulato della retta (o per meglio dire della geodetica) abbiamo già notato che si incontrano delle eccezioni sulla sfera, e per conseguenza su tutte le superficie di curvatura costante positiva. Ora queste eccezioni esistono anche sulle superficie di curvatura costante negativa? Vale a dire, può egli darsi il caso, su queste ultime superficie, che due punti non determinino una sola ed individuata linea geodetica?

Conclusa la premessa metodologica, Beltrami avvia la discussione partendo dai risultati ottenuti nell'articolo del 1865³⁴ e considerando in particolare il quadrato dell'elemento lineare di una superficie a curvatura costante negativa e uguale a $-\frac{1}{R^2}$:

$$ds^2 = R^2 \frac{[(a^2 - v^2) du^2 - 2uv du dv + (a^2 - u^2) dv^2]}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}. \quad (3.52)$$

L'espressione, pur non essendo la più semplice possibile, come ammesso dallo stesso Beltrami, è la migliore per gli scopi della ricerca poiché in essa tutte e sole le equazioni lineari in u e v rappresentano una geodetica sulla superficie; in particolare, le curve di livello $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ sono geodetiche e formano tra di loro in un punto (u, v) qualunque della superficie un angolo ϑ per cui valgono:

$$\cos \vartheta = \frac{uv}{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}}, \quad \sin \vartheta = \frac{a\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}}; \quad (3.53)$$

da ciò si nota che tutte le geodetiche a u costante sono ortogonali alla geodetica $v = 0$ e tutte quelle a v costante lo sono alla geodetica $u = 0$. Dal momento che, quindi, ogni punto della superficie è individuato come intersezione di due geodetiche passanti per il punto stesso e ortogonali a $u = 0$ e $v = 0$, dette *geodetiche fondamentali*, e che nel punto $(u = v = 0)$, che funge da origine, le due geodetiche fondamentali sono tra loro ortogonali, siamo di fronte a una generalizzazione del sistema degli assi cartesiani.

Inoltre, dalle espressioni in (3.53), risulta necessario considerare ammissibili solo i punti (u, v) che soddisfano la condizione:

$$u^2 + v^2 \leq a^2, \quad (3.54)$$

grazie alla quale le geodetiche dei due sistemi $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ godono delle stesse proprietà dei sistemi di rette parallele del piano [64, p. 297]; facendo seguito a risultati già ottenuti nel suo precedente articolo *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*³⁵, Beltrami afferma infatti [9, pp. 378–379]:

[...] la porzione di superficie terminata al contorno d'equazione

$$u^2 + v^2 = a^2, \quad (3.55)$$

è semplicemente connessa, ed il reticolo formato su di essa dalle geodetiche coordinate presenta intorno a ciascun punto il carattere di quello formato da due sistemi di rette parallele su di un piano, cioè: due geodetiche di egual sistema non hanno mai alcun punto comune, e due geodetiche di sistema diverso non sono mai fra loro tangenti. Ne consegue che, sulla regione considerata, a ciascuna coppia di valori reali delle u, v soddisfacenti alla condizione (3.54)

³⁴Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette.

³⁵Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie II, volume 1 (1867), pagine 329–366.

corrisponde un punto reale, unico e determinato; e, reciprocamente, a ciascun punto corrisponde una sola e determinata coppia di valori reali delle u, v soddisfacenti alla condizione anzidetta.

Si è giunti dunque alla prima rappresentazione della superficie a curvatura costante negativa: interpretando le coppie (u, v) come coordinate di un punto del piano, Beltrami ottiene, all'interno del cerchio di raggio a e centro nell'origine, detto *cerchio limite*, la rappresentazione cercata. In essa [9, p. 379]:

[...] le geodetiche della superficie sono rappresentate dalle corde del cerchio limite, ed in particolare le geodetiche coordinate sono rappresentate dalle corde parallele ai due assi coordinati.

Dall'espressione di $\sin \vartheta$ nell'equazione (3.53), è possibile inoltre ottenere, quando le due geodetiche si incontrano in un punto sulla circonferenza limite, l'annullamento dell'angolo che esse formano: questo è esattamente il fenomeno che Saccheri aveva definito *ripugnante alla natura della retta* [1, p. 7].

Beltrami affronta ora la questione della limitatezza della superficie: si consideri una geodetica passante per il punto $(u = 0, v = 0)$, rappresentata in coordinate polari r e μ dalle equazioni

$$u = r \cos \mu, \quad v = r \sin \mu; \quad (3.56)$$

fissato μ , ponendo tali valori nella (3.52), si ottiene l'elemento lineare di lunghezza per un arco di geodetica:

$$d\varrho = R \frac{a dr}{a^2 - r^2}. \quad (3.57)$$

L'arco di geodetica ϱ tra i punti $(0, 0)$ e (u, v) assume, quindi, il valore:

$$\varrho = \frac{R}{2} \log \frac{a+r}{a-r} = \frac{R}{2} \log \frac{a + \sqrt{u^2 + v^2}}{a - \sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (3.58)$$

che si azzera in $(0, 0)$, cresce indefinitamente con il crescere di r e diventa infinito se il punto (u, v) appartiene al cerchio limite [9, pp. 379–380]:

È chiaro dunque che il contorno [...] rappresentato nel piano ausiliare dal cerchio limite non è altro che il luogo dei punti all'infinito della superficie, luogo che può considerarsi come un cerchio geodetico descritto col centro nel punto $(u = v = 0)$ e con un raggio (geodetico) infinitamente grande.

I punti interni al cerchio limite rappresentano, dunque, tutti e soli i punti reali della superficie a curvatura negativa, mentre tutto ciò che è esterno a tale cerchio è detto da Beltrami *regione immaginaria* o *ideale*; il cerchio limite è il luogo dei punti all'infinito della superficie rappresentata.

I cerchi di centro $(0, 0)$ e interni alla regione reale (e quindi con raggio geodetico finito) corrispondono ai cerchi geodetici della superficie. Se si torna a

considerare l'equazione (3.52), con i valori di u e v presenti in (3.56) e prendendo r costante, si riesce a rappresentare la lunghezza σ di un arco di cerchio geodetico di raggio r sotteso da un angolo al centro di ampiezza μ :

$$\sigma = \frac{Rr\mu}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (3.59)$$

Invertendo ora l'Equazione (3.58), si ricavano:

$$r = \sqrt{u^2 + v^2} = a \tanh \frac{\varrho}{R}, \quad \cosh \frac{R}{\varrho} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}; \quad (3.60)$$

considerando tali valori, la (3.59) si può scrivere così:

$$\sigma = \mu R \sinh \frac{\varrho}{R}. \quad (3.61)$$

In questo modo, è possibile riottenere un risultato già determinato da Gauss (citato nell'Equazione (1.10)), il semiperimetro della circonferenza geodetica di raggio ϱ :

$$\pi R \sinh \frac{\varrho}{R} = \frac{1}{2} \pi R \left(e^{\frac{\varrho}{R}} - e^{-\frac{\varrho}{R}} \right). \quad (3.62)$$

Beltrami raccoglie, allora, l'interpretazione dei risultati raggiunti in geometria non euclidea finora [9, pp. 380–381]:

Dalle cose precedenti risulta che le geodetiche della superficie sono rappresentate, nel loro totale sviluppo (reale), dalle corde del cerchio limite, mentre i prolungamenti di queste corde fuori del cerchio stesso sono destituiti d'ogni rappresentanza (reale). D'altronde due punti reali della superficie sono rappresentati da due punti, parimenti reali, interni al cerchio limite, i quali individuano *una* corda del cerchio stesso. Si vede dunque che due punti reali della superficie, *scelti in modo qualunque*, individuano sempre *una sola e determinata linea geodetica*, che è rappresentata nel piano ausiliare dalla corda passante pei loro punti corrispondenti.

Così le superficie di curvatura costante negativa *non* vanno soggette a quelle eccezioni che si verificano sotto questo rapporto in quelle di curvatura costante positiva, epperò sono ad esse applicabili i teoremi della planimetria non-euclidea. Anzi questi teoremi non sono in gran parte suscettibili di concreta interpretazione, se non vengono riferiti precisamente a queste superficie anziché al piano.

Beltrami ritiene dunque che, oltre a essere adatte al suo scopo, le superfici a curvatura costante negativa siano fondamentali per una completa interpretazione di alcuni dei risultati ottenuti inizialmente solo sul piano. D'altra parte, la necessità di produrre un modello reale di geometria non euclidea sembra essere necessaria perché quest'ultima non resti una costruzione astratta, segnando l'ancoraggio al mondo reale che Beltrami ritiene ancora essenziale per la geometria [64, p. 299]. È in questo contesto che Beltrami inizia a chiamare *pseudosferiche* le superfici a curvatura costante negativa.

Allo scopo di chiarire la struttura del modello, Beltrami analizza la relazione che intercorre tra l'angolo formato da due linee geodetiche e l'angolo formato dalle corde che le rappresentano, dimostrando che [9, p. 382]:

- I. A due corde distinte che s'intersecano dentro il cerchio limite corrispondono due geodetiche che si intersecano in un punto a distanza finita sotto un angolo differente da 0° e da 180° .
- II. A due corde distinte che s'intersecano sulla periferia del cerchio limite corrispondono due geodetiche che concorrono verso uno stesso punto a distanza infinita e che fanno in esso un angolo nullo.
- III. E finalmente a due corde distinte che s'intersecano fuori dal cerchio limite, o che sono parallele, corrispondono due geodetiche che non hanno alcun punto in comune su tutta l'estensione (reale) della superficie.

Il risultato è conseguenza di una formula nota usata per determinare la tangente di un angolo α tra due geodetiche: considerato un punto (u, v) sulla superficie e un punto (U, V) su una delle geodetiche uscenti da esso e determinate due delle geodetiche tramite

$$V - v = m(U - u), \quad V - v = n(U - u), \quad (3.63)$$

l'angolo α tra le geodetiche nel punto (u, v) soddisfa la formula:

$$\tan \alpha = \frac{a(n - m)\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}{(1 + mn)a^2 - (v - \mu)(v - \nu)}; \quad (3.64)$$

detti ora α' l'angolo tra le due corde e μ e ν gli angoli tra le corde e l'asse delle ascisse, si ha $m = \tan \mu$, $n = \tan \nu$ e $\alpha' = \nu - \mu$, allora

$$\tan \alpha = \frac{a\sqrt{a^2 - u^2 - v^2} \sin \alpha'}{a^2 \cos \alpha' - (v \cos \mu - u \sin \mu)(v \cos \nu - u \sin \nu)}, \quad (3.65)$$

da cui il risultato: infatti, il denominatore a secondo membro è sempre finito all'interno del cerchio limite e il numeratore si annulla solo per $\sqrt{a^2 - u^2 - v^2} = 0$, cioè nel caso in cui le geodetiche si incontrino in un punto del cerchio limite.

Scelta allora una corda pq qualunque del cerchio limite e r un punto interno al cerchio limite non appartenente alla corda (si faccia riferimento alla Figura 3.2), sappiamo che a essi corrispondono una geodetica $p'q'$ nella pseudosfera e un punto a distanza finita r' , sempre nella pseudosfera ma esterno alla geodetica. Tra le infinite geodetiche spiccate da r' , alcune incontrano la geodetica $p'q'$: a queste ultime corrispondono le rette passanti per il punto r che incontrano la corda pq , mentre le altre geodetiche, che non incontrano $p'q'$, sono corrispondenti alle rette per r che non si intersecano con pq . Agli angoli $\angle rpq$ e $\angle rqp$ corrispondono quindi gli angoli geodetici nulli $\angle r'p'q'$ e $\angle r'q'p'$ per (II.) e all'angolo $\angle prq$ corrisponde l'angolo $\angle p'r'q'$ diverso da 0° e 180° , dunque le geodetiche $r'q'$ e $r'q'$ si dicono *parallele* alla $p'q'$. Da ciò Beltrami enuncia il teorema [9, p. 383]:

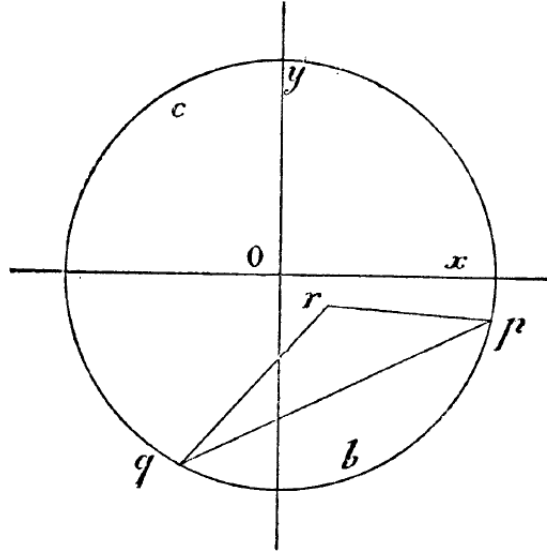


Figura 3.2

Da ogni punto (reale) della superficie si possono sempre condurre due geodetiche (reali) parallele ad una medesima geodetica (reale) che non passi per quel punto, e queste due geodetiche fanno tra loro un angolo differente tanto da 0° quanto da 180° .

Dopo un'analisi della forma dei triangoli geodetici sulla pseudosfera, con cui Beltrami riconferma in modo esplicito l'espressione del semiperimetro di un triangolo geodetico ottenuta da Gauss, l'interesse si sposta sulla determinazione dell'*angolo di parallelismo*. Considerando due geodetiche ab e ac spiccate dallo stesso punto a , interno al cerchio limite, e parallele a una terza geodetica data bc , sia δ la lunghezza della porzione di normale a bc tra la geodetica stessa e il punto a ; tale normale è anche la bisettrice dell'angolo formato dalle due geodetiche ab e ac , $\angle bac$, e permette di definire l'angolo di parallelismo Δ come ognuna delle due parti uguali in cui l'angolo $\angle bac$ è diviso.

Beltrami determina anche, facendo uso della *corrente analisi*, cioè dell'analisi valida in geometria euclidea, il valore di tale angolo di parallelismo in funzione della distanza δ . Scelto come punto a l'origine O e come geodetica data quella perpendicolare alla geodetica fondamentale $v = 0$ di equazione

$$u = a \tanh \frac{\delta}{R}, \quad (3.66)$$

ad essa corrisponde, nel piano ausiliario, una corda BC perpendicolare all'asse delle ascisse che interseca il cerchio limite nei punti $\pm \frac{a}{\cosh \frac{\delta}{R}}$ (si veda la Figura 3.3); il raggio OB condotto dall'origine al punto di intersezione di ordinata positiva ha equazione

$$y = \frac{x}{\sinh \frac{\delta}{R}} \quad (3.67)$$

e corrisponde a una delle due rette parallele alla retta associata a BC , fissata inizialmente.

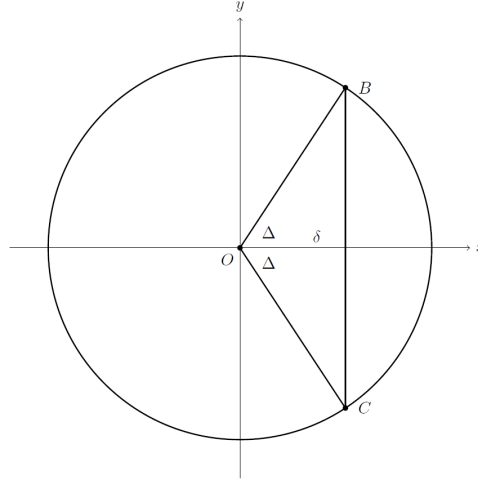


Figura 3.3

Dato che, nell'intorno dell'origine, gli angoli sul piano ausiliario e sulla pseudosfera sono uguali, Beltrami afferma che l'angolo di parallelismo Δ soddisfa la relazione:

$$\tan \Delta \sinh \frac{\delta}{R} = 1, \quad (3.68)$$

da cui si ottiene:

$$e^{-\frac{2\delta}{R}} + 2e^{-\frac{\delta}{R}} \cot \Delta - 1 = 0; \quad (3.69)$$

perciò, l'unica soluzione ammissibile, dal momento che $\frac{\delta}{R}$ deve essere una quantità reale, è

$$e^{-\frac{\delta}{R}} = \frac{1 - \cos \Delta}{\sin \Delta}, \quad (3.70)$$

ovvero, grazie alle formule di bisezione:

$$\tan \frac{\Delta}{2} = e^{-\frac{\delta}{R}} \quad (3.71)$$

che, come osserva Beltrami, coincide con quella trovata da Lobačevskij in [49, p. 14].

Potendo sfruttare ora la relazione tra gli angoli formati da due geodetiche sulla pseudosfera e quelli formati da due corde nel cerchio limite, Beltrami determina l'area di un triangolo geodetico qualunque ABC , avente angoli interni α , β e γ :

$$A = R^2 (\pi - \alpha - \beta - \gamma); \quad (3.72)$$

tale formula, dovendo essere sempre positiva, porta a un risultato fondamentale nella geometria iperbolica: la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico non può mai superare i 180° . Inoltre, se tale valore fosse uguale a 180° anche per un solo triangolo specifico, di dimensioni finite, sarebbe neces-

sario avere $R = \infty$ e, dunque, come diretta conseguenza dell'Equazione (3.68), sarebbe $\Delta = \pi/2$. Per non ricadere nei casi noti della geometria euclidea, è dunque necessario che la somma degli angoli interni di un triangolo sia minore di 180° .

Segue nella ricerca l'analisi di alcuni casi particolari, tra cui l'area di un triangolo formato da una geodetica e dalle due ad essa parallele, che ha area finita e pari a $A = R^2(\pi - 2\Delta)$, in quanto due dei suoi angoli sono nulli (per la proprietà II.) e il terzo è il doppio dell'angolo di parallelismo; infine, se un triangolo ha tutti i suoi vertici all'infinito, la sua area è pari a $A = \pi R^2$, indipendentemente dalla sua forma. La generalizzazione di queste formule porta alla determinazione dell'area di un poligono regolare di n lati con angoli interni $\alpha, \beta, \gamma \dots$:

$$A = R^2[(n-2)\pi - \alpha - \beta - \gamma - \dots] \quad (3.73)$$

nel caso di vertici finiti, mentre per un poligono regolare di n lati con tutti i vertici all'infinito vale:

$$A = (n-2)\pi R^2. \quad (3.74)$$

In questa sezione sono presenti anche le considerazioni più puntuali di Beltrami riguardanti la relazione tra la geometria sferica e la geometria iperbolica [9, pp. 386–387]:

Per una osservazione del sig. MINDING, sviluppata dal sig. CODAZZI, è noto che le ordinarie formole relative ai triangoli sferici si convertono in quelle relative ai triangoli geodetici delle superficie di curvatura costante negativa, apponendo il fattore $\sqrt{-1}$ ai rapporti dei lati col raggio e lasciando inalterati gli angoli, ciò che equivale a mutare le funzioni circolari dei lati in funzioni iperboliche.

Per poi concludere, dopo aver aggiunto alla trattazione altri esempi di formole di trigonometria sferica e iperbolica [9, p. 387]:

I risultati precedenti ci sembrano manifestare pienamente la corrispondenza vigente fra planimetria non-euclidea e la geometria pseudosferica.

Nella sezione seguente, Beltrami pone l'attenzione sullo studio delle curve ortogonali alle geodetiche uscenti da un punto, cercando i legami con le circonferenze geodetiche. Detto

$$v - v_0 = k(u - u_0) \quad (3.75)$$

il sistema delle geodetiche passanti per il punto (u_0, v_0) , l'equazione differenziale corrispondente risulta essere

$$\frac{du}{u - u_0} = \frac{dv}{v - v_0} \quad (3.76)$$

da cui è possibile ottenere l'equazione differenziale del sistema ortogonale, data da

$$d \frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = 0 \quad (3.77)$$

e di conseguenza, detta C una costante, l'equazione del sistema delle curve ortogonali inizialmente cercato:

$$\frac{a^2 - uu_0 - vv_0}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} = C. \quad (3.78)$$

L'Equazione (3.78) rappresenta, nel senso più generale, l'espressione di una circonferenza geodetica di centro (u_0, v_0) : a seconda che il centro sia reale, sul cerchio limite o ideale, Beltrami si rende conto che la curva rappresentata presenta caratteristiche peculiari.

Nel caso in cui (u_0, v_0) sia reale, l'Equazione (3.78) rappresenta una circonferenza geodetica in senso stretto perché è il luogo dei punti equidistanti da (u_0, v_0) . Detta ϱ tale distanza, si ha

$$\cosh \frac{\varrho}{R} = \frac{C}{\sqrt{a^2 - u_0^2 - v_0^2}}; \quad (3.79)$$

ciò deriva dal confronto con la formula della circonferenza geodetica di centro (u_0, v_0) e raggio geodetico ϱ , ottenuta da Beltrami nella Nota II del *Saggio*:

$$\frac{a^2 - uu_0^2 - vv_0^2}{\sqrt{(a^2 - u^2 - v^2)(a^2 - u_0^2 - v_0^2)}} = \cosh \frac{\varrho}{R}. \quad (3.80)$$

In questo contesto $C \neq 0$, altrimenti l'equazione si ridurrebbe a una retta nel piano ausiliario, esterna al cerchio limite.

Se, invece, il centro (u_0, v_0) è ideale, non è più possibile fare riferimento al concetto di raggio geodetico; ponendo allora $C = 0$, si ottiene, nel piano ausiliario, una retta di equazione

$$a^2 - uu_0^2 - vv_0^2 = 0, \quad (3.81)$$

che forma, grazie al suo segmento interno al cerchio limite, una corda del cerchio stesso e rappresenta quindi una geodetica reale. Allora, al variare del valore di C si ricava una famiglia di curve parallele, in senso geodetico, di cui una (ed una sola) è sempre una geodetica; perciò [9, p. 392]:

Le circonferenze geodetiche a centro ideale si possono anche definire come curve parallele (geodeticamente) alle geodetiche reali.

In entrambi i casi precedenti, Beltrami riesce a descrivere l'espressione dell'elemento lineare in modo che coincida con quello di una superficie di rotazione, così facendo è possibile applicare una porzione di superficie pseudosferica su quella di rivoluzione corrispondente all'elemento lineare trovato. Per il caso a centro reale, Beltrami sceglie $u_0 = v_0 = 0$ e ricava, sfruttando le coordinate

polari $u = r \cos \varphi$ e $v = r \sin \varphi$, l'espressione dell'elemento lineare

$$ds^2 = R^2 \left[\left(\frac{a dr}{a^2 - r^2} \right)^2 + \frac{r^2 d\varphi}{a^2 - r^2} \right], \quad (3.82)$$

da cui ricava, chiamando ϱ la distanza geodetica di (u, v) , cioè di (r, φ) , dall'origine:

$$ds^2 = d\varrho^2 + \left(R \sinh \frac{\varrho}{R} \right)^2 d\varphi^2, \quad (3.83)$$

ossia l'espressione dell'elemento lineare della superficie pseudosferica, ma anche la forma canonica dell'elemento lineare di una superficie di rotazione (Figura 3.4).



Figura 3.4 Superficie di rivoluzione di tipo conico e corrispondenti circonferenze geodetiche a centro reale.

A seguito di tale risultato, Beltrami espone alcuni dubbi legati all'effettiva realizzabilità della superficie di rotazione trovata [9, p. 393]:

Quest'espressione rientra nella forma canonica dell'elemento lineare di una superficie di rotazione. Ma bisogna osservare che nel caso attuale non si potrebbe applicare effettivamente sopra una superficie di rotazione la calotta pseudosferica circostante al punto $(u = v = 0)$, senza alterarne la continuità per mezzo di qualche taglio operato in essa partendo dal punto stesso. Infatti la supposta superficie di rotazione, se esistesse senza tale condizione, incontrerebbe il proprio asse nel centro comune ($\varrho = 0$) di tutte le circonferenze geodetiche $\varrho = \text{cost.}$ ed avrebbe quindi in questo punto le sue due curvature di egual senso, il che non può essere, perché una superficie pseudosferica ha tutti i suoi punti *iperbolici*.

D'altra parte, per il caso a centro ideale, Beltrami sceglie di attuare un cambio di coordinate per cui la geodetica appartenente alla famiglia di curve descritte dall'Equazione (3.78) sia $v = 0$; la distanza geodetica ξ tra $v = 0$ e (u, v) è

$$\xi = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a^2 - u^2} + v}{\sqrt{a^2 - u^2} - v}. \quad (3.84)$$

Quando si suppone ξ costante, l'equazione rappresenta una circonferenza geodetica e, se η indica l'arco di $v = 0$ compreso tra l'origine e l'intersezione con

la sua normale passante per (u, v) , esso ha espressione

$$\eta = \frac{R}{2} \log \frac{a+u}{a-u}, \quad (3.85)$$

da cui si ottengono le relazioni inverse:

$$u = a \tanh \frac{\eta}{R}, \quad v = \frac{\tanh \frac{\xi}{R}}{\cosh \frac{\eta}{R}}; \quad (3.86)$$

Si può dunque riscrivere l'elemento di lunghezza della pseudosfera come:

$$ds^2 = d\xi^2 + \cosh^2 \frac{\xi}{R} d\eta^2, \quad (3.87)$$

espressione che, ancora una volta, *corrisponde ad una superficie di rotazione* (Figura 3.5).

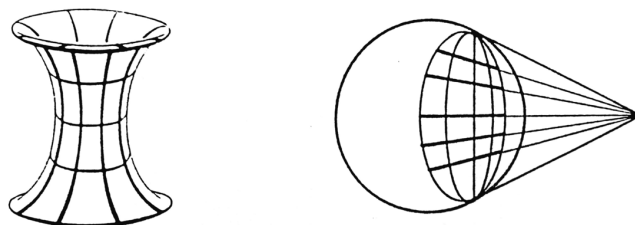


Figura 3.5 Superficie pseudosferica di tipo iperbolico e corrispondenti circonferenze geodetiche a centro ideale.

Detto ora r_0 il parallelo minimo della superficie di rotazione ottenuta, si ha che [9, p. 393]:

la zona di superficie pseudosferica che può essere realmente conformata a superficie di rotazione è definita dalla condizione

$$\left(\frac{r_0}{R} \sinh \frac{\xi}{R} \right)^2 < 1, \quad (3.88)$$

ossia è racchiusa fra due circonferenze geodetiche equidistanti dalla geodetica $\xi = 0$, la quale si dispone secondo il parallelo minimo. [...] Si deve concepire la superficie di rotazione come il limite di un elicoide il cui passo converge verso zero.

La condizione (3.88) esprime il fatto che il seno dell'angolo che la tangente alla curva generatrice la superficie pseudosferica di rotazione forma con l'asse di rotazione non può superare 1 in valore assoluto ([32], p. 106). Nel caso particolare in cui si consideri l'Equazione 3.78 con (u_0, v_0) appartenente al cerchio limite, è possibile dare all'elemento lineare della pseudosfera la forma:

$$ds^2 = d\varrho^2 + e^{-2\frac{\varrho}{R}} d\sigma, \quad (3.89)$$

dove ϱ rappresenta la coordinata lungo la curva generatrice della superficie e σ l'arco della circonferenza geodetica $\varrho = 0$; si noti che anche tale scrittura corrisponde a una superficie di rotazione (Figura 3.6) e, anche in questo caso, chiamando r_0 il raggio corrispondente a $\varrho = 0$ e con r quello di ϱ , è possibile stabilire delle condizioni entro cui la superficie di rotazione risultante sia reale: vale infatti la relazione

$$r = r_0 e^{-\frac{\varrho}{R}}, \quad (3.90)$$

da cui, per fare in modo che $r_0 \leq R$ e quindi che la circonferenza $\varrho = 0$ sia un parallelo, si ottiene la condizione

$$\varrho > R \log \frac{r_0}{R}. \quad (3.91)$$



Figura 3.6 Superficie pseudosferica di tipo parabolico e corrispondenti circonferenze geodetiche con centro all'infinito.

Beltrami identifica nella generatrice di tale superficie la *linea delle tangenti costanti*, cioè la trattrice (Figura 3.7), la cui caratteristica principale è quella di avere costante la lunghezza del segmento di tangente condotto dal punto di contatto all'asse di rotazione tramite il quale si genera la pseudosfera.

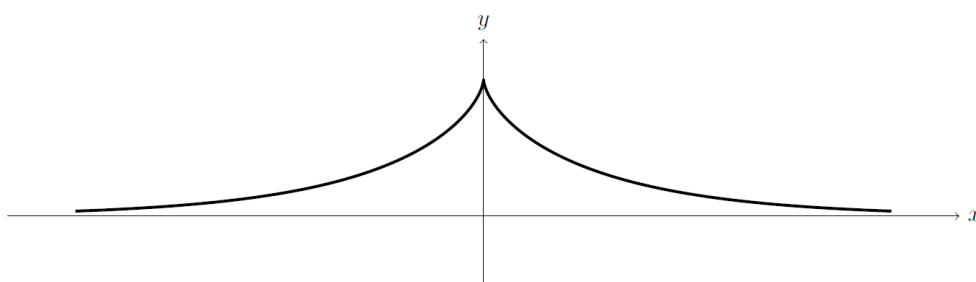


Figura 3.7

Osservazione 3.5. La trattrice è una curva geometrica trascendente in cui i segmenti tangenti tra la curva e una data retta (nel caso della Figura 3.7, l'asse x) hanno lunghezza costante. Dal punto di vista differenziale, tale curva ha equazione:

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}; \quad (3.92)$$

integrando, si ottengono le equazioni parametriche rispetto al parametro ausiliario t :

$$x(t) = a(t - \tanh t), \quad y(t) = a \operatorname{sech}(t). \quad (3.93)$$

Tra le principali proprietà della trattrice, oltre all'invarianza della misura del segmento di tangente tra la curva e una retta di riferimento, si ha che l'area totale racchiusa tra la curva e la retta fissata è finita e pari a $\frac{1}{2}\pi a^2$.

Inoltre, Beltrami osserva che le circonferenze geodetiche con centro sul cerchio limite sono gli *oricchi* della geometria di Lobačevskij e afferma [9, p. 395]:

Un sistema di oricchi concentrici si trasforma, mediante una flessione opportuna della superficie, nel sistema dei paralleli della superficie di rotazione generata dalla linea delle tangenti costanti.

In questa stessa sezione, Beltrami fornisce anche due interessanti proprietà della rappresentazione da lui realizzata. Innanzitutto, sfruttando la scrittura dell'elemento lineare presente nell'Equazione (3.83), egli determina la curvatura tangenziale di una circonferenza geodetica con centro reale e raggio ϱ : essa vale

$$\frac{1}{R \tanh \frac{\varrho}{R}} \quad (3.94)$$

ed è perciò costante lungo tutta la curva, dipendendo solo dal raggio geodetico; a confermare tale risultato, Beltrami aggiunge la seguente riflessione [9, p. 390]:

Il pezzo di superficie terminato da un cerchio geodetico si può applicare in modo qualunque sulla superficie medesima, senza che il suo lembo cessi mai di essere un cerchio geodetico col centro nel punto su cui si applica il suo centro primitivo.

In secondo luogo, osservando l'evoluzione della curva descritta dall'Equazione (3.78) al variare della posizione di (u_0, v_0) , Beltrami rende noto che il teorema per cui "per tre punti passa una e una sola circonferenza" non è valido in geometria non euclidea, essendoci casi in cui, scelti in modo qualunque tre punti (non allineati), essi non identificano una circonferenza: si veda, ad esempio, il caso in cui, tracciate le porzioni di curve geodetiche tra tali punti e le normali per i punti medi di tali curve, queste ultime si incontrino in un punto ideale del piano, non permettendo di determinare una circonferenza geodetica con centro in quel punto.

La conclusione del *Saggio* mette in evidenza i dubbi che Beltrami nutre nei confronti della geometria solida non euclidea [64, pp. 303]. Egli osserva che non è possibile utilizzare lo stesso metodo attuato per la planimetria e chiosa considerando che una dimostrazione alternativa *sembra molto improbabile*; la sua idea cambierà da lì a pochi mesi [9, pp. 396–398]:

Da quanto precede ci sembra confermata in ogni parte l'annunciata interpretazione della planimetria non-euclidea per mezzo delle superficie di curvatura costante negativa.

La natura stessa di questa interpretazione lascia facilmente prevedere che non ne può esistere una analoga, egualmente reale, per la stereometria non-euclidea. Infatti per conseguire l'interpretazione testé esposta si è dovuto sostituire al piano una superficie che è con esso irriducibile, cioè il cui elemento lineare non può in alcun modo essere ridotto alla forma

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (3.95)$$

che caratterizza essenzialmente il piano stesso. Se quindi ci mancasse la nozione delle superficie non applicabili sul piano, ci sarebbe impossibile attribuire un vero significato geometrico alla costruzione fin qui svolta. Ora l'analogia porta naturalmente a credere che, se può esistere una costruzione consimile per la stereometria non-euclidea, essa deve attingersi alla considerazione di uno spazio il cui elemento lineare non sia riducibile alla forma

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (3.96)$$

che caratterizza essenzialmente lo spazio euclideo. E poichè finora la nozione di uno spazio diverso da questo sembra mancarci, od almeno sembra trascendere il dominio dell'ordinaria geometria, è ragionevole supporre che quand'anche le considerazioni analitiche alle quali si appoggiano le precedenti costruzioni sieno suscettive d'essere estese dal campo di due variabili a quello di tre, i risultati ottenuti in quest'ultimo caso non possano tuttavia essere costruiti coll'ordinaria geometria. [...] Per completare la dimostrazione dell'impossibilità di conseguire una costruzione della stereometria non-euclidea, senza uscire dal campo della geometria ordinaria, bisognerebbe poter escludere la possibilità di attingerla altrove che in una estensione del metodo seguito per la planimetria. Noi non pretendiamo di provare che ciò non si possa assolutamente fare: diciamo solo che la cosa ci sembra molto improbabile.

Gli strumenti concettuali e matematici necessari a Beltrami per portare a compimento il modello spaziale della geometria non euclidea gli verranno forniti dalla lettura dell'*Habilitationsvortrag* di Bernhard Riemann. Tali idee confluiscono nella sua seconda grande opera dedicata alla geometria non euclidea, la *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*. Prima di occuparci di tale opera, approfondiamo le riflessioni che portarono Beltrami a scrivere il *Saggio* e alcune delle reazioni che esso suscitò nell'ambiente matematico europeo.

3.4 Le critiche al *Saggio*

Il modello reale del piano non euclideo di Lobačevskij e Bòlyai proposto da Beltrami nel *Saggio* fu oggetto di critiche da parte di diversi matematici dell'epoca, come Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894), Angelo

Genocchi (1817-1889) e Felix Klein; d'altra parte, già dalla prima stesura del *Saggio*, le obiezioni all'opera di Beltrami non mancarono: tra i primi ad avanzare dubbi sulla validità dei risultati vi fu lo stesso Cremona, suo amico e collega all'Università di Bologna, che era perplesso circa l'uso dell'analisi ordinaria per trattare oggetti e nozioni geometriche immaginarie. Tale dubbio, che contribuì a ritardare di quasi un anno la pubblicazione del *Saggio*, è richiamato nella lettera di Beltrami a Genocchi del 23 luglio 1868, insieme ad alcune perplessità dello stesso Beltrami [15, p. 199]:

L'anno scorso, quando nessuno sapeva di questo lavoro fondamentale di Riemann³⁶, io aveva comunicato all'ottimo Cremona un mio scritto nel quale davo un'interpretazione della planimetria non-euclidea che mi sembrava soddisfacente. Il Cremona non ne giudicò diversamente, ma mi fece una obbiezione di massima, dicendomi che poiché io usavo l'ordinaria analisi, che è fondata sul concetto euclideo, non potevo tenermi certo che con ciò solo io non avessi pregiudicato il finale risultamento.

Questo discorso per verità non mi soddisfaceva, perché mi pareva che quando uno spiega un nuovo fenomeno col mezzo di leggi note, non si può legittimamente pretendere che egli debba ancora provare non potersi lo stesso fenomeno spiegarsi con altre leggi, remote dalle comuni. In questo caso non vi potrebbe mai essere alcuna ipotesi scientificamente provata. Comunque sia, quell'obbiezione fece sì che io lasciassi dormire lo scritto, e di ciò sono ora contento perché alla fine del medesimo avevo arrischiato un giudizio sulla stereometria non-euclidea, che adesso non credo equo. Ma lo scritto, purgato di questo fallo, uscirà sul Giornale di Napoli, nella sua forma originaria, salvo qualche aggiunta che posso azzardare ora, perché sostanzialmente concordante con alcune delle idee di Riemann.

Successivamente, altre obiezioni esplicite al *Saggio* furono pubblicate tra il 1870 e il 1871, da parte di Helmholtz³⁷ e Klein³⁸, in riferimento all'impossibilità di realizzare, nello spazio euclideo, una superficie pseudosferica che si estenda all'infinito. Riguardo a ciò, Klein scrive [15, p. 23]:

La geometria iperbolica, al contrario, trova la sua interpretazione sulle superfici a curvatura costante negativa. Quest'ultima interpretazione, purtroppo, sembra non poter mai fornire l'intuizione dell'intero piano, poiché le superfici a curvatura negativa costante sono sempre limitate da cuspidi, ecc.

Sebbene Beltrami non avesse avuto l'ambizione di rappresentare la totalità del piano iperbolico, avendo esplicitato nel *Saggio* la validità solamente locale

³⁶Il riferimento è ancora una volta all'*Habilitationsvortrag*.

³⁷*Les axiomes de la géométrie*, Revue des cours scientifiques (1870), pp. 498-501.

³⁸*Sur la géométrie dite non euclidienne*, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, volume 2 (1871), pp. 341-351.

della sua costruzione, la questione risultava un evidente problema aperto. La stessa critica giungerà, in seguito e a ragione, anche da parte di Genocchi e la questione sarà risolta definitivamente soltanto nel 1901, grazie a David Hilbert: quest'ultimo, nell'opera *Ueber Flächen von constanter gaussischer Krümmung*³⁹, dimostrerà che non esiste alcuna superficie, ovunque regolare e chiusa, a curvatura costante negativa. Hilbert considera direttamente la costruzione di Beltrami [64, p. 305]:

Secondo Beltrami, una superficie con curvatura costante negativa realizza una porzione del piano (non euclideo) di Lobačevskij, qualora si considerino come rette del piano di Lobačevskij le linee geodetiche della superficie a curvatura costante e si assumano come angoli e lunghezze gli angoli e le lunghezze effettive sulla superficie. Fra le superficie a curvatura negativa indagate fin qui, non ve ne è nessuna che si estenda ovunque, con il costante cambiamento del suo piano tangente, nelle vicinanze di ciascun luogo; piuttosto, le superficie note di curvatura costante negativa hanno linee singolari oltre le quali non è possibile un prolungamento continuo con variazione continua del piano tangente. Per questo motivo, nessuna delle superficie finora note di curvatura costante negativa riesce a realizzare l'intero piano di Lobačevskij e ci appare di notevole interesse la questione, *se l'intero piano di Lobačevskij possa essere rappresentato alla maniera di Beltrami mediante una superficie analitica a curvatura costante negativa*.

Il procedimento di Hilbert è il seguente: egli suppone l'esistenza di una superficie analitica a curvatura costante negativa e regolare ovunque e mostra che tale ipotesi conduce a una contraddizione. Ragionando quindi per assurdo, è possibile dimostrare che non esiste, nello spazio euclideo, una superficie che ammetta un'applicazione isometrica sull'intero piano non euclideo di Lobačevskij; la pseudosfera presenta, infatti, punti singolari, e in particolare la cuspide, che non appartengono alla superficie iniziale. Grazie a questo risultato, si nota che la geometria iperbolica si realizza nell'intorno di ogni punto della pseudosfera, cioè ogni dominio semplicemente connesso della superficie pseudosferica ammette un'applicazione isometrica sul piano non euclideo [15, p. 25]. La conclusione del ragionamento di Hilbert è la seguente [15, p. 25]:

[...] si vede che [nello spazio euclideo] non esiste alcuna superficie a curvatura costante negativa, priva di singolarità, analitica e regolare ovunque. In particolare, si deve rispondere negativamente alla questione iniziale, cioè che non esiste nello spazio una tale superficie sulla quale, nel senso di Beltrami, la geometria del piano di Lobachefsky possa essere completamente realizzata.

Analizziamo adesso le critiche di Genocchi ed Helmholtz al *Saggio*, ricostruendole attraverso la fitta corrispondenza che Beltrami mantenne con altri matematici dopo la pubblicazione dell'opera.

³⁹Tradotto: Sulle superfici a curvatura gaussiana costante. Transactions of the American Mathematical Society, volume XVI, pp. 334-350.

3.4.1 Le obiezioni di Genocchi

Angelo Genocchi, matematico piacentino che insegnò per lungo tempo presso l'università di Torino, fu uno dei più attenti commentatori del *Saggio* di Beltrami, arrivando a dedicare alla rappresentazione reale del piano iperbolico un'appendice dell'opera del 1877 *Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes*⁴⁰.

L'appendice in questione, dall'eloquente titolo *Sull'esistenza della pseudosfera e sull'impossibilità di dimostrare il postulato di Euclide*, esplicita le critiche di Genocchi relative alla rappresentazione reale di Beltrami; esse possono essere organizzate nei seguenti punti [15, p. 23]:

1. Due punti distinti della pseudosfera possono coincidere in uno stesso punto dello spazio.
2. Non è presente una dimostrazione rigorosa della proprietà della pseudosfera di estendersi indefinitamente.
3. Non è stato provato che l'equazione differenziale che rappresenta le superfici a curvatura costante ammetta almeno una soluzione che soddisfi tutte le condizioni richieste nel caso della pseudosfera.

Riguardo alla prima obiezione, è vero che Beltrami ammette la possibilità che a valori distinti dei parametri (u, v) sulla pseudosfera corrisponda uno stesso punto dello spazio euclideo; tuttavia, egli precisa anche, già in un articolo del 1867⁴¹, che tale circostanza è accidentale ed eliminabile senza alterare la forma della superficie [15, p. 24]; in una lettera a Hoüel del 14 febbraio 1869 fa riferimento alla questione in questo modo [15, p. 24]:

[...] due punti di questa superficie [descritta da $ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$], corrispondenti a due diverse coppie di valori delle variabili u, v , non hanno tra loro alcun rapporto, sebbene possano, per una forma conveniente della superficie flessibile, coincidere nello stesso punto dello spazio; pertanto la superficie deve essere concepita come capace di attraversare se stessa completamente liberamente.

Genocchi, da parte sua, sosteneva che un tale punto di vista pregiudicasse tutte le conclusioni, dal momento che [23, p. 195]

qualunque sia la superficie alle quali si vogliano applicare [tali conclusioni], si può sempre affermare che essa abbia una configurazione determinata e questa configurazione può porla in un caso di eccezione.

A sostegno di ciò vi è l'uso, da parte di Beltrami, di una imprecisata nozione di avvolgimento (della generica superficie pseudosferica intorno a una superficie

⁴⁰Tradotto: Su una memoria di Daviet de Foncenex e sulle geometrie non euclidee. Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, Serie 2, Tomo 29 (1878), pp. 365-404.

⁴¹Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.

pseudosferica di rotazione) [23, p. 195], che non permette di rendere matematicamente rigorosa l'operazione stessa. Beltrami affronta la questione anche in una lettera, sempre a Hoüel, del 3 marzo 1871 [15, p. 24]:

Quanto alle obiezioni del signor Genocchi, la sostanza di quelle che mi avete riferito nella penultima lettera si basa unicamente su un'ambiguità. Il signor Genocchi ritiene, come molti altri, che non si possa parlare di coordinate curvilinee u, v su una superficie senza presupporre che le tre funzioni $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$, che esprimono le tre coordinate cartesiane tramite u, v , siano note o considerate simultaneamente. Ciò è del tutto contrario allo spirito della teoria di Gauss, alla quale ho sempre aderito.

Credo che ne abbiamo già discusso e che le abbia detto che la conoscenza dell'espressione $E du^2 + 2F dudv + G dv^2$ sia sufficiente a definire una superficie, dal punto di vista della suddetta teoria; e, riconosciuto questo fatto, il dubbio sui punti coincidenti non ha più alcun senso serio. Non mi sembra che lei abbia alcuna difficoltà su questa questione; ma poiché la persistenza degli oppositori mi sembra eccessiva, sono quasi pronto a preparare un saggio su questo argomento, da combinare con altre osservazioni, per farne un articolo per il Giornale del signor Battaglini (senza nominare nessuno, ovviamente)⁴².

Un'ulteriore tentativo di risolvere la questione dei punti coincidenti è indicato da Beltrami in un'altra lettera a Hoüel, dell'11 luglio 1871, dove viene trattata anche la seconda obiezione di Genocchi [15, pp. 24–25]:

Non mi restano che poche righe per dirvi qualcosa sulle obiezioni del signor Genocchi, che non sono affatto nuove, dopo ciò che mi avete già scritto altre volte. Le parole che avete fatto seguire immediatamente alla riproduzione del suo atto d'accusa mi dispensano dall'aggiungere altro, poiché non potrei riassumere meglio le nostre ragioni. Quanto alla coincidenza (possibile) di due punti della superficie pseudosferica in uno stesso punto dello spazio, non bisogna dimenticare 1° che essa avviene solo quando si fa soltanto della planimetria, e che, di conseguenza, non vi è allora modo di accorgersene; 2° che anche in questo caso il punto in cui ciò avverrebbe non sarebbe fisso, e che si potrebbe quindi eliminare la coincidenza a piacere. Ma vi è, credo, un altro modo semplice per eludere questa difficoltà: ricordare che la superficie pseudosferica può essere, come ho dimostrato, rappresentata completamente sulla superficie finita di un cerchio ordinario, punto per punto. Vado oltre, e credo che, avvalendosi della possibilità di rappresentare allo stesso modo lo spazio pseudosferico all'interno di una sfera ordinaria finita, sarà possibile dimostrare l'impossibilità di stabilire il postulato a

⁴²L'articolo sarà pubblicato nel 1872 e avrà il titolo *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche*.

priori, sia mediante una costruzione piana sia anche mediante una costruzione a tre dimensioni. Rifletteteci.

In realtà, come abbiamo già detto, sarà Hilbert nel 1901 a dimostrare che non è possibile che esista, nello spazio euclideo, una superficie che rappresenti globalmente la varietà bidimensionale a curvatura costante negativa e la cui geometria coincida con quella di Lobačevskij e Bòlyai; anche per questo le risposte di Beltrami a Genocchi non furono risolutive.

Un'altra obiezione che fu risolta solo da Hilbert nel 1901 è quella presente nel terzo punto. Genocchi critica la genericità del procedimento di Beltrami, sostenendo che sia necessario trovare una rappresentazione esplicita per la superficie pseudosferica [23, pp. 195–196]:

Beltrami riguarda la superficie pseudosferica come avvolta un'infinità di volte sulla superficie di rivoluzione generata dalla curva con le tangenti costanti. Ma per avvolgerla una o più volte occorrerebbe aver dimostrato che essa esiste. [...] Riguardo a tale sviluppo [cioè al procedimento di applicazione della superficie pseudosferica sulle superfici di rotazione], tutto ciò che si conosce si riduce al teorema di Gauss sulla possibilità di applicare l'una sull'altra due porzioni di superfici che hanno ovunque la stessa curvatura. Ma occorrerà dimostrare che l'equazione alle derivate parziali che esprime le superfici a curvatura costante ammette almeno un integrale che soddisfa a tutte le condizioni richieste per la pseudosfera.

Il discorso di Genocchi si conclude osservando che, non essendo in possesso di una dimostrazione di esistenza di un tale integrale, la teoria delle superfici pseudosferiche appare solida tanto quanto la geometria euclidea che si vuole contraddire, poiché l'ipotesi sull'esistenza di superfici pseudosferiche immerse nello spazio euclideo è motivata quanto lo è il postulato euclideo delle parallele [23, p. 196]. Anche su tale questione l'opinione di Genocchi si rivelò la più corretta: Hilbert dimostrò l'impossibilità di trovare un tale integrale e, di conseguenza, fece tramontare anche l'aspirazione di Beltrami di offrire una base reale alla geometria del piano iperbolico globalmente [23, p. 196].

Come evidenziato da Alberto Cogliati, questa apparente smentita non pregiudica la portata del *Saggio*, ma mette in luce la transizione concettuale decisiva della geometria inaugurata da Beltrami, cioè il passaggio da una visione dello spazio legata all'intuizione fisica a una fondata sull'astrazione pura, un salto teorico che molti matematici dell'epoca faticarono ad accettare [23, p. 196]:

D'altra parte, la distinzione tra le due nozioni (superficie astratta da un lato e superficie immersa dall'altro) costituisce un momento essenziale dello sviluppo della geometria differenziale del secondo Ottocento e, allo stesso tempo, un elemento decisivo per lo studio del processo di ricezione del *Saggio*: se Beltrami sembrò orientarsi più o meno esplicitamente verso l'adozione di un punto di vista prevalentemente astratto, molti altri (Genocchi incluso) parvero incontrare serie difficoltà nel comprendere lo spirito della trattazione

del Saggio proprio perché essi rimasero saldamente ancorati alla concezione tradizionale secondo la quale una superficie non può essere intesa in altro modo se non come un ente immerso nello spazio euclideo tridimensionale.

3.4.2 La controversia con Helmholtz

Hermann von Helmholtz, laureato in medicina presso l'Università di Berlino e successivamente professore di Fisiologia presso diverse università tedesche, si avvicinò alla matematica e alla geometria proprio grazie ai suoi studi sulla percezione dello spazio.

Nel 1868, la pubblicazione da parte di Helmholtz dell'articolo *Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie*⁴³, tradotto in francese l'anno seguente da Hoüel⁴⁴, indusse Beltrami a contattare l'autore. In questo lavoro, infatti, trattando delle geometrie non euclidee, Helmholtz aveva inizialmente omesso la geometria di Lobačevskij e Bòlyai, mentre aveva inserito la geometria sferica; inoltre, egli sosteneva, sempre nel suo articolo, che il piano era l'unica superficie a due dimensioni in uno spazio a curvatura costante avente la proprietà di estendersi all'infinito. Le posizioni di Beltrami, divergenti rispetto a quelle di Helmholtz, si possono intuire dalla lettera a Hoüel dell'8 gennaio 1869 [15, p. 71–72]:

L'appunto di Helmholtz che menzioni non è lo stesso che conosco io, e sembra addirittura (a giudicare da quello che scrivi) differire parecchio da esso⁴⁵. [...] La frase riguardante la sfera di raggio infinito, o di curvatura zero, non si trova in quest'ultimo testo. Ecco il mio risultato su questa questione: trovo che l'orisfera di Lobatschewsky, o la superficie F di Bòlyai, sia una superficie il cui elemento lineare è riducibile alla forma $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ciò significa in effetti che la geometria di questa superficie è semplicemente la planimetria ordinaria, ma non significa affatto che la superficie sia un piano, o addirittura una superficie sviluppabile. Lo sarebbe, se lo spazio in cui la sua esistenza è concepita fosse lo spazio ordinario, ma, poiché stiamo ragionando proprio sotto l'ipotesi opposta, dobbiamo semplicemente attenerci al primo punto, vale a dire che la geometria di questa superficie è la stessa di quella del piano.

Per quanto riguarda l'invariabilità delle figure, neanche a me il metodo di Helmholtz sembrava del tutto soddisfacente. [...] Il metodo derivato dalle ricerche di Gauss sulle superfici mi sembra di gran

⁴³Tradotto: Sui reali fondamenti della geometria. Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg, volume 4 (1868), pp. 197-202; Wissenschaftliche Abhandlungen, volume 3 (1882-1895), tomo II, pp. 610-616.

⁴⁴*Sur les faits qui servent de base à la géométrie* (traduzione di J. Hoüel), Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, volume 5 (1869) pp. 372-378.

⁴⁵Hoüel fa riferimento all'articolo di Helmholtz *Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, Beltrami si riferisce all'articolo *Über die Thatfachen, die der Geometrie zum Grunde liegen*. Nella seconda opera si trova la formulazione più chiara e completa della concezione dello spazio e della geometria di Helmholtz.

lunga preferibile, ed è quello che ho seguito, come vedrete. Credo che, pur non fornendo la risposta definitiva, sia quantomeno utile per chiarire la questione e soprattutto per dare una sorta di fondamento al ragionamento e alle considerazioni.

Beltrami torna a parlare della caratterizzazione del piano nella lettera a Hoüel del 14 febbraio 1869 [15, pp. 75–77]:

Nel passo di Helmholtz che mi hai trascritto, tutto sembra corretto tranne l'ultimo paragrafo: "Soll die Ausdehnung einer solchen Flächen unendlich sein, so muss sie eine Ebene sein, etc."⁴⁶ Se non erro del tutto, la proprietà di estendersi all'infinito appartiene a tutte le superfici con curvatura negativa costante. Questo è un punto su cui vorrei che tu prestassi attenzione quando avrai modo di esaminare il mio lavoro. Mi farebbe molto piacere essere avvertito se ho commesso un errore così fondamentale, di cui non riesco più a individuare la fonte. Sospetto piuttosto che l'ambiguità derivi dalla convinzione piuttosto diffusa (condivisa inizialmente anche dal signor Battaglini, a giudicare da alcuni suoi passi) che le superfici con curvatura negativa costante siano luoghi immaginari.

[...] La ringrazio molto per la sua offerta di inviarmi l'appunto del signor Helmholtz, ma mi dispiacerebbe arrecarle disturbo, soprattutto perché sembra disposto a pubblicarlo. In ogni caso, vorrei conoscerne la data in anticipo e, se fosse successiva a quella dell'altro appunto che ho menzionato, potrei allora trovare il coraggio di scrivere al signor Helmholtz per chiedergli una spiegazione del passaggio a cui mi riferivo.

L'auspicio finale di quest'ultimo passaggio si concretizzò il 24 aprile 1869, quando Beltrami scrisse effettivamente a Helmholtz, che rimediò all'omissione della geometria di Lobačevskij e Bolyai facendo aggiungere una nota supplementare al proprio scritto. La lettera a Helmholtz fu anche un'occasione per Beltrami per trattare alcune delle critiche che abbiamo già incontrato, sviluppando la sua interpretazione della geometria non euclidea [15, p. 28]:

L'insieme delle mie deduzioni poggia sulla rappresentazione delle superfici mediante la formula di Gauss $ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$. Ora, in questo metodo, i rapporti tra la superficie e lo spazio circostante sfuggono interamente: la superficie è considerata in se stessa, come lo sarebbe da un essere che non avesse il senso della terza dimensione. Ne consegue che se la superficie, così come esiste nello spazio, taglia se stessa lungo certe linee, ciò è come non avvenuto secondo la formula precedente: la coincidenza di due punti della superficie in uno stesso punto dello spazio è, in altri termini, un fatto

⁴⁶Se l'estensione di una tale superficie deve essere infinita, allora deve trattarsi di un piano, ecc.

estraneo, eterogeneo rispetto a quelli che la formula di Gauss, da sola, può insegnarci. È precisamente qui che si incontra uno dei punti di contatto tra l'opera di Gauss e quella di Riemann; e, se non sono del tutto in errore, è proprio attraverso lo sviluppo di questo ordine di idee che si potrà comprendere come Gauss, senza abbandonare questo campo favorito, potesse penetrare nella geometria di Bolyai e di Lobatcheffsky; infatti, la sua geometria delle superfici, finché non attinge nulla dalla geometria analitica ordinaria, è indipendente dal postulato XI⁴⁷. Ma torniamo alla questione.

Quando si cerca di passare dall'espressione differenziale dell'elemento lineare all'equazione ordinaria della superficie, riappaiono le esigenze e gli accidenti delle figure a due dimensioni considerate nello spazio a tre [dimensioni]. Questo passaggio, ovvero l'integrazione delle superfici a curvatura negativa costante (per il caso della curvatura positiva è la stessa cosa), a quanto ne so è stato fatto finora solo in casi molto particolari. Tra le forme infinite (di cui il mio piccolo modello mi offre il piacevole spettacolo) che la superficie pseudosferica può assumere, si conoscono solo superfici di rotazione ed elicoidi. Ora, queste forme speciali hanno un carattere comune: quello di non poter servire allo sviluppo della superficie intera; per produrle è necessario tagliare la superficie secondo una o due linee. Esse non possono dunque — anche supponendo, per le superfici di rotazione, che la superficie assoluta vi sia avvolta un numero infinito di volte su se stessa — riprodurre l'infinità in tutti i sensi della superficie assoluta.

La visione di Beltrami viene sviluppata anche in un'altra lettera a Helmholtz del 16 maggio 1869 [15, pp. 206–207]:

Il sig. Hoüel, per parte sua, conserva dei dubbj sopra alcuni punti della Nota stessa. Il primo di questi dubbj riguarda l'asserzione che una superficie di curvatura nulla sia un piano. A me pare che ciò non possa dar luogo a difficoltà, se, come sembra conveniente in questo genere di considerazioni, per piano non si intende altro che "la superficie su cui si verifica la geometria di Euclide". Gli altri dubbj riguardano principalmente la nozione della curvatura. Al sig. Hoüel sembra che questa nozione non possa essere fondata che sopra un complesso di teoremi i quali non possono far parte dei principii più generali ed astratti. A questo io ho risposto che per curvatura di una superficie non si deve intender altro che il valore di una certa espressione analitica dotata della singolare proprietà di non dipendere che dai coefficienti dell'elemento lineare e di conservare una forma indipendente dalla scelta delle variabili di riferimento: in altre parole, di possedere una significazione intrinseca ed assoluta. Ma non mi è sembrato che tali spiegazioni abbiano completamente appagato quell'egregio signore, il quale è stato abituato fin qui

⁴⁷Il Postulato delle parallele.

a considerare lo stesso oggetto dal punto di vista esclusivamente sintetico.

Mi prendo la libertà di offrirLe un mio scritto di tre anni or sono, nel quale non isfuggerà alla penetrazione di Lei l'origine prima del mio modo di interpretare la geometria non euclidea. Per verità il processo di dimostrazione è molto prolisso, ma in compenso offre il vantaggio di circoscrivere esattamente i limiti entro cui è possibile la risoluzione del problema proposto. Fu in seguito a queste ricerche che al primo apparire della Teoria di Lobatschewsky (resami nota della traduzione del sig. Hoüel) potei subito estendere lo scritto intitolato "Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea", scritto che avrei pubblicato allora se alcune obbiezioni fattemi dall'egregio mio maestro ed amico L. Cremona non mi avessero fatto temere di incontrare delle polemiche. Perciò anche per me fu soltanto la pubblicazione del lavoro postumo di Riemann che mi spinse a mettere in luce e a completare le mie ricerche, offrendomi una base sicura alla convinzione di non essere sopra la falsa via.

Beltrami non ha, dunque, mai considerato le critiche ricevute come definitive, ma ha sempre cercato di giustificare le proprie scoperte nel nuovo contesto della teoria delle superfici astratte inaugurata da Gauss: egli riteneva, infatti, che la teoria presentata nelle *Disquisitiones* non fosse ancora stata del tutto compresa dalla comunità scientifica e che molti dei dubbi intorno alla rappresentazione reale della geometria iperbolica fossero riconducibili a questo. Questo pensiero viene chiarito nella lettera a Hoüel del 19 dicembre 1869 [15, p. 31]:

Credo che la vostra difficoltà non derivi dal soggetto stesso in questione, ma dai principi che io presuppongo relativamente alla dottrina di Gauss sulle superfici curve. Mi sembra che questa dottrina non abbia trovato generalmente il suo completo apprezzamento (*Würdigung*) [...]. Sono convinto che il giorno in cui mi darete ragione su questo punto, vi renderete immediatamente conto di una folla di dettagli che forse ora non vi sembrano ben chiari e, soprattutto, comprenderete perfettamente come Gauss dovesse essere necessariamente portato a creare, almeno nella sua mente, la geometria di Lobatchewsky e di Bolyai, così come egli stesso ha affermato.

3.5 La formazione delle idee alla base del *Saggio*

I lavori di Beltrami sulla geometria fanno parte del filone di ricerca inaugurato da Gauss e proseguito da Riemann, che ha per oggetto lo studio della geometria differenziale intrinseca delle superfici curve e delle varietà n -dimensionali. In Italia, la ricerca in ambito geometrico era stata affrontata da Antonio Bordoni (1789–1860) e dai suoi allievi Gaspare Mainardi, Delfino Codazzi, Francesco Brioschi e Luigi Cremona, attivi a Pavia tra il 1817 e il 1873. Beltrami si ispirava direttamente, come amava dire, alle idee di Gauss, ma la scuola di

Pavia ebbe sicuramente un ruolo nell'orientare i suoi interessi verso gli scritti di Gauss relativi alla geometria differenziale e al problema della rappresentazione conforme [15, p. 3].

Per avere un'idea chiara del percorso seguito da Beltrami per la concezione del *Saggio* è utile considerare una lettera che Beltrami stesso scrisse a Enrico D'Ovidio⁴⁸ (1843-1933) il 25 dicembre 1872, in cui egli racconta, in ordine cronologico, i suoi studi in ambito geometrico [15, p. 12]:

Le dirò anche, e questo potrà giovare al di lei scopo, l'ordine cronologico dei miei studi in argomento. Dapprima un'osservazione, buttata là da Lagrange in una delle sue Memorie sulle carte geografiche⁴⁹, mi ha condotto a cercare se ci fossero superficie rappresentabili sopra un piano, per guisa che le loro linee geodetiche fossero rappresentate da linee rette; il che è quanto dire, superficie rappresentabili con coordinate curvilinee u e v , per guisa che le loro linee geodetiche fossero rappresentate da un'equazione lineare in u e v . Nella citata *Memoria*⁵⁰ del '66 ho trovato che tali superficie dovevano avere necessariamente la curvatura costante (positiva, negativa o nulla). Più tardi, nel *Saggio*, ho mostrato, *partendo da questo fatto*, che nella ipotesi della curvatura *negativa* la Geometria di queste superficie è identica a quella di Gauss e di Lobatschewsky. In seguito, volendo estendere queste considerazioni allo spazio, sgomentandomi (a torto) delle difficoltà che presentava la risoluzione, nel caso di tre dimensioni, del problema già da me risoluto nel '65, tentai di costruire la soluzione *a priori*, cioè per induzione, e fortunatamente ci riuscii, osservando che in luogo della equazione (1)⁵¹ del *Saggio* si può scrivere:

$$ds^2 = R^2 \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2} \quad a^2 = u^2 + v^2 + w^2 \quad (3.97)$$

formole che, aggiungendo una dimensione, suggeriscono di porre:

$$ds^2 = R^2 \frac{dt^2 + du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2} \quad a^2 = t^2 + u^2 + v^2 + w^2 \quad (3.98)$$

Verificai dunque che *due* equazioni *lineari* fra le tre variabili t, u, v definiscono una linea geodetica, cioè rendono $\delta \int ds = 0$. Ma appena conseguito questo risultato, che io sviluppai in modo prolisso

⁴⁸Matematico italiano formatosi a Napoli sotto l'influenza di Giuseppe Battaglini, conseguì la laurea in matematica nel 1869; nel 1872 ottenne per concorso la cattedra di Algebra e Geometria analitica all'Università di Torino, dove insegnò fino al 1918; fu rettore dell'Università di Torino dal 1880 al 1885 e, successivamente, rettore del Politecnico di Torino dal 1906 al 1922. Le sue ricerche riguardarono principalmente la geometria, con contributi alle metriche euclidee e non euclidee, alla geometria degli spazi a curvatura costante e alla teoria delle forme. Nel 1905 fu nominato senatore del Regno d'Italia [13, p. 102].

⁴⁹La Memoria a cui Beltrami fa riferimento è quella, da noi già citata, dal titolo *Sur la construction des cartes géographiques*.

⁵⁰L'opera in questione è [3].

⁵¹Nella nostra trattazione l'Equazione è (3.52).

e coll'aiuto di variabili ausiliarie (specie di coordinate polari non-euclidee), cominciai a sospettare che il teorema fosse vero per n qualunque, e verificando questa congettura giunsi alla dimostrazione che forma il principio della *Memoria*⁵² sugli spazii di curvatura costante.

In questo scritto, oltre al rapido accenno alla motivazione che spinse Beltrami a comporre la *Teoria Fondamentale* a breve distanza dalla pubblicazione del *Saggio*, emerge chiaramente lo sviluppo del suo pensiero sul sistema geometrico di Lobačevskij. Sebbene fin dall'esordio del *Saggio* egli riconosca il valore delle tesi del matematico russo, sostenendo che *il dovere degli uomini di scienza è di discuterli con animo sereno, tenendosi lontani egualmente dall'entusiasmo e dal disprezzo*, Beltrami manifesta, almeno nella fase iniziale di stesura del testo (autunno 1867), forti riserve sulla concreta applicabilità della geometria non euclidea oltre la planimetria. Questa iniziale perplessità è confermata non solo dalle battute conclusive del *Saggio*, dove traspare il suo scetticismo (egli afferma, infatti, che l'estensione nello spazio delle intuizioni di Lobačevskij *ci sembra molto improbabile*), ma anche da una lettera indirizzata a Placido Tardy⁵³ (1816-1914) del 14 novembre 1867, all'interno della quale vengono inoltre documentate le posizioni in gran parte scettiche di altri matematici riguardo alle geometrie non euclidee [13, pp. 179–189]:

Non so se Ella abbia accordato alcuna attenzione a quel sistema d'idee che ora si va divulgando col nome di geometria non-euclidea, e quale giudizio ne faccia. So che il prof. Chelini gli è decisamente avverso, e che il Bellavitis lo chiama geometria da manicomio: mentre il Cremona lo crede discutibile ed il Battaglini lo abbraccia senza reticenze. Io me ne sono un po' occupato ed ho indirizzato al Cremona una esposizione confidenziale delle mie vedute: ma benché queste conducano effettivamente ad una esatta interpretazione dei teoremi non-euclidei, pure mi rimane un grave dubbio il quale proviene da ciò che questa interpretazione non sembra avere alcun nesso col sistema d'idee al quale si appoggiava Gauss nel dare il suo assenso alla nuova geometria: o per lo meno nessuna delle laconiche frasi contenute nelle sue lettere a Schumacher lascia legittima ragione di supporlo. Ora sto aspettando di sapere che ne dice il Cremona. - Non ho però intenzione di insistere molto sull'argomento, prima di tutto perché bisognerebbe conoscere tutti i lavori di Lobatschewsky

⁵²Si tratta della *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante*.

⁵³Matematico e fisico italiano, compì la propria formazione tra Messina, Milano e Parigi, dove seguì tra gli altri le lezioni di Poisson e Liouville. fu professore all'Università di Messina dal 1841, ma lasciò il Regno delle Due Sicilie nel 1847 per motivi politici e si stabilì dapprima a Firenze e poi a Genova, dove insegnò geometria, calcolo infinitesimale e meccanica razionale, divenendo anche rettore dell'Università. Fu tra i promotori, insieme a Francesco Brioschi ed Enrico Betti, del rinnovamento della matematica italiana e della fondazione degli *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. Le sue ricerche riguardarono soprattutto l'analisi matematica, il calcolo combinatorio e la meccanica dei fluidi; fu inoltre socio nazionale dell'Accademia dei Lincei [13, pp. 175–176].

e di Bòlyai, i quali sono molto rari e fors'anche di poco interesse in tutto il resto, e poi perché, in tesi generale, prima di abbandonarsi a certe idee eccessivamente astratte (quand'anche ammissibili, o non assurde) mi pare che convenga avere la certezza della loro fecondità reale.

Da questa citazione traspare la sostanziale perplessità di Beltrami relativa all'intero sistema geometrico di Lobačevskij e non solo alla sua applicazione spaziale. A riprova di ciò, è utile considerare alcune lettere dello stesso periodo appartenenti al carteggio tra Beltrami e Chelini, che mettono in luce sia l'interesse per le nuove teorie geometriche che si stavano diffondendo, sia il sostanziale scetticismo relativo alla loro fondatezza. È Beltrami a proporre, in una lettera indirizzata a Chelini del 4 luglio 1867, la lettura dell'opera di Lobačevskij appena tradotta da Hoüel [14, pp. 97–98]:

Mi rimane poco spazio del quale approfittare per manifestarvi un mio vivo desiderio. Ed è che voi vogliate prendere in considerazione l'opuscolo pubblicato da Hoüel e contenente le basi della geometria non euclidea di Lobachevskij, teoria alla quale la esplicita e piena adesione del sommo Gauss dà diritto di essere attentamente ponderata e discorsa imparzialmente.

Il prof. Forti darà fuori una traduzione italiana del libro⁵⁴. Se la vostra voce autorevole si interponesse in questa questione, l'insegnamento matematico in Italia non potrebbe che esserne grandemente avvantaggiato.

A quest'ultima lettera ne fa seguito, il 19 luglio 1867, un'altra, sempre indirizzata a Chelini, in cui è possibile leggere le prime impressioni di Beltrami nei confronti della geometria non euclidea [14, pp. 98–100]:

Ho spedito giorni sono un fascicolo degli Annali di Terquem⁵⁵ (che d'ora in avanti riceverete dal libraio di qui, attesa alla mia partenza). Vi ho pure spedito il mio esemplare della Geometria di Lobachevskij, della quale io non posso occuparmi ora e della quale in ogni caso voi sapreste occuparvi con più profitto di me. D'altronde ben presto ne deve uscire una traduzione italiana del Forti, che senza dubbio il traduttore mi manderà. Del resto debbo dirvi il vero che io ho rimorso più che altro d'avervi portato in questa teoria, dapoiiché ora il Cremona mi scrive avere il Bellavitis sentenziato che la geometria di Lobachevskij sia una geometria da manicomio. Io non so veramente come il Bellavitis spieghi le simpatie di Gauss per questa geometria: forse egli dirà che se Gauss avesse vissuto più a lungo (il che propriamente non sarebbe stato tanto facile) o si sarebbe ricreduto o avrebbe finito al manicomio anche lui. Comunque sia, o io sono in grave errore circa all'indole delle scienze

⁵⁴Sarà in realtà Battaglini a farne la traduzione.

⁵⁵Olry Terquem (1782-1862) fu un matematico francese noto per alcuni lavori di geometria e per essere l'editore dei *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

cosiddette astratte, o il sig. Bellavitis pecca di soverchia arroganza. Mi pare che nelle scienze testé nominate l'accordo della teoria colla realtà non sia una condizione *sine qua non* dell'esistenza della teoria stessa. La condizione *sine qua non* è che i vari punti della teoria, primordiali o dedotti, siano in perfetto accordo fra loro, e non contrastino alle leggi del reale quando si fanno quelle ipotesi speciali che determinano il trapasso dalla generalità puramente ideale alla natura reale delle cose. Quando un tale accordo ha luogo, la teoria ha una esistenza indiscutibile, la questione si riduce a sapere se una cosiffatta astrazione sia utile od inutile. Se è utile non vedo ragione di dar l'ostracismo alla teoria, finché non se ne sia trovata un'altra che, vivendo nei limiti delle relazioni reali conduca ai medesimi risultati. [...] a me pare che allo studioso imparziale non resti onestamente altra alternativa che questa: o di ammirare, o di far meglio. Finché non si tratta che di metodo, sta bene usare con parsimonia degli strumenti di recente importazione, che non hanno ancora superato il tirocinio dell'insegnamento scolastico e lo stadio didattico [...]. È il Bellavitis e la sua animosità contro gli immaginari che mi suggeriscono queste riflessioni d'indole generale, nel caso della geometria non euclidea la questione è un poco diversa, ed io ora non ho eziandio dichiarare in ché, secondo me, essa consista: ma sono persuaso che la vera causa dell'opposizione di Bellavitis è l'epiteto di immaginaria data alla nuova geometria e l'uso di formule che ricordano la teoria dei numeri complessi.

Dalla lettera precedente emerge un giudizio nettamente negativo di Giusto Bellavitis⁵⁶ (1803-1880) nei confronti delle geometrie non euclidee, definite da lui *da manicomio*, e di conseguenza lo scetticismo di Beltrami nell'avventurarsi nello studio di tali idee; d'altra parte, si nota anche la volontà di Beltrami, in questa fase, di analizzare la teoria di Lobačevskij, studiandone la coerenza e l'utilità, piuttosto che la sua applicabilità al reale.

La risposta di Chelini a quest'ultima lettera di Beltrami non tarda ad arrivare, in una lettera in cui viene proposta una definizione rigorosa di angolo e viene considerata la geometria non euclidea come *una sottigliezza nebulosa propria a portar confusione ed oscurità* [14, p. 104]:

⁵⁶Bellavitis, già citato in alcune lettere di Beltrami, è stato un noto matematico italiano; autodidatta, fu dapprima impiegato municipale e solo in seguito intraprese la carriera accademica, ottenendo nel 1845 la cattedra di Geometria descrittiva all'Università di Padova, dove insegnò per il resto della vita. È ricordato soprattutto per il metodo delle *equipollenze*, una specie di calcolo geometrico nel piano, considerato da molti storici un importante antecedente del calcolo vettoriale; si occupò inoltre di geometria analitica, teoria delle equazioni, curve algebriche e teoria dei numeri. Rettore dell'Università di Padova nel 1866 e senatore del Regno d'Italia dal 1866, appartenne a numerose accademie scientifiche italiane, tra cui l'Accademia dei Lincei. Pur avendo dedicato notevole attenzione alla teoria degli immaginari, cercando di ricondurla a una interpretazione geometrica intuitiva, Bellavitis rimase sempre legato a una concezione classica della matematica; Negli ultimi decenni della sua vita guardò con crescente diffidenza ai nuovi indirizzi della geometria e si oppose apertamente alle geometrie non euclidee, che giudicava in contrasto con i principi tradizionali della disciplina [14, 51, p. 72, pp.544–548].

La definizione esposta dell'angolo è stata già adottata da parecchi autori [...] ed io sono convinto che finirà per essere adottata universalmente come l'unica buona, e come l'unica vera. E fino a tanto che non sorga chi la dimostri erronea, la geometria non Euclidea dee ritenersi come una sottigliezza nebulosa propria a portar confusione ed oscurità vale a dire nell'insegnamento della geometria, che fin qui si è riguardato sempre come la più splendida regione delle verità immutabili.

Se voi foste del mio avviso, doveste adoperarvi per impedire che codesta dottrina germanica s'introduca e prevalga nella scuola d'Italia.

Certamente influenzato anche dall'opinione di Chelini, Beltrami si esprime, in una lettera del 12 novembre 1867, in questi termini, mostrando di aver affrontato in prima persona l'argomento della geometria non euclidea e di aver tentato di confutarla [14, p. 106]:

Io ho ricevuto a suo tempo la relazione delle vostre impressioni circa alla geometria cosiddetta non euclidea. Recentemente mi sono occupato io pure del medesimo argomento ed ho steso una confutazione o, per dirla in termini più benevoli, una interpretazione dei risultati di Lobachevskij che ora appunto sto per comunicare al Cremona. Se questi non dissiperà le mie opposizioni, o per lo meno se ammetterà che la mia interpretazione sia discutibile, cercherò di farvela conoscere, benché mi paia difficile formularla chiaramente in una lettera. Quello di cui vi pregherei, sarebbe di volermi rimandare l'opuscolo del Lobachevskij, giacché vi ricordate che, per farvelo avere più presto, vi mandai il mio esemplare. Suppongo che a voi poco interessi conservare l'esposizione di una dottrina che reputate ovviamente falsa.

Poco tempo dopo, forse proprio per il giudizio di Cremona, costantemente tenuto in alta considerazione, Beltrami si dovette ricredere. Nella lettera a Hoüel del 18 novembre 1868, infatti, l'approccio di Beltrami alla geometria non euclidea diventa costruttivo: i risultati ottenuti nelle ricerche che hanno composto il *Saggio* gli hanno permesso di capire la profondità dei risultati di Lobačevskij e la lettura dell'opera di Riemann appena pubblicata gli ha dato ulteriore slancio [15, pp. 65-67]:

Il suddetto scritto (quello che ha per titolo "Interpretazione ecc.") è stato redatto nell'autunno dell'anno passato, in base a riflessioni che avevano pullulato in me all'epoca della pubblicazione della vostra traduzione di Lobatschewsky.

Credo che allora l'idea di costruire la geometria non euclidea su una superficie perfettamente reale fosse del tutto nuova. Vi confesserò tuttavia che, trascinato un po' troppo in là dalla spiegazione completa in tutti i punti che la mia superficie dava della planimetria

non euclidea, fui tentato all'inizio di non credere alla parte stereometrica delle ricerche di Lobatschewsky e di non vedervi che una specie di "allucinazione geometrica" (è così che la qualificavo, nel mio pensiero, beninteso) che speravo di poter, dopo riflessioni più mature, ridurre al suo vero significato. In altre parole, credevo allora che *la costruzione della planimetria non euclidea sulla superficie che chiamo pseudosferica esaurisse interamente la portata di questa planimetria trascendente*, all'incirca come la costruzione ordinaria delle variabili complesse su un piano esaurisce per intero il loro significato aritmetico.

La prima redazione delle mie ricerche fu redatta sotto l'influenza di questa preoccupazione (che ora riconosco essere errata), e la sottoposi al mio eccellente amico, il Prof. Cremona, che aveva appena consegnato al pubblico una traduzione degli *Elementi* di Baltzer e che aveva accolto con favore le nuove idee. L'accuratezza della mia spiegazione (per la parte planimetrica) sembrò colpirlo tanto quanto aveva colpito me, e sembrò persino condividere i miei dubbi sulla geometria dello spazio, poiché, dopo aver letto il mio manoscritto, mi scrisse queste precise parole: "Quasi credo che tu abbia ragione". Tuttavia, in seguito sollevò un'obiezione che non vi spiegherò⁵⁷, [...]. Tuttavia, la paura di incontrare avversari su questo stesso terreno e di perdere così quel famoso "rem prorsus substantialem"⁵⁸ che tutti cercano di assicurarsi, e ancor più la riflessione (che non mi aveva mai abbandonato) che la trigonometria pseudosferica fu dedotta da Lobatschewsky dai teoremi della sua stereometria, e la natura estremamente precisa dei miei risultati mi indusse a rimandare la pubblicazione della mia ricerca fino alla risoluzione di tutte le difficoltà. Non ci avevo quasi più pensato quando apparve la memoria di Riemann, la quale, pur con le sue numerose oscurità, mi convinse di non essermi allontanato dalla retta via cercando i fondamenti analitici della nuova dottrina nei concetti che Gauss aveva inaugurato con le sue celebri *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, dove queste funzioni quadratiche vengono nuovamente presentate.

Una volta convintosi della fondatezza logica della geometria non euclidea nello spazio bidimensionale, Beltrami archiviò definitivamente il concetto di *allucinazione geometrica*. Poco dopo, tuttavia, il suo pensiero conobbe un'ulteriore evoluzione grazie alla lettura di un'opera fondamentale, destinata ad aggiungere un nuovo e decisivo tassello alla sua ricerca: l'*Habilitationsvortrag* di Bernhard Riemann.

⁵⁷Si tratta della già citata critica di Cremona riguardante l'uso dell'analisi ordinaria per trattare argomenti di geometria non euclidea.

⁵⁸Ciò che è sostanziale.

3.6 L'*Habilitationsvortrag* di Riemann

Benché segnato per tutta la vita da una costituzione fisica fragile e da una profonda insicurezza personale, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) rappresenta una delle ultime figure di matematico universale nella storia della disciplina. La portata del suo contributo scientifico fu tale da ridefinire in profondità ogni campo a cui si dedicò, dalla geometria all'analisi, dalla teoria dei numeri alla fisica matematica. La sua eredità non si esaurisce, tuttavia, nei risultati ottenuti ma si manifesta anche nell'introduzione di un nuovo approccio alla ricerca, fondato sulla priorità dei concetti rispetto agli aspetti puramente tecnici e computazionali: in contrasto con una tradizione che privilegiava la manipolazione formale e il calcolo, Riemann perseguì una matematica orientata all'individuazione delle strutture e dei principi sottesi ai fenomeni, incarnando il motto di Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), considerato uno dei suoi maestri: *prima il pensiero e poi i calcoli* [23, pp. 119–120].

Riemann compì la propria formazione universitaria tra le due principali scuole matematiche tedesche dell'epoca: nel 1846, si iscrisse all'Università di Gottinga, inizialmente per studiare teologia, per poi laurearsi in matematica, seguendo tra gli altri le lezioni di Gauss; nel 1847, si trasferì in università a Berlino, dove conobbe alcuni dei maggiori matematici del tempo, come Dirichlet, Steiner, Jacobi e Eisenstein. Tornato a Gottinga nel 1849, conseguì il dottorato sotto la supervisione di Gauss e intraprese una brillante carriera accademica che culminò, nel 1859, con la successione a Dirichlet alla cattedra di matematica [64, pp. 311-312].

Nel giugno del 1854, Riemann tenne, di fronte ai membri della facoltà di filosofia dell'università di Gottinga, la conferenza per ottenere l'abilitazione all'insegnamento (*Habilitationsvortrag*). Tra gli uditori vi era anche Gauss. Secondo il regolamento della facoltà, il candidato all'abilitazione era tenuto a proporre tre possibili argomenti per la conferenza, tra cui la commissione avrebbe successivamente selezionato quello su cui si sarebbe svolta la prova. Riemann presentò i seguenti temi [64, p. 312]:

- La storia della questione della rappresentabilità di una funzione in serie trigonometrica.
- Le soluzioni di due equazioni quadratiche in due incognite.
- Ipotesi che stanno alla base della geometria.

La commissione, e in particolare Gauss, optò per il terzo argomento; tale decisione non fu accolta con entusiasmo da Riemann, che si sentiva meno preparato su quel tema rispetto agli altri, come si legge in una lettera del dicembre 1853 al fratello Wilhelm [64, p. 312]:

Al momento, questa è la situazione del mio lavoro: all'inizio di dicembre ho presentato la mia *Habilitationschrift* e con essa ho dovuto indicare tre argomenti per la lezione inaugurale, perché la facoltà ne scelga uno tra questi. Avevo completato i primi due e

speravo che scegliessero uno fra questi; ma Gauss ha deciso per il terzo così oggi mi trovo in difficoltà, poiché devo ancora lavorare su quella questione.

Ciononostante, nel giro di pochi mesi Riemann riuscì a prepararsi e, il 10 giugno 1854, fu in grado di tenere la conferenza dal titolo *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*. L'esposizione suscitò una reazione insolitamente entusiastica da parte di Gauss che nei resoconti di Dirichlet espresse al collega Wilhelm Weber la sua alta ammirazione per le idee di Riemann *con un calore molto raro per lui* e segnò una svolta decisiva nella storia della geometria, generalizzando in modo significativo l'approccio gaussiano.

È importante sottolineare che, nonostante il titolo della conferenza, Riemann non fosse interessato a discutere i fondamenti della geometria e il ruolo del Postulato delle parallele, dal momento che reputava "infruttuoso" l'approccio puramente assiomatico alla geometria; egli, al contrario, voleva introdurre un punto di vista radicalmente innovativo, basato sul concetto generale di varietà n -estesa, che si concentrasse sulla nozione di *metrica*, allo scopo di fornire una trattazione unificata delle diverse geometrie (metriche) allora conosciute [23, pp. 121–123].

Il testo, di carattere non tecnico e quasi completamente privo di formule analitiche (vi è una sola formula in tutto il lavoro), esordisce con una chiara rottura con l'approccio tradizionale alla geometria [64, p. 313]:

È noto che la geometria presuppone, come qualcosa di dato, sia il concetto di spazio, sia i primi concetti fondamentali per le costruzioni nello spazio. Di essi dà soltanto definizioni nominali, mentre le determinazioni essenziali compaiono sotto forma di assiomi. La relazione tra questi presupposti resta dunque in ombra; non si vede né se la loro connessione è necessaria e in che misura, né se è a priori possibile. Dai tempi di Euclide fino a Legendre, tanto per ricordare il più famoso dei moderni edificatori della geometria, questa oscurità non è stata superata né dai matematici né dai filosofi. La ragione di ciò sta probabilmente nel fatto che non è stato per nulla elaborato il concetto generale di grandezze pluriestese, in cui rientrano le grandezze spaziali.

Riemann propone di effettuare una separazione preliminare tra le nozioni di carattere topologico e quelle di tipo metrico, utilizzando la nozione di *varietà n -estesa*, che diventa il cuore di tutto il ragionamento. In termini attuali, tale nozione può essere identificata con quella di *varietà topologica localmente euclidea*. Privo dei necessari strumenti tecnici, Riemann si limita a un'argomentazione di carattere intuitivo, distinguendo le varietà in due categorie: varietà discrete o continue, a seconda che il passaggio da una grandezza all'altra avvenga in modo discreto o continuo [23, p. 122].

Concentrandosi sulle varietà continue, egli sostiene che il confronto tra grandezze sia subordinato alla determinazione di una *misura* che ha come caratteristica fondamentale il procedere da un elemento della varietà in due direzioni

opposte. Riemann spiega tale concetto partendo dalla variazione continua di una varietà 1-volta estesa e arricchendo il numero associato alla varietà introducendo un'altra varietà 1-volta estesa *del tutto distinta e ciò in un modo definito*, allo scopo di ottenere una varietà doppiamente estesa; in modo simile, arriva a definire una varietà $n + 1$ -volte estesa partendo da una n -volte estesa [64, pp. 313–314]:

Se ora si ipotizza che questa varietà passi ad un'altra del tutto distinta e ciò in un modo definito, vale a dire che ciascun punto passi in un punto dell'altra, allora tutte le specializzazioni così estese si chiamano varietà doppiamente estese. In un modo simile si ottiene una varietà triplamente estesa ed è facile vedere come sia possibile continuare questa costruzione. Se, anziché considerare il concetto come determinabile, si considera il suo oggetto come mutevole, si può considerare questa costruzione come una connessione di una variabilità $n+1$ dimensionale a partire da una variabilità n -dimensionale e a partire da una unidimensionale. [...]

Ripetendo n volte questo processo, la determinazione della posizione in una varietà n -volte estesa è ridotta ad n determinazioni di quantità e dunque la determinazione della posizione di una varietà assegnata è ridotta ad un numero finito di determinazioni di quantità, quando ciò è possibile. Ci sono varietà nelle quali la determinazione della posizione richiede non già un numero finito ma o una serie infinita o una varietà continua di determinazioni di quantità. Queste varietà sono, ad esempio, le possibili determinazioni di una funzione per una regione assegnata, le possibili forme di una figura solida, ecc.

L'idea di Riemann è quella di caratterizzare la variazione continua di una varietà con un numero di coordinate pari al numero associato alla varietà: così facendo, una coordinata è sufficiente per descrivere una varietà 1-volta estesa (che possiamo identificare quindi come una retta) e, arricchendo il numero di coordinate coinvolte, è possibile descrivere una varietà tramite un numero finito di coordinate, estendendo il concetto di spazio. Il ragionamento ricorda il metodo di determinazione dei gradi di libertà di un sistema meccanico [64, pp. 313–314].

Dopo aver introdotto il concetto di varietà n -volte estesa, Riemann si concentra sulla questione delle relazioni metriche e sulle condizioni sufficienti a determinarle, sostenendo che sia necessario assegnare le lunghezze di tutte le curve della varietà [23, p. 123]:

Il problema consiste dunque nell'elaborare un'espressione matematica per la lunghezza delle linee. [...] si possono allora immaginare le linee suddivise in elementi, entro i quali le relazioni tra le quantità dx possono essere considerate come costanti, e il problema ritorna dunque ad essere quello di elaborare, per ogni punto, una espressione generale per l'elemento lineare ds che dunque conterrà le grandezze x e le grandezze dx .

La questione diventa, dunque, determinare una famiglia, al variare del punto considerato sulla varietà, di applicazioni a valori reali definite sullo spazio tangente alla varietà, in modo da ottenere $ds = F_x(dx)$ per ogni punto x . Riemann impone la forma di F fornendo la descrizione di ds [23, p. 124]:

Il ds è uguale alla radice quadrata di una funzione intera, omogenea, di secondo grado della grandezza dx , in cui i coefficienti sono funzioni continue delle grandezze x .

Ciò significa, data g_{ij} forma bilineare definita positiva, imporre l'uguaglianza:

$$ds = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j}; \quad (3.99)$$

che equivale a richiedere la validità del teorema di Pitagora nell'infinitamente piccolo [23, p. 124]. Non si può escludere che l'osservazione che segue nel discorso abbia contribuito in modo significativo alla revisione, da parte di Beltrami, della tesi secondo cui una rappresentazione della stereometria non euclidea fosse impossibile [64, p. 315]:

Per lo spazio, quando la posizione di un punto è espressa tramite coordinate ortogonali, $ds = \sqrt{\sum (dx^2)}$; lo spazio è dunque contenuto tra queste come il caso più semplice.

Se, in tali ipotesi, l'elemento lineare ds di una certa varietà può essere ricondotto, eventualmente dopo un cambio di coordinate, alla forma $ds = \sqrt{\sum (dx^2)}$, la varietà viene chiamata da Riemann *piatta*; dopodiché, Riemann osserva che, per determinare la forma quadratica della metrica di una n -varietà, sono necessarie $\frac{n(n-1)}{2}$ funzioni indipendenti e introduce un sistema di coordinate che permette di introdurre il concetto di curvatura di una varietà, le *coordinate normali*. Elenchiamo i punti essenziali dell'esposizione di Riemann [64, pp. 315–317]:

- Sia P un punto di una varietà, si considerino tutte le geodetiche che partono da P . Si noti che non viene trattata la questione dell'esistenza e unicità, ma è data per scontata.
- Considerato un punto Q , la sua posizione si può determinare grazie alla direzione della geodetica per P su cui esso giace e alla sua distanza da P , misurata lungo l'arco di geodetica $\widehat{PQ}$.
- La posizione di Q può essere individuata anche conoscendo i valori dei rapporti dx_0 tra i vari dx e la lunghezza s di $\widehat{PQ}$.
- Vengono introdotte, al posto dei rapporti dx_0 , delle loro funzioni lineari, dette ancora dx , in modo che ds^2 in P si possa scrivere in forma euclidea: $ds^2(P) = \sum dx^2$.
- Le quantità indipendenti sono s e i rapporti delle quantità dx .
- Si considerino $x_1, x_2, \dots, x_n$ coordinate proporzionali ai dx appena introdotti e tali che $s^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$.

- Lo sviluppo al quarto ordine dell'elemento lineare è dato da:

$$ds^2 = \sum dx^2 + G(x_i dx_j - x_j dx_i), \quad (3.100)$$

dove G è una funzione omogenea del secondo ordine nei suoi argomenti $x_i dx_j - x_j dx_i$, che sono $\frac{1}{2}n(n-1)$, dal momento che $1 \leq i < j \leq n$. Allora:

Si ottiene una grandezza finita quando la si divide per il quadrato [dell'area] di un triangolo infinitamente piccolo nei cui vertici i valori delle incognite sono

$$(0, 0, 0, \dots) \quad (x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (dx_1, dx_2, dx_3, \dots).$$

Questa grandezza mantiene lo stesso valore finché le grandezze x e dx sono contenute nella medesima forma lineare ovvero fintantoché entrambe le geodetiche che vanno dai valori 0 ai valori x e dai valori 0 ai valori dx restano nel medesimo elemento di superficie, e dipende perciò solo dalla posizione e dalla loro direzione. Sarà evidentemente nulla quando la varietà rappresentata è piatta, [...] e perciò la si può assumere come misura dell'allontanamento lungo questa direzione superficiale che ha luogo per la varietà dalla planarità. Se la si moltiplica per $-\frac{3}{4}$, essa risulta uguale alla grandezza che il Sig. Consigliere Privato Gauss ha chiamato la curvatura di una superficie.

I passaggi sopracitati, che definiscono le coordinate dette *normali*, sono equivalenti a sviluppare il tensore metrico g_{ij} in un punto, ottenendo

$$\sum g_{ij}(x) dx_i dx_j = \sum dx_i^2 + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_\ell \partial x_k}(0) x_\ell x_k dx_i dx_j + \dots, \quad (3.101)$$

e notando che le proprietà di simmetria di $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_\ell \partial x_k}(0)$ danno la possibilità di sviluppare al quarto ordine l'elemento lineare, come afferma Riemann.

Tornando alle varietà piatte, Riemann le identifica come un caso particolare di varietà a curvatura costante; inoltre, egli caratterizza tali varietà affermando che, su di esse, le figure possono essere mosse senza deformazione. Per garantire l'equivalenza tra la richiesta sulla mobilità delle figure e la costanza della curvatura, egli ragiona in questi termini [23, pp. 129–130]:

La caratteristica comune di queste varietà, la cui misura di curvatura è costante, si può esprimere anche dicendo che le figure che si trovano su di esse possono essere mosse senza deformarsi. Ché evidentemente le figure su di esse non potrebbero venir spostate e fatte ruotare, se in ogni punto la misura di curvatura non fosse la stessa in ogni direzione. D'altra parte però, le relazioni metriche della varietà sono completamente determinate dalla misura di curvatura; le relazioni metriche sono perciò esattamente le stesse per qualsiasi punto, e quindi da ogni punto si possono condurre le medesime

costruzioni [...]. Le relazioni metriche di queste varietà dipendono soltanto dal valore della misura di curvatura e, riguardo alla formulazione analitica si può osservare che, se si denota questo valore con α , l'espressione dell'elemento lineare è data nella forma

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4} \sum x^2} \sqrt{\sum (dx)^2}. \quad (3.102)$$

Dunque, il fatto che Riemann ritenga sufficiente conoscere la curvatura per determinare la struttura metrica della varietà implica che la geometria risulti localmente identica in punti differenti; di conseguenza, è possibile trasportare e ruotare un corpo rigido senza alterarne la forma, cioè senza introdurre deformazioni metriche. In termini moderni, questa proprietà può essere formulata affermando che, dati due punti della varietà, esistono opportuni intorno degli stessi che risultano isometrici.

Nonostante alcuni dei risultati di Riemann furono in seguito ridimensionati, resta indubbia la profondità delle sue intuizioni, che permisero di estendere la nozione di curvatura gaussiana a varietà di qualunque dimensione e stimolarono una revisione globale della geometria.

3.7 La Teoria fondamentale del 1869

L'*Habilitationsvortrag* di Riemann, scritto nel 1854, fu pubblicato postumo da Richard Dedekind (1831-1916) solamente nel 1868; Beltrami venne a conoscenza dell'opera nello stesso anno e ne fu molto incuriosito. Nella lettera a Hoüel del 4 dicembre 1868, egli scrive [15, p. 9]:

Quanto alla traduzione della Memoria postuma di Riemann, mi rammarico della cattiva disposizione delle riviste francesi, e non posso rassegnarmi a considerarla come definitiva. Se non sbaglio, ci sono in questo lavoro, in mezzo a numerose oscurità, dei veri tratti di luce, e non so se alcune delle concezioni più importanti che vi si incontrano, siano mai state presentate in modo così lucido.

La traduzione francese di Hoüel fu pubblicata negli *Annali di matematica* nel 1870, grazie anche alle insistenze di Cremona, come testimonia la lettera a Hoüel dell'8 gennaio 1869 [15, pp. 72–73]:

Per quanto riguarda il trattato postumo di Riemann, il signor Cremona vi esorta vivamente a curarne una traduzione per gli *Annali*; vi saremo molto grati se poteste innanzitutto eliminare da questo lavoro le difficoltà legate alla lingua e alla stesura. Ricordo, ad esempio, di aver avuto molta difficoltà a capire cosa Riemann intendesse con «Bestimmungsweise».

In questa stessa lettera, Beltrami lamenta anche alcune difficoltà linguistiche incontrate nello studio dell'*Habilitationsvortrag*, soprattutto legate all'uso

di termini specifici che non hanno un corrispondente chiaro in italiano; le stesse difficoltà erano state espresse da Beltrami anche in una lettera ad Angelo Genocchi [15, p. 73]. Tutto ciò, se da un lato dimostra la grande attenzione con cui Beltrami si è dedicato alla lettura dello scritto di Riemann, dall'altro stupisce, poiché mette in luce come, nonostante i due anni trascorsi dai due a Pisa (dal 1863 al 1865) e i molteplici incontri avvenuti, Riemann non abbia mai parlato a Beltrami delle sue idee. Di ciò Beltrami parla in una lettera a Hoüel del 4 dicembre 1868 [15, p. 11]:

Ciò che mi stupisce è che avendo avuto un buon numero di colloqui con Riemann (nei due anni che ha trascorso a Pisa, poco prima della sua fine deplorabile) non mi abbia mai parlato delle sue idee che hanno dovuto tuttavia occuparlo per un bel po' di tempo, poiché un bello schizzo non può essere l'opera di un solo giorno, anche per un così bel genio.

Ciononostante, fu proprio la lettura dell'*Habilitationsvortrag* che spinse Beltrami a pubblicare il secondo lavoro fondamentale riguardante le superfici a curvatura costante negativa: la *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*. Apparso nel 1869 sugli *Annali di Matematica pura ed applicata*, l'articolo è composto da due parti: nella prima, Beltrami si pone l'esplicito obiettivo di generalizzare, da un punto di vista analitico, alcune nozioni fornite da Riemann nell'*Habilitationsvortrag*; invece, nella seconda, egli mostra che tale generalizzazione contiene i principi dell'interpretazione analitica della geometria spaziale non euclidea nell'ottica teorica delle varietà n -dimensionali a curvatura costante negativa [15, pp. 17–18].

Beltrami avvia l'articolo riprendendo i risultati già sviluppati in [3, 4] e rende noti i suoi scopi [9, p. 406]:

In una Memoria inserita negli Annali di Matematica pura ed applicata⁵⁹ ho cercato le superficie dotate della proprietà di avere le loro linee geodetiche rappresentate da equazioni lineari, ed ho trovato che questa proprietà si verifica per le sole superficie di curvatura costante e per certe variabili speciali che l'analisi del problema ha spontaneamente introdotte.

Nel presente scritto espongo i risultati molto più generali a cui mi ha condotto l'ulteriore evoluzione di quel concetto, coordinato ad alcuni principî tracciati da RIEMANN nell'insigne suo lavoro postumo: *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, non ha guari pubblicato dal sig. DEDEKIND nel XIII volume delle Memorie di Gottinga. Spero che le mie ricerche possano aiutare l'intelligenza di alcune parti di questo profondo lavoro.

Certe locuzioni di cui, per amor di brevità, faccio uso frequente non parranno, io credo, né stentate né oscure a chi guardi più alla sostanza che alla forma. L'attento lettore non avrà da fare alcuno

⁵⁹Beltrami si riferisce a [3].

sforzo per intenderle senz'altra spiegazione, restandogli del resto piena facoltà di non attribuir loro che un significato meramente analitico.

Dopodiché, sfruttando il formalismo di Riemann, Beltrami fornisce l'espressione dell'elemento lineare ds in uno spazio n -dimensionale [9, p. 407]:

$$ds = R \frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{x}, \quad (3.103)$$

interpretando $x, x_1, \dots, x_n$ come le coordinate del punto considerato, vincolate dalla condizione [9, p. 407]

$$x^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = a^2, \quad (3.104)$$

e considerando R e a costanti. Una volta sottolineato che la forma di tale espressione determina la *natura* dello spazio considerato, Beltrami denomina [9, p. 407]

$$\Omega = \sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2} \quad (3.105)$$

e definisce le linee geodetiche come quelle curve che, nello spazio considerato, realizzano il minimo del funzionale $\int \frac{\Omega}{x}$, cioè soddisfano l'equazione [9, p. 407]

$$\delta \int \frac{\Omega}{x} = \frac{1}{R} \delta \int ds = 0, \quad (3.106)$$

dove δ indica la variazione prima del funzionale considerato; inoltre è imposta la condizione, dovuta al vincolo (3.104) [9, p. 407]:

$$x \delta x + x_1 \delta x_1 + \dots + x_n \delta x_n = x \delta x + \sum_{i=1}^n x_i \delta x_i = 0. \quad (3.107)$$

La variazione prima risulta essere [9, p. 407]:

$$\int \delta x \left[\frac{\Omega}{x^2} + d \left(\frac{dx}{x\Omega} \right) \right] + \sum_{i=1}^n \delta x_i d \left(\frac{dx_i}{x\Omega} \right) = 0; \quad (3.108)$$

tenendo conto del vincolo sulle variazioni prime e chiamando k il moltiplicatore di Lagrange, tramite le equazioni di Eulero-Lagrange per la stazionarietà⁶⁰ si ottiene [9, p. 407]:

$$\frac{\Omega}{x^2} + d \left(\frac{dx}{x\Omega} \right) = kx \quad \frac{dx_i}{x\Omega} = kx_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.109)$$

⁶⁰Sia dato un funzionale generico della forma $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx$; imponendo la condizione di stazionarietà per la variazione prima del funzionale, ovvero richiedendo che $\delta J = 0$ per ogni variazione ammissibile δy nulla agli estremi ($\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$), si ottiene l'equazione differenziale di Eulero-Lagrange nella sua forma classica $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$; tale equazione rappresenta la condizione necessaria affinché la funzione $y(x)$ sia un punto stazionario (massimo, minimo o sella) per il funzionale $J[y]$.

Moltiplicando queste ultime equazioni ordinatamente per $x, x_1, \dots, x_n$ e sommandole tra loro, si ricava la seguente [9, p. 407]:

$$d\left(\frac{x dx + x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n}{x\Omega}\right) = ka^2; \quad (3.110)$$

a seguito della condizione (3.104) si deve avere $x dx + x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n = 0$, perciò l'unico valore ammissibile è $k = 0$ e dunque le equazioni delle geodetiche assumono la seguente forma [9, p. 407]:

$$\begin{cases} \frac{\Omega}{x^2} + d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right) = 0, \\ dx_i = c_i x_i \Omega, \end{cases} \quad (3.111)$$

con $c_1, \dots, c_n$ un opportuno sistema di costanti.

Sommando tra loro i quadrati delle equazioni delle geodetiche trovate e chiamando $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2}$ si ricava [9, p. 408]:

$$\Omega = -\frac{dx}{\sqrt{1 - c^2 x^2}}, \quad (3.112)$$

valore che, inserito nelle equazioni stesse delle geodetiche, permette di ridurre la prima a un'identità e le altre, eliminando il termine $x\Omega$, alla forma [9, p. 408]:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 x_n + b'_1, \\ \vdots \\ x_{n-1} = b_{n-1} x_n + b'_{n-1}. \end{cases} \quad (3.113)$$

Sono state, quindi, ottenute le equazioni delle geodetiche come relazioni *lineari* tra le coordinate, analogamente a quanto era stato ottenuto nel caso di superfici bidimensionali a curvatura costante negativa [9, p. 408]:

Dunque le linee geodetiche dello spazio considerato sono rappresentate da $n - 1$ equazioni lineari fra le n coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$, a similitudine di ciò che ha luogo nel piano e nello spazio ordinario, quando si fa uso di coordinate cartesiane, e nelle superficie di curvatura costante, quando si fa uso delle variabili u, v della citata Memoria.⁶¹ Fra i sistemi di linee geodetiche sono da notarsi specialmente quelli che si ottengono eguagliando tutte le coordinate, tranne una, ad altrettante costanti. Per ogni punto dello spazio passa una geodetica di ciascuno di questi sistemi, cui appartengono gli stessi assi coordinati delle x_1 , delle $x_2, \dots$ delle x_n , per ciascuno dei quali le restanti coordinate sono tutte nulle: conviene chiamarli *sistemi delle x_1 , delle $x_2, \dots$ delle x_n* .

Grazie al parallelismo con il suo precedente lavoro, Beltrami elenca a questo punto una serie di risultati conseguenti alle formule trovate, mostrando

⁶¹Beltrami fa sempre riferimento a [3].

una grande abilità nella manipolazione algebrica e nella deduzione di proprietà geometriche. L'elemento lineare di lunghezza d'arco geodetico $d\rho$ è ricavato dall'equazione (3.103), in cui è sostituito ad Ω il valore ottenuto nell'equazione (3.112), così da ottenere [9, p. 408]

$$d\rho = \frac{R\Omega}{x} = -\frac{Rdx}{\sqrt{1-c^2x^2}}, \quad (3.114)$$

che può essere integrata e fornire, per un'opportuna ρ_0 costante, l'uguaglianza [9, p. 408]

$$cx = \frac{1}{\cosh\left(\frac{\rho-\rho_0}{R}\right)}; \quad (3.115)$$

da questa, tramite manipolazioni algebriche, Beltrami ottiene la formula generale per la lunghezza di un arco geodetico ρ in funzione delle coordinate dei suoi estremi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ [9, p. 409]:

$$\cosh\left(\frac{\rho}{R}\right) = \frac{a^2 - \sum_{i=1}^n x_i x_i^0}{\sqrt{(a^2 - x^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2)(a^2 - (x^0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i^0)^2)}}. \quad (3.116)$$

Inoltre, Beltrami è in grado di generalizzare il concetto di *circonferenza limite* ottenuto nel caso bidimensionale: supponendo reali sia le coordinate scelte inizialmente sia le costanti a e R , il *limite* dello spazio n -dimensionale ammissibile è lo spazio $n-1$ -dimensionale dato da [9, p. 409]

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2; \quad (3.117)$$

allora, i punti *reali* dello spazio devono soddisfare la condizione [9, p. 409]:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < a^2. \quad (3.118)$$

Proseguendo nella generalizzazione dei concetti, Beltrami determina il metodo per ricavare le lunghezze dei tre lati di un triangolo rettilineo avente i vertici assegnati;⁶² in seguito, egli fornisce la *condizione di ortogonalità* per due incrementi dx e δx : dati due elementi lineari

$$ds = R \frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{x}, \quad \delta s = R \frac{\sqrt{\delta x^2 + \delta x_1^2 + \dots + \delta x_n^2}}{x},$$

essi sono *ortogonali* se vale la condizione [9, p. 411]:

$$dx \delta x + dx_1 \delta x_1 + \dots + dx_n \delta x_n = 0. \quad (3.119)$$

Sfruttando l'ortogonalità, Beltrami mostra che le n geodetiche condotte da un punto arbitrario dello spazio nei sistemi $x_1, x_2, \dots, x_n$ si comportano come gli assi cartesiani nel piano: infatti, esse sono perpendicolari agli iperpiani $n-1$ -dimensionali $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$. Grazie a ciò, ogni punto arbitrario $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ può essere rappresentato dal sistema di equazioni differenziali

⁶²Tale risultato non è presente nella Memoria originale italiana, ma fu inserito per volontà dell'autore nella sua traduzione francese.

[9, p. 412]

$$\frac{dx_1}{x_1 - x_1^0} = \frac{dx_2}{x_2 - x_2^0} = \dots = \frac{dx_n}{x_n - x_n^0} = \frac{dx}{x - \frac{\zeta}{x}}, \quad (3.120)$$

dove $\zeta = a^2 - \sum_{i=1}^n x_i x_i^0$. In questo modo, lo spazio ortogonale a tutte le geodetiche considerate è [9, p. 412]

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{dx}{x}, \quad (3.121)$$

che, una volta integrato, restituisce [9, p. 412]

$$\frac{a^2 - \sum_{i=1}^n x_i x_i^0}{\sqrt{a^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2}} = C. \quad (3.122)$$

Confrontando tale risultato con la (3.116), si nota che lo spazio da essa definito è il luogo dei punti equidistanti dal punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ fissato inizialmente; denominata allora ϱ la distanza costante tra $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ e i punti dello spazio definito sopra, si trova l'equazione [9, p. 412]

$$C = \left(\sqrt{a^2 - \sum_{i=1}^n (x_i^0)^2} \right) \cosh \frac{\rho}{R} = x^0 \cosh \frac{\rho}{R}, \quad (3.123)$$

che determina una famiglia, al variare di ϱ , di iperpiani che rappresentano le sfere dello spazio iperbolico, intese come i luoghi geometrici dei punti aventi distanza geodetica costante da un punto fissato.

Procedendo come in [4], Beltrami manda il punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ all'infinito e nota che, sostituendo a ϱ il termine $\varrho' - \varrho$, si ottiene un limite costante [9, p. 412]:

$$\frac{a^2 - \sum_{i=1}^n x_i x_i^0}{\sqrt{a^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2}} = k \exp\left(-\frac{\varrho}{R}\right), \quad (3.124)$$

equazione che descrive gli orocicli n -dimensionali.

Beltrami cerca a questo punto di capovolgere la prospettiva presente nel *Saggio*, dove era partito da una superficie a curvatura costante negativa per mostrare che essa era la superficie adatta ai suoi scopi. Ora invece egli mostra come la curvatura costante della superficie si possa ottenere come conseguenza della natura dello spazio considerato [9, p. 413]:

La natura dello spazio fin qui considerato è tale che, limitandone una porzione qualunque e trasportandola in una posizione diversa da quella che prima occupava, si può sempre ottenere la *sovrapposizione* con un'altra porzione corrispondente dello stesso spazio.

A tale scopo, Beltrami fornisce la sua interpretazione del concetto di *sovrapposizione*, inteso come il confronto di due porzioni differenti di uno spazio nelle quali sono considerati un'infinità di punti e un'infinità di archetti di geodetiche che li congiungono [9, p. 413]:

Per concepire come ciò possa accadere [la sovrapposizione tra due porzioni di spazio] si immagini disseminato in quella porzione di spazio un numero ∞^n di punti, infinitamente vicini tra loro, e riuniti a due a due dagli archetti geodetici che ne misurano le mutue distanze. Ciò posto, la *sovrapponibilità* della quale si tratta consiste in questo, che in ogni altra parte dello spazio considerato si possono disseminare dei punti ad *esso appartenenti*, i quali hanno fra loro le medesime distanze mutue e la medesima disposizione che avevano quelli della porzione immaginata; dimodoché il reticolo n^{plice} formato dalle linee congiungenti i punti contigui di questa può essere completamente identificato col reticolo analogo dell'altra porzione, senza che i legami di esso devono essere in alcun punto rotti o duplicati. Le alterazioni che il primo reticolo deve subire per identificarsi col secondo non possono del resto riuscire *apparenti* che quando si considerano l'uno e l'altro in *rapporto ad uno spazio avente più di n dimensioni*: finché ciò non accade i due reticoli presentano il carattere dell'*eguaglianza per congruenza* o per *simmetria*.

Beltrami dimostra allora che una trasformazione *ortogonale* corrispondente ad una rotazione che fissa l'origine non cambia la forma dell'elemento lineare ds [9, p. 414]:

La sovrapponibilità di cui si parlava ha effettivamente luogo quando lo spostamento si riduce ad una semplice rotazione intorno all'origine.

Allo stesso modo, nemmeno un cambiamento di origine varia la forma di ds [9, p. 416]:

L'espressione dell'elemento lineare conserva la stessa forma anche mutando l'origine, e quindi, per un ragionamento analogo a quello di pocanzi.

Si ritrova dunque, anche in questo caso, che la più generale trasformazione degli assi coordinati che mantenga invariato l'elemento lineare ds è una *trasformazione omografica*, che nel contesto del presente articolo assume la forma [9, p. 416]:

$$x_r = \pm \frac{ay_r \sqrt{a^2 - a_1^2}}{ab + a_1 b_1}, \quad r = 2, \dots, n. \quad (3.125)$$

Concentrandosi ora sulla forma dell'elemento lineare ds nel caso di trasformazioni chiamate da Beltrami *polari*, cioè della forma [9, p. 416]

$$x_1 = r\lambda_1, \quad x_2 = r\lambda_2, \quad \dots, \quad x_n = r\lambda_n, \quad (3.126)$$

con la condizione $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 1$, Beltrami pone $d\Lambda^2 = \sum_{i=1}^n d\lambda_i^2$, in modo tale da ottenere, come conseguenza della condizione sulle λ_i , l'espressione [9, p. 416]

$$\sum_{i=1}^n dx_i^2 = dr^2 + r^2 d\Lambda^2; \quad (3.127)$$

sostituendo tali valori nella formula del quadrato dell'elemento lineare si ricava [9, p. 416]

$$ds^2 = \left(\frac{aR dr}{a^2 - r^2} \right)^2 + \frac{R^2 r^2}{a^2 - r^2} d\Lambda^2, \quad (3.128)$$

da cui, chiamando ϱ la distanza geodetica dall'origine al punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, si trovano [9, p. 416]

$$d\varrho = \frac{Ra dr}{a^2 - r^2} \quad \sinh^2 \frac{\varrho}{R} = \frac{r^2}{a^2 - r^2}, \quad (3.129)$$

e quindi è possibile scrivere l'equazione dell'elemento lineare in questo modo [9, p. 416]:

$$ds^2 = d\varrho^2 + \left(R \sinh \frac{\varrho}{R} \right)^2 d\Lambda^2. \quad (3.130)$$

Seguendo gli stessi ragionamenti ed un cambio di coordinate detto *stereografico*, ottenuto ponendo [9, p. 417]

$$\xi_r = 2R \tanh\left(\frac{\varrho}{2R}\right) \lambda_r \quad r = 2, \dots, n, \quad (3.131)$$

Beltrami riesce a ritrovare proprio una delle formule solo descritte da Riemann nell'*Habilitationsvortrag* [9, p. 417]:

$$ds = \frac{\sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \dots + d\xi_n^2}}{1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{4R^2}}, \quad (3.132)$$

confermando che la varietà in questione rispetta le condizioni imposte da Riemann per le varietà a curvatura costante.

Con un'ulteriore cambio di coordinate, Beltrami crea un legame anche con le *Disquisitiones generales* di Gauss: sfruttando le coordinate normali, si trovano infatti le espressioni delle curvature sezionali, costanti e pari a $\frac{4}{3R^2}$, e dal momento che [9, p. 418]:

Secondo la definizione di RIEMANN, tale quoziente moltiplicato per $-\frac{3}{4}$ esprime la misura della curvatura nel senso dell'elemento superficiale anzidetto, si vede che nello spazio qui considerato tale misura è costante ed uguale a $-\frac{1}{R^2}$ in ogni direzione intorno a ciascun punto. Egli è perciò che questo spazio può acconciamente esser chiamato di *curvatura costante*.

Il risultato appena trovato da Beltrami è proprio quello che Gauss considera per la misura della curvatura.

Successivamente, come ultima trasformazione di coordinate, Beltrami considera [9, p. 419]

$$\eta = \frac{Rx}{a - x_n}, \quad \eta_1 = \frac{Rx_1}{a - x_n}, \quad \dots, \quad \eta_{n-1} = \frac{Rx_{n-1}}{a - x_n}, \quad (3.133)$$

con cui ottiene l'elemento lineare [9, p. 419]:

$$ds = R \frac{\sqrt{d\eta^2 + \sum_{i=1}^{n-1} d\eta_i^2}}{\eta}. \quad (3.134)$$

Da quest'ultima equazione, Beltrami deduce [9, p. 419]:

La formola (3.103) rappresenta l'elemento lineare di uno spazio di curvatura costante anche quando le $n + 1$ variabili $x, x_1, \dots, x_n$ sono indipendenti fra loro e non punto legate dalla relazione (3.104), salvo che in questo caso il numero delle dimensioni dello spazio è $n + 1$ e non sussiste più la proprietà che le linee geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari. Ma una conseguenza assai notevole che si deduce dalla espressione (3.134) è che lo spazio ad $n - 1$ dimensioni $\eta = \text{cost.}$ ha la sua curvatura nulla in ogni punto, poichè il suo elemento lineare ha la forma

$$ds = \text{cost.} \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2 + \dots + d\eta_{n-1}^2}. \quad (3.135)$$

Posto quindi $\eta = \text{cost.}$, Beltrami nota che l'elemento lineare assume la forma corrispondente a una varietà *piatta* nella classificazione di Riemann. Procedendo a ritroso nelle considerazioni, Beltrami può anche concludere che la condizione $\eta = \text{cost.}$ coincide con la condizione $\varrho = \text{cost.}$, che permette di riscrivere l'elemento lineare ds come [9, p. 420]

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(\frac{k}{a}\right)^2 e^{-\frac{2\rho}{R}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} d\eta_i^2\right); \quad (3.136)$$

in conclusione, Beltrami riassume i risultati ottenuti come segue, descrivendo le caratteristiche dell'orosfera nello spazio [9, p. 420]:

Lo spazio ad $n - 1$ dimensioni $\eta = \text{cost.}$ non è altro che una delle traiettorie ortogonali di tutte le geodetiche convergenti verso uno stesso punto all'infinito, cioè di un sistema di geodetiche *parallele* fra loro. Reciprocamente ciascuna di queste traiettorie ortogonali ha in ogni punto la curvatura nulla, epperò due qualunque di esse (appartenenti o meno al medesimo sistema) sono sovrapponibili l'una all'altra in tutti i modi possibili.

Dal momento che Beltrami ha finora considerato $n - 1$ equazioni lineari, ritrovando la rappresentazione delle linee geodetiche, nel tentativo di estendere il suo ragionamento, si chiede cosa rappresenti il sistema costituito da $n - m$ equazioni lineari: analogamente al caso precedente, supponendo di poter ottenere $n - m$ coordinate in funzione delle restanti m , egli deduce [9, p. 421]:

Il luogo dei punti rappresentati dal complesso delle $n - m$ equazioni lineari fra le coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$ è uno spazio ad m dimensioni,

la cui curvatura è dovunque costante ed eguale a quella dello spazio primitivo.

Così per es. $n - 2$ equazioni lineari rappresentano una *superficie* di curvatura costante (uguale a $-\frac{1}{R^2}$), che conviene distinguere col nome di *superficie di prim'ordine*; $n - 3$ rappresentano uno *spazio a tre dimensioni* di curvatura costante (uguale a $-\frac{1}{R^2}$); ecc.

L'analogia con il caso bidimensionale procede anche nella descrizione delle proprietà delle superfici così descritte [9, p. 421]:

Una linea geodetica reale è individuata senza ambiguità da due punti dello spazio: nelle ipotesi fin qui ammesse non è possibile alcuna eccezione a questa proprietà.

Una superficie di prim'ordine è individuata senza ambiguità da tre punti dello spazio. Essa contiene tutta intera la geodetica che passa per due suoi punti reali, talchè se due superficie reali di prim'ordine hanno due punti reali in comune, hanno del pari in comune tutta la geodetica individuata da questi.

Beltrami procede poi descrivendo, in questo contesto, i triangoli geodetici [9, pp. 421-422]:

Un triangolo geodetico giace sempre sopra una determinata superficie di prim'ordine, la quale è individuata anche quando il triangolo è infinitesimo. Perciò se si prolungano secondo linee geodetiche tutti gli elementi lineari contenuti in uno stesso elemento di superficie, le linee geodetiche così ottenute hanno tutte un luogo geometrico che è una determinata superficie di prim'ordine.

Quando due superficie di prim'ordine si intersecano lungo una linea, necessariamente geodetica, il loro angolo è dovunque costante; cioè condotti da un punto della loro intersezione due elementi lineari normali ad essa, l'uno nella prima, l'altro nella seconda superficie, la distanza infinitesima dei loro termini è costante, se sono costanti le loro lunghezze.

Grazie a tali definizioni, è possibile allora dimostrare, ancora una volta (come già fatto in [4]) , che la trigonometria iperbolica *non differisce [...] della trigonometria sferica che per il cambiamento di R in $R\sqrt{-1}$ (R raggio della sfera), rimanendo invariati i lati e gli angoli.*

Ricollegandosi, a questo punto, con i risultati di Gauss e Lobačevskij sul parallelismo, Beltrami concentra l'attenzione sulla definizione di *parallele* [9, p. 424]:

Se si chiamano *parallele* due geodetiche convergenti verso un medesimo punto all'infinito, come già si è fatto, si vede dunque che da un punto si possono condurre *due* distinte geodetiche parallele ad una geodetica data, che queste due parallele sono egualmente inclinate

da una parte e dall'altra della geodetica condotta dallo stesso punto normalmente alla data, e che la loro inclinazione B sulla normale è legata alla lunghezza a di questa stessa normale mediante la relazione (24)⁶³. Questo risultato s'accorda pienamente con quello che forma la base fondamentale della *geometria non-euclidea*, i cui principî, già familiari a GAUSS, sono stati compendiatî maestrevolmente da LOBATSCHEWSKY sotto una veste sintetica.

Beltrami giunge dunque a giustificare la validità della stereometria non euclidea, mostrando che nel sistema da lui considerato risultano verificati sia il principio di sovrapposizione sia l'univocità della geodetica determinata da due punti. Egli conclude quindi che le geometrie che accolgono il V postulato di Euclide e quelle che lo rifiutano poggiano sugli stessi fondamenti e dunque che la negazione delle geometrie non euclidee non può essere giustificata senza compromettere simultaneamente la legittimità della geometria euclidea stessa [9, pp. 424-425]:

La possibilità della sua costruzione [della geometria non euclidea] col mezzo dell'ordinaria sintesi (limitatamente allo spazio di tre dimensioni) dipende in primo luogo da ciò che, come si è dimostrato, negli spazî di curvatura costante (positiva o negativa) ogni figura può essere mutata arbitrariamente di posizione senza subire alcuna alterazione nella grandezza e nella disposizione mutua dei suoi elementi contigui, *possibilità* da cui dipende l'*esistenza delle figure eguali* e quindi la *validità del principio di sovrapposizione*. In secondo luogo negli spazî di curvatura costante *negativa* le geodetiche sono caratterizzate, come la retta euclidea, dalla proprietà di essere individuate senza ambiguità da *due* soli dei loro punti, talchè vige per esse l'*assioma della retta*. Del pari le superficie di prim'ordine sono caratterizzate, come il piano euclideo, dalla proprietà di essere individuate senza ambiguità da *tre* soli dei loro punti, talchè vige per esse l'*assioma del piano*. Inoltre le relazioni delle linee geodetiche colle superficie di prim'ordine e di queste fra loro, sono le stesse di quelle delle rette coi piani e dei piani fra loro, poichè una di quelle superficie contiene tutta una geodetica tosto che ne contiene due punti, e due di quelle superficie si segano secondo una geodetica (e sotto un angolo costante) s'incontrano in un solo punto. Da questa corrispondenza consegue che se si ammettono gli assiomi fondamentali della geometria ordinaria, escludendo il Postulato delle parallele, i teoremi che si ottengono sono eguali a quelli della geometria dello spazio di curvatura costante negativa, poichè questa seconda geometria ha le stesse basi di quella, tranne il postulato anzidetto. I teoremi di essa sussistono per ogni valore della curvatura, che è il *parametro* della geometria non-euclidea (la quale io propongo di denominare *pseudosferica*), e le sole misure prese nello

⁶³La relazione citata è la seguente: $\tan \frac{B}{2} = e^{-\frac{a}{R}}$, che coincide con quella trovata da Lobačevskij.

spazio obbiettivo possono far riconoscere che il valore speciale della sua curvatura è zero, cioè che $R = \infty$ per esso; nello stesso modo che per *sole misure* si può assegnare la curvatura di una sfera data, che è il *parametro* della geometria sferica.

Beltrami termina la trattazione mostrando che è possibile vedere anche la geometria sferica come caso particolare della geometria iperbolica, ma prima elenca alcuni risultati che dimostrano la perfetta sovrapposizione teorica tra la geometria non euclidea e la geometria degli spazi di curvatura costante e solleva l'unica perplessità sopravvissuta alle sue riflessioni riguardanti la stereometria non euclidea, l'impossibilità della sua interpretazione geometrica in uno spazio *reale* [9, p. 427]:

Così tutti i concetti della geometria non-euclidea trovano un perfetto riscontro nella geometria dello spazio di curvatura costante negativa. Solamente fa d'uopo osservare che mentre quelli relativi alla semplice planimetria ricevono in tal modo un'interpretazione vera e propria, poiché diventano *costruibili* sopra una superficie *reale*, quelli all'incontro che abbracciano tre dimensioni non sono suscettibili che di una rappresentazione analitica, poiché lo spazio in cui tale rappresentazione verrebbe a concretarsi è diverso da quello cui generalmente diamo tal nome. Per lo meno l'esperienza non sembra poter essere messa d'accordo coi risultati di questa geometria più generale, se non si suppone infinitamente grande la costante R , cioè nulla la curvatura dello spazio; il che per altro potrebbe non essere dovuto che alla piccolezza dei triangoli che noi possiamo misurare, ossia alla piccola estensione dello spazio a cui le nostre osservazioni si estendono, non altrimenti da ciò che accade per le misure prese sopra una piccola parte di superficie terrestre, la precisione delle quali non è sufficiente a mettere in evidenza la sfericità del globo.

Quest'ultima perplessità, del tutto comprensibile nel contesto dell'epoca, rivela come Beltrami fosse ancora profondamente ancorato a una sensibilità orientata all'applicazione concreta delle costruzioni matematiche, piuttosto che alla loro piena autonomia teorica. Solo con gli sviluppi della fisica del Novecento, in particolare con l'emergere di nuove concezioni spazio-temporali, si sarebbe evidenziato come concezioni alternative di spazio e superficie possano descrivere la realtà in modo molto più concreto di quanto egli stesso potesse allora plausibilmente concepire.

3.8 Il consolidamento delle idee di Beltrami

Le due principali opere di Beltrami legate alla geometria non euclidea sono dunque segnate da una sostanziale continuità nelle idee; a ciò fa eccezione la posizione di Beltrami nei confronti della stereometria non euclidea, che tra il *Saggio* e la *Teoria Fondamentale* cambia radicalmente grazie alla lettura delle innovative idee di Riemann.

Beltrami studiò l'*Habilitationsvortrag*, come abbiamo visto, solo dopo la prima redazione del *Saggio*; dal momento che, però, l'articolo non era ancora stato pubblicato, egli ebbe modo di rivedere l'ultima parte del testo, edulcorando le sue posizioni legate all'impossibilità di rappresentare nel piano la geometria non euclidea. Risulta naturale chiedersi, allora, perché Beltrami abbia voluto pubblicare il *Saggio*, nonostante la consapevolezza che parte delle posizioni espresse in esso non lo rappresentassero più. La risposta a tale questione si può ritrovare nella sua lettera a Hoüel del 18 novembre 1868 [15, p. 67]:

Credevo che le ampie posizioni di Riemann non contraddicessero in alcun modo gli sviluppi che avevo presentato sulla planimetria semplice, e ripresi a scrivere [il *Saggio*] per inviarlo al signor Battaglini. Fu mentre stavo terminando la trascrizione, eliminando tutto ciò che riguardava i miei dubbi sulla stereometria di Lobatschewsky, che trovai la spiegazione analitica completa della geometria non euclidea per qualsiasi numero di dimensioni. Questa spiegazione, che apparirà nel prossimo numero degli *Annali* dei signori Brioschi e Cremona, è semplicemente la conferma dei risultati del signor Riemann, o, se preferite, la loro dimostrazione analitica, e spero che chiunque si prenderà la briga di leggerla (e non occuperà molto spazio) ne uscirà convinto della verità delle nuove dottrine e ne coglierà saldamente il significato. Avrei forse dovuto allora sopprimere la Memoria che mi prendo la libertà di inviarvi, per unirla a quella di cui sto parlando, ma avendo già inviato le prime pagine, ho preferito modificare le ultime pagine per farne una sorta di preparazione per la seconda memoria; e questo, mi rendo conto, ha introdotto un po' di incertezza nel mio atteggiamento: qualcuno potrebbe forse credere che la mia fede non sia così salda come in realtà è.

Questo è ciò che mi ha spinto a scriverle questa lettera piuttosto lunga, che concludo chiedendole, se vorrà gentilmente considerare il mio punto di vista, di sospendere il suo giudizio definitivo fino alla pubblicazione del mio ultimo lavoro, considerando per il momento la mia "Interpretazione ecc. solo l'esposizione di un caso particolare, che rientra nella geometria ordinaria, e che quindi mi sembra meritevole di essere trattato separatamente.

Con questo spirito, dunque, Beltrami decide di lavorare sull'opera che diventerà la *Teoria Fondamentale*, che egli immagina strutturata come segue [15, pp. 67–68]:

Il metodo che userò nella teoria generale è più semplice e diretto, in quanto non presuppone nulla di noto sulla forma dell'elemento lineare, poiché questa forma deriva da sé. // (Presumo, tuttavia, come il signor Riemann, che la forma in questione sia quadratica.) Ciononostante, il principio rimane lo stesso, vale a dire che "per stabilire i teoremi della geometria astratta, bisogna trovare spazi tali che le linee di minima distanza possano essere rappresentate da equazioni

lineari". Questa proprietà, facilmente traducibile in analisi, conduce precisamente a spazi le cui *Maasverhältnisse*⁶⁴ (secondo Riemann) sono le stesse in tutte le direzioni attorno a ciascun punto. Credo che questa visione sia interamente mia, così come l'osservazione, nemmeno fatta da Riemann, che la *Krümmungsmaass*⁶⁵ deve essere sempre negativa, come dimostra già il caso bidimensionale.

Si evince dunque che, avendo assimilato il pensiero di Riemann, Beltrami sia giunto alla formulazione di un risultato innovativo di grande rilievo, che nella *Teoria Fondamentale* è descritto nei seguenti termini [15, p. 18]:

La teoria di LOBATSCHESKY coincide, salvo le denominazioni, con la geometria dello spazio a tre dimensioni di curvatura costante negativa [che è determinata dalle formule (3.103), (3.104)]. [...]

La planimetria non euclidea [di Lobačevskij] non è altro che la geometria delle superfici a curvatura costante negativa. Le circonferenze di questa planimetria corrispondono alle linee che tagliano ortogonalmente tutti i raggi geodetici provenienti da uno stesso punto della superficie, oppure alle circonferenze geodetiche.

I dubbi di Beltrami riguardo alla pubblicazione delle sue due opere del 1868 e del 1869 non terminarono con le edizioni italiane: egli mostrò infatti altre incertezze anche nei confronti dell'edizione francese realizzata da Hoüel, temendo di dare maggior forza alle polemiche già molto accese tra sostenitori e oppositori della geometria non euclidea. Nella lettera del 23 dicembre 1869 indirizzata a Hoüel, Beltrami scrive [15, pp. 19–20]:

Nello stesso tempo devo farle un'ampia dichiarazione: e cioè che, se le sembrasse che l'inserzione della traduzione dei miei due Articoli nel Recueil de l'École Normale Supérieure (Recueil ufficiale in un certo senso) potesse urtare le convinzioni di alcune persone in posizione elevata nella scienza e nell'insegnamento, dar luogo a disapprovazioni, o alterare i suoi buoni rapporti con scienziati eminenti che forse sono stati un tempo suoi maestri, la svincolerei completamente dalla sua promessa, per quanto essa mi fosse cara, e le consiglierei di rimandare la cosa a più tardi, quando il dibattito si sarà calmato e la luce sarà stata fatta. Oppure la pregherei di affidare le traduzioni che ha voluto preparare a qualche giornale indipendente di scienza. Sono del tutto certo dell'avvento più o meno prossimo delle dottrine da lei e da me predicate in forme diverse, ma mi rattristerebbe infinitamente arrivare a un qualsiasi successo attraverso critiche superficiali e poco benevole.

Nonostante i dubbi di Beltrami, poco tempo dopo Hoüel pubblicò negli *Annales de l'École Normale Supérieure* le traduzioni di entrambi i lavori.

⁶⁴Cioè le relazioni metriche.

⁶⁵Cioè la misura della curvatura.

Un altro risultato rilevante presente nella *Teoria Fondamentale* è quello ottenuto nell'equazione (3.113), per cui le geodetiche di uno spazio a curvatura costante possono essere rappresentate da equazioni lineari. Tale risultato fu esteso da Ludwig Schläfli, che ne trovò il reciproco: egli dimostrò infatti che ogni spazio le cui geodetiche possono essere rappresentate da equazioni lineari è uno spazio a curvatura costante⁶⁶ [15, p. 19].

È ora importante considerare il problema dell'interpretazione della geometria non euclidea nello spazio. Beltrami, sia nel *Saggio* sia nella *Teoria Fondamentale*, sostiene che sia impossibile generalizzare in dimensione maggiore l'idea per cui esista una superficie a curvatura costante negativa dove abbia luogo la geometria di Lobačevskij. Secondo Beltrami, in tre dimensioni manca quel substrato geometrico reale che è necessario per poter parlare di una vera *interpretazione* e non di una semplice *traduzione* dei concetti tramite il linguaggio dell'analisi ordinaria. Nel *Saggio* il discorso è affrontato mostrando che, pur potendo passare dall'espressione dell'elemento lineare di una superficie a curvatura costante (3.52), formata da due variabili, a quella formata da tre variabili, che assume la forma [15, p. 26]

$$ds^2 = \frac{R^2}{(a^2 - t^2 - u^2 - v^2)^2} \{ (a^2 - u^2 - v^2) dt^2 + (a^2 - v^2 - t^2) du^2 + (a^2 - t^2 - u^2) dv^2 + 2uv dudv + 2vt dvdt + 2tu dtdu \}, \quad (3.137)$$

non è possibile attribuire a questa espressione un vero e proprio significato geometrico; il motivo è da ricondursi al fatto che [15, p. 27]:

L'espressione (3.137) non può appartenere all'elemento lineare dello spazio euclideo ordinario, e le formule fondate su questa espressione non possono essere costruite mediante le figure che ci presenta la geometria ordinaria.

Nella *Teoria Fondamentale* il discorso diventa, estendendo analiticamente i risultati ottenuti in 2 dimensioni, il seguente [9, p. 427]:

Lo spazio in cui tale rappresentazione [della geometria non euclidea] verrebbe a concretarsi è diverso da quello cui generalmente diamo tal nome.

Beltrami giunge dunque alla conclusione che, oltre la planimetria, non è possibile ottenere un'applicazione isometrica dello spazio di Lobačevskij nello spazio euclideo ordinario, come era stato possibile fare con le superfici, ma è solamente possibile fornire un'interpretazione analitica dei risultati [15, p. 27]. Molto più tardi, John Forbes Nash⁶⁷ (1928-2015) dimostrò che qualsiasi superficie può essere immersa isometricamente in uno spazio euclideo avente dimensione sufficientemente grande⁶⁸ [1, p. 9].

⁶⁶Per i dettagli riguardanti questo risultato si veda [52].

⁶⁷John Forbes Nash è stato un matematico statunitense, noto per i suoi contributi fondamentali in teoria dei giochi, geometria differenziale ed equazioni alle derivate parziali; ha introdotto il concetto di *equilibrio di Nash*, che gli valse il Premio Nobel per l'economia nel 1994.

⁶⁸Per un riferimento bibliografico di questo risultato si veda [55].

I ragionamenti di Beltrami riguardanti la geometria differenziale non terminano con la *Teoria Fondamentale*, ma restano centrali anche nelle sue riflessioni successive, come si nota nella corrispondenza con Hoüel. In diverse lettere si può leggere come Beltrami affronti i risultati di Gauss cercando di spiegare come li abbia conciliati con i propri e sottolineando come, a quel tempo, vi fossero ancora molte difficoltà a comprendere i concetti fondamentali della geometria differenziale gaussiana.

Nella lettera a Hoüel del 12 ottobre 1869, Beltrami affronta il risultato dimostrato da Gauss per cui, grazie al *Theorema egregium*, la possibilità di sviluppare una superficie su un'altra dipende unicamente dalla misura di curvatura; Beltrami si esprime in questi termini [15, p. 30]:

Ora io ammetto, come un principio fin qui incontrastato, che due superfici i cui elementi lineari siano riducibili a una stessa espressione siano sovrapponibili, per semplice flessione senza estensione, l'una sull'altra, e formulo di conseguenza l'identità, sotto questo punto di vista, dell'orisfera con il piano euclideo.

E aggiunge [15, pp. 30–31]:

E notate bene che quando parlo di una tale applicazione o sovrapposizione non considero più l'orisfera come esistente nello spazio non euclideo e come trovantesi, di conseguenza, in certi rapporti di posizione con altri enti geometrici di questo spazio (per esempio, ortogonale a un sistema di raggi paralleli); occorre considerarla in se stessa, vale a dire come un velo infinitamente sottile, flessibile e inestensibile. Di modo che non è possibile dedurre nulla, dalla sovrapposizione in questione, rispetto allo spazio non euclideo.

Beltrami dimostra di padroneggiare l'approccio gaussiano e prosegue affermando che, in quest'ottica, l'applicazione dell'orisfera sul piano euclideo non è altro che *un teorema di geometria delle superfici* ed è dunque indipendente dal particolare sistema considerato, euclideo o non euclideo.

La questione relativa alla concezione delle superfici, intese come entità immerse in uno spazio ambiente o come oggetti con proprietà intrinseche, è ulteriormente sviluppata nei seguenti passaggi, dove Beltrami affronta anche altre due questioni per lui centrali: l'importanza dell'elemento lineare nell'elaborazione della sua teoria e l'indipendenza della teoria di Gauss dal V postulato di Euclide. Per quanto riguarda l'elemento lineare, esso riveste un ruolo fondamentale nella teoria delle superfici, in quanto dalla sua sola conoscenza è possibile determinare la misura della curvatura della superficie che esso descrive; in altri termini, noto ds , è possibile ricostruire integralmente l'insieme delle proprietà intrinseche della superficie senza necessità di ricorrere ad alcun riferimento relativo allo spazio ambiente. In riferimento alla questione del V postulato, Beltrami sostiene invece che la geometria intrinseca di una superficie curva può essere completamente determinata a prescindere dalla posizione assunta nei confronti del Postulato delle parallele. Entrando nel merito di tali questioni, e cercando di descrivere le proprie posizioni a Hoüel, Beltrami afferma in una lettera del 1° aprile 1869 [15, pp. 29–30]:

Dalla formula $ds = \text{cost.} \sqrt{dr_1^2 + dr_2^2}$ che ho stabilito a pagina 21 della mia ultima Memoria⁶⁹ si trae (o meglio si verifica, poiché ciò si trova in Lobatcheffsky) che la geometria della sfera-limite [dell'orosfera] non è altro che quella del piano euclideo. Dicendo che la curvatura di questa superficie è nulla non ho voluto dire altro se non che tutte le proprietà metriche di questa superficie sono le stesse del piano ordinario, a causa dell'identità degli elementi lineari dell'una e dell'altro. E ciò ha luogo indipendentemente dall'assioma XI⁷⁰, solo che non ci si deve figurare la sfera-limite come un vero piano euclideo. Anche nella geometria ordinaria non si potrebbe concludere, dal fatto che l'elemento lineare di una superficie sia riducibile alla forma $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, che tale superficie sia un piano; essa potrebbe essere altrettanto bene un cilindro, un cono o qualsiasi altra superficie sviluppabile. Nella geometria astratta si deve dire la stessa cosa, ovvero che la superficie a curvatura nulla è identica, non per la sua forma ma per le sue proprietà metriche, al piano euclideo, sul quale si può dire che essa sia sviluppabile, o "costruttibile" per evitare il termine barbaro (credo). Per quanto mi riguarda, direi che la sfera-limite è una delle forme sotto le quali il piano euclideo esiste nello spazio non euclideo, considerando il piano euclideo come definito dalla proprietà di avere curvatura nulla.

Cercando di rispondere ai dubbi di Hoüel nei confronti dei suoi scritti, Beltrami elabora una sintesi efficace tra la metodologia di Gauss e il formalismo di Riemann, interpretando con originalità i loro risultati; in questo modo egli spiega cosa intende per superfici che hanno elementi lineari equivalenti e come è possibile classificare, in base alla misura di curvatura, le superfici curve e, in particolare, è in grado di spiegare con precisione come mai la geometria euclidea sia realizzata sull'orosfera. Il rapporto tra la teoria di Gauss e il V postulato ritorna anche nella lettera di Beltrami a Hoüel del 25 ottobre 1869 [15, p. 30]:

Voi dite che non si vede abbastanza chiaramente se io mi ponga nell'ipotesi euclidea o in quella di uno spazio a curvatura negativa costante. Per rispondere categoricamente a questa domanda, dichiaro subito che, nel passaggio in questione, intendo mantenermi sempre nella seconda ipotesi. È, per così dire, solo per un caso che si incontra, tra i luoghi geometrici esistenti in questa seconda ipotesi, una superficie che condivide la proprietà più essenziale del piano euclideo, cioè la nullità della curvatura, da cui deriva necessariamente l'identità della trigonometria dei triangoli geodetici di questa superficie con la trigonometria piana ordinaria. [...] il piano ordinario è confuso, nella semplice planimetria euclidea, con tutte le superfici sviluppabili, dalle quali non è possibile distinguerlo a priori a causa dell'assenza di ogni confronto possibile con una retta esterna

⁶⁹Beltrami si sta riferendo a [5].

⁷⁰Si tratta del V postulato di Euclide.

al piano stesso. Di conseguenza, l'unica definizione analitica essenziale della superficie sulla quale esistono le figure della planimetria ordinaria non può essere che quella della nullità della curvatura, che infatti caratterizza tutte le superfici sviluppabili. Ecco perché, quando incontro nella geometria degli spazi a curvatura costante una superficie (l'orisfera) la cui forma dell'elemento lineare mostra la nullità della curvatura, ne concludo immediatamente che la geometria è la stessa del piano euclideo, non perché la sua forma attuale sia quella di un tale piano, ma perché essa potrebbe essere applicata su un piano euclideo mediante semplici flessioni senza estensioni (come per le superfici sviluppabili), qualora la si supponesse isolata dallo spazio non euclideo ed esistente di per sé, così come lo è ogni superficie che non sia data da altro se non dall'espressione analitica del suo elemento lineare.

Gli scritti di Beltrami, quindi, ampiamente diffusi e commentati, grazie anche alla traduzione francese realizzata da Hoüel, ebbero un forte impatto nel mondo matematico: da un lato, dimostrarono chiaramente che i postulati della geometria non euclidea descrivevano le superfici semplicemente connesse a curvatura negativa costante e che, perciò, non era possibile dimostrare il Postulato delle parallele usando i postulati rimanenti; dall'altro, aspetto ancora più duraturo, tali scritti chiarirono che l'universo della geometria non euclidea non era più il mondo controintuitivo descritto da Lobačevskij e Bòlyai, ma era una teoria derivante da quella gaussiana delle superfici, da cui poteva essere dedotta con tutti i suoi principi e per mezzo dei modelli realizzati da Beltrami [1, p. 2]. Queste eredità, ancora evidenti oggi, confermano l'importanza di Beltrami ben al di fuori del suo tempo.

Capitolo 4

La matematica delle collezioni di modelli

Il concetto di *modello matematico* ha un ruolo fondamentale nell'evoluzione della matematica tra XIX e XX secolo. In termini generali, un modello matematico è definito come una rappresentazione formale e astratta di un fenomeno, un sistema o un processo reale descritta tramite strumenti matematici; la sua funzione principale consiste nel tradurre la realtà empirica in linguaggio simbolico, mettendone in evidenza relazioni, regolarità e meccanismi causali. Tuttavia, ridurre il modello a un apparato descrittivo significa fraintendere il suo ruolo: esso è molto di più, in quanto rappresenta una sintesi tra teoria ed esperienza sensibile che consente di formulare ipotesi, dedurre conseguenze, confrontare previsioni con dati osservativi e, dunque, produrre nuova conoscenza.

I modelli matematici, in quest'ottica, non coincidono più né con la realtà né con la teoria, ma risiedono in uno spazio intermedio in cui le ipotesi, la formalizzazione e l'osservazione si incontrano. Oltre a consentire di visualizzare e descrivere fenomeni complessi mediante strutture formali semplificate, i modelli consentono dunque di esplorare scenari ipotetici difficilmente accessibili all'osservazione diretta o alla sperimentazione, fungendo da spunto originale per la determinazione di nuovi risultati.

Nel contesto della geometria, tra la seconda metà dell'Ottocento e i primi decenni del Novecento, furono i *modelli materiali* ad assumere un ruolo di crescente rilevanza. Lontani dal ruolo di semplici strumenti didattici o supporti illustrativi destinati all'insegnamento universitario, essi divennero veri e propri oggetti scientifici ambivalenti, sospesi tra concretezza e astrazione [34, p. 5]. In un periodo caratterizzato dalla rapida diffusione delle geometrie non euclidee, della teoria delle superfici e della geometria differenziale, i modelli furono lo strumento che permise ai matematici di rappresentare concretamente entità che sfuggivano all'esperienza. La loro diffusione fu il risultato di una profonda trasformazione del modo di fare matematica, che vide la costruzione di immagini e oggetti tridimensionali diventare parte integrante dei processi di ricerca e comunicazione scientifica.

Nel quadro culturale descritto, un ruolo fondamentale fu svolto da Felix Klein e Alexander Brill, che contribuirono alla diffusione e alla commercializ-

zazione dei modelli materiali all'interno delle università tedesche e europee. A partire dagli anni Settanta dell'Ottocento, i due matematici promossero infatti un vasto programma di realizzazione e diffusione di modelli geometrici destinati sia all'insegnamento sia alla ricerca avanzata; attraverso la collaborazione con artigiani specializzati, istituti tecnici e case editrici scientifiche, essi diedero slancio alla formazione di una vera e propria cultura materiale della matematica [34, p. 8].

La celebre collezione di Modello Matematici realizzati dalla casa editrice Martin Schilling a partire dal 1899¹, rappresentò il punto più alto di questo processo. Tali modelli, realizzati in ottone, gesso, cartone, filo metallico o fibra naturale, legno e lamelle di legno, celluloidi, lamine metalliche ricoperte per via elettrochimica, furono acquistati da università e scuole superiori di tutta Europa [57, pp. 32–33]. Anche l'Italia, all'epoca uno dei principali centri di sviluppo della geometria differenziale e della teoria delle superfici, partecipò a questa fase di trasformazione integrando nei propri atenei collezioni di Modelli per l'insegnamento e la ricerca. L'interesse per questi oggetti si manifestò con forza a Pavia, dove nel corso degli anni eminenti geometri contribuirono a creare una collezione di modelli materiali tra le più importanti d'Italia.

Particolarmente significativa, in questo contesto, è la costruzione della cosiddetta *cuffia* di Beltrami. Eugenio Beltrami, protagonista di questa stagione di profonda trasformazione della matematica, svolse un ruolo di pioniere anche nel contesto dei modelli materiali, interrogandosi sulle possibili ricadute teoriche e pratiche delle realizzazioni tridimensionali: verso la fine degli anni '60 del 1800, infatti, concentrò i suoi studi sulla realizzazione di un modello che desse forma alla sua interpretazione della geometria non euclidea contenuta nel *Saggio di interpretazione*, ottenendo il modello in cartone, oggi conservato presso l'Università di Pavia, della *Pseudosfera*.

Oltre a Beltrami, un contributo altrettanto importante provenne dall'opera di Luigi Bianchi, figura centrale della geometria differenziale italiana tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento. Le sue ricerche sulle superfici a curvatura costante, sulle trasformazioni geometriche e sui sistemi differenziali contribuirono ad ampliare il quadro teorico entro il quale i modelli materiali trovavano applicazione. In particolare, le celebri *Trasformazioni di Bianchi* e gli sviluppi della teoria delle superfici pseudosferiche generarono nuovi oggetti geometrici suscettibili di rappresentazione tridimensionale, favorendo ulteriormente il dialogo tra costruzione teorica e realizzazione materiale.

L'analisi dell'influenza dei modelli nella matematica dell'Ottocento e del primo Novecento permette dunque di cogliere una dimensione spesso trascurata della storia della geometria: quella della materialità degli oggetti matematici. Attraverso il lavoro di Klein e Brill, la visualizzazione geometrica divenne una pratica internazionale condivisa; attraverso Beltrami e Bianchi, essa trovò in Italia uno sviluppo originale legato ai progressi della geometria differenziale e iperbolica. La collezione pavese si inserisce, allora, perfettamente in questo clima, rappresentando una testimonianza privilegiata del modo in cui la geome-

¹La prima pubblicazione del *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, edito da Martin Schilling, risale al 1903.

tria abbia saputo rendere visibili forme e spazi che fino a pochi decenni prima appartenevano esclusivamente al dominio dell'immaginazione matematica.

4.1 Klein, Brill e la diffusione dei modelli

La centralità dei modelli materiali nel contesto della didattica e della ricerca universitaria si può trovare nelle parole pronunciate da Felix Klein in una conferenza tenuta a Chicago nel 1893 [64, pp. 305–306]:

In conclusione, diciamo alcune parole sui moderni sviluppi dell'istruzione universitaria. Lo sforzo principale è stato di ridurre la difficoltà dello studio matematico migliorando le dotazioni e gli strumenti seminariali. [...] Si fa affidamento sulle collezioni di modelli e su corsi di disegno per disarmare, almeno in parte, l'ostilità contro l'eccessiva astrazione dei corsi universitari.

La profonda convinzione di Klein circa l'importanza e l'utilità dei modelli in gesso, espressa in queste poche righe, fu largamente condivisa negli ambienti accademici europei e americani e contribuì alla loro rapida diffusione nei principali centri universitari. I primi esemplari riconducibili ai modelli matematici menzionati furono realizzati in Europa per rispondere, come detto, alle necessità della Geometria descrittiva e, successivamente, di quella proiettiva. In quel periodo storico l'Europa esercitava ancora una ampia superiorità nei campi politico, economico, scientifico, industriale e militare; non stupisce, perciò, che tale innovazione si sviluppò proprio in questo territorio. In particolare, la nascita delle prime collezioni di modelli risale alla prima metà del XIX secolo in Francia e, specificatamente, a Parigi [57, p. 32].

Nella seconda metà dell'Ottocento, la progettazione e la realizzazione artigianale di modelli matematici come strumento per visualizzare le proprietà di una determinata teoria o per dare una visione concreta ad un certo risultato teorico iniziarono a diffondersi, spinti anche dal contemporaneo enorme sviluppo della produzione industriale. Tra i più importanti paesi in cui ciò avvenne vi è la Germania, ma diverse collezioni di modelli furono realizzate, oltre che in Francia, anche in Regno Unito e, più tardi, negli Stati Uniti [57, p. 53].

Pochi anni dopo l'unificazione della Germania, avvenuta nel 1871, la produzione e l'utilizzo dei modelli matematici assunsero un ruolo di primaria importanza nel panorama scientifico, istituzionale e didattico del Paese. In questo periodo, le università e i politecnici tedeschi promossero una sistematica organizzazione delle collezioni di modelli, incentivando l'attività di laboratori e officine scientifiche. La rapida industrializzazione della Germania e il consolidamento delle sue istituzioni accademiche favorirono, infatti, la nascita di una rete di centri specializzati nella progettazione e nella produzione di modelli tridimensionali destinati sia all'insegnamento universitario sia alla ricerca avanzata [57, p. 50].

Uno dei più importanti contributi a questo processo fu svolto da Felix Klein, tra i principali e più influenti matematici tedeschi dell'epoca, che già dagli anni Settanta dell'Ottocento sosteneva l'importanza dell'apprendimento attraverso

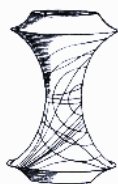
l'osservazione e la manipolazione di modelli concreti [34, p. 22]. Presso l'Università di Erlangen (in cui insegnò tra il 1872 e il 1875), egli promosse una delle prime raccolte sistematiche di modelli matematici in Germania, destinata a supportare esercitazioni di disegno geometrico e modellazione. Successivamente, nelle università di Lipsia (dove insegnò tra il 1880 e il 1886, dopo essere stato docente a Monaco) e Gottinga (dove lavorò fino al suo ritiro, nel 1913), Klein contribuì non solo alla crescita delle collezioni dei propri atenei, ma partecipò attivamente alla realizzazione di diversi modelli e, in seguito, all'industrializzazione e produzione su larga scala degli stessi. Se infatti, in una prima fase, la realizzazione dei modelli fu affidata principalmente a studenti di matematica che, sotto la guida dei loro docenti, operavano nei laboratori e nelle officine collegati agli istituti universitari (in particolare presso l'Istituto di Matematica del Politecnico di Monaco di Baviera e il Seminario di Matematica dell'Università di Gottinga), dal 1877, su impulso dello stesso Klein, la produzione venne progressivamente affidata alla casa editrice e ditta specializzata Brill, appositamente fondata a Darmstadt quello stesso anno [57, p. 50]. Nei primi anni di produzione di tali modelli, presso i laboratori universitari, oltre a Klein e Brill, realizzarono i loro modelli anche l'allora studente Walther Dyck e Luigi Bianchi, giunto a Monaco per perfezionare i propri studi.

La casa editrice Brill era di proprietà di Ludwig Brill, fratello del matematico tedesco Alexander von Brill (1842–1935): quest'ultimo, architetto di formazione, fu uno dei più importanti promotori nella diffusione dei modelli materiali. Alexander von Brill fu collega di Klein presso l'Istituto di Matematica del Politecnico di Monaco, dove i due svilupparono una stretta collaborazione volta a promuovere un innovativo approccio all'insegnamento della matematica basato sulla visualizzazione geometrica. In questo contesto, essi fondarono il primo laboratorio tedesco dedicato alla progettazione e alla costruzione di modelli matematici, destinati a svolgere un ruolo essenziale sia nella didattica sia nella ricerca. Grazie alla sua formazione di architetto, Brill contribuì in modo diretto a questa iniziativa, disegnando e realizzando personalmente numerosi modelli che divennero strumenti fondamentali per l'insegnamento e la ricerca.

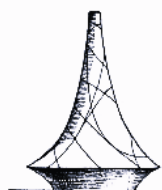
La casa editrice L.Brill raccolse e commercializzò i modelli prodotti dall'Istituto di Monaco a partire dal 1877, inserendoli nel *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlicht durch die Verlagshandlung*, pubblicato a partire dal 1892. Nel 1899, la produzione di modelli materiali passò nelle mani di Martin Schilling, attivo inizialmente nella città di Halle am Saale e successivamente a Lipsia, che ampliò e perfezionò la produzione dei modelli, arrivando a venderli anche a università negli Stati Uniti. Nel 1903, Schilling pubblicò il suo primo catalogo², strutturandolo formalmente in due parti: nella prima parte, i modelli erano ordinati per serie, mentre nella seconda i modelli erano raggruppati a seconda del loro legame scientifico; in questo modo, tale catalogo non si presentava solo come un semplice elenco di oggetti in vendita, ma veniva arricchito da commenti puntuali riguardanti gli

²Sempre dal titolo: *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*; tradotto: Catalogo di modelli matematici per l'insegnamento della matematica superiore.

Asymptotencurve. Von stud. math. *Bacharach* in München (B). Erläuterung beigegeben. (17×17 cm.) Mk. 10.50.



229. (II, 5.) **Ebenso (Hyperboloidtypus).** Es ist ein System paralleler geodätischer Linien aufgezeichnet (grün), worunter sich 2 (rot) befinden, die sich dem Kehlkreis asymptotisch nähern. Die geschlossenen Curven sind geodätische Kreise. Von stud. math. *W. Dyck* in München. Erläuterung beigegeben. (18×21 cm.) Mk. 14.—.



230. (I, 1.) **Rotationsfläche der Tractrix,** durch Umdrehung um ihre Asymptote entstanden. Die Tractrix ist durch die Eigenschaft definiert, dass alle Tangenten zwischen dem Berührungspunkt und einer Geraden, der Asymptote, constante Länge besitzen. Diese Fläche bildet den Übergang zwischen den beiden vorgenannten Flächen und entspricht der Kugel bei den Flächen constanter positiver Krümmung. Die blau gezeichneten Curven auf ihr sind verschiedene geodätische Linien, die rote ist eine Asymptotencurve, deren Torsion bekanntlich gleich der Wurzel aus dem negativen Krümmungsmass der Fläche an der betreffenden Stelle, also

für diese Curve allenthalben dieselbe ist. Von stud. math. *Bacharach* in München (B). Erläuterung beigegeben. (25×18 cm.) Mk. 11.—.



231. (V, 4.) **Schraubenfläche von constantem negativen Krümmungsmass,** deren Meridiancurve die Tractrix ist. Sie ist die einzige Schraubenfläche von der erwähnten Art, in deren Gleichung nicht elliptische Functionen eintreten. (Bei Flächen constanten positiver Krümmung gibt es keine von dieser Eigenschaft). Vergl. U. Dini, *Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris* 1865, I. Sem. pag. 340; Th. Kuen, *Berichte der kgl. bayr. Acad.* 1884. Von Dr. *P. Vogel* in München (B). Erläuterung beigegeben. (24×15 cm.) Mk. 18.—.



232. (VIII, 1.) **Fläche von constantem negativen Krümmungsmass mit ebenen Krümmungslinien nach Enneper.** Sie entsteht aus der Tractrixfläche von der Krümmung $-\frac{1}{r^2}$ dadurch, dass man auf den Tangenten an ein System von parallelen geodätischen Linien das Stück t in bestimmtem Sinn

Figura 4.1 La pagina 144 del *Catalog* del 1911 edito da Schilling, in cui vengono rappresentate e brevemente descritte alcune superfici di rotazione a curvatura negativa costante.

argomenti coinvolti e rimandi a saggi scientifici che erano stati ispirazione dei modelli. L'edizione più completa del Catalogo di modelli risale al 1911, anno in cui le serie di modelli presentate furono 40 [57, pp. 50–51].

I primi modelli matematici venivano realizzati in cartone (come quello realizzato da Beltrami); in seguito, tuttavia, fu sviluppata una tecnica specifica che consentì la produzione di modelli in gesso. Il procedimento prevedeva la realizzazione di matrici originali in una particolare argilla modellabile, dalle quali era possibile ottenere numerose copie mediante fusione in gesso. Le informazioni relative a questa tecnica produttiva sono scarse: l'unica descrizione nota è riportata in [33], che riprende il *Catalog der Modellsammlung des Mathematischen Instituts der kgl. Technischen Hochschule München*, redatto nel 1882 sotto la direzione di Alexander Brill.

La Germania si confermò, così, come il principale centro europeo per la produzione e la commercializzazione dei modelli matematici. Le migliaia di

realizzazioni di Brill e Schilling raggiunsero le università di tutto il mondo e contribuirono alla circolazione internazionale delle conoscenze matematiche e alla standardizzazione delle pratiche didattiche. Una così cospicua produzione di modelli matematici non solo fu sistematicamente organizzata attraverso i cataloghi, ma trovò anche ampia diffusione grazie alle numerose esposizioni allestite sia in Europa sia negli Stati Uniti. Tali iniziative contribuirono sia a far conoscere il patrimonio di modelli già esistenti, sia a stimolare la comunità matematica internazionale a proseguire l'attività di ricerca e progettazione di nuovi manufatti. Fra le esposizioni più importanti che ospitarono oggetti matematici vi furono l'*Exhibition of the Works of Industry of all Nations* del 1851 a Londra [57, pp. 61–62], che fu tra le prime a dare spazio alle collezioni di modelli matematici, e il *Congress on Mathematics and Astronomy* tenuto a Chicago nel 1893, già citato [57, p. 68]. Un'importante opera scritta in occasione del convegno della *Deutsche Mathematiker Vereinigung*, che doveva tenersi a Norimberga nel 1892 ma fu rimandata all'anno successivo a Monaco di Baviera³, è il *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente* (seguito da un supplemento, edito nel 1893, cioè un *Nachtrag*), realizzato nel 1892 dal matematico tedesco Walther von Dyck: una raccolta di modelli e oggetti matematici provenienti da università e scuole superiori, musei e collezioni private europee, da considerarsi come una sorta di "raccolta universale", dal carattere teorico-documentale [57, p. 59, p. 66].

A partire dagli anni Ottanta del XIX secolo, la comunità matematica italiana instaurò un rapporto privilegiato con gli ambienti della cultura scientifica tedesca. Tra i principali artefici di questo dialogo vi fu Corrado Segre: egli, dopo aver contribuito alla diffusione in Italia del *Programma di Erlangen*, sviluppò un forte rapporto di amicizia con Felix Klein e aderì a molte delle sue teorie. Segre considerava Gottinga il cuore pulsante della matematica moderna e incoraggiò molti dei suoi studenti più brillanti a partecipare a soggiorni di studio in Germania: il caso più noto e meglio documentato è quello di Gino Fano, che, dopo essersi formato a Torino sotto la guida di Segre, trascorse un periodo di perfezionamento a Gottinga; nella città tedesca, studiò con Klein e tenne alcune conferenze [37].

La Germania offriva laboratori scientifici più strutturati, seminari avanzati e un modello di ricerca collettiva che in Italia era ancora in formazione. Sull'esempio di Torino, dunque, anche altre università italiane cercarono di favorire la formazione avanzata dei propri laureati attraverso soggiorni di studio e perfezionamento in Germania; si sviluppò così una rete di strumenti destinati a sostenere il merito e la formazione avanzata, grazie ai quali molti giovani poterono dedicarsi per alcuni anni alla ricerca, perfezionarsi presso maestri autorevoli e successivamente ottenere posizioni accademiche. Tra le figure che indirizzarono questo fenomeno vi fu Enrico Betti (1823–1892), che dopo il viaggio compiuto nel 1858 con Brioschi e Casorati nei principali centri scientifici europei e dopo l'incontro con Riemann a Gottinga, introdusse negli insegnamenti della Scuola Normale di Pisa, di cui fu prima professore e poi direttore, gli orientamenti

³Il motivo di tale spostamento è legato ad una "crisi sanitaria" che nel 1892 investì la Germania: nella città di Amburgo, quell'anno, vi fu un'epidemia di colera.

più avanzati della matematica tedesca, in particolare quelli legati all'analisi e alla geometria riemanniana. A sua volta Ulisse Dini (1845–1918) rappresentò il proseguimento di questa politica culturale. Egli stesso aveva beneficiato di una borsa di studio che gli aveva consentito di perfezionarsi a Parigi presso Hermite e Bertrand e, una volta divenuto professore e poi direttore della Normale, sostenne l'idea che i migliori studenti dovessero completare la propria formazione nei maggiori centri scientifici europei. La Normale di Pisa divenne così un luogo in cui la formazione nazionale era integrata da soggiorni di studio all'estero, favoriti da borse di perfezionamento e da una rete di rapporti scientifici che collegava direttamente Pisa alle università tedesche.

In questo contesto si colloca una prima generazione di giovani matematici italiani che guardò alla Germania come punto di riferimento scientifico. Tra essi vi furono Salvatore Pincherle (1853–1936), Gregorio Gazzaniga, Alfredo Capelli (1855–1910) e Gian Antonio Maggi (1856–1937), tutti inseriti in quella rete di rapporti internazionali che vedeva nella Germania il centro più avanzato degli studi matematici europei. Questa generazione contribuì a creare un ponte stabile fra la scuola italiana e la cultura matematica tedesca, preparando il terreno per una collaborazione ancora più intensa con Felix Klein e con gli ambienti di Monaco e Gottinga.

Il passaggio decisivo si ebbe però con la generazione immediatamente successiva, formata direttamente alla Normale da Betti e Dini. Gregorio Ricci-Curbastro, dopo la laurea a Pisa e grazie alla borsa di studio *Lavagna*, si trasferì tra il 1877 e il 1878 a Monaco di Baviera, dove seguì i corsi di Felix Klein e di Alexander von Brill. Da quell'esperienza nacque una parte importante della cultura matematica che lo condusse, negli anni successivi, alla costruzione del calcolo differenziale assoluto e del calcolo tensoriale. Un percorso analogo seguì Luigi Bianchi (1856–1928), anch'egli formatosi alla Scuola Normale sotto la guida di Betti e Dini: dopo la laurea trascorse due anni a Monaco e a Gottinga, entrando in diretto contatto con Klein e con l'ambiente della nuova geometria tedesca. L'influenza di queste esperienze fu determinante per i suoi futuri lavori sulla geometria differenziale e sulle trasformazioni delle superfici. A questa tradizione appartiene anche Ernesto Pascal (1865–1940): formatosi all'Università di Napoli, dopo la laurea intraprese un periodo di perfezionamento prima a Pisa e poi a Gottinga, dove tra il 1888 e il 1889 studiò con Felix Klein e Hermann Schwarz. Il soggiorno tedesco influenzò profondamente i suoi interessi scientifici e diede origine a una duratura corrispondenza con Klein; egli rappresenta la prosecuzione, nella generazione successiva a Bianchi, di quel modello di formazione internazionale promosso dalla scuola matematica italiana e fondato sul contatto diretto con i grandi centri scientifici tedeschi.

Attorno a Klein si raccolse, inoltre, una rete di studiosi che entrarono direttamente in contatto con i matematici italiani. Walther von Dyck, collaboratore e allievo di Klein, e Isaak Bacharach⁴ (1854–1942) parteciparono alla creazio-

⁴Isaak Bacharach (1854–1942) fu un allievo di Max Noether (1844–1921), padre di Emmy Noether (1882–1935), a Erlangen. È noto per il *Teorema di Bacharach-Cayley* sulle intersezioni di curve cubiche piane, che generalizza un analogo risultato per le coniche dimostrato da Michel Chasles (1793–1880). Il Teorema di Bacharach-Cayley afferma che, supponendo che due cubiche nel piano proiettivo reale si intersechino in nove punti, ogni cubica passante per

ne dello stesso ambiente geometrico che gli italiani frequentavano nelle loro permanenze tedesche.

L'analisi della diffusione dei modelli matematici tra Otto- e Novecento consente di riflettere sulla trasformazione del pensiero matematico-scientifico di quel periodo, evidenziando il passaggio tra due modi profondamente diversi di concepire la matematica. In una prima fase, dominata dall'alta considerazione del punto di vista intuitivo, i modelli costituirono uno strumento privilegiato per comprendere e visualizzare gli oggetti matematici; in questo contesto, infatti, l'intuizione sensibile era considerata essenziale per la ricerca e l'apprendimento, come esprime la celebre affermazione di William Thomson (1824-1907) [57, p. 38]:

Io non sono soddisfatto finché non ho potuto costruire un modello meccanico dell'oggetto che studio. Se posso costruire un tale modello, comprendo; altrimenti, non comprendo affatto.

Questo è il periodo che corrisponde alla diffusione su larga scala dei modelli. A partire dai primi decenni del Novecento, si affermò invece una prospettiva differente, che guardava con crescente diffidenza all'intuizione, privilegiando il rigore formale, la sistematicità e l'unificazione delle teorie. L'attenzione si spostò, quindi, dalla rappresentazione concreta degli oggetti matematici all'analisi delle strutture astratte e delle relazioni logiche che le governano, ponendo in secondo piano le deduzioni legate a specifici modelli. In questa nuova visione, i modelli materiali persero progressivamente la centralità che avevano avuto nella fase precedente e furono, di conseguenza, gradualmente dimenticati.

4.2 La collezione di Pavia

Anche l'Università di Pavia, come le più antiche e importanti università d'Italia, possiede una collezione di modelli materiali raffiguranti diverse strutture geometriche⁵. La volontà di costituire tale raccolta è riconducibile al tentativo, risalente alla metà degli anni '70 del XIX secolo, di annettere alla Facoltà di Scienze dell'Università di Pavia una Scuola Normale, sull'esempio di quella di Pisa: furono così chiamati nella sede pavese illustri matematici, fu realizzata una biblioteca dedicata, nello specifico, alla matematica e furono stanziati dei fondi destinati all'acquisto di modelli materiali utilizzabili come ausilio didattico. I matematici che parteciparono a questo progetto furono soprattutto Eugenio Beltrami (1835–1900), Felice Casorati (1835–1890), Eugenio Bertini (1846–1933), Ernesto Pascal (1865–1940) e Luigi Berzolari (1863–1949) [65, p. 215].

otto di questi punti deve necessariamente passare per il nono punto di intersezione. Bacharach morì nel campo di concentramento nazista di Theresienstadt (oggi Terezín, in Repubblica Ceca) durante la Seconda Guerra Mondiale.

⁵ Alla collezione fisica dei modelli matematici è affiancata una collezione virtuale, accessibile all'indirizzo <https://sites.google.com/unipv.it/collezione-modelli-matematici/home?pli=1>. La Collezione Virtuale dei Modelli Matematici del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Pavia consente la consultazione di tali manufatti anche a distanza, rendendone il contenuto accessibile a un pubblico più ampio.

Il primo nucleo di modelli di cui l'Archivio Storico dell'Università di Pavia conserva ancora la relativa richiesta di acquisto è costituito da [65, p. 216]:

Tre modelli di Kummer sui sistemi di raggi, presentati nel 1860 alla R[egale]. Acc[ademia]. di Berlino e costruiti da W[ilhelm]. Apel, meccanico della Università di Göttingen.

La richiesta fu avanzata da Bertini il 31 dicembre 1882 e fu approvata il 17 gennaio successivo, comportando la spesa di 385 Lire (spesa non indifferente, considerando che lo stipendio annuale di un professore ordinario era di 5000 Lire). I modelli in questione (Figura 4.2), descrivono le possibili tipologie di fasci rettilinei infinitamente sottili che poggiano su una circonferenza [65, pp. 216–217].



Figura 4.2 I tre modelli di Kummer che corrispondono, nella collezione, a XIII.3, XIII.4, XIII.5.

Ad oggi, la collezione è organizzata in 16 categorie, ognuna delle quali contiene un numero variabile di modelli. La classificazione rispetta la catalogazione originale dell'Università realizzata a fine Ottocento: vi sono, tra le altre, una sezione dedicata alle curve gobbe (II), alcune sezioni dedicate alle superfici algebriche (del terzo III, quarto IV, dodicesimo Ordine X), i gruppi relativi alle superfici a curvatura costante (VII) e a curvatura media costante (VIII), una sezione dedicata alle superfici fisiche e un'altra dedicata alle funzioni ellittiche; l'esemplare più importante di questa collezione è senza dubbio la *cuffia di Beltrami*, l'originale ed unico modello esistente realizzato nel 1869 da Beltrami stesso (è classificata come l'unico elemento del gruppo XIV, geometria non euclidea). Sono inclusi nella collezione anche quattro Strumenti Matematici, un

Integrafo di Coradi⁶, un calcolatore Trigonometrico⁷, l'unico modello esistente dell'Integrafo di Pascal⁸ e un quarto strumento non ancora identificato (categoria Oggetti Vari XV), e una raccolta di Poliedri in cartone dalla realizzazione più recente (Gruppo Poliedri XVI)⁹.

Molti dei modelli della collezione pavese furono realizzati a partire dal 1877 a Darmstadt dalla ditta gestita da Ludwig Brill, fratello del matematico Alexander, o che venivano corredati da un breve opuscolo in lingua tedesca, dove venivano espone la teoria di riferimento o l'oggetto matematico rappresentato [65, p. 215].¹⁰ La maggior parte degli originali di questi documenti è oggi raccolta in un libretto collocato accanto ai modelli; da essi provengono i testi di riferimento dell'ultima parte di questo capitolo.

La collezione di Pavia è stata studiata in dettaglio in diverse opere, tra cui *Uno specimen dei giacimenti italiani di modelli e strumenti matematici. Il Nachlass dell'Università di Pavia*.¹¹; alcuni esemplari della collezione sono descritti anche in [65]. La collezione virtuale, rinnovata di recente, mantiene la stessa organizzazione di quella fisica, raccogliendo alcune informazioni teoriche e una fotografia per ogni modello. L'elenco completo delle categorie in cui la collezione è divisa è riportato di seguito.

I. Modelli Elementari II. Curve Gobbe III. Superficie del Terzo Ordine IV. Superficie del Quarto Ordine V. Superficie Diverse VI. Modelli di Geometria Differenziale VII. Superficie a Curvatura Costante VIII. Superficie a Curvatura Media Costante IX. Superficie Sviluppabili X. Superficie del Dodicesimo Ordine XI. Superficie Fisiche XII. Funzioni Ellittiche XIII. Oggetti Vari XIV. Geometria Non Euclidea XV. Strumenti XVI. Poliedri.

Nel seguito di questa tesi vengono analizzati alcuni dei modelli materiali appartenuti alla Collezione di Pavia. In particolare, oltre a ciò che riguarda la *cuffia di Beltrami*, saranno analizzate le tre tipologie di superfici a curvatura costante negativa conservate presso l'Università, la superficie elicoidale di Vogel e la superficie a curvatura negativa costante di Bianchi (non più presente nella Collezione).

⁶L'Integrafo di Gottlieb Coradi, costruttore di strumenti scientifici attivo a Zurigo, è uno strumento meccanico-matematico progettato alla fine dell'Ottocento allo scopo di tracciare in modo continuo la primitiva di una funzione data e di risolvere graficamente equazioni differenziali.

⁷Strumento meccanico-analogico di forma circolare, costituito da un disco circolare graduato e da due bracci mobili, che serviva a calcolare graficamente funzioni trigonometriche.

⁸Strumento meccanico, ideato da Ernesto Pascal, progettato per tracciare l'integrale di una funzione data e risolvere graficamente equazioni differenziali.

⁹Altre informazioni circa la Collezione sono reperibili presso il sito della Collezione di Modelli Virtuali del Dipartimento di Matematica di Pavia; si veda la Nota 5.

¹⁰La costruzione dei modelli passò, a partire dal 1899, alla ditta Martin Schilling con sede prima a Halle an der Saale e, in seguito, a Lipsia.

¹¹Volume di F. Palladino, con la collaborazione di A. De Sio e P. De Vivo, pubblicato in *Memorie dell'Istituto Lombardo – Accademia di Scienze e Lettere*, Classe di Scienze Matematiche e Naturali, vol. **29**, pp. 315–374.



Figura 4.3 La Figura rappresenta il modello della Superficie Diagonale di Clebsch, in cui sono tracciate le 27 rette reali in esso contenute; il modello corrisponde, nella collezione, a III.1 [65, p. 222].

4.3 Eugenio Beltrami artigiano della pseudosfera

Rivelandosi un pioniere anche in questo campo, Eugenio Beltrami fu uno dei primi matematici a intuire l'importanza della visualizzazione dei risultati matematici tramite lo studio di modelli materiali. Poco dopo aver pubblicato il *Saggio* infatti, egli decise di cimentarsi nella costruzione materiale del suo modello di superficie pseudosferica: il motivo di tale scelta si può ritrovare nella sua propensione a concepire le scienze matematiche *nella loro genesi storica, come mezzo per lo studio della natura ed era meno inclinato alle astratte speculazioni dell'analisi pura* [36, p. 15].

Tramite la realizzazione materiale della pseudosfera, Beltrami intendeva mettere in evidenza le somiglianze e le differenze tra l'oggetto teorico realizzato nel *Saggio* e un oggetto reale; egli, in particolare, non aveva come primo scopo quello di confermare o smentire la propria teoria, ma voleva mostrare a cosa essa potesse somigliare nella realtà [15, pp. 31–32]. In questi termini, è possibile notare come l'ideatore della pseudosfera vedesse l'uso del Modello in

maniera estremamente moderna, anticipandone le potenzialità che sarebbero state sviluppate solo nel successivo secolo.

L'interesse di Beltrami per la costruzione della superficie pseudosferica occupa circa quattro anni, dal 1869 al 1872, durante i quali egli realizzò diversi modelli in cartone. Si ha traccia dei primi due modelli realizzati da Beltrami nella lettera del 13 marzo 1869 a Höuel [15, pp. 80–81]:

Durante questo periodo, ho avuto un'idea bizzarra, che condivido con voi perché potrebbe essere più facile per voi che per me metterla in pratica. Volevo provare a costruire fisicamente la superficie pseudosferica su cui si realizzano i teoremi della geometria non euclidea. Per fare ciò, ho preso l'equazione a pagina 21, riga 6 del mio *Saggio* ecc.¹², e da essa ho derivato:

$$\log s_1 = \log s_2 + \frac{\tau}{R} \quad (\log \text{ hyp}) \quad (4.1)$$

da cui, ponendo $s_2 = 1$, $s_1 = s$

$$\log s = \frac{\tau}{R}, \quad \tau = R \log s. \quad (4.2)$$

Se consideriamo la superficie racchiusa tra due meridiani abbastan-

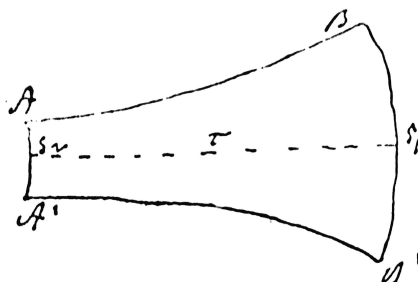


Figura 4.4

za vicini da poter essere sostituita, su una certa lunghezza, da un piano, possiamo, utilizzando pezzi di carta opportunamente tagliati, riprodurre i trapezi curvilinei di cui si può presumere sia composta la vera superficie. E poiché questa superficie è la stessa ovunque (nel senso gaussiano, cioè considerandola flessibile), vediamo che i pezzi di carta possono essere tutti esattamente uguali tra loro: il loro assemblaggio deve tuttavia riprodurre approssimativamente la superficie.

Si nota, in questo estratto, la capacità di Beltrami di sfruttare le caratteristiche teoriche dedotte nel *Saggio*, come ad esempio la curvatura costante della

¹²Beltrami si riferisce qui alla formula (3.90), che in questo caso assume la forma $s_2 = s_1 \exp(-\frac{\tau}{R})$, dove R è il raggio di curvatura della superficie e s_1 e s_2 sono gli archi di due orocicli a distanza τ .

pseudosfera, per realizzare il suo modello. La lettera a Höuel procede con la descrizione tecnica dettagliata del primo modello realizzato [15, pp. 81–82]:

Ho personalmente realizzato questa costruzione per $R = 0,20\text{m}$ e ho formato una porzione di superficie, con 50 pezzi, coprendo circa un quarto di metro quadrato. Nonostante le imperfezioni derivanti dalla mia iniziale inesperienza, poi dalla mia scarsa pratica e dall'intrinseca approssimazione del processo stesso, oso affermare che le mie aspettative sono state superate, tanto che credo che, sfruttando l'esperienza, che suggerisce molti metodi e precauzioni, si possano ottenere risultati molto gradevoli dal punto di vista geometrico, e persino piuttosto utili. Con il mio modello, infatti, per quanto rudimentale possa essere, si possono ben verificare le indicazioni della teoria: in primo luogo, la flessibilità, così spesso contestata nelle superfici non sviluppabili [...]; e in secondo luogo, la possibilità di formare altre superfici di rotazione, in numero infinito. Quest'ultimo fatto appare in modo molto chiaro e si potrebbe quasi dire molto divertente. Vedendo, di fatto, una superficie che, una volta dispiegata, presenta un aspetto strano e in continua evoluzione, si fa fatica a credere che sia possibile arrotolarla (partendo da un punto qualsiasi del perimetro) come si arrotola un normale foglio di carta, e quanto si vuole, in modo da avvicinarsi indefinitamente alla forma cilindrica. La spiegazione di ciò si trova nelle pagine 18-19 del *Saggio*, seguendo l'equazione (14)¹³.

Grazie a questo modello, come afferma Beltrami, è possibile effettivamente verificare, sebbene in modo impreciso, alcuni risultati teorici enunciati nel *Saggio*, come la flessibilità-cioè la deformabilità con continuità-della superficie o la possibilità di realizzare infinite superfici di rivoluzione. Sempre nella stessa lettera, Beltrami descrive anche il suo secondo modello, ottenuto aumentando il valore del raggio di curvatura della superficie, e riferisce a Höuel anche le minuzie tecniche necessarie a raggiungere un buon risultato finale [15, p. 82]:

In base a questo esperimento iniziale, credo che aumentando il valore di R a 25 cent., possiamo, senza aumentare gli errori e riducendo notevolmente il lavoro, realizzare pezzi molto più grandi di quelli che ho usato. // Prendendo $s_2 = 2$ cent., $s_1 = 8$ cent., si ottiene una lunghezza di 347 mill. per il pezzo. (È bene rendere $\frac{s_1}{s_2} =$ un numero intero per facilitare l'assemblaggio dei diversi pezzi). Ho disegnato il modello di cartone con i nuovi dati, inserendo tutte le ordinate (circolari), aumentando di 1 mill. Ora devo ritagiarlo per usarlo come sagoma per tagliare la carta: in questo taglio, bisogna lasciare un piccolo margine su due lati del trapezio per cancellare i trapezi successivi. Penso che sarà necessario usare una carta abbastanza spessa (a differenza di quella che ho usato in precedenza).

¹³Beltrami si sta riferendo alla (3.87), che rappresenta l'elemento lineare di una superficie di rotazione.

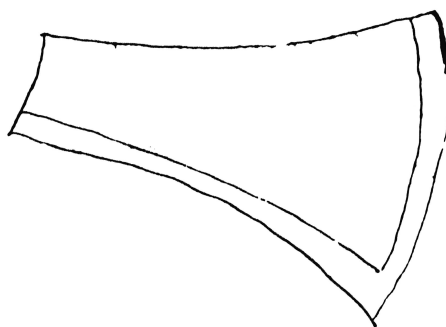


Figura 4.5

Sempre in questo contesto, è proprio Beltrami a riflettere su alcuni possibili miglioramenti che potrebbe apportare ai modelli materiali successivi, a partire dal materiale utilizzato per costruirli [15, p. 82]:

Inoltre, si otterrebbe una precisione di gran lunga maggiore costruendo il modello in rame e premendo un temperino contro di esso per tagliare direttamente la carta, e magari anche più pezzi contemporaneamente.

Infine, nella conclusione della lettera, Beltrami parla anche di un risultato che egli ha dedotto dal suo stesso modello [15, p. 82]:

Ecco un risultato piuttosto elegante che ho incontrato mentre ci lavoravo su:

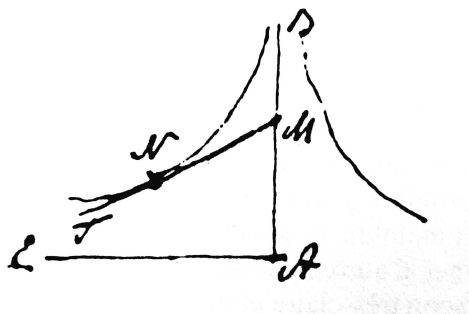


Figura 4.6

Tracciamo una linea retta AB e, in ciascuno dei suoi punti M , tracciamo la linea MT che indica la direzione della parallela ad AE , secondo Lobatcheffsky, rispetto alla distanza AM . L'involuppo di queste linee è il meridiano della superficie pseudosferica. Di conseguenza, la distanza MN nel punto di contatto è costante. La formula di Lobatcheffsky¹⁴ del mio *Saggio* è quindi un'equazione tangenziale di questa curva.

¹⁴Beltrami sta facendo riferimento, in questo passaggio, alla (3.68).

Il risultato appena descritto sarà pubblicato da Beltrami solo nel 1872, in un articolo dal titolo *Teorema di geometria pseudosferica*.

L'entusiasmo per la realizzazione dei modelli della pseudosfera emerge chiaramente anche in un'altra lettera indirizzata a Höuel del 25 marzo 1869, dove si parla di un nuovo modello e di un ulteriore possibile risultato [15, p. 82]:

Stamattina, con l'aiuto di uno dei miei studenti, che è un bravo disegnatore, ho ritagliato un modello di cartone che è venuto piuttosto bene e che userò per un nuovo tentativo di costruire una superficie pseudosferica. Lei menziona proposizioni empiriche che potrebbero essere trovate con questo metodo, e ha perfettamente ragione, poiché qui abbiamo a che fare con superfici per le quali non possediamo equazioni generali. Ecco precisamente una proposizione empirica che ho iniziato a sospettare. Una superficie pseudosferica può sempre essere piegata in modo tale che una qualsiasi delle sue linee geodetiche diventi una linea retta. Offro questo solo come risultato approssimativo che si verifica quando, fissando due punti della superficie flessibile con entrambe le mani, la si allunga tra di essi il più possibile senza strapparla. Questo risultato mi ha colpito tanto più perché (non saprei dirle ora in base a quali deduzioni) avevo esattamente il pregiudizio opposto. Se il contrario fosse vero, ecco l'importante conseguenza che se ne potrebbe trarre: se si potesse dimostrare l'esistenza di una singola linea retta nel mondo (una linea retta nel vecchio senso), l'intero sistema euclideo ne deriverebbe. Perché questa linea retta sarebbe una linea minima dello spazio; Di conseguenza, si dovrebbero poter tracciare attraverso di essa superfici di cui essa sarebbe una linea geodetica, aventi la loro curvatura costante e uguale a quella dello spazio (secondo il mio ultimo lavoro): se, dunque, si dimostrasse che ciò vale solo per superfici a curvatura zero, ne conseguirebbe che anche la curvatura dello spazio è zero, vale a dire che lo spazio sarebbe euclideo.

Beltrami sta trattando un problema matematico molto importante, cercando di caratterizzare le proprietà metriche e topologiche degli spazi riemanniani omogenei (localmente o globalmente) a curvatura costante; il primo a dimostrare che solo gli spazi a curvatura costante hanno la proprietà di essere totalmente geodetici¹⁵ fu Elie Cartan (1869-1955) [15, p. 82].

In ognuna delle lettere in cui Beltrami parla a Höuel del suo modello materiale, accanto alle descrizioni tecniche e all'entusiasmo, si nota anche una certa insistenza sull'importanza di tale lavoro, come se il suo atteggiamento nei confronti delle realizzazioni materiali potesse apparire bizzarro; nella lettera del 22 aprile 1869 Beltrami dice a Höuel: *i fatti fisici a volte aiutano a comprendere i fatti matematici* [36, p. 19]. D'altra parte, è interessante notare come non vi sia

¹⁵Uno spazio è totalmente geodetico se, dati due punti A e B di quello spazio, è sempre possibile tracciare una geodetica che li congiunga interamente contenuta nello spazio stesso. Per maggiori dettagli relativi a tale risultato si veda: Élie Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

alcuna allusione alla costruzione materiale del modello della pseudosfera in tutta la corrispondenza tra Beltrami e Genocchi, indice dell'imbarazzo di Beltrami nei confronti di questa sua passione. Credendo, in ogni caso, sinceramente nell'importanza dei modelli a cui stava lavorando, Beltrami continuò a insistere sul doppio ruolo che essi stavano svolgendo nel suo studio, sia come strumento di verifica sperimentale sia come mezzo per la scoperta di nuovi teoremi; ciò appare chiaro anche a Höuel, che in una lettera a Genocchi del 1 febbraio 1871 scrive [15, p. 33]:

È già da molto tempo che il Sig. Beltrami mi ha parlato di una costruzione sperimentale delle superfici a curvatura costante negativa, che ha eseguito per mezzo di piccoli trapezi curvilinei in carta, di cui aveva calcolato la forma, e che ha incollato insieme. L'esperienza ha pienamente verificato le sue previsioni, e lo ha persino messo sulla strada di alcuni risultati, che si sono trovati in accordo con la teoria.

Tra i modelli materiali realizzati da Beltrami, è pervenuto solo quello spedito a Luigi Cremona il 25 aprile 1869 e che oggi fa parte della Collezione dell'Università di Pavia.

4.3.1 La cuffia di Beltrami a Pavia

Il modello in cartone che appartiene alla collezione del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia fu descritto per la prima volta nella lettera di Beltrami a Höuel del 22 aprile 1869 [15, p. 91]:

Mio caro collega,

Ho ricevuto la vostra lettera del 10 di questo mese puntualmente, mentre ero completamente assorbito nella costruzione della superficie pseudosferica, che ora è terminata. Attendo un'occasione favorevole per inviarla al signor Cremona, che vive in un ambiente più colto di quello bolognese e che forse potrà stimolare l'interesse di alcune persone attraverso l'esposizione di questa novità, in un piccolo gruppo.

Il modello della pseudosfera in questione fu spedito, pochi giorni dopo, il 25 aprile dello stesso anno, a Luigi Cremona (1830-1901), con allegata una descrizione dettagliata della realizzazione e diverse raccomandazioni riguardanti la buona conservazione del manufatto; l'originale di tale lettera è andato purtroppo perduto, ma ne è sopravvissuta una copia, che riportiamo di seguito integralmente [15, pp. 201–203]:

Carissimo Cremona,

In questo momento ho rimesso ad un inserviente della strada ferrata, per essere consegnato al sig. ispettore Achille Brughera, ottima persona di mia vecchia conoscenza, un involto cilindrico contenente il modello, che ti ho promesso, di un pezzo circolare di superficie

pseudosferica. Ho caldamente raccomandato al detto signore di trasportarlo con tutto il riguardo, e di non lasciarlo mai uscire di mano, talché egli non sarà in grado di recarsi da te, per deporlo nelle tue mani, che verso la fine della settimana. Io ti sarò molto grato se vorrai subito avvertirmi di averlo ricevuto.

Bisogna che io ti dia qualche istruzione per quello che devi fare al ricevimento del pacco, perché si tratta di cosa di forma e di natura insolita. Tu devi usare precauzione nel lacerare la carta esterna, soprattutto verso le estremità poiché gli è in queste parti che la superficie è assicurata. La superficie è ripiegata in forma di superficie di rotazione, e il suo aspetto è il seguente



Figura 4.7

Per impedire ogni compressione durante il trasporto ho introdotto un bastoncino nella direzione dell'asse, ed ho assicurato alle sue estremità due dischi di cartone che chiudono i due paralleli estremi (e maggiori) della superficie, poi, mediante, sei incavi praticati lungo la periferia di questi dischi, ho formata una specie di gabbia, di questa forma

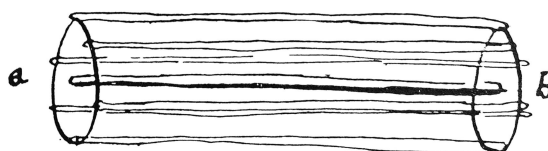


Figura 4.8

dove $a - b$ è il bastoncino centrale che passa nell'interno della superficie di rotazione e ne forma l'asse. Sopra questa gabbia è piegata la grossa carta che forma l'involucro esterno. Tu devi dunque lacerare l'involucro in modo da non scuotere troppo la leggera impalcatura che contiene, poi, sciolti i sei bastoncini esterni, e staccato uno dei dischi, ti sarà facile estrarre tu il pezzo di superficie.

La superficie di rotazione secondo cui esso è ripiegato è quella cui si riferisce l'equazione (14)¹⁶ del mio *Saggio di interpretazione*, e il

¹⁶Beltrami si sta riferendo, ancora una volta, alla (3.87), che rappresenta l'elemento lineare di una superficie di rotazione.

suo meridiano è una curva trascendente la cui equazione non può aversi in termini finiti. Il suo parallelo minimo è uno dei diametri del cerchio ripiegato: esso potrebbe essere anche una qualunque corda geodetica, ma allora la superficie non sarebbe più simmetrica da ambe le parti. Giova considerare abitualmente la superficie sotto questa forma che è la più comoda, ma cambiando dopo alcuni giorni il diametro centrale, per impedire che essa acquisti una piegatura troppo stabile in un determinato senso.

Uno dei diametri (di lunghezza = $1^m, 04$) è segnato a penna,¹⁷ cioè AB : sul diametro ad esso perpendicolare è segnato un punto O dal quale si vedono condotte ad AB le due parallele OM , ON , formanti un angolo sensibilissimo. Poi vi sono due oriccioli EF , $E'F'$ tangenti fra loro ed aventi i centri all'infinito sul diametro AB , l'uno da una parte, l'altro dall'altra: è pure segnata la geodetica HK loro tangente comune. Nel piano queste tre linee, EF , HK , $E'F'$ coinciderebbero in tutta la loro estensione. I due oriccioli, benché abbiano il loro centro all'infinito, hanno una curvatura sensibilissima: effettivamente sono formati di archetti circolari del raggio di 25 centimetri (che è il raggio della superficie). Il perimetro totale del pezzo è maggiore di sei metri (esattamente $0^m, 25$ p $(8-1/8)$) e la circonferenza geodetica che lo costituisce è formata di archetti circolari del raggio di 24 centimetri circa.

Vedrai da te stesso la varietà infinita delle forme, delle quali è deplorabile non poter conoscere le equazioni finite. Che vi fosse qualche superficie algebrica? Nel caso della curvatura costante positiva vi è pure la sfera: è ben vero che supponendo immaginario il raggio di questa non si ha più una superficie reale.

Avrei qualche intenzione di descrivere il processo di costruzione in una Nota per l'Istituto Lombardo, al quale potrebbe forse, nonostante le sue imperfezioni, essere presentato il modello che ti mando: ma, in questo caso, non vorrei che il modello restasse all'Istituto per diventar pasto dei sorci, e preferirei che restasse presso di te, per il caso che qualche tuo allievo di buona volontà e di maggiore pazienza che non sia la mia, volesse ritentar con maggiore successo la costruzione che ho grossolanamente eseguita. Avrei anche qualche altra idea intorno ad una esecuzione più perfetta da intraprendersi con altri mezzi e con diversissimi materiali: ma mi bisognerebbe consultare in proposito una persona esperta in manipolazioni industriali.

Nel ripiegare la superficie, per tenerla in serbo, abbi l'avvertenza di lasciar sempre all'esterno la faccia su cui son tracciate le linee in nero. Teoricamente tutte e due le faccie sono in eguali condizioni; ma nell'incollatura dei varii pezzi ho dovuto tenerli piegati in guisa da rendere più appropriata, come disposizione permanente, quella che ho accennato.

¹⁷Si veda la Fig. 4.9.

Nell'ultima lettera ricorre nuovamente l'idea di utilizzare materiali diversi dalla carta per la costruzione di un nuovo modello: Beltrami manifesta l'intenzione di ottenere un manufatto più accurato, realizzato con tecniche e materiali propri della produzione industriale, così da garantirne una maggiore stabilità, precisione e riproducibilità. Questa stessa idea sarà ripresa solamente nel 1872, anno in cui Beltrami pubblicò il suo articolo *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche*, forse in risposta alle critiche pervenute in quello stesso periodo al suo modello da parte di Helmholtz e Klein (che abbiamo discusso nel precedente capitolo) [36, pp. 19–21].

Come abbia già detto, Beltrami spedì il suo modello materiale della pseudosfera a Cremona, che era stato suo collega a Bologna e in quel momento si trovava a Milano come insegnante del Regio Istituto Tecnico Superiore di Milano (l'attuale Politecnico di Milano); quando, nel 1873, si trasferì a Roma per assumere la guida della Scuola di Applicazione per Ingegneri, Cremona non portò con sé il modello di Beltrami, e probabilmente lo consegnò nelle mani di Felice Casorati, suo amico [64, p. 309]. Casorati presentò il modello della pseudosfera al pubblico il 16 novembre 1873, giorno in cui egli pronunciò il discorso inaugurale dell'anno accademico dell'Università di Pavia: in quell'occasione, descrivendo gli sviluppi più recenti della geometria, Casorati, dopo aver esposto il modello materiale della pseudosfera realizzato da Beltrami, rappresentò le superfici a curvatura negativa costante con la seguente immagine [21, pp. 48–49]:

Gli abitanti di uno spazio a curvatura negativa, cioè di una pseudosfera, troverebbero vero l'assioma della retta, ma non quello delle parallele. Per un punto potrebbero condurre due parallele ad una retta, l'una che va ad incontrarla all'infinito da una parte, l'altra dall'altra parte; e tra le due parallele una infinità di altre rette che non incontrano mai la data. La geometria in questa superficie coincide con la parte planimetrica della teoria di Lobatschewsky. Colla pseudosfera il sig. Beltrami ha quindi trovato un substratum reale per questa planimetria, che Lobatschewsky, forse in mancanza di ciò, chiamava imaginaria; ed ha così messo in tutta la desiderabile evidenza l'ufficio del famoso assioma delle parallele. Ormai vediamo che esso serve a distinguere il piano dalla pseudosfera, mentre a distinguere queste due superfici dalla sfera serve l'assioma della retta, come poi a distinguere queste tre superficie da tutte le altre possibili serve l'assioma della trasportabilità di una figura invariabile.

La millenaria questione del V postulato di Euclide aveva, dunque, trovato una realizzazione teorica soddisfacente agli occhi dei matematici. Proprio in quell'occasione nacque anche il nome goliardico di *cuffia di Beltrami*, con cui il modello è noto ancora oggi: sulle colonne di un giornale satirico dal titolo *La Canaglia*, infatti, fu ospitata una parodia del discorso di Casorati [64, pp. 309–310]:

L'università *ticinese* (come la chiama il mellifluo corrispondente della *Perseveranza*) si è aperta, o almeno è stata dichiarata aperta

alla presenza dei membri invitati, i quali sedevano al posto d'onore, nella Aula Magna, seminata di curiosi e vuota di gentil sesso.

Il facondo professore Casorati lesse un lungo discorso di cui diamo le parti più salienti:

Inclito pubblico e valorosa guarnigione. L'ignoto, voi lo sapete, è un x , il quale sommato colla radice cubica di y , può dare una quantità infinitesima k , che moltiplicata in r , dà per risultato a z . [...]

Signori! Quando a b c d e f g h i l m n o p q r s t u v z stanno da sole, voi avete delle quantità, alle quali manca la potenzialità di x y w k. Ma fra l'unità dello zero e il vuoto di un ripieno corre una proporzione o h diviso due, che vale a misurare il numero delle forze consistenti in una sfera quadrata, ossia nel circolo che ha per punto metrico una circonferenza misurata 16. [...] Osservate lo spazio di questo 16 — Esso è largo sufficientemente, perché vi possa penetrare una leva q, la quale agisca con forza repellente contro il fondo della figura.

Così resta spiegato il fenomeno della cuffia di mia nonna (*il prof. Casorati fa vedere agli astanti la cuffia in questione*) che applicata colla potenza m quattro sul capo calvo di un raffreddato, elide l' y degli sternuti e rimette l' x della tosse (*Segni d'approvazione delle sedie vuote*).

Chiaramente, il discorso di Casorati era decisamente più profondo, trattando dei fondamenti della geometria e delle idee di Gauss e Riemann sulle superfici, ma ciò bastò per far passare alla storia la pseudosfera con il termine *cuffia* [65, p. 230].

Possiamo ora esaminare in dettaglio la configurazione tecnica del modello conservato a Pavia. Beltrami, nella sua lettera a Höuel del 22 aprile 1869, descrive il modello in questi termini [15, pp. 91–92]:

Nel modello che ho appena costruito, il contorno è una curva chiusa i cui punti sono tutti a una distanza di 52 centimetri dal centro delle normali, eppure questa linea, la cui lunghezza totale è di più di sei metri, ha, in ciascuno dei suoi punti, un raggio di curvatura di circa 24 centimetri, e l'occhio non è in alcun modo influenzato da irregolarità nella sequenza degli elementi che la compongono. Inoltre, ho disegnato con una penna sulla superficie due oricci opposti, tangenti in un punto comune, insieme alla loro tangente geodetica comune. I due oricci hanno il loro centro all'infinito, eppure la loro curvatura, chiaramente visibile e simmetrica rispetto alla tangente, ha un raggio di 25 centimetri. (Ho anche disegnato sulla mia superficie due geodetiche, parallele alla stessa geodetica e originate dallo stesso punto: l'angolo che esse comprendono è approssimativamente di 100 gradi, e ha con la distanza normale dal loro punto di intersezione la relazione stabilita da Lobatcheffsky).

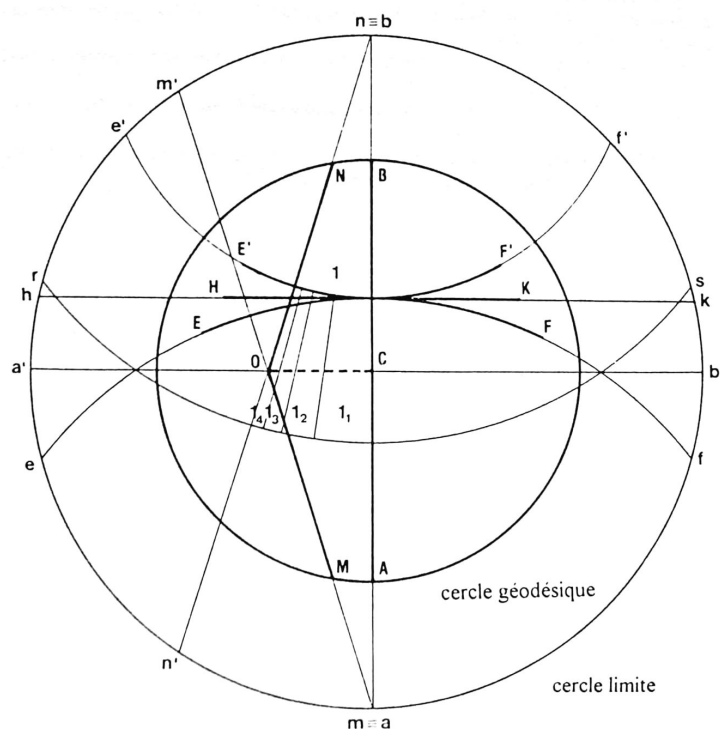


Figura 4.9

Nel rispetto delle indicazioni riportate da Beltrami, il modello, rappresentato graficamente nella Figura 4.9, è costituito da trapezi curvilinei in cartone ritagliati e incollati tra loro in maniera appropriata, come è visibile nella fotografia in Figura 4.10; ognuno dei trapezi corrisponde approssimativamente a una porzione di superficie compresa tra due meridiani e due paralleli [15, p. 37].

Dal momento che, nel suo insieme, il modello è l'approssimazione di un cerchio geodetico, è utile descriverlo nel suo piano ausiliario: facendo riferimento alla Figura 4.9, il modello realizzato da Beltrami corrisponde al cerchio di diametro AB , mentre la circonferenza di diametro ab rappresenta il *cerchio limite* [15, p. 37]. Le linee che, nella Figura 4.9, hanno un tratto più marcato corrispondono a quelle effettivamente tracciate da Beltrami nel suo modello; nello specifico esse sono [15, p. 38]:

- Il diametro AB di lunghezza 1,029 metri
- Il segmento di geodetica OC perpendicolare al diametro AB nel suo punto medio M
- La porzione di geodetica OM , e la sua simmetrica ON rispetto a OC che sono due geodetiche parallele ad AB
- Gli archi di orociclo EF e $E'F'$, tangenti tra loro e aventi i centri all'infinito rispettivamente in a e in b

- Il segmento di geodetica HK , perpendicolare ad AB e tangente sia ad EF sia a $E'F'$.



Figura 4.10

In base al modo in cui il modello appena descritto viene piegato esso può originare le diverse superfici di rotazione descritte da Beltrami nel *Saggio* [15, p. 38].

Nel caso in cui il modello venga piegato secondo la superficie pseudosferica di tipo parabolico, corrispondente all'equazione

$$ds^2 = d\varrho^2 + e^{-2\varrho/R} d\sigma^2 \quad (4.3)$$

(che abbiamo già incontrato, (3.89)), si realizza la superficie fotografata nella Figura 4.11.

Nel caso in cui, invece, il modello venga piegato secondo la superficie pseudosferica di tipo iperbolico, corrispondente all'equazione

$$ds^2 = d\xi^2 + \cosh^2 \frac{\xi}{R} d\eta^2 \quad (4.4)$$

(che abbiamo già incontrato, (3.87)), si realizza la superficie fotografata nella Figura 4.12.



Figura 4.11 Il modello di cartone di Beltrami ripiegato secondo la superficie pseudosferica di tipo parabolico.

Infine, come era già stato osservato nel *Saggio*, è impossibile che il modello venga piegato secondo la superficie pseudosferica di tipo ellittico, corrispondente all'equazione

$$ds^2 = dq^2 + (R \sinh \frac{q}{R})^2 d\varphi^2 \quad (4.5)$$

(che abbiamo già incontrato, (3.83)), senza che sia stato effettuato almeno un taglio nel modello stesso. In questo senso, viene ampiamente giustificato il commento di Beltrami secondo cui, *nel caso attuale, non si potrebbe applicare effettivamente su una superficie di rivoluzione la calotta pseudosferica [...] senza alterare la continuità per mezzo di qualche sezione operata in questa calotta a partire da questo stesso punto*; il problema, sempre secondo Beltrami, è che una tale superficie di rivoluzione incontrerebbe l'asse di rotazione in un punto in cui la curvatura diventerebbe positiva, condizione impossibile in quanto la superficie considerata ha ovunque curvatura negativa costante.



Figura 4.12 Il modello in cartone di Beltrami ripiegato secondo la superficie pseudosferica di tipo iperbolico.

4.3.2 Le implicazioni teoriche del modello della pseudosfera

Nel 1872, Beltrami tornò a occuparsi della questione relativa alla costruzione materiale della pseudosfera, pubblicando due contributi nei quali sistematizzò e discusse i risultati di geometria iperbolica che aveva ricavato proprio a partire dall'analisi del modello. Gli articoli, intitolati *Teorema di geometria pseudosferica* e *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche*, riportano alcuni dei risultati discussi da Beltrami nelle lettere a Höüel (come quello citato nella lettera del 13 marzo 1869 o quello di cui si parla nella lettera del 25 marzo 1869) e pongono l'attenzione sui possibili elementi geometrici utili per una realizzazione materiale successiva della pseudosfera; un'ulteriore conferma di ciò si incontra nell'introduzione dell'articolo *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche*, che Beltrami sostiene di aver scritto *allo scopo di preparare gli elementi geometrici di una costruzione materiale, possibilmente facile ed esatta della superficie stessa* [36, p. 19].

Il risultato presentato da Beltrami nell'articolo [7] evidenzia, ancora una volta, l'importante ruolo che la trattrice possiede nel suo modello di geometria iperbolica. Partendo, infatti, dall'equazione (3.68) ottenuta nel *Saggio*, Beltrami mostra che, sfruttando l'angolo di parallelismo, è possibile ricavare, nel piano euclideo ordinario, proprio la trattrice come inviluppo di rette. In questo contesto, l'(3.68) indicata assume la forma

$$\tan \vartheta \sinh \frac{\delta}{R} = 1, \quad (4.6)$$

dove ϑ è l'angolo di parallelismo corrispondente alla distanza δ nel caso in cui il raggio di curvatura della superficie sia R .

Ponendosi nel piano euclideo, Beltrami considera due assi cartesiani centrati in O e indica con (x, y) le coordinate di un punto qualunque del piano. Scelto sull'asse x un punto N tale che $ON = \delta$, viene poi tracciata la retta NM in modo che essa formi con NO un angolo ϑ e abbia quindi equazione [64, p. 310]:

$$f(x, y, \delta) = x + y \sinh \frac{\delta}{R} - \delta = 0 \quad (4.7)$$

La retta considerata è, per costruzione, una delle parallele, secondo Lobačevskij, all'asse delle y e passante per il punto N ; Beltrami evidenzia questo aspetto nel modo seguente [10, p. 392]:

Potrà riguardarsi, in vicinanza del punto δ donde è spiccata, come rappresentante una delle parallele che, ove il piano fosse non-euclideo, si potrebbero da quel punto condurre all'asse delle y .

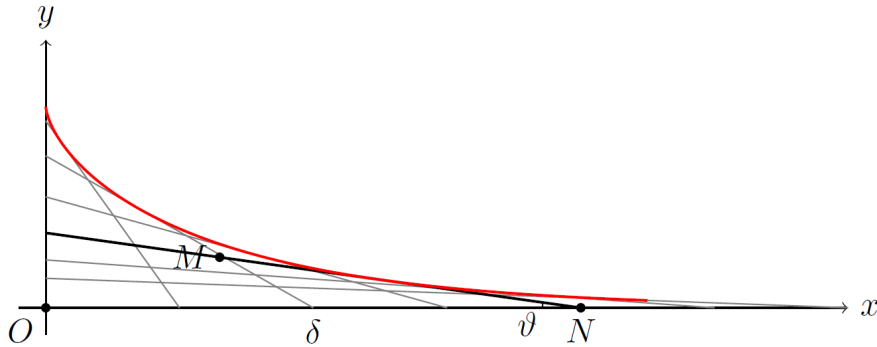


Figura 4.13

Dal momento che, però, la costruzione è stata effettuata nel piano euclideo, al variare del valore di δ , l'insieme delle rette tracciate involupa una curva (Figura 4.13); l'equazione di tale curva si può ottenere eliminando δ dal sistema [64, p. 311]:

$$\begin{cases} f(x, y, \delta) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \delta} = \frac{y}{R} \cosh \frac{\delta}{R} - 1 = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Ora, dato che la retta $f(x, y, \delta) = 0$ ha in comune con la curva cercata il punto M di coordinate [64, p. 311]

$$x = \delta - R \tanh \frac{\delta}{R}, \quad y = \frac{R}{\cosh \frac{\delta}{R}}, \quad (4.9)$$

si ottiene la seguente equazione [64, p. 311]:

$$(x - \delta)^2 + y^2 = R^2. \quad (4.10)$$

Siccome al primo membro vi è il quadrato della lunghezza euclidea del segmento MN e al secondo membro una costante, Beltrami è quindi in grado di concludere [10, p. 393]:

L'involuppo cercato è la curva delle tangenti di lunghezza costante, cioè è il meridiano della superficie pseudosferica che può servire acconciamente di tipo a tutte le altre.

La lunga serie di teoremi ricavati nel lavoro [6] di Beltrami segna la fine della sua produzione legata al tema della pseudosfera. L'articolo parte considerando

la superficie generata dalla rotazione, attorno all'asse delle x , della trattrice, descritta sia in coordinate cartesiane,

$$x + \sqrt{r^2 - y^2} = r \log \frac{r + \sqrt{r^2 - y^2}}{y} \quad (4.11)$$

(dove r è il segmento tangente di lunghezza costante compreso tra il punto di contatto e l'asse delle x), sia in coordinate parametriche,

$$x = r \left(\log \cot \frac{\vartheta}{2} - \cos \vartheta \right), \quad y = r \sin \vartheta \quad (4.12)$$

(dove ϑ è l'angolo acuto che la tangente alla curva nel punto (x, y) fa con l'asse delle x) [15, p. 39]. Dopo aver descritto alcuni dettagli della trattrice (come la presenza della cuspid e nel suo punto di massimo), Beltrami considera, scelto un punto Q_0 della superficie di rotazione situato sul meridiano appartenente al piano xy e sul parallelo $\theta = \theta_0$, la curva γ intersezione della superficie di rivoluzione con il piano tangente alla superficie nel punto Q_0 (si faccia riferimento alla Figura 4.14) e studia i cerchi osculatori dei due rami di γ nel suo punto doppio Q_0 [15, pp. 39–40].

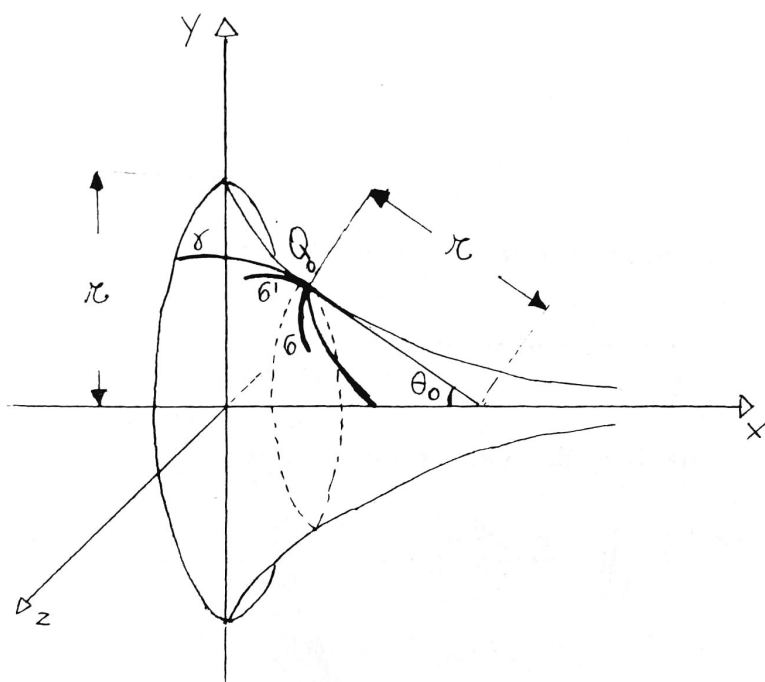


Figura 4.14

Beltrami mostra che i cerchi osculatori considerati soddisfano le equazioni [15, p. 40]:

$$\left(u - \frac{3r}{4}\right)^2 + \left(v \pm \frac{3r \cot \theta_0}{4}\right)^2 = \left(\frac{3r}{4 \sin \theta_0}\right)^2; \quad (4.13)$$

perciò, è possibile enunciare i due teoremi seguenti [10, pp. 396–397]:

Teorema 4.1 (Teorema I.). *Le due rette osculatrici, in un punto qualunque della superficie, fanno colla linea meridiana angoli eguali a quello che la tangente a questa linea in quel punto fa coll'asse della superficie.*

Teorema 4.2 (Teorema II.). *Se il raggio di curvatura di ciascuno dei rami della curva d'intersezione della superficie con un suo piano tangente si proietta sulla tangente meridiana, si ha una proiezione costante ed uguale a $\frac{3}{4}r$.*

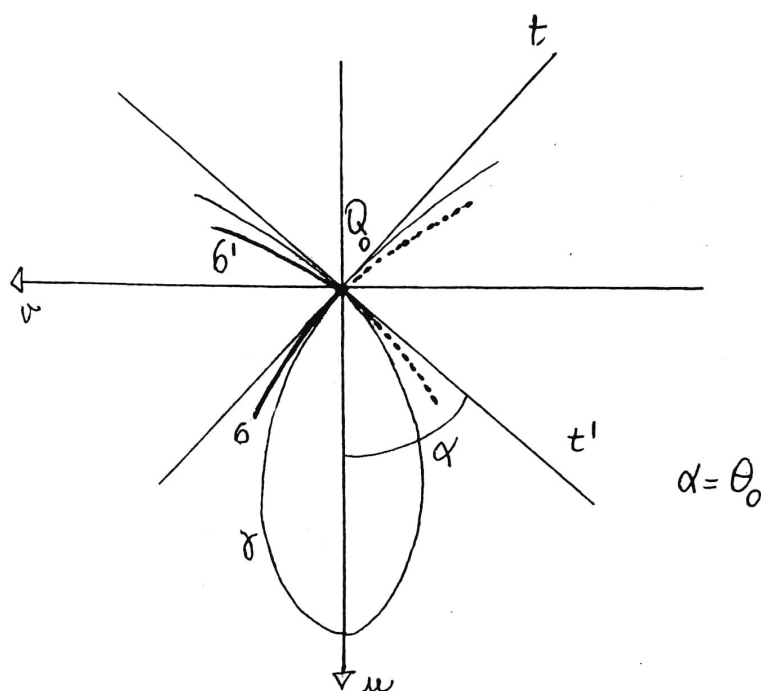


Figura 4.15

- γ : intersezione della superficie di rotazione pseudosferica con il piano tangente ad essa in Q_0
- σ, σ' : archi dei cerchi osculatori a γ in Q_0
- t, t' : tangenti a γ in Q_0

Successivamente, considerati due piccoli archi σ e σ' (si faccia riferimento alla Figura 4.15) sui due cerchi osculatori e dalla stessa parte rispetto al meridiano scelto in precedenza (l'angolo che si forma tra essi ha ampiezza $\pi - 2\vartheta_0$), Beltrami osserva che la superficie generata dalla loro rotazione intorno all'asse x ha una differenza rispetto alla superficie considerata prima di un termine non superiore al 4° ordine rispetto alla distanza dal parallelo comune: questa proprietà, come afferma Beltrami in una nota al testo, sarebbe molto utile nel caso di una realizzazione materiale di un modello della pseudosfera [10, p. 397]:

Ritengo che siffatta proprietà sia quella cui converrebbe fare appello qualora si trattasse di costruire materialmente, mercé un processo meccanico facile ad immaginarsi, la superficie rotonda di cui qui è parola. È evidente del resto che l'esattezza del risultato dipenderebbe tutta dalla diligenza colla quale sarebbe stata *spianata* ed *orientata* nello spazio la sagoma bicircolare destinata a descrivere la superficie (o a meglio dire una piccola zona di essa) col suo moto *radente*.

Beltrami ritiene probabilmente che la pseudosfera possa essere modellata utilizzando un apposito strumento (il tornio bicircolare, appunto); in realtà, ciò, nei termini descritti dall'articolo, non è possibile, poiché l'angolo $\pi - 2\vartheta_0$ dipende da ϑ_0 , cioè da un valore particolare del parametro (il quale decresce da $\pi/2$ a 0 quando x varia da 0 a ∞) che caratterizza lo strumento. Quest'ultimo fatto è il motivo per cui nella nota egli aggiunge *o, per meglio dire, una piccola zona di essa* [15, p. 41].

Nello sviluppo dell'articolo seguono altri risultati legati agli elementi della pseudosfera e alle relazioni che tra essi si creano. In particolare, citiamo l'ultimo dei teoremi dimostrati da Beltrami nel testo [10, p. 407]:

Teorema 4.3 (Teorema X.). *La lunghezza totale di un filo il quale, partendo da un punto del parallelo massimo, viene teso sulla superficie in modo da ritornare al punto di partenza dopo aver fatto k giri sulla superficie stessa, si ottiene moltiplicando il diametro del parallelo massimo per il numero costante $\log(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 + 1})$.*

Esso fornisce una formula per calcolare la lunghezza di una famiglia di geodetiche periodiche sulla pseudosfera, che può essere espressa anche come funzione iperbolica:

$$\log(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 + 1}) = \operatorname{arcsinh}(k\pi). \quad (4.14)$$

Dopo il 1872, Beltrami abbandonò le ricerche sulla pseudosfera, come attesta la corrispondenza con Hoüel, e i suoi interessi si spostarono progressivamente verso questioni di meccanica e di fisica matematica [15, p. 41].

4.4 I modelli derivati dagli studi di Beltrami

La portata del lavoro in geometria non euclidea di Beltrami non si esaurì nella vasta e significativa serie di risultati da lui ottenuti. Le sue ricerche stimolarono infatti, tra l'altro, la realizzazione di alcuni modelli geometrici, in parte presenti nella collezione ospitata presso il nostro Dipartimento.

L'interesse per questi modelli risulta particolarmente evidente nel contesto delle ricerche legate alle superficie a curvatura negativa costante: il modello della pseudosfera di Bacharach e le superfici di rotazione a curvatura costante negativa di tipo ellittico, iperbolico e parabolico mostrano, infatti, diverse modalità con cui le superfici studiate da Beltrami possono essere rappresentate concretamente e danno la possibilità di visualizzare l'andamento delle geodetiche, la disposizione di particolari famiglie di curve e, più in generale, il legame

tra la forma della superficie e le sue proprietà intrinseche in ognuno dei casi specifici considerati.

L'analisi proposta nelle pagine seguenti si basa sugli opuscoli esplicativi che accompagnavano originariamente i modelli, presenti ancora oggi. Tali testi, redatti in lingua tedesca e destinati a guidarne l'utilizzo didattico, offrono una preziosa testimonianza delle finalità con cui questi modelli furono progettati e impiegati. Per ciascun modello considerato, sarà presentata la traduzione dell'opuscolo a cui seguiranno alcune osservazioni volte a contestualizzare i contenuti dal punto di vista matematico e storico.

Lo scopo non sarà soltanto quello di chiarire eventuali aspetti tecnici presenti nei testi originali, ma anche di evidenziare il legame tra le proprietà delle superfici rappresentate e i risultati teorici discussi in precedenza; in tal modo, i modelli della collezione pavese potranno essere letti non soltanto come oggetti di interesse storico ma come testimonianze concrete del modo in cui la geometria differenziale e la geometria non euclidea fossero trasmesse, comprese e insegnate tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento.

4.4.1 Il modello di Bacharach della pseudosfera

Tra i modelli impiegati per la visualizzazione delle geometrie a curvatura costante negativa riveste un ruolo fondamentale, come abbiamo visto, la pseudosfera, ottenuta mediante la rotazione della trattrice attorno al suo asintoto. Il modello qui presentato (corrispondente alla Figura 4.16 e visibile in una rappresentazione digitale in Figura 4.17), realizzato da Isaak Bacharach per la collezione di modelli matematici di Brill/Schilling, evidenzia sulla superficie alcune linee geodetiche e linee asintotiche, consentendo di visualizzare concretamente proprietà geometriche altrimenti difficili da rappresentare. La scheda seguente ne descrive le principali caratteristiche matematiche.

Modelli Matematici

realizzati

presso l'Istituto Matematico del Regio Politecnico di Monaco.

Lavoro II. Sotto la direzione del Prof. Dott. Brill.

I.

Categoria VII

Modello 9¹⁸

Superficie di rotazione della trattrice con le loro curve geodetiche e curve asintotiche

Modello realizzato dallo studente in matematica J. Bacharach¹⁹

Posta l'equazione della trattrice nella forma*):

$$z = f(y) = c \log \frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y} - \sqrt{c^2 - y^2}$$

¹⁸La numerazione VII.9 è quella adottata nel catalogo dei modelli presente a Pavia. In numero romano I. si riferisce all'ordinamento dei fogli esplicativi.

¹⁹Il nome di Bacharach è Isaak, ma in questa scheda egli è citato con l'iniziale "J".

*) Nei calcoli si supporrà la grandezza c pari a 25 unità.



Figura 4.16 Superficie di rivoluzione di tipo parabolico e corrispondente a circonferenze geodetiche con centro all'infinito.

(si veda Salmon-Fiedler, *höhere Curven*, Art. 318) si ottiene dalla sua rotazione attorno all'asse z la superficie

$$z = f(r)$$

dove

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

La superficie possiede curvatura costante negativa. Il modo migliore per riconoscerlo è a partire da una proprietà delle superficie di rotazione per la quale i raggi di curvatura principali in ogni punto sono quello del meridiano nello stesso punto e il segmento della normale al meridiano che si trova tra il punto e l'asse di rotazione. Il raggio di curvatura in un punto di un meridiano è

$$\varrho = \frac{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''}.$$

Per trovare la lunghezza n del segmento della normale, si osservi la proprietà della trattrice per cui la lunghezza del segmento della tangente in un suo punto qualsiasi, dal punto di contatto fino all'intersezione con l'asintoto della curva, ha valore costante c . Da qui si ottiene

$$n = -c \left(-\frac{dr}{dz} \right) = \frac{c}{f'},$$

dove il primo dei segni negativi ha origine dal fatto che occorre calcolare la normale in senso contrario rispetto al raggio di curvatura principale. Ora, si ha

$$f' = -\frac{\sqrt{c^2 - r^2}}{r}; \quad f'' = \frac{c^2}{r^2 \sqrt{c^2 - r^2}},$$

e di conseguenza

$$\varrho = \frac{c}{r} \sqrt{c^2 - r^2}; \quad n = -\frac{rc}{\sqrt{c^2 - r^2}},$$

cosicché la curvatura è

$$K = \frac{1}{\varrho n} = -\frac{1}{c^2}.$$

Se proiettiamo le **curve geodetiche** di una superficie di rotazione su un piano ortogonale all'asse di proiezione, l'equazione della proiezione in coordinate polari r, ϕ è (si veda Joachimsthal, *Anwendung der Differential-Rechnung etc.* p. 142):

$$\phi = \nu \int_c^r \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{r^2 - \nu^2}},$$

dove ν è una costante. Per la nostra superficie si ottiene

$$\phi = \nu c \int_c^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{r^2 - \nu^2}} = \left[\frac{c}{\nu r} \sqrt{r^2 - \nu^2} \right]_c^r$$

$$\phi = \frac{c}{\nu r} \sqrt{r^2 - \nu^2} - \frac{1}{\nu} \sqrt{c^2 - \nu^2}.$$

Il significato della costante ν si ottiene in questo modo: sia λ l'angolo che la proiezione della geodetica sul piano xy forma con il cerchio di riferimento (per il quale $r = c$), allora si ha

$$\tan \lambda = \frac{dr}{cd\phi} = \frac{r^2 \sqrt{r^2 - \nu^2}}{\nu c^2};$$

per $r = c$:

$$\frac{\sqrt{c^2 - \nu^2}}{\nu}$$

da cui segue

$$\nu = c \cdot \cos \lambda$$

e

$$\phi = \frac{1}{r \cos \lambda} \sqrt{r^2 - c^2 \cos^2 \lambda} - \operatorname{tg} \lambda.$$

Questa è l'equazione cercata. Per ogni valore di λ si ottiene una geodetica; ognuna di queste curve raggiunge il punto più alto per $r = c \cdot \cos \lambda$ e, per valori inferiori di r , ϕ sarà immaginario. Al contrario, per ogni valore più grande si ottiene un certo ϕ e poi il corrispondente valore di z dall'equazione della curva, cosicché non è difficile trasportare la curva sulla superficie. Per ottenere una corrispondenza simmetrica, ciascuna curva è stata ruotata di un angolo determinato in modo tale che i punti massimali delle singole curve giacciono sullo stesso meridiano. *)

Per ottenere l'equazione differenziale delle linee asintotiche occorre imporre la condizione che sia infinito il raggio di curvatura della sezione normale di un elemento della curva preso ad arbitrio. Usando le notazioni di Gauss (si veda Joachimstahl, §. 53, alla fine) questa condizione è

$$D \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + 2D' \left(\frac{dr}{d\phi} \right) + D'' = 0.$$

Dalle equazioni

$$z = f(r); \quad x = r \cdot \cos \phi; \quad y = r \sin \phi$$

si ottiene

$$D = r f''; \quad D' = 0; \quad D'' = r^2 f'.$$

Se inseriamo questi valori e semplifichiamo il fattore comune r , sarà

$$f'' \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + f' r = 0;$$

$$d\phi = \frac{cdr}{r\sqrt{c^2 - r^2}};$$

$$\phi = \log \frac{c - \sqrt{c^2 - r^2}}{c}.$$

Nel modello è realizzata una curva asintotica tale da essere tangente ad una curva geodetica. In generale, in virtù della natura della curva asintotica, ciò può accadere solo in un punto di flesso della geodetica della cui esistenza ci siamo già convinti.

Se si proietta una curva nello spazio su un piano, i suoi punti di flesso

*) Le curve associate al modello corrispondono ai valori

$$\lambda = 45^\circ; 60^\circ; 67^\circ; 72 \frac{1}{3}^\circ; 75^\circ; 78 \frac{1}{2}^\circ; 84 \frac{4}{5}^\circ;$$

i cui rispettivi angoli di rotazione δ sono:

$$\delta = 122^\circ, 7; 80^\circ, 8; 45^\circ; 0^\circ; 326^\circ, 2; 259^\circ, 25; 270^\circ.$$

saranno punti di flesso della curva piana e pertanto possiamo limitarci, per questo, a calcolare i punti di flesso per le proiezioni delle geodetiche.

Un punto di flesso corrisponde ad un raggio di curvatura infinito per cui deve essere

$$r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\phi^2} = 0.$$

Se si considerano i quozienti differenziali che compaiono dall'equazione delle geodetiche e li si inserisce qui, si ottiene un'equazione per r che, dopo alcune riduzioni, prende la forma

$$r = c\sqrt{\cos \lambda}.$$

Per il modello è stata utilizzata la curva $\lambda = 72^\circ 20' 35''$ per cui il punto di inflessione che si ottiene è

$$r = 13,8.$$

Osservazioni. L'equazione delle geodetiche è scritta nella forma proposta da Ferdinand Joachimstahl (1818-1861) in un trattato di geometria differenziale o, come si diceva allora, di applicazioni del calcolo alla geometria. Il volume di Joachimstahl ebbe più edizioni ed il riferimento alla pagina nel testo è all'edizione postuma del 1872 [40], basata sulle lezioni che egli aveva impartito nell'università di Breslavia durante il semestre invernale 1856-1857. Rispetto alle deduzioni moderne manca pertanto l'uso esplicito dei coefficienti di Christoffel. Per scrivere le equazioni di una geodetica su una superficie, Joachimstahl seguiva un percorso che si può riassumere in queste tappe.

1) Dimostrare che la linea di minima lunghezza tra due punti vicini di una superficie ha la proprietà di avere la normale principale parallela alla normale alla superficie, la cui equazione è scritta nella forma $F(x, y, z) = 0$, in termini delle coordinate cartesiane ortogonali (x, y, z) di un punto P appartenente ad essa. Presi $P_1 \equiv (a, b, c)$ e $P_2 \equiv (a', b', c')$ due punti sulla superficie, con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si cerca il minimo di

$$u + u' + \lambda F$$

dove λ è il moltiplicatore ed

$$u^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \quad u'^2 = (x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2 :$$

alla maniera di Eulero, Joachimstahl minimizza la lunghezza della spezzata $P_1 P P_2$ che unisce P_1 e P_2 passando per P e che si confonde con un arco di curva sulla superficie nel limite in cui P_1 e P_2 sono molto vicini tra loro. In questo limite, si ottiene la condizione

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \mu P \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \mu Q \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \mu R \quad (4.15)$$

dove s è la lunghezza d'arco sulla geodetica e

$$P := \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q := \frac{\partial F}{\partial y}, \quad R := \frac{\partial F}{\partial z}$$

sono proporzionali ai coseni direttori della normale alla superficie in P , cosicché la caratterizzazione geometrica delle geodetiche è stata ottenuta, siccome $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$ e $\frac{d^2z}{ds^2}$ sono proporzionali ai coseni direttori della normale principale alla curva tracciata sulla superficie.

2) Effettuare la manipolazione formale del sistema (4.15) per riscrivere l'equazione delle geodetiche in forma di determinante posto uguale a zero. In sostanza, si tratta di chiedere che il versore tangente, la normale principale alla curva e la normale alla superficie siano complanari, osservando che il vettore di componenti (P, Q, R) è parallelo alla normale. Questa condizione si riduce all'equazione

$$P(dy d^2z - dz d^2y) + Q(dz d^2x - dx d^2z) + R(dx d^2y - dy d^2x) = 0$$

che si può appunto scrivere come

$$\det \begin{pmatrix} dx & d^2x & P \\ dy & d^2y & Q \\ dz & d^2z & R \end{pmatrix} = 0.$$

3) Specializzazione alle superfici di rotazione. La condizione di complanarità appena trovata è scritta componente per componente, dando luogo al sistema omogeneo

$$\begin{cases} d^2x + \lambda dx + \mu P = 0 \\ d^2y + \lambda dy + \mu Q = 0 \\ d^2z + \lambda dz + \mu R = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

dove λ e μ sono incognite ausiliarie di cui occorre procedere all'eliminazione. L'equazione di una generica superficie di rotazione è

$$f(\xi) - z = 0, \quad \text{dove } \xi^2 = x^2 + y^2$$

da cui si ottengono

$$P = f' \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad Q = f' \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad R = -1$$

dove $f' := \frac{df}{d\xi}$.

Ora, moltiplicando le equazioni (4.16) rispettivamente per dx , dy e dz , dal momento che

$$\begin{aligned} Pdx + Qdy + Rdz &= 0, \\ (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \\ d^2x dx + d^2y dy + d^2z dz &= d^2s, \end{aligned}$$

si ottiene

$$d^2s + \lambda ds = 0. \quad (4.17)$$

Se inseriamo le espressioni di P , Q ed R per una superficie di rotazione, otteniamo

$$\begin{cases} d^2x + \lambda dx + \mu f' \frac{x}{\xi} = 0 \\ d^2y + \lambda dy + \mu f' \frac{y}{\xi} = 0 \\ d^2z + \lambda dz - \mu = 0, \end{cases} \quad (4.18)$$

per cui, moltiplicando la prima equazione per y e sottraendole la seconda moltiplicata per x si può eliminare μ giungendo a

$$yd^2x - xd^2y + \lambda(ydx - xdy) = 0. \quad (4.19)$$

Introdotta la forma differenziale

$$N = ydx - xdy,$$

cosicché

$$yd^2x - xd^2y = dN,$$

possiamo riscrivere l'equazione (4.19) come

$$dN + \lambda N = 0$$

che, con (4.17) permette di eliminare λ ricavando

$$dNds - Nd^2s = 0$$

ovvero

$$d \frac{N}{ds} = d \frac{ydx - xdy}{ds} = 0$$

e, infine,

$$ydx - xdy = \nu ds = \nu \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

dove ν è una costante di integrazione. Per ottenere l'espressione delle geodetiche racchiusa nel testo di accompagnamento al modello, Joachimstahl introduce l'azimuth u , scrivendo

$$x = \xi \cos u \quad y = \xi \sin u \quad z = f(\xi),$$

cosicché

$$\xi^2 du = \nu \sqrt{d\xi^2 + \xi^2 du^2 + f'^2 d\xi^2},$$

da cui

$$du^2(\xi^4 - \nu^2 \xi^2) = \nu^2 d\xi^2(1 + f'^2)$$

e, infine,

$$du = \frac{d\xi}{\xi} \sqrt{\frac{1+f'^2}{\xi^2 - \nu^2}}$$

la cui integrazione fornisce l'espressione utilizzata nel foglio di accompagnamento al modello, modulo l'inessenziale cambio di notazione $\xi \mapsto r$, $u \mapsto \phi$.

Come si vede, la deduzione dell'equazione delle geodetiche è ancora nello stile del XVIII secolo, contraddistinto da un uso molto "libero" dei differenziali.

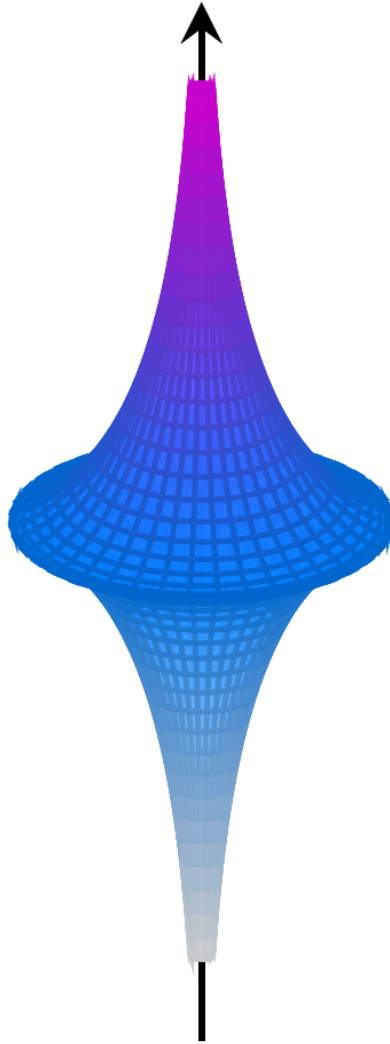


Figura 4.17

Ricostruita la proiezione della geodetica sul piano $z = 0$, la geodetica si ottiene inserendo l'espressione ottenuta nell'equazione $z = f(r)$ della superficie. Per l'espressione di $\tan \lambda$. Bacharach ha in sostanza scritto l'equazione della proiezione della geodetica nella forma

$$P - O = r(\phi)e_r$$

dove $\mathbf{e}_r$ è il versore radiale. Il versore tangente si ottiene normalizzando

$$\frac{d(P-O)}{d\phi} = r'\mathbf{e}_r + r\mathbf{e}_\phi$$

dove $\mathbf{e}_\phi$ è il versore ortogonale a $\mathbf{e}_r$, orientato in modo che $\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_\phi$ sia diretto lungo la direzione positiva dell'asse di rotazione z . Il versore tangente è allora

$$\mathbf{t} = \frac{r'\mathbf{e}_r + r\mathbf{e}_\phi}{\sqrt{r'^2 + r^2}}$$

e l'angolo λ è tale che

$$\cos \lambda = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_\phi$$

dal momento che $\mathbf{e}_\phi$ rappresenta il versore tangente ai cerchi centrati in O . Ricordando che

$$\tan \lambda = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \lambda}}{\cos \lambda}$$

si ottiene, posto $r = c$, l'espressione fornita nel foglio di accompagnamento.

La seconda famiglia di curve rappresentata nel modello è quella delle curve asintotiche la cui equazione si ottiene cercando le curve sulla superficie che hanno in ogni punto solo curvatura *tangenziale*, ovvero hanno curvatura normale nulla. Esse si ottengono annullando la seconda forma fondamentale di una superficie e l'equazione riportata nel testo traduce analiticamente questa condizione. Dalla definizione segue che linee asintotiche reali possono esistere solamente nelle regioni della superficie formate da punti iperbolici. Nel caso della pseudosfera questa condizione non è limitante, dal momento che la sua curvatura è negativa in ogni punto. Il nome di curve asintotiche deriva da un'interpretazione geometrica della relazione di Eulero

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \theta}{r_1} + \frac{\sin^2 \theta}{r_2}$$

che lega il raggio di curvatura R di una sezione normale ad una superficie in un punto lungo una direzione che forma un angolo θ con quella della linea di curvatura principale corrispondente al raggio di curvatura principale r_1 , cioè alla curvatura principale $\frac{1}{r_1}$, con i raggi di curvatura principali r_1 ed r_2 stessi. Ora, la conica

$$\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} = 1$$

può essere un'ellisse o un'iperbole, a seconda dei segni di r_1 ed r_2 e dalla geometria analitica si può dimostrare che un semidiametro della conica²⁰ è

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2 \theta}{r_1} + \frac{\sin^2 \theta}{r_2}.$$

Nel caso in cui r_1 ed r_2 abbiano segni opposti, cioè quando si considerino punti

²⁰Un semidiametro di una conica, con le correnti notazioni, è la lunghezza del segmento condotto dall'origine ad un punto della conica formante un angolo θ con l'asse delle x .

iperbolici della superficie, la conica è una delle due iperboli

$$\frac{x^2}{r_1} - \frac{y^2}{r_2} = \pm 1$$

e le curve asintotiche hanno proprio la direzione degli asintoti comuni a queste coniche. Questa interpretazione geometrica è dovuta a Charles Dupin (1784-1873) e le coniche introdotte sono note col nome di *indicatrici* di Dupin. L'osservazione sulla caratteristica dei punti di tangenza di una curva asintotica con una geodetica, secondo cui essi sono punti di inflessione, deriva dal fatto che in quel punto si toccano una curva dotata di sola curvatura normale ed una dotata di sola curvatura tangenziale per cui nel punto di contatto la curvatura si annulla; ovvero, come asserito nel testo, il raggio di curvatura è infinito. Osserviamo infine a margine che per le curve asintotiche è valido un teorema, dovuto a Beltrami e al matematico tedesco Alfred Enneper [29] che afferma come la torsione τ delle linee asintotiche è

$$\tau = \sqrt{-K}$$

dove K è la curvatura Gaussiana della superficie. Nel caso della pseudosfera dunque le linee asintotiche sono curve a torsione costante.

4.4.2 Il modello di Bacharach della superficie a curvatura costante negativa di tipo conico

Il modello presentato di seguito rappresenta una superficie di rivoluzione a curvatura costante negativa di tipo conico, ancora realizzato da Isaak Bacharach per la collezione Brill/Schilling. Il modello in questione (Figura 4.18) permette di visualizzare una particolare superficie caratterizzata da curvatura gaussiana costante negativa e, in particolare, alcune delle sue geodetiche. La descrizione dettagliata del modello è riportata nella scheda seguente.

Modelli Matematici

realizzati

presso l'Istituto Matematico del Regio Politecnico di Monaco.

Lavoro II. Sotto la direzione del Prof. Dott. Brill.

IX.

Categoria VII

Modello 7

Superficie di rotazione a curvatura costante negativa.

Tipo conico

Modello realizzato dallo studente in matematica J. Bacharach



Figura 4.18 Superficie di rivoluzione di tipo conico e corrispondente a circonferenze geodetiche a centro reale.

Le superficie di rotazione a curvatura costante si possono ottenere da un'equazione differenziale*) che si ricava dall'osservazione che i raggi di curvatura principali in un punto arbitrario della superficie sono rappresentati: da una parte dal raggio di curvatura del meridiano in quel punto e dall'altra parte dalla normale eretta da ogni punto fino alla sua intersezione con l'asse di simmetria. Se si indica questo raggio di curvatura con ϱ e con n il segmento cercato della normale, l'equazione di una curva dalla cui rotazione si ottiene una superficie a curvatura costante è

$$\pm t^2 = \varrho n = \frac{y \left[1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right]^2}{\frac{d^2 y}{dz^2}},$$

dove z è l'asse di rotazione.

Con un'integrazione si ottiene

$$\frac{\mp t^2}{1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2} = y^2 + c. \quad (1)$$

*) L'autore ha avuto accesso ad una nota del Sig. Rodenberg nella quale questa equazione differenziale è espressa come sopra ed è integrata. Qui Bacharach si riferisce al metodo di integrazione illustrato nella scheda del modello I (si veda p. 221).

Per le superficie a curvatura costante negativa è dunque

$$dz = \sqrt{\frac{-c - y^2}{y^2 + c + t^2}} \cdot dy.$$

Si vede che questa equazione fornisce valori reali solo per c negativi; poniamo pertanto $c = -\gamma^2$ ed otteniamo

$$dz = \sqrt{\frac{\gamma^2 - y^2}{y^2 - \gamma^2 + t^2}} \cdot dy. \quad (2)$$

È possibile servirsi dell'equazione (1) per comprendere più da vicino il significato di γ , come pure l'andamento della curva. Infatti, si indichi con α l'angolo che la tangente alla curva forma in un punto arbitrario con l'asse z ; allora, se ci restringiamo alle superficie a curvatura negativa, quell'equazione assume la forma semplice

$$\cos^2 \alpha = \frac{\gamma^2 - y^2}{t^2}.$$

Prima di tutto si riconosce che, a seconda che si prenda γ più piccolo o più grande di t , essa avrà forme diverse. Nel seguito distingueremo superficie di "tipo conico" e superficie di "tipo dell'iperboloide". Nel primo caso, si presenta un'intersezione reale della curva meridiana con l'asse di rotazione; nel secondo, questa sarà immaginaria e l'ordinata del minimo è $\sqrt{\gamma^2 - t^2}$. Pertanto, γ è sempre il valore di y sopra il quale non può esistere alcun punto reale della curva (Si veda ciò che segue la figura di sotto²¹).

Ora tratteremo solo il caso $\gamma < t$ (per il quale è stata realizzata la superficie).

Quando prendiamo $\begin{cases} y = \gamma \\ z = 0 \end{cases}$, come valori corrispondenti avremo

$$z = \int_{\gamma}^y \sqrt{\frac{\gamma^2 - y^2}{y^2 - \gamma^2 + t^2}} \cdot dy.$$

Ponendo

$$y = -\gamma \cos \varphi; \quad \frac{\gamma}{t} = \kappa,$$

otteniamo

$$z = t \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{\Delta(\phi, \kappa)} - t \int_0^{\varphi} d\phi \cdot \Delta(\phi, \kappa) = t[F(\varphi, \kappa) - E(\varphi, \kappa)]$$

o

$$z = \gamma \cdot \frac{F - E}{\kappa},$$

dove F ed E sono integrali normali di Legendre.

Con l'aiuto delle tavole di Legendre possiamo ora trovare facilmente i valori delle coordinate della curva ricavando gradualmente, per ogni φ , i corrispon-

²¹Il riferimento è alla Figura 4.19, riportata in questa scheda.

denti F ed E , e quindi z ; il valore corrispondente di y si ottiene dall'equazione:

$$y = -\gamma \cos \varphi.$$

Introducendo la funzione Θ nell'integrale jacobiano di seconda specie $F - E$, si ottiene

$$z = t \left(\frac{ju}{K} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} \right),$$

dove

$$j = \int_0^1 \frac{\kappa^2 \eta^2 d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\kappa^2 \eta^2)}}; \quad K = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\kappa^2 \eta^2)}},$$

$$\eta = \sin \operatorname{am} u = \sin \varphi; \quad y = -\gamma \cos \operatorname{am} u.$$

Si prenderà l'unità di misura in modo che la misura di curvatura della superficie coincida con quella della superficie di rotazione della trattrice, che è già stata descritta (Modelli Matematici I.).²² Sono stati presi i seguenti valori delle costanti:

$$t = 1; \quad \kappa = \gamma = \sin 70^\circ = 0,94;$$

si ottiene allora

$$K = F' = 2,5046; \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}} = 0,1311;$$

$$z_0 = j = F' - E' = 1,39,$$

dove z_0 indica il valore di z che corrisponde al valore $y = 0$.

Il caso $\gamma > t$ conduce alle equazioni seguenti:

$$z = \gamma(F - E) = t \frac{F - E}{\kappa}; \quad \kappa = \frac{t}{\gamma}$$

$$y = \sqrt{\gamma^2 - t^2 \sin^2 \phi} = \gamma \cdot \Delta \phi.$$

La figura [4.19] contiene due curve per ogni tipo e la trattrice come caso limite. Il passaggio da una certa curva ad un'altra è evidente; per i valori di γ indicati (a t costante) l'intersezione con l'asse di rotazione, inizialmente reale, si muove sempre di più finché non diventa infinita, per $\gamma = t$, e poi immaginaria, per $\gamma > t$.

Quando si trattano in maniera analoga le **rette geodetiche** del caso precedente ($t = \gamma$), si ottiene, come equazione in coordinate polari r, ϕ della proiezione di queste curve su un piano ortogonale all'asse di rotazione:

$$\phi = \gamma \cos \lambda \int_{\gamma}^r \frac{dr}{r} \cdot \frac{t}{\sqrt{(r^2 - \gamma^2 + t^2)(r^2 - \gamma^2 \cos^2 \lambda)}},$$

dove λ indica l'angolo che la proiezione della geodetica forma con il cerchio di

²²Si tratta del modello descritto a partire da p.

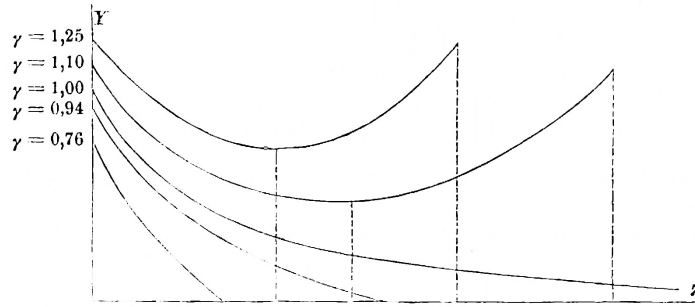


Figura 4.19 I profili delle curve che generano i tre tipi di pseudosfere, illustrati per diversi valori di γ .

base (per il quale $r = \gamma$). Si ottiene:

$$\phi = \frac{t}{2a\gamma} \left(\arcsin \frac{D-w}{S} - \arcsin \frac{\gamma^2 S - 2t^2 \cos^2 \lambda}{\gamma^2 S} \right),$$

dove sono state introdotte le seguenti abbreviazioni:

$$a^2 = \frac{t^2 - \gamma^2}{\gamma^2}; \quad w = \frac{2a^2 \gamma^2 \cos^2 \lambda}{r^2}$$

$$S = a^2 + \cos^2 \lambda; \quad D = a^2 - \cos^2 \lambda.$$

Ogni linea geodetica raggiunge il suo punto più alto per $r = \gamma \cos \lambda$; per questo punto si ha

$$\phi = \frac{t\varepsilon}{a\gamma} \quad \text{dove} \quad \sin \varepsilon = \frac{a\gamma \sin \lambda}{t}.$$

L'andamento delle linee geodetiche sull'intera superficie non differisce sostanzialmente da quello sulla superficie particolare;²³ sono presenti nuovamente dei punti di inflessione e si ottiene per il raggio del cerchio parallelo corrispondente al punto di inflessione:

$$r = \gamma \sqrt{\cos \lambda}.$$

Come equazione delle linee asintotiche su un piano ortogonale all'asse di rotazione si ottiene, come già per la superficie di rotazione generata da una trattrice:

$$\psi = \int_{\gamma}^r \frac{dr}{\sqrt{r}} \sqrt{-\frac{f''(r)}{f'(r)}},$$

quando si prende l'equazione della superficie nella forma

$$z = f(r) = \int \sqrt{\frac{\gamma^2 - r^2}{r^2 - \gamma^2 + t^2}} \cdot dr, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

con $f'(r)$, $f''(r)$ che stanno per le derivate rispetto a r . Se si calcolano $f'(r)$ ed

²³Cioè quella per cui $\gamma = t$.

$f''(r)$ e si inserisce il loro valore, si ottiene:

$$\psi = \int_{\gamma}^r \frac{t dr}{\sqrt{(\gamma^2 - r^2)(r^2 - \gamma^2 + t^2)}}.$$

Posto

$$r = -\gamma \cos \phi; \quad \frac{\gamma}{t} = \kappa,$$

sarà

$$\psi = \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{\Delta(r, \phi)} = F(\varphi, \kappa).$$

Per ogni φ , le tabelle forniscono la corrispondente ψ ; r si ottiene dall'equazione:

$$r = -\gamma \cos \varphi.$$

Monaco di Baviera, Luglio 1877.

Osservazioni. Una prima osservazione riguarda la deduzione dell'equazione differenziale delle superfici a curvatura costante. Considerato che la curvatura del meridiano è una curvatura normale per cui il raggio di curvatura della superficie coincide con quello della curva generatrice, per l'altro valore necessario a determinare la curvatura gaussiana occorre ricordare che i paralleli sono linee di curvatura principale tali che, detto $y(z)$ il raggio del parallelo che fornisce punto per punto il profilo del meridiano e detto α l'angolo che la normale alla superficie di rotazione forma con l'orizzontale in una sezione meridiana della superficie, la loro curvatura normale è

$$\frac{\cos \alpha}{y};$$

dunque, il suo raggio di curvatura è $\frac{y}{\cos \alpha}$, che coincide con la lunghezza del segmento di normale condotto da un punto della superficie sino all'intersezione con l'asse di rotazione. Per effettuare la prima integrazione occorre tener presente che t è costante e che è possibile moltiplicare ambo i membri per $\frac{dy}{dz}$, cosicché

$$\pm \frac{t^2 \frac{d^2 y}{dz^2} \frac{dy}{dz}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^2} = y \frac{dy}{dz};$$

tale equazione, integrata, fornisce l'equazione (1).

Il passaggio all'integrale di Legendre di prima specie

$$F(\phi, \kappa) := \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{\Delta},$$

dove, seguendo la notazione di Legendre,

$$\Delta(\phi, \kappa) = \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi},$$

e a quello di seconda specie

$$E(\phi, \kappa) := \int_0^\phi \Delta d\phi$$

si ottiene manipolando l'espressione di $z(y)$ con le considerazioni fatte nel testo.

Il passaggio agli integrali jacobiani fa intervenire le modifiche apportate da Jacobi alla teoria degli integrali ellittici di Legendre. Proprio Jacobi, infatti, nei *Fundamenta Nova Functionum Ellipticarum* pubblicati nel 1829, fornisce (a pagina 31) la definizione dell'integrale K presente nel testo esposto. Una delle novità apportate da Jacobi-e da Abel-nello studio delle funzioni ellittiche è l'aver cambiato punto di vista: grazie a ciò, se

$$u = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}},$$

anziché considerare u come funzione di ϕ , ϕ è considerata come funzione di u . Da questo punto di vista, ϕ è l'ampiezza di u , che si indicava con $\phi = \text{am } u$, da cui segue l'espressione che figura nello scritto di Bacharach $\sin \phi = \sin \text{am } u$. La struttura algebrica, e non più trigonometrica, dell'integrando è conseguenza del cambiamento di variabili adottato.

4.4.3 Il modello di Dyck della superficie a curvatura costante negativa di tipo iperbolico

Il modello di superficie a curvatura costante negativa del tipo dell'iperboloide, realizzato da W. Dyck, appartiene alla serie di modelli destinati allo studio della geometria differenziale sviluppata presso il Politecnico di Monaco sotto la direzione di Alexander von Brill. Come nel caso precedente, le geodetiche incise sulla superficie offrono una rappresentazione concreta di alcune delle proprietà più significative delle superfici a curvatura negativa. La scheda seguente ne presenta le principali caratteristiche matematiche.

Modelli Matematici

realizzati

presso l'Istituto Matematico del Regio Politecnico di Monaco.

Lavoro II. Sotto la direzione del Prof. Dott. Brill.

X.

Categoria VII

Modello 8

Superficie di rotazione a curvatura costante negativa.

Tipo dell'iperboloide

Modello realizzato dallo studente in matematica W. Dyck

Le ricerche sulle superficie a curvatura costante e in particolare lo studio della geometria su queste superficie si può collegare all'esame di una sua rappresentazione sul piano definita in modo che le geodetiche della superficie siano mandate in rette del piano.



Figura 4.20 Superficie di rivoluzione di tipo iperbolico e corrispondente a circonferenza geodetiche a centro immaginario.

Queste rappresentazioni che, come mostrato da Beltrami¹⁾, sono possibili solo per superficie a curvatura costante, chiariscono allo stesso tempo la connessione tra la geometria su queste superficie e la geometria non-euclidea.²⁾

I.

Per prima cosa, vogliamo sviluppare brevemente il tipo di rappresentazione seguendo i lavori menzionati nelle note.

Se pensiamo di ottenere ogni punto della nostra superficie come intersezione di due curve $u = cost.$ e $v = cost.$ che appartengono ad un fascio di geodetiche che passano per il punto, è possibile rappresentare l'elemento lineare della superficie nella forma:

$$ds^2 = R^2 \frac{(v^2 + a^2)du^2 - 2uvdudv + (u^2 + a^2)dv^2}{(u^2 + v^2 + a^2)^2}, \quad (1)$$

¹⁾ E. Beltrami. Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette. *Annali di Matematica*, Tomo VII. 1866.

²⁾ E. Beltrami. Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. *Giornale di Matematiche*. 1868.

F. Klein Ueber die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie.

dove R ed a indicano delle costanti (in particolare, $\frac{1}{R^2}$ è la curvatura della superficie, a l'unità di misura per il nostro sistema di coordinate u, v). A seconda che le grandezze R ed a siano reali o immaginarie, la superficie sarà a curvatura costante positiva o negativa.

Grazie a questa espressione, l'equazione differenziale di una geodetica¹⁾ della nostra superficie diventa semplicemente

$$dud^2v - dv d^2u = 0,$$

da cui si deduce subito

$$Au + Bv + C = 0,$$

cioè ogni equazione lineare nelle coordinate geodetiche u, v rappresenta una geodetica della superficie.

Se ora applichiamo una sull'altra due delle nostre superficie in modo tale che, sotto l'ipotesi che ogni punto di un sistema di coordinate geodetiche su ogni superficie corrisponda ad un punto dell'altra, tutte le geodetiche di una superficie saranno trasformate in quelle dell'altra e, quando in particolare una superficie a curvatura costante sarà applicata su una a curvatura nulla, cioè su un piano, le geodetiche della prima si trasformeranno in rette; al sistema di coordinate geodetiche della superficie corrisponde un sistema di rette nel piano.

Per determinare le relazioni metriche della rappresentazione, cerchiamo dapprima la rappresentazione di un segmento di geodetica. Per semplicità, collochiamo uno dei suoi estremi nell'origine del nostro sistema di coordinate la cui scelta arbitraria è a nostra discrezione. Indichiamo allora con u_1 e v_1 le coordinate dell'altro estremo, cosicché l'equazione della geodetica (determinata completamente dal passaggio per questi due punti) è

$$v_1u - u_1v = 0$$

e, come segue immediatamente dall'equazione (1), il suo elemento lineare $d\xi$ ha la forma

$$d\xi = Ra \cdot \frac{u_1 \sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{u^2(u_1^2 + v_1^2) + a^2u_1^2} du,$$

per cui l'arco cercato è

$$\xi = R \arctg \frac{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{a}. \quad (2)$$

Se consideriamo u_1, v_1 come variabili ($= u, v$) e l'arco ξ come costante, il punto u, v descriverà una curva la cui distanza geodetica dal punto $u = 0, v = 0$ è sempre uguale a ξ , cioè un cerchio geodetico. Esso si può rappresentare con l'equazione

$$u^2 + v^2 - \left(a \tan \frac{\xi}{R}\right)^2 = 0, \quad (3)$$

conseguenza immediata della (2).

Sul nostro piano di rappresentazione dove il sistema di coordinate u, v è formato da due fasci di rette, questa equazione rappresenta in generale una

¹⁾ Cf. Gauss. Disquisitiones generales circa superficies curvas. cap. XVIII.

sezione conica. Dunque: ogni cerchio geodetico della superficie è rappresentato nel piano da una conica. In particolare, quando l'arco è $\xi = \infty$, si ottiene (come

evidente da $\tan \frac{\xi}{R} = \frac{e^{\frac{2i\xi}{R}} - 1}{i(e^{\frac{2i\xi}{R}} + 1)}$:

$$u^2 + v^2 + a^2 = 0$$

come conica corrispondente ai punti della superficie posti a distanza infinita da $u = v = 0$; la chiameremo, come Beltrami, la "conica limite".

Possiamo riassumere in questo modo il risultato contenuto in questa equazione:

Ogni superficie a curvatura costante si rappresenterà sul piano con la rappresentazione definita sopra in modo tale che la parte reale della superficie sia rappresentata dai punti interni alla conica

$$u^2 + v^2 + a^2 = 0,$$

i punti a distanza infinita da punti sulla conica e i punti immaginari come punti esterni alla conica; indicheremo dunque come "interni" alla conica quelli dai quali non è possibile tracciare una tangente alla conica.¹⁾ La conica limite è immaginaria o reale, a seconda che a sia reale o immaginaria, cioè a seconda che la superficie sia a curvatura costante positiva o negativa.

Dall'equazione (3) possiamo anche concludere che: ogni fascio di cerchi geodetici concentrici della superficie (per i quali dunque l'arco ξ prende valori diversi in successione) è rappresentato nel piano come un fascio di coniche concentriche in senso proiettivo, cioè di coniche che si toccano in due punti. A ciascun fascio di questo tipo appartiene una conica che si spezza in due rette da contare due volte; pertanto, tra i cerchi geodetici concentrici vi è una geodetica. I cerchi geodetici possono essere concepiti come equidistanti da una geodetica e, viceversa, le geodetiche come cerchi geodetici speciali.

Completiamo le considerazioni sulle relazioni metriche tra la superficie e la sua rappresentazione sviluppando le lunghezze di un arco di cerchio geodetico compreso tra i punti u_0, v_0 e u, v sulla superficie e sulla sua immagine. A questo scopo, sia

$$u^2 + v^2 - \left(a \tan \frac{\xi}{R}\right)^2 = 0$$

il nostro cerchio geodetico di raggio ξ e centro $u = v = 0$; dall'equazione (1) segue immediatamente, per il suo elemento di lunghezza $d\eta$,

$$d\eta = R \frac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + a^2}} \frac{du}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2) - u^2}}.$$

La lunghezza dell'arco di cerchio geodetico compreso tra i punti u_0, v_0 e u, v è

¹⁾ Infatti, queste tangenti dovrebbero rappresentare sia un cerchio geodetico di centro reale sia una geodetica passante per lo stesso punto, che è impossibile nel reale.

dunque

$$\eta = \frac{R}{i} \frac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + a^2}} \log \frac{u_0 - iv_0}{u - iv}. \quad (4)$$

Per abbreviare, poniamo

$$\frac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + a^2}} \left(= \sin \frac{\xi}{R} \right) = \alpha,$$

così da ottenere per u e v le formule

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos \left(\frac{i}{R} \frac{\eta}{\alpha} \right) - v_0 \sin \left(\frac{i}{R} \frac{\eta}{\alpha} \right) \\ v &= v_0 \sin \left(\frac{i}{R} \frac{\eta}{\alpha} \right) + u_0 \cos \left(\frac{i}{R} \frac{\eta}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Le formule nelle (2), (3), (4) e (5) forniscono le relazioni tra le coordinate polari geodetiche ξ, η di un punto della superficie e le coordinate u, v del piano immagine: da queste stesse equazioni possiamo determinare completamente la **metrica** sulla superficie di curvatura costante negativa. L'espressione (2) per la distanza geodetica tra due punti, che si può subito porre nella forma

$$\xi = \frac{R}{2i} \log \frac{a + i\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}{a - i\sqrt{u_1^2 + v_1^2}},$$

mostra allo stesso tempo l'immediato accordo della metrica valida qui con quella che si incontra in geometria non-euclidea.

II.

Ci rivolgiamo ora in modo particolare alle superficie a curvatura costante negativa per le quali dunque $a = ia_1$, $R = iR_1$, dove quindi a_1 ed R_1 sono grandezze reali. Le superficie di rotazione a curvatura costante negativa si possono rappresentare nella forma¹⁾

$$\begin{aligned} dz &= \sqrt{\frac{\gamma^2 - r^2}{r^2 - \gamma^2 + R_1^2}} dr \\ r^2 &= x^2 + y^2, \end{aligned} \quad (6)$$

prendendo come asse z l'asse di rotazione.

Naturalmente, sulla superficie il sistema di coordinate più adatto per la rappresentazione è quello determinato dal fascio dei meridiani e dai cerchi geodetici ad essi ortogonali, cioè i paralleli.

In questa rappresentazione dobbiamo distinguere due tipi principali di superficie²⁾:

I. $\gamma < R_1$. (tipo conico). Il centro del sistema di coordinate è reale e posto al finito. La geodetica appartenente al sistema di paralleli è immaginaria.

¹⁾ Si veda "Modelli Matematici IX". Il riferimento è al modello descritto a partire da pag. 231.

²⁾ Per quanto riguarda la forma di queste superficie, ci riferiamo alla citazione nella nota precedente.

Pertanto, l'immagine del centro giace all'interno della conica limite e le coniche concentriche del fascio hanno contatto immaginario.

II. $\gamma > R_1$. (tipo dell'iperboloide). L'origine delle coordinate è immaginaria; il parallelo che è anche geodetica della superficie (il cosiddetto parallelo minimo della superficie) è dunque reale. Il centro nella rappresentazione si trova dunque all'esterno della conica limite. La corrispondente polare è immagine di quel parallelo minimo e i suoi punti reali di intersezione con la conica limite sono i punti di contatto del fascio.

Il caso $\gamma = R_1$ costituisce la forma di passaggio tra i due tipi. Il centro delle coordinate è all'infinito e coincide con il parallelo minimo (di raggio nullo). L'immagine del sistema di coordinate è un fascio che ha un contatto quadripunto nel centro dell'immagine (che naturalmente si trova sulla conica limite). La polare tocca nel punto di tangenza l'immagine della parte reale di superficie e quindi rappresenta in questo punto il parallelo minimo della superficie che è infinitamente piccolo e infinitamente lontano.

Consideriamo un po' più da vicino le rappresentazioni di entrambi i tipi principali, a partire da quello realizzato nel modello di superficie di tipo II.

Per maggiore semplicità prendiamo come fasci coordinati u , v due fasci di raggi paralleli che si tagliano ortogonalmente, cioè prendiamo come conica limite un cerchio

$$u^2 + v^2 - a_1^2 = 0$$

e inoltre scegliamo come immagine del parallelo minimo un raggio. Allora all'interno di un semicerchio si rappresenta una delle parti reali della superficie che si estende al di sopra del parallelo minimo, mentre l'altra parte simmetrica della superficie è rappresentata all'interno dell'altro semicerchio. I cerchi geodetici del nostro sistema di coordinate polari hanno in questo caso distanza immaginaria dal centro (immaginario). Li determineremo con la loro distanza geodetica ξ a partire da uno di loro e sceglieremo per questo il parallelo minimo stesso della superficie, sostituendo così la metrica su un cerchio geodetico con quella su una geodetica. Se ξ indica la lunghezza del meridiano a partire dal parallelo minimo (che può corrispondere alla coordinata v della rappresentazione) ed inoltre η (asse u nella rappresentazione) è la corrispondente lunghezza del parallelo minimo (misurata a partire da un qualche punto iniziale), dobbiamo, per poter applicare direttamente la formula (3) al nostro parallelo, effettuare uno spostamento del sistema di coordinate (il cui centro $u = v = 0$ nel caso presente non è il centro del parallelo) e precisamente uno spostamento lungo un asse (il meridiano) pari alla distanza (immaginaria) del parallelo minimo del centro del parallelo. Possiamo però ottenere in modo più semplice le formule per l'immagine u , v di un punto ξ , η della superficie osservando che nella formula (3) resta inalterata una coordinata (la coordinata u , nelle nostre ipotesi) in virtù dello spostamento lungo l'altro asse (delle v). Possiamo assegnare però immediatamente l'altra coordinata, perché il punto u , v , con η variabile e ξ costante, deve muoversi su una delle ellissi collocate simmetricamente rispetto al raggio menzionato in precedenza, i cui semiassi sono a_1 ed $a_1 \tan \frac{\xi}{R}$. Otteniamo

dunque facilmente per u e v le formule

$$\begin{aligned} u &= a \tan \frac{\eta}{R} = a_1 \tanh \frac{\eta}{R_1} \\ v &= \frac{a \tan \frac{\eta}{R}}{\cos \frac{\xi}{R}} = \frac{a_1 \tanh \frac{\xi}{R_1}}{\cosh \frac{\eta}{R_1}} \end{aligned} \quad (7)$$

dove per abbreviare si è posto

$$\frac{e^{\frac{2\eta}{R_1}} - 1}{e^{\frac{2\eta}{R_1}} + 1} = \tanh \frac{\eta}{R_1} \text{ ecc.,}$$

come al solito.

La nostra superficie è delimitata al finito da due paralleli estremi, la cui immagine è un'ellisse del tipo descritto sopra. Una porzione della superficie delimitata da due meridiani corrisponde a una striscia delimitata da due parallele all'asse minore di questa ellisse. Nella sua completa estensione l'ellisse corrisponde alla superficie di rotazione univocamente soltanto se la si immagina avvolta infinite volte (come una superficie elicoidale a passo nullo).

Ora, per trovare la rappresentazione per una superficie speciale, e dunque per valori assegnati di γ ed R_1 , dobbiamo determinare anzitutto la lunghezza ξ_1 dell'intero arco di meridiano e l'estensione η_1 del parallelo minimo. Per quest'ultima, il cui raggio è $= \sqrt{\gamma^2 - R_1^2}$, si ha immediatamente

$$\eta_1 = 2\pi \sqrt{\gamma^2 - R_1^2}.$$

Il primo è semplicemente

$$\xi_1 = \frac{R_1}{2} \log \frac{\gamma + R_1}{\gamma - R_1},$$

come segue dalla rettificazione della curva meridiana rappresentata con l'equazione (6). Dalla (7) segue quindi che la rappresentazione di un primo strato della superficie è delimitato da un'ellisse i cui semiassi sono

$$a_1 \quad \text{e} \quad a_1 \tanh \frac{\xi_1}{R_1} = a_1 \frac{R_1}{\gamma}$$

e dalle immagini dei meridiani

$$u = 0 \quad \text{e} \quad u = \frac{a_1 R_1}{\gamma \cosh \frac{2\pi \sqrt{\gamma^2 - R_1^2}}{R_1}}$$

(da qui si vede anche che questa rappresentazione è la stessa per tutte le superficie per le quali il quoziente $\frac{R_1}{\gamma}$ è lo stesso).

La ripetizione della rappresentazione e quindi la rappresentazione di ulteriori strati della superficie si eseguirà dalla costruzione evidente della figura ausiliaria,²⁴ che trova la sua dimostrazione nella congruenza delle porzioni della

²⁴È la figura 4.21.

Sul modello, le geodetiche ed i cerchi geodetici sono stati realizzati in modo che le rette ed i cerchi nell'immagine piana fossero tracciati in modo appropriato, quindi si è costruita la rete descritta sopra sia per la superficie sia per la sua immagine permettendo dunque il trasferimento puntuale dell'immagine. Le geodetiche applicate sono parallele, cioè si tagliano all'infinito, per cui le loro immagini (nella figura sono rappresentate da segmenti tratteggiati) si tagliano nel cerchio limite.

In ogni fascio di geodetiche ve ne sono due, come la figura mostra subito, che si avvicinano asintoticamente al parallelo minimo e gli si avvolgono attorno infinite volte (quella che appartiene al nostro fascio è rappresentata nel modello). I suoi punti di intersezione con il parallelo minimo stesso sono proprio i punti infinitamente lontani della nostra superficie che è possibile raggiungere lungo un cammino reale.

Consideriamo brevemente anche la rappresentazione per le nostre superficie di tipo I.

Prendendo nuovamente per semplicità come immagine dei punti all'infinito un cerchio e come origine (ora reale) delle coordinate il suo centro, otteniamo come immagine del fascio semplicemente un sistema di cerchi concentrici. Su uno di questi e su un raggio arbitrario tracciamo nuovamente le misure segnate grazie alle formule in (5) e (3).

Ora la nostra superficie è limitata (impropriamente) da una cuspid (il centro del parallelo) e da un parallelo massimo che corrisponde nella rappresentazione ad un cerchio posto all'interno del cerchio limite. Per una scelta dei valori di γ e R_1 possiamo calcolare quel cerchio e determinare il circuito del settore corrispondente sulla superficie. Ulteriori rotazioni della superficie si rappresentano semplicemente come ripetizioni di questo settore che rappresenta il primo giro. (Nel caso di una conica limite generale, è possibile trovare queste ulteriori rappresentazioni con una costruzione del tutto analoga a quella del tipo II.)

In generale, gli ulteriori settori ricopriranno infinite volte il piano della rappresentazione. Pertanto, per ottenere nuovamente una rappresentazione reciproca non ambigua, dobbiamo pensare che la superficie consista solo di tanti giri quanti ne cadono nel settore di primo ricoprimento del cerchio. Se la superficie ha n giri (dove n , come fornisce facilmente la nostra formula, è

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{R_1}\right)^2}} = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (\text{dove abbiamo indicato con } \alpha \text{ l'angolo che la tangen-}$$

te nella cuspid forma con l'asse di rotazione); se immaginiamo arrotondata la superficie e i meridiani iniziale e finale, che otteniamo dal numero di rotazioni determinato sopra, collocati uno accanto all'altro, si dimostra, come segue subito dalla similitudine della rappresentazione del cerchio ($u = 0$, $v = 0$) o come anche dimostra un semplice calcolo, che ora la cuspid della superficie è mandata in un punto generico, cioè non singolare della superficie sviluppata. Stabilire una corrispondenza univoca tra la superficie e la sua immagine è in questo caso equivalente a risolvere un suo punto di discontinuità. Segue subito dalla rappresentazione che la geodetica della superficie che ruota più spesso, possiede $\left(\frac{n}{2} - \varepsilon\right)$ rotazioni, dove ε tende a 0 quando la geodetica si muove verso la cuspid.

Inoltre, possiamo subito ricavare dalla rappresentazione che non è possibile raggiungere alcun punto all'infinito della superficie lungo un cammino reale.

Nel caso intermedio $\gamma = R_1$ la nostra superficie costituisce ancora una volta il passaggio tra i tipi di superficie di cui abbiamo discorso prima. Possiamo raggiungere un punto infinitamente lontano della superficie lungo un cammino reale (che si svolge lungo i meridiani o i paralleli). Bisogna pensare alla superficie come costituita da infiniti giri che però sono uniti all'infinito. Il punto di discontinuità della superficie (la sua cuspide posta all'infinito) sarà raggiunto con lo sviluppo di un numero infinito di giri attorno ad un punto non singolare della superficie, come si ricava anche da $n = \frac{1}{\sin \alpha}$, che nel nostro caso ha $\alpha = 0$.

Monaco di Baviera, agosto 1877.

Osservazioni. Dyck cita le *Disquisitiones* al cap. XVIII come riferimento per l'equazione delle geodetiche e ciò è corretto perché è la sezione in cui Gauss dedusse questa equazione a partire dalla condizione che la distanza tra due punti della superficie fosse minima. L'equazione di Gauss, nella forma definitiva, si caratterizza per l'introduzione dell'angolo che le geodetiche formano con una delle curve coordinate. La forma proposta da Dyck, la stessa data da Beltrami nel suo articolo, si ottiene dalla definizione alternativa di geodetiche come curve che hanno vettore di curvatura normale alla superficie su cui giacciono, ovvero che hanno curvatura geodetica nulla. Nelle *Ricerche di Analisi applicate alla Geometria* [2], Beltrami aveva ritrovato l'espressione della curvatura geodetica già ottenuta da Minding nel 1830, osservando che, uguagliandola a zero, si sarebbe ottenuta un'equazione delle geodetiche alternativa a quella fornita da Gauss; essa, però

raramente può riuscire più comoda di quella data da Gauss.

In effetti, se indichiamo con un indice u o v le derivate parziali di una funzione rispetto ad una delle coordinate gaussiane (u, v) che servono ad individuare un punto sulla superficie, l'equazione delle geodetiche sarebbe

$$\frac{1}{(Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{EG - F^2}} \left\{ \sqrt{EG - F^2} dud^2v - dvd^2u \right. \\ \left. (Edu + Fdv) \left[\left(F_u - \frac{1}{2}E_v \right) du^2 + G_u dudv + \frac{1}{2}G_v dv^2 \right] \right. \\ \left. - (Fdu + Gdv) \left[\left(F_v - \frac{1}{2}G_u \right) dv^2 + E_v dudv + \frac{1}{2}E_u du^2 \right] \right\}.$$

Al contrario, proprio questa forma molto più complessa di quella Gaussiana, diventa particolarmente adatta per lo scopo di Beltrami, poiché imponendo che le geodetiche siano lineari in u e v essa assume la forma semplice riportata da Beltrami e ripresa da Dyck.

Nel testo, Dyck qualifica il *cerchio limite* di Beltrami genericamente come una *conica limite*. In questo, egli segue forse l'impostazione di Klein, che,

sulla scorta di Cayley, si riferisce alla nozione analoga di assoluto rappresentata da una conica. Per due coniche, la condizione di essere concentriche in senso proiettivo coincide con la condizione che le coniche siano tangenti alla retta all'infinito nello stesso punto.

Sempre seguendo Beltrami, Dyck parla dell'impossibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'intera pseudosfera e l'intero piano (iperbolico). A questo proposito, può essere utile riferirsi al caso della superficie ottenuta per rotazione di una trattrice.

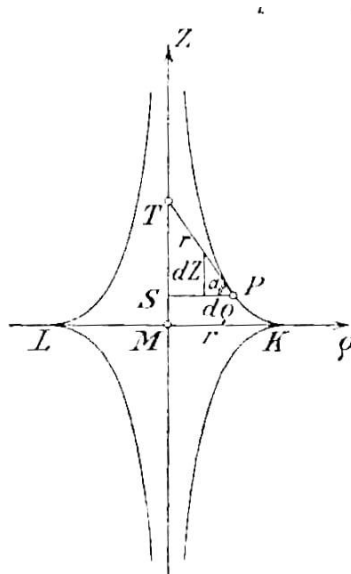


Figura 4.22 Trattrice generatrice della pseudosfera; il segmento di tangente associato alla costruzione mantiene lunghezza costante r [70, p. 4].

La trattrice, come abbiamo già detto, è caratterizzata dal fatto che il segmento di tangente compreso tra il punto di contatto e l'asintoto mantenga la lunghezza costante (Figura 4.22). Possiamo rappresentare la pseudosfera servendoci delle coordinate polari $\varrho \in [0, r)$ e $\varphi \in (-\pi, \pi]$ come [70, pp. 4–10]

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \varphi \\ z = r \log \frac{r + \sqrt{r^2 - \varrho^2}}{\varrho} - \sqrt{r^2 - \varrho^2}, \end{cases}$$

dove (x, y, z) sono coordinate cartesiane ortogonali ed r è la lunghezza costante del segmento di tangente utilizzato per tracciare la pseudosfera.

Possiamo, inoltre, rappresentare su un piano di coordinate cartesiane orto-

gonali (ξ, η) la superficie pseudosferica ricorrendo alle equazioni

$$\begin{cases} \xi = r\varphi \\ \eta = \frac{r^2}{\varrho} \end{cases}$$

Se tagliamo la superficie lungo il meridiano $\varphi = \pi$, possiamo rappresentare in modo biunivoco i punti della porzione di superficie pseudosferica che sovrasta il parallelo di raggio $\varrho = r$ sulla striscia illimitata (Figura 4.23)

$$\{(\xi, \eta) \mid -\pi r < \xi \leq \pi r, \quad \eta \geq r\}.$$

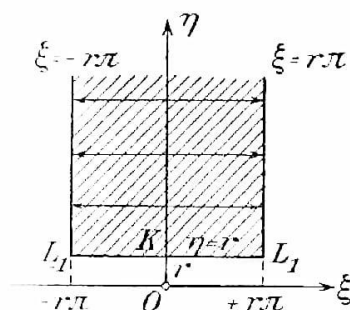


Figura 4.23 Striscia del piano $\xi\eta$ che rappresenta biunivocamente la porzione di pseudosfera ottenuta mediante il taglio lungo un meridiano [70, p. 9].

I meridiani di questa porzione di pseudosfera sono mandati in semirette di equazione $r\varphi_0$, con $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$, e i paralleli sono mandati in segmenti paralleli all'asse ξ , delimitati dalle rette verticali di equazioni $\xi = \pm r\pi$. Possiamo ricoprire porzioni congruenti del piano (ξ, η) giustapponendo strisce verticali di ampiezza $2r\pi$. La rappresentazione sul piano può quindi essere estesa mediante la giustapposizione periodica delle strisce fondamentali, come illustrato nella Figura 4.24.

La lunghezza d'arco ds sulla pseudosfera è

$$ds^2 = \varrho^2 d\varphi^2 + d\varrho^2 + dz^2$$

e si può riscrivere in termini di $d\varrho$ differenziando l'espressione che dà z per i punti sulla pseudosfera:

$$dz = -\frac{r^2 - \varrho^2}{\varrho},$$

cosicch 

$$ds^2 = \varrho^2 d\varphi^2 + \frac{r^2}{\varrho^2} d\varrho^2,$$

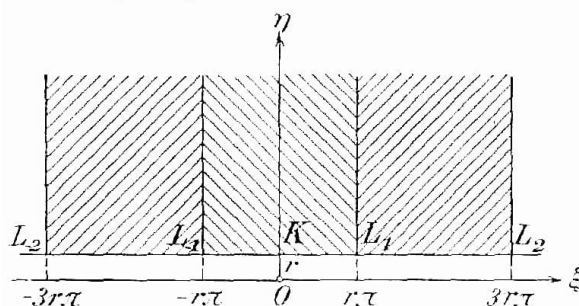


Fig. 7.

Figura 4.24 Ricoprimento del piano (ξ, η) tramite la giustapposizione di strisce verticali congruenti di ampiezza $2\pi r$, ottenute dalla rappresentazione della pseudosfera tagliata lungo un meridiano [70, p. 9].

che, sul piano (ξ, η) diventa, con la rappresentazione adottata,

$$ds^2 = \frac{r^2}{\eta^2}(d\xi^2 + d\eta^2)$$

ed esprime quindi la metrica iperbolica.

4.5 La superficie elicoidale a curvatura costante negativa di Vogel

Tra i modelli dedicati alle superfici a curvatura costante negativa, trova posto anche la superficie elicoidale realizzata da Peter Vogel²⁵ (1856–1915). Diversamente dalle superfici di rivoluzione presentate in precedenza, il modello in questione (Figura 4.25) è caratterizzato da una simmetria di tipo elicoidale, che conferisce al modello un notevole interesse sia dal punto di vista geometrico sia dal punto di vista didattico.

Modelli Matematici

realizzati

presso l'Istituto Matematico del Regio Politecnico di Monaco.

Sotto la direzione del Prof. Dott. Brill.

XV.

Categoria VII

Modello 10

Superficie elicoidali a curvatura negativa costante

del Dr. P. Vogel

²⁵Matematico e cartografo tedesco formatosi a Monaco di Baviera sotto la guida di Alexander von Brill, è noto principalmente per il suo contributo nella visualizzazione geometrica. Insegnò matematica presso la Reale Accademia di Guerra bavarese e si distinse come cartografo ufficiale in una spedizione scientifica nello Xingu (Brasile, 1887).



Figura 4.25 Superficie elicoidale a curvatura negativa costante realizzata da Peter Vogel

Questa superficie elicoidale completa la successione delle superficie a curvatura negativa costante pubblicate nella prima e nella seconda serie. Essa è stata generata grazie all'avvolgimento di una trattrice lungo il suo asintoto; le sue coordinate sono dunque rappresentate da:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = m\phi + c \log \frac{c + \sqrt{c^2 - r^2}}{r} - \sqrt{c^2 - r^2},$$

dove c è la lunghezza della tangente alla trattrice ed m è una grandezza proporzionale al passo del moto elicoidale. È possibile riportare facilmente il quadrato dell'elemento lineare sulla superficie alla forma:

$$ds^2 = \frac{c^2 + m^2}{m^2 + r^2} dr^2 + (m^2 + r^2) \left(d\phi + \frac{m\sqrt{c^2 - r^2}}{r(m^2 + r^2)} dr \right)^2,$$

da cui, posti

$$\sqrt{\frac{c^2 + m^2}{m^2 + r^2}} dr = du, \quad \sqrt{m^2 + r^2} = g, \quad d\phi + \frac{m\sqrt{c^2 - r^2}}{r(m^2 + r^2)} dr = dv,$$

risulta subito definito sulla superficie un sistema di coordinate polari geodetiche.

Da

$$r = \frac{1}{2} \left(m^2 e^{-\frac{u}{\sqrt{c^2 + m^2}}} - e^{\frac{u}{\sqrt{c^2 + m^2}}} \right)$$

e

$$g = \frac{1}{2} \left(m^2 e^{-\frac{u}{\sqrt{c^2 + m^2}}} + e^{\frac{u}{\sqrt{c^2 + m^2}}} \right)$$

si ottiene come espressione della curvatura

$$-\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{du^2} = -\frac{1}{c^2 + m^2},$$

che, come affermato, è costante.

Nella superficie in esame, sono state scelte le dimensioni in modo che essa risulti sviluppabile sulla superficie di rotazione a curvatura costante (tipo dell'iperboloide) N. X della seconda serie.²⁶ Il passo del movimento elicoidale è lo stesso di quello della superficie elicoidale a curvatura costante positiva nel N. XIV di questa serie.²⁷

Monaco di Baviera, aprile 1880

Osservazioni. L'autore del modello è Peter Vogel, che scrisse la sua tesi di dottorato sulle curve algebriche di quart'ordine e di genere uno nel 1880 sotto la guida di Brill prima e poi di Klein. Dopo questo esordio nel campo della matematica pura egli cambiò completamente campo di interesse, partecipando a diverse esplorazioni, ad esempio in Antartide e in Brasile, dove contribuì a misurazioni sia geodetiche sia astronomiche. Fu anche un pioniere dell'aviazione. Per ulteriori informazioni, si veda [71, pp. 247–248].

4.6 Dopo Beltrami: i lavori di Luigi Bianchi

Tra i matematici italiani attivi nella ricerca in geometria differenziale tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, Luigi Bianchi occupa una posizione di grande rilievo. Considerato il principale rappresentante italiano della geometria differenziale della sua epoca, egli contribuì in maniera decisiva allo sviluppo di questo settore, svolgendo un ruolo centrale all'interno della cosiddetta *scuola*

²⁶È il modello descritto a partire da p. 236.

²⁷Questo modello fu realizzata da Kuen ma, riferendosi a superficie a curvatura positiva, non è stato inserito.

geometrica italiana. Accanto agli studi di geometria differenziale, Bianchi si occupò anche di teoria dei numeri, analisi matematica e teoria dei gruppi continui, ottenendo risultati destinati ad avere una lunga influenza nella matematica del Novecento, come la classificazione delle algebre di Lie tridimensionali e le celebri identità di Bianchi della geometria riemanniana [59].

Nato a Parma il 18 gennaio 1856, entrò nel 1873 alla Scuola Normale Superiore di Pisa, dove ebbe come maestri Enrico Betti e Ulisse Dini. Conseguì la laurea in matematica nel 1877 e ottenne l'abilitazione all'insegnamento il 13 gennaio 1879. Negli anni immediatamente successivi vinse diversi concorsi di perfezionamento che gli permisero di proseguire la propria formazione prima a Pisa e poi in Germania, tra Monaco di Baviera e Gottinga²⁸. A Monaco entrò in contatto con Felix Klein e con l'ambiente matematico nel quale si stavano sviluppando le idee geometriche fondate sulla teoria dei gruppi e sulle ricerche di Sophus Lie. Tale esperienza esercitò un'influenza profonda sulla sua produzione scientifica, caratterizzata da una proficua sintesi tra la tradizione geometrica italiana e la scuola tedesca. Nel 1881 iniziò la carriera accademica presso la Scuola Normale Superiore, alla quale rimase legato per tutta la vita, divenendone anche direttore negli ultimi anni della sua attività [59]. Bianchi fu inoltre membro dell'Accademia dei Lincei, del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione e, dal 1924, senatore del Regno d'Italia. Tra i suoi allievi più illustri vi fu Guido Fubini, importante protagonista dello sviluppo della matematica nel novecento.

I primi risultati scientifici di Bianchi si collocano nel campo delle superfici a curvatura costante negativa. Già nella tesi di laurea del 1877, intitolata *Sulle superfici applicabili*, egli introdusse quella che in seguito sarebbe stata chiamata *trasformazione complementare*, un procedimento che consente di ottenere, a partire da una superficie a curvatura negativa costante, altre superfici aventi la stessa curvatura. L'importanza di questa idea fu immediatamente riconosciuta da Sophus Lie, che ne studiò approfonditamente la struttura analitica; da tali ricerche sarebbe successivamente nata la teoria generale delle *Trasformazioni di Bäcklund*. Bianchi continuò poi a svilupparne soprattutto gli aspetti geometrici, gettando le basi della teoria delle trasformazioni asintotiche e formulando il teorema di permutabilità²⁹ che oggi porta il suo nome.

Questi risultati furono ulteriormente approfonditi nel lavoro *Ricerche sulle superfici elicoidali e sulle superfici a curvatura costante*, pubblicato nel 1879 in occasione dell'abilitazione all'insegnamento. Durante il soggiorno in Germania, Bianchi ne presentò una sintesi in lingua tedesca negli *Mathematische Annalen* con il titolo *Über Flächen von constanter negativer Krümmung*, pubblicato nel 1880. In apertura della memoria lo stesso autore richiama esplicitamente la propria dissertazione del 1879, presentando il metodo che consente di costruire una famiglia infinita di superfici a curvatura costante negativa a partire da una

²⁸ Alcune informazioni bibliografiche relative a Luigi Bianchi si possono trovare in: *Edizione Nazionale Matematica Italiana, Luigi Bianchi (1856-1928)*, Scuola Normale Superiore di Pisa.

²⁹ Il Teorema di permutabilità di Bianchi stabilisce che, data una superficie a curvatura costante negativa e due sue trasformate di Bäcklund con parametri distinti, è possibile ottenere una quarta superficie attraverso una combinazione algebrica delle due precedenti, senza dover risolvere ulteriori equazioni differenziali [17, pp. 421-428].

superficie assegnata mediante la costruzione della sua *superficie complementare* [16].

La pubblicazione sugli *Annalen* riveste un'importanza particolare non soltanto dal punto di vista matematico, ma anche da quello della circolazione internazionale delle idee. I lavori di Bianchi comparvero infatti sulla più prestigiosa rivista matematica tedesca dell'epoca grazie all'interesse diretto di Klein, che ne era direttore e che sostenne così la diffusione dei risultati del giovane matematico italiano. L'attenzione riservata da Klein a queste ricerche testimonia la considerazione di cui esse godevano nei principali centri matematici europei già in quegli anni e rappresenta uno dei primi riconoscimenti internazionali ottenuti da Bianchi.

Nel seguito ci concentreremo in particolare sull'articolo pubblicato nei *Mathematische Annalen*, che costituisce una delle prime esposizioni organiche della teoria delle superfici complementari, e analizzeremo un modello materiale derivato dagli studi dello stesso Bianchi.

4.6.1 Il lavoro di Luigi Bianchi sugli *Annalen*

I primi studi di Bianchi, spinti dalla volontà di completare le ricerche di Beltrami relative alla realizzazione di una superficie reale, nello spazio euclideo, che rappresentasse una realizzazione della geometria piana di Lobačevskij, risalgono al 1877 e al 1879, quando discusse la sua tesi di laurea e, successivamente, la tesi di abilitazione all'insegnamento [23, p. 270]. L'anno seguente, il 7 febbraio 1880, Bianchi pubblicò sui *Mathematische Annalen* un lavoro che riassumeva i principali risultati da lui ottenuti nell'ambito delle trasformazioni geometriche; in particolare, Bianchi presenta al pubblico tedesco le trasformazioni complementari, definite in questo modo (una traduzione dell'articolo di Bianchi in italiano è riportata nell'Appendice F):

Si consideri su una superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$ un sistema di geodetiche parallele e si trasporti su ogni tangente di queste curve un segmento di lunghezza costante R a partire dal punto di contatto. Il luogo degli estremi di questo segmento ha la stessa curvatura costante $-\frac{1}{R^2}$.

Le trasformazioni complementari sono trasformazioni geometriche che, a partire da una superficie pseudosferica data di cui sia nota una semplice infinità di curve geodetiche (cioè, di cui sia nota una famiglia di geodetiche che dipendono da un solo parametro), consentono di costruire in maniera diretta un'altra superficie pseudosferica con la stessa curvatura costante negativa. In realtà, dal momento che è possibile ottenere, a partire da una famiglia di curve geodetiche dipendenti da un solo parametro, infiniti altri sistemi di geodetiche, la trasformazione precedente permette di ottenere una famiglia di superfici pseudosferiche dipendenti da un parametro avendo solo una superficie pseudosferica e, soprattutto, senza integrazioni [23, pp. 270–271].

Per comprendere il risultato ottenuto da Bianchi, è necessario definire il concetto di superficie evoluta e di superficie W .

L'*evoluta* S di una superficie Σ , detta a sua volta *evolvente*, è il luogo dei centri di curvatura principale di Σ . Ora, dal momento che per ogni punto di Σ esistono in generale due centri di curvatura principale distinti, corrispondenti alle sezioni principali normali di Σ stessa per cui i raggi di curvatura assumono il valore minimo e il valore massimo, l'*evoluta* S è costituita da due superfici generalmente distinte, dette *falde* dell'*evoluta*. Le due falde dell'*evoluta* erano note come superfici *complementari* ed è da qui che proviene la denominazione di trasformazioni complementari [23, p. 271].

Le *superfici* W , da Julius Weingarten, sono superfici evolventi caratterizzate dalla proprietà di avere raggi di curvatura principale che, in ogni punto della superficie, sono funzioni l'uno dell'altro. Grazie a tali superfici, Weingarten ottenne due risultati: da un lato, mostrò che le due falde della superficie evoluta di una qualunque superficie W sono applicabili a superfici di rotazione il cui elemento lineare dipende esclusivamente dalla relazione funzionale che intercorre tra i raggi di curvatura principale della superficie evolvente; dall'altro, dimostrò che ogni superficie applicabile a una superficie di rotazione può essere considerata come l'*evoluta* di una superficie W . Tali risultati furono ottenuti mostrando che l'elemento lineare di una delle due falde di un'*evoluta* di una superficie W si può scrivere nella forma tipica dell'elemento lineare di una superficie di rotazione; ciò vale anche per la seconda falda dell'*evoluta*³⁰; dopodiché, la seconda questione venne risolta con la costruzione analitica di una specifica superficie evolvente [23, pp. 272–275].

Proseguendo gli studi di Weingarten, anche Beltrami e Dini ottennero diversi risultati in quest'ambito. Dini, dopo aver pubblicato a Parigi la sua scoperta relativa a una superficie elicoidale a curvatura costante negativa (che prenderà il suo nome, Figura 4.26), fece diverse ricerche circa l'impossibilità di applicare l'una sull'altra i tre tipi distinti di superficie di rotazione pseudosferica, gli stessi ottenuti da Beltrami nel *Saggio* del 1868, in modo che i meridiani di una superficie corrispondano a quelli di un'altra³¹. Inoltre, nello stesso lavoro, Dini studiò le superfici evolventi corrispondenti ai tre tipi di superficie citati [23, pp. 276–277]. Per quanto riguarda Beltrami, egli esplicitò la corrispondenza tra le due falde di un'*evoluta* servendosi di un teorema³² secondo cui il centro

³⁰Si noti che, in accordo con i risultati di Beltrami in *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, le due falde di una stessa superficie non sono applicabili su una stessa superficie di rotazione in generale.

³¹Tali ricerche furono pubblicate nell'articolo *Sulle superfici di curvatura costante* [25].

³²**Teorema di Beltrami** (1865): Sia S una superficie e sia $\gamma : (a, b) \rightarrow S$ una qualunque curva tracciata su di essa. Per ogni punto $p = \gamma(\bar{t}) \in \gamma$, con $\bar{t} \in (a, b)$, si consideri l'unica geodetica $\tilde{\gamma}_p$ di S ortogonale a γ in p , cioè tale che $\dot{\tilde{\gamma}}_p(t^*) \perp \dot{\gamma}(\bar{t})$, dove $t^* \in (\bar{a}, \bar{b})$ soddisfa $\tilde{\gamma}_p(t^*) = p$. Scelto un qualunque punto $q = \gamma(t)$ della curva γ , con $t \in (a, b)$, si consideri inoltre la curva $\lambda : (c, d) \rightarrow S$ che interseca γ in $q = \gamma(t) = \lambda(t')$ e tale che, per ogni suo punto $\lambda(t)$, $t \in (c, d)$, la direzione tangente sia coniugata alla curva geodetica del sistema $G = \{\tilde{\gamma}_{p(t)} \mid t \in (a, b)\}$ passante per $\lambda(t)$, ossia $\Pi_{\lambda(t)}(\tilde{\gamma}, \lambda) = 0$. Allora le rette tangenti alle geodetiche del sistema G nei punti $\lambda(t)$, $t \in (c, d)$, generano una superficie sviluppabile il cui spigolo di regresso è denotato con $\tilde{\lambda}$. Il punto di intersezione ζ della tangente alla curva $\tilde{\gamma}_q$ nel punto $q = \lambda(t)$ con lo spigolo di regresso $\tilde{\lambda}$ è il centro di curvatura geodetica della curva γ nel punto q [23, pp. 277–278].

In termini geometrici, il teorema fornisce una costruzione sviluppabile associata a una curva tracciata su una superficie mediante il fascio delle geodetiche ad essa ortogonali.

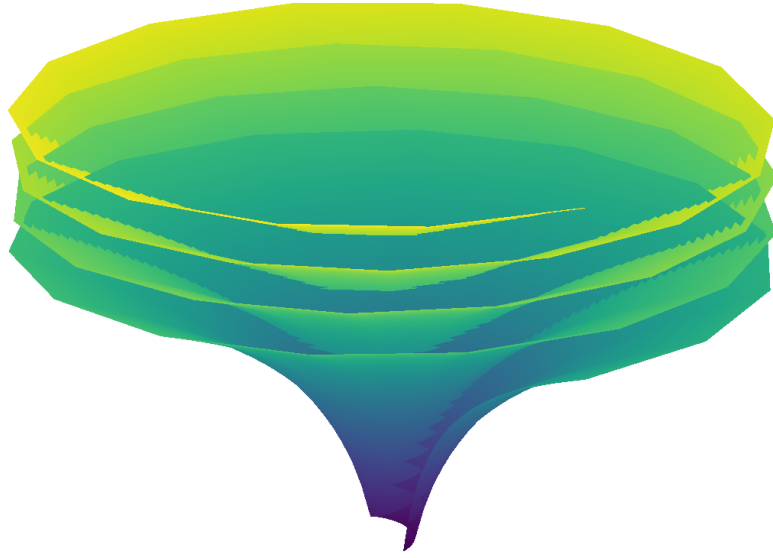


Figura 4.26 La superficie di Dini è parametrizzata da $x = a \cos u \sin v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = a \left(\cos v + \ln \tan \frac{v}{2} \right) + bu$, dove a determina la scala della pseudosfera e b l'avvitamento elicoidale della superficie (perciò annullando b si ottiene la pseudosfera).

di curvatura geodetica di una linea di curvatura della forma $r_1 = \text{cost.}$ sulla prima falda S - dove (r_1, r_2) sono coordinate di curvatura della superficie e le curve $r_1 = \text{cost.}$ e $r_2 = \text{cost.}$ costituiscono le due famiglie di linee di curvatura - coincide con il secondo centro di curvatura principale del punto corrispondente sulla seconda falda S' dell'evolvente. D'altra parte, Beltrami studiò in maniera dettagliata anche le evolventi delle superfici pseudosferiche di rotazione, ottenendo le evolventi corrispondenti a ognuno dei tre tipi (iperbolico, parabolico ed ellittico) di superfici di rotazione considerati; in particolare, Beltrami ricavò le superfici pseudosferiche di rotazione determinate dagli elementi lineari [23, p. 278]:

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad ds^2 &= du^2 + \exp\left(\frac{2u}{R}\right) dv^2, \\
 \text{II.} \quad ds^2 &= du_1^2 + R^2 \cosh^2\left(\frac{u_1}{R}\right) dv_1^2, \\
 \text{III.} \quad ds^2 &= du_2^2 + R^2 \sinh^2\left(\frac{u_2}{R}\right) dv_2^2.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

che corrispondono ai tre tipi di superfici W caratterizzate da relazioni funzionali

tra i raggi di curvatura principale r_1 e r_2 date da [23, p. 279]

$$\begin{aligned} \text{I. } r_2 - r_1 &= R, \\ \text{II. } r_2 - r_1 &= -R \coth\left(\frac{r_1 + k}{R}\right), \\ \text{III. } r_2 - r_1 &= -R \tanh\left(\frac{r_1 + k}{R}\right), \end{aligned} \tag{4.21}$$

con k una certa costante arbitraria. Per il caso I., Beltrami isolò, per la prima volta nella sua produzione, l'equazione della trattrice, in questo caso come meridiano della superficie di rivoluzione [23, p. 279]:

Teorema 4.4. *Le evolute delle superficie le quali hanno in ogni punto costante e uguale a R la differenza dei loro raggi di curvatura principale, sono superficie di curvatura costante negativa $-1/R^2$. Le geodetiche inviluppate su queste evolte dalle normali delle evolventi possono trasformarsi, mediante un'opportuna flessione delle evolte stesse, nei meridiani di una superficie di rivoluzione, ed acquistano allora la proprietà di avere le tangenti (terminate all'asse) di lunghezza costante uguale a R .*

È a questo punto che il risultato di Bianchi prese forma, permettendo di applicare sistematicamente la teoria delle superfici W per generare nuove superfici pseudosferiche. Direttamente influenzato dai lavori di Weingarten, Dini e Beltrami, Bianchi considerò due superfici S e $\tilde{S}$, definendo $\tilde{S}$ una superficie complementare di S se esiste una superficie Σ tale che S e $\tilde{S}$ costituiscano le due falde della sua evoluta; sfruttando la procedura indicata da Beltrami per generare una superficie complementare di una certa superficie data, mostrò allora che, nel caso specifico in cui S sia una superficie applicabile a una superficie di rotazione R in modo che le geodetiche appartenenti a una famiglia (G) siano corrispondenti ai meridiani della superficie R , variando la forma di S si ottengono superfici complementari applicabili a una stessa superficie di rotazione $\tilde{R}$ [23, p. 280]. Procedendo nello stesso modo di Beltrami, Bianchi ottenne dunque il seguente teorema [23, p. 281]:

Teorema 4.5. *Se una superficie di rivoluzione si deforma, la serie delle superfici complementari delle deformate è applicabile su una medesima superficie di rivoluzione.*

Nella pubblicazione presente nei *Mathematische Annalen*, tale risultato è espresso in questo modo:

Se una serie di superficie sono sviluppabili su un'unica superficie di rotazione, anche le superficie complementari sono sviluppabili una sull'altra e su una superficie di rotazione.

Nel caso specifico di superfici a curvatura costante negativa, Beltrami aveva mostrato la possibilità, come abbiamo visto, di scegliere la famiglia di geodetiche (G) nei tre modi individuati dalle formule (4.20): nello specifico, data una

superficie S , se (G) è una sua famiglia di geodetiche passanti per un punto $P \in S$, allora S può essere trasformata isometricamente su una superficie di rivoluzione R in modo che le geodetiche (G) coincidano con i meridiani di R . Il tipo di superficie di rotazione che può essere applicato a S dipende, in accordo con il *Saggio*, dalla natura del punto P : se P è un punto all'infinito, è ideale o è reale, è possibile scegliere un sistema di coordinate gaussiane sulla superficie tale che le geodetiche (G) coincidano, rispettivamente, con i meridiani $v = \text{cost.}$, $v_1 = \text{cost.}$, $v_2 = \text{cost.}$ (in riferimento a I., II. e III. di (4.20)) [23, pp. 281–282]. Bianchi allora concluse che, nel caso I. (corrispondente a un punto P all'infinito e alla formula I. della (4.20)), utilizzando il teorema di Weingarten [23, p. 282]

$$ds_2^2 = dr_1^2 + e^{2 \int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}} dv^2, \quad (4.22)$$

dunque la superficie complementare $\tilde{S}$ di una superficie pseudosferica S è applicabile a una superficie di rivoluzione con evolvente una superficie W caratterizzata dalla relazione $r_2 - r_1 = R$; la superficie complementare $\tilde{S}$ è allora applicabile ad una superficie a curvatura costante negativa e ha la stessa curvatura della superficie S . Questo ragionamento porta al teorema enunciato all'inizio del lavoro sui *Mathematische Annalen*.

Nei casi II. e III., invece, Bianchi, cercando l'equazione del meridiano della superficie di rotazione corrispondente alla $\tilde{S}$, ottenne le formule seguenti:

$$z = \varphi(r) = \int \frac{\sqrt{R^2 - (1 + \lambda^2 R^2)r^2}}{r} dr, \quad (4.23)$$

$$z = \varphi(r) = \int \frac{\sqrt{R^2 - (1 - \lambda^2 R^2)r^2}}{r} dr, \quad (4.24)$$

dove z è l'asse di rotazione, r è il raggio del generico parallelo e λ è una costante arbitraria; chiamando allora, nei due casi:

$$r = \frac{R}{\sqrt{1 + \lambda^2 R^2}} \sin \vartheta, \quad r = \frac{R}{\sqrt{1 - \lambda^2 R^2}} \sin \vartheta, \quad (4.25)$$

è possibile osservare che

- Nel caso II., la curva *non è altro che una proiezione ortogonale della trattrice passante per l'asintoto* ed è chiamata da Bianchi *trattrice accorciata*³³;
- Nel caso III., la curva *ha la trattrice come proiezione ortogonale* ed è chiamata da Bianchi *trattrice allungata*.³⁴

Bianchi procede con la sua analisi osservando che, nel caso III., oltre alla trattrice allungata, vi sono altre curve meridiane rilevanti: dall'equazione 4.24,

³³La trattrice è chiamata accorciata perché la distanza dall'asintoto, rispetto a quella relativa ad una trattrice ordinaria, viene ridotta di un fattore $\cos \mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 R^2}}$. Si veda l'Appendice F.

³⁴La trattrice è denominata allungata perché la distanza dall'asintoto, rispetto a quella relativa ad una trattrice ordinaria, viene aumentata di un fattore $\cos \mu = \sqrt{1 - \lambda^2 R^2}$. Si veda l'Appendice F.

infatti, si nota che è necessario porre:

$$0 < \lambda < 1/R; \quad (4.26)$$

se, d'altra parte, si sceglie $\lambda = 1/R$, la curva che si ottiene risulta essere una curva logaritmica; considerando invece $\lambda > 1/R$, Bianchi sostiene si determini *una nuova serie di curve*. I risultati di questa sezione sono dunque raccolti nella proposizione:

La superficie complementare di una superficie a curvatura costante negativa, in riferimento ad un sistema di geodetiche passanti per un punto della superficie, è applicabile su una superficie di rotazione che ha come meridiano una trattrice, una trattrice accorciata o allungata e come asse l'asintoto, a seconda che il punto comune delle geodetiche sia all'infinito, sia reale e al finito o immaginario.

Infine, Bianchi esplicita le equazioni delle superfici complementari, ottenute tramite il metodo presentato, corrispondenti alla superficie di rotazione della trattrice:

$$\begin{aligned} x &= 2R \frac{\sin u}{1+(v^2+k)\sin^2 u} (\cos v + v \sin v), \\ y &= 2R \frac{\sin u}{1+(v^2+k)\sin^2 u} (\sin v + v \cos v), \\ z &= R \left\{ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}u + \frac{2 \cos u}{1+(v^2+k)\sin^2 u} \right\}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

spiegando che, per $k = 0$ si ottiene una superficie a curvatura costante negativa $-1/R^2$, mentre per $k > 0$ e $k < 0$ si ottengono classi di superfici applicabili sulla superficie di rotazione, rispettivamente, della trattrice accorciata o allungata.

Le considerazioni sviluppate da Bianchi nell'articolo pubblicato sui *Mathematische Annalen* trovarono una realizzazione concreta nei modelli realizzati per rappresentare le superfici pseudosferiche. Ne è un esempio la superficie che analizziamo di seguito.

4.6.2 La superficie di Kuen secondo la teoria di Bianchi

Il modello della superficie di Kuen rappresenta uno dei più suggestivi esempi di superficie a curvatura gaussiana costante negativa. Introdotta da Theodor Kuen nel 1884, essa costituisce un importante oggetto di studio della geometria differenziale e offre una rappresentazione concreta delle proprietà geometriche associate alla curvatura negativa.

Il riferimento a Luigi Bianchi nel titolo del modello è legato alla teoria delle trasformazioni delle superfici pseudosferiche sviluppata dal matematico italiano: la superficie di Kuen può infatti essere ottenuta dalla pseudosfera mediante una trasformazione complementare di Bianchi, conservando la curvatura gaussiana costante negativa. La scheda seguente ne descrive le principali caratteristiche.

Modelli Matematici
realizzati
presso l'Istituto Matematico del Regio Politecnico di Monaco.
Sotto la direzione del Prof. Dott. Brill.

XX.
Categoria VII
Modello 11

Superficie a curvatura negativa costante secondo L. Bianchi
di Th. Kuen
Assistente alla scuola tecnica superiore di Monaco



Figura 4.27

La superficie di Bianchi ha avuto una genesi originale e le ricerche del Sig. Sophus Lie che vi si collegano (Archiv. for Mathematik og Naturvidenskab 1878,

79, 80) hanno suscitato un generale interesse. Essa è stata realizzata presso l'istituto matematico locale dallo studente in matematica J. Mack. Diverse sezioni di questa superficie mostrano una somiglianza con quelle che E. Lenz, nella sua Dissertazione: *Sulle superficie di Enneper a curvatura negativa costante* ha tracciato di una di queste; ciò ha fatto nascere l'idea che la superficie di Bianchi possieda linee di curvatura piane e la sua equazione sia solo un caso particolare dell'equazione formulata dal Sig. A. Enneper nei Göttinger Nachrichten del 1868. La congettura è stata in effetti confermata.

Come parametri u e v attraverso cui assegnare la superficie bisogna scegliere quelli che corrispondono alle due famiglie di linee di curvatura sulla superficie; $u = \text{cost.}$ deve dare le linee di curvatura piane. Il Sig. Enneper diede sotto questa ipotesi l'equazione della superficie a curvatura negativa costante a pag. 275 dei Göttinger Nachrichten. È possibile portarla in questa forma:

$$x = \varrho \cos \varphi$$

$$y = \varrho \sin \varphi$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{C^2 - A^2}} \int \left(\frac{g dv_1}{dv} \right)^2 dv + \int \frac{g i}{\sqrt{C^2 - A^2}} \operatorname{tg} i(u_1 + v_1) \cdot \frac{g dv_1}{dv}.$$

Qui sono:

$$\varrho = \frac{g}{\sqrt{C^2 - A^2}} \cdot \frac{1}{\cos i(u_1 + v_1)} \cdot \frac{1}{\sin \sigma},$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{\sqrt{C^2 - A^2}}{g} \cdot \frac{1}{\sin^2 \sigma},$$

$$\frac{1}{\sin^2 \sigma} = C + A \cos 2iu_1,$$

$$g \frac{dv_1}{dv} = \sqrt{C - A \cos 2iv_1},$$

$$g \frac{du_1}{du} = \cotg \sigma,$$

dove σ indica l'angolo sotto il quale la superficie è tagliata dal piano che contiene una linea di curvatura principale; la costante $-\frac{1}{g^2}$ è uguale al prodotto dei due raggi di curvatura principale.

In generale, ϱ , φ e z si ottengono come funzioni ellittiche di u e v ; in casi speciali, questi integrali si possono ridurre da ellittici a circolari. Il Sig. Enneper tratta uno di questi casi a pag. 276 del suo lavoro citato in precedenza. Egli pone $A = 0$ e ottiene così delle superficie elicoidali a curvatura costante negativa e con un sistema di linee piane di curvatura principale. Tuttavia, un secondo gruppo di superficie, compreso nel caso $A = 0$ sembra essere sfuggito sia a lui sia al sig. Lenz. Può infatti darsi il caso che σ non si riduca ad una costante, anche se si pone $A = 0$; si ottiene u_1 integrando un'equazione differenziale e scegliendo la costante di integrazione infinitamente grande. Questa è proprio la soluzione che si perde con l'annullamento di B nella formula ottenuta a pag.

274

$$\frac{1}{\sin^2 \sigma} = A' \cos 2iu_1 - Bi \sin 2iu_1 + C, \quad (\text{I})$$

cioè $A' = B$.

Otterremo ora l'equazione per questo caso speciale.

Assumendo l'espressione per $\frac{1}{\sin^2 \sigma}$, dalle equazioni di condizione, vere in generale

$$\begin{aligned} \cos i(u_1 + v_1) \left[\frac{d^2 v_1}{dv^2} - \frac{1}{2g^2} \frac{d}{du_1} \left(\frac{1}{\sin^2 \sigma} \right) \right] = \\ i \sin i(u_1 + v_1) \left[\frac{1}{g^2 \sin^2 \sigma} - \left(\frac{dv_1}{dv} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

si ottiene la seguente:

$$\begin{aligned} \cos iu_1 \left[\left(g^2 \frac{d^2 v_1}{dv^2} \right)^2 - B \right] \cos iv_1 + \left(\left(g \frac{dv_1}{dx} \right)^2 - C - A' \right) i \sin iv_1 = \\ \sin iu_1 \left[\left(g^2 \frac{d^2 v_1}{dv^2} \right)^2 + B \right] \sin iv_1 + \left(C - \left(g \frac{dv_1}{dx} \right)^2 - A' \right) i \cos iv_1. \end{aligned}$$

Ora, siccome u_1 è indipendente da v_1 , l'equazione precedente si divide in queste due:

$$\begin{aligned} -B + g^2 \frac{d^2 v_1}{dv^2} &= \left\{ A' + C - \left(g \frac{dv_1}{dv} \right)^2 \right\} i \operatorname{tg} iv_1, \\ B + g^2 \frac{d^2 v_1}{dv^2} &= \left\{ \left(g \frac{dv_1}{dv} \right)^2 - C + A' \right\} i \operatorname{cotg} iv_1. \end{aligned}$$

Sottraendo una dall'altra queste equazioni si ottiene

$$\left(g \frac{dv_1}{dv} \right)^2 = C - A' \cos 2iv_1 - Bi \sin 2iv_1. \quad (\text{II})$$

Eseguendo con queste espressioni generali per $\frac{1}{\sin^2 \sigma}$ e $\frac{dv_1}{dv}$ i calcoli eseguiti dal Sig. Enneper nel suo lavoro per ricavare le espressioni di ϱ , φ e z , si trova che non cambia nulla nelle stesse, se non che la costante $C^2 - A^2$ diventa $C^2 - A'^2 + B^2$. Ovviamente, bisogna rimuovere $\frac{1}{\sin^2 \sigma}$ e $g \frac{dv_1}{dv}$ con i valori delle equazioni I e II. Nel caso speciale $A' = B$, il solo che sarà trattato in seguito, non è necessario eseguire questi calcoli piuttosto onerosi; ci si convince facilmente che qui le espressioni per $\frac{1}{\sin^2 \sigma}$ e $g \frac{dv_1}{dv}$ emergono da quelle usate fino a questo punto da Enneper; se si pone $A = 0$, u_1 cresce fino ad un valore costante c infinitamente grande e v_1 diminuisce, mentre deve essere $\frac{A}{2} e^{2ic} = A'$. Nelle formule per ϱ , φ e z bisogna solo porre $A = 0$ perché valgano in questo caso.

Si ponga in I e II $A' = B$: si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \sigma} &= C + A' e^{2u_1} = \left(g \frac{du_1}{du} \right)^2 + 1 \\ g \frac{dv_1}{dx} &= C - A' e^{-2v_1}. \end{aligned}$$

Per brevità, inseriamo le relazioni

$$U = e^{\frac{u}{g}\sqrt{C-1}}$$

$$V = e^{-\frac{v}{g}\sqrt{C}};$$

otteniamo per integrazione da I^a e II^a

$$e^{u_1} = \frac{2\sqrt{\frac{\lambda(C-1)}{A'}} \cdot U}{\lambda - U^2} \quad (\text{I}^b)$$

$$e^{-v_1} = \frac{2\sqrt{\frac{Ck}{A'}} \cdot V}{k + V^2} \quad (\text{II}^b)$$

dove λ e k sono costanti di integrazione.

Servendosi di I^b si ottiene

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{g} \cdot \frac{(\lambda - U^2)^2}{\lambda^2 + U^4 - 2\lambda^{\frac{2-C}{C}}U^2} = \frac{C}{g} \sin^2 \sigma$$

e da qui con un'integrazione e tenendo conto della condizione di realtà $C \geq 1$:

$$\varphi = \frac{u}{g} - \text{arctg} \left\{ \frac{U^2 - \lambda^{\frac{2-C}{C}}}{\frac{2\lambda}{C}\sqrt{C-1}} \right\} + \varphi_0,$$

dove φ_0 è una costante di integrazione che si può porre uguale a zero, senza ledere la generalità.

Questa equazione si può scrivere anche nella forma:

$$\text{tg} \left(\frac{u}{g} - \varphi \right) = \frac{C \cdot U^2}{2\lambda\sqrt{C-1}} - \frac{2-C}{2\sqrt{C-1}}. \quad (\text{III})$$

Con l'aiuto delle equazioni I^b e II^b si ottiene per ϱ l'espressione:

$$\varrho = 2g\sqrt{\lambda k}\sqrt{C-1} \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2 + U^4 - 2\lambda^{\frac{2-C}{C}}U^2} \cdot UV(k + V^2)}{kC(\lambda - U^2)^2V^2 + \lambda(C-1)(k + V^2)^2U^2} \quad (\text{IV})$$

Utilizzando la II^b, sarà

$$\frac{1}{C} \int \left(\frac{g dv_1}{dv} \right)^2 dv = v + \mu + \frac{g}{C} \cdot \frac{\sqrt{A'k}}{k + V^2},$$

con μ che indica la costante di integrazione.

Per z si ottiene così:

$$z = v + \frac{g}{C} \cdot \frac{\sqrt{A'k}}{k + V^2} + \mu + \frac{g}{\sqrt{C}} \cdot \frac{Ck(\lambda - U^2)^2V^2 - \lambda(C-1)(k + V^2)^2U^2}{CK(\lambda - U^2)^2V^2 + \lambda(C-1)(k + V^2)^2U^2} \cdot \frac{\sqrt{(k + V^2)^2 - 4kV^2}}{k + V^2} \quad (\text{V})$$

Grazie alle equazioni III, IV e V si determinano le superficie a curvatura costante negativa con un sistema di linee di curvatura piane che si ottengono uguagliando A' e B .*) A partire dal gruppo di superficie definito dalle equazioni III, IV, V si ottiene la superficie a curvatura costante negativa fornita dal Sig. L. Bianchi supponendo di utilizzare questi valori particolari per le costanti:

$$\left. \begin{array}{l} C = 1 \\ A' = 4 \\ k = 1 \\ \lambda = 1 \\ \mu = -g. \end{array} \right\} \quad (\text{VI})$$

Se si pone $C = 1$, le equazioni III, IV, V assumono una forma indeterminata che però può essere valutata sviluppando in serie la funzione esponenziale. L'equazione III diventa

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{u}{g} - \varphi \right) &= \frac{u}{g} \quad \text{o} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\sin \frac{u}{g} - \frac{u}{g} \cos \frac{u}{g}}{\cos \frac{u}{g} + \frac{u}{g} \sin \frac{u}{g}}. \end{aligned} \quad (\text{III}^a)$$

Per ϱ si ottiene l'espressione

$$\varrho = 4g \frac{e^{-\frac{v}{g}} \left(1 + e^{-\frac{2v}{g}} \right)}{\left(1 + e^{-\frac{2v}{g}} \right)^2 + \frac{4u^2}{g^2} e^{-\frac{2v}{g}}} \sqrt{1 + \frac{u^2}{g^2}} \quad (\text{IV}^a)$$

La sola difficoltà per determinare questo valore di ϱ a partire quello nella forma indeterminata dell'equazione IV è data dall'espressione sotto il segno di radice perché i primi due termini dello sviluppo si elidono. Si scriva

$$\lambda^2 + U^4 - 2\lambda \frac{2-C}{C} U^2 = \lambda^2 + U^4 - 4\lambda \frac{1-C}{C} U^2 - 2\lambda U^2$$

e si sviluppino in serie prima U^2 e U^4 , conservando i primi tre termini.

*)Un tipo di superficie analogo non esiste quando la curvatura è positiva in virtù delle seguenti condizioni di realtà (Bockwoldt, Dissertazione inaugurale, Gottinga, 1878).

$$[A] \geq [C] + 1.$$

Infine, per z si ottiene l'espressione

$$\begin{aligned}
 z &= v - g + \frac{2g}{1 + e^{-\frac{2v}{g}}} + \\
 &+ g \frac{\left(1 + e^{-\frac{2v}{g}}\right)^2 - \frac{4u^2}{g^2} e^{-\frac{2v}{g}}}{\left(1 + e^{-\frac{2v}{g}}\right)^2 + \frac{4u^2}{g^2} e^{-\frac{2v}{g}}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{2v}{g}}}{1 + e^{-\frac{2v}{g}}} = \\
 &= v + \frac{2g \left(1 - e^{-\frac{3v}{g}}\right)}{\left(1 + e^{-\frac{2v}{g}}\right)^2 + \frac{4u^2}{g^2} e^{-\frac{2v}{g}}}.
 \end{aligned} \tag{V^a}$$

Le equazioni III^a, IV^a e V^a sono però le stesse di quelle indicate dal Sig. Bianchi a pag. 21 della sua Dissertazione Inaugurale "Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle Elicoidi", Pisa 1879 (un suo riassunto si trova nei Mathem. Annalen, Volume XVI). Basta porre:

$$u = w \cdot g$$

$$v = g \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}. \tag{VII}$$

Le equazioni III^a, IV^a e V^a assumono allora la forma

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin w - w \cos w}{\cos w + w \sin w} \tag{III^b}$$

$$\varrho = \frac{2g \sin \psi}{1 + w^2 \sin^2 \psi} \cdot \sqrt{1 + w^2} \tag{IV^b}$$

$$z = g \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + \frac{2g \cos \psi}{1 + w^2 \sin^2 \psi}. \tag{V^b}$$

Se si vogliono verificare le formule trovate dal Sig. Enneper nel suo lavoro su questa superficie, bisogna partire dalla forma ^(a) delle equazioni per φ , ϱ e z , cioè inserire al posto dei parametri w e φ , grazie alle ipotesi fatte a pag. 260 del lavoro di Enneper, le funzioni u e v di questi parametri.

Come in tutte le superficie a curvatura costante, il secondo sistema non piano di linee di curvatura è tagliato da un sistema di sfere i cui centri giacciono in linea retta. Qui le sfere hanno equazione:

$$x^2 + y^2 + \left(z - g \log \tan \frac{\psi}{2} - \frac{g}{\cos \psi}\right)^2 = \frac{g^2}{\cos^2 \psi}.$$

Per quanto riguarda la forma della superficie, dalla sua equazione segue immediatamente che è simmetrica rispetto sia al piano XY , sia al piano XZ . Se si pone rispettivamente $\pi - \psi$ al posto di ψ , $-w$ al posto di w , cambiano segno rispettivamente solo z o y . La linea di curvatura $w = 0$ che giace nel piano XZ

è pure uno spigolo di regresso³⁵ della superficie. Allora, con l'aiuto della I^b si ottiene:

$$\cotg \sigma = \frac{-g}{w} = g \frac{du_1}{du};$$

così si avvicina anche σ con w allo zero, cioè il piano XZ è tangente alla superficie; in virtù della sua simmetria in riferimento ai piani coordinati appena menzionati, la linea di curvatura principale $w = 0$ deve perciò essere uno spigolo di regresso (non può essere una curva auto-tangente, come è facile dimostrare). A partire da questo spigolo di regresso, la superficie si avvolge infinite volte attorno all'asse Z in entrambe le direzioni; dapprima se ne allontana, poi vi si avvicina nuovamente e raggiunge l'asse solo dopo un numero infinito di avvolgimenti. In questo processo, dopo ciascun mezzo avvolgimento avviene un'autointersezione della superficie nel piano XZ . Oltre alle curve doppie piane che si ottengono così, la superficie ne possiede un'altra nel piano XY . Per le intersezioni di quest'ultimo piano coordinato con la superficie, bisogna porre $z = 0$, così da avere

$$0 = g \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + \frac{2 \cos \psi}{1 + w^2 \sin^2 \psi}.$$

Se questa equazione è soddisfatta da una coppia w_0, ψ_0 , allora lo è anche dalla coppia $w_0, \pi - \psi_0$. A queste coppie di valori corrispondono le stesse coordinate xy per cui i punti corrispondenti a questi parametri coincidono, cioè la sezione è una curva doppia. Il sistema di valori $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$, w_0 arbitrario costituisce un'eccezione perché soddisfa comunque l'equazione precedente; in questo caso i due diversi valori trovati in precedenza della coppia di parametri coincidono tra loro, cioè questo sistema di valori corrisponde ad una sezione che è una curva semplice. Oltre alle curve doppie piane, la superficie possiede anche una curva doppia non piana, come segue immediatamente considerando le sezioni orizzontali. La superficie possiede inoltre una curva non piana di regresso. Si mostra infatti che quando si assume $w > 1$ le linee di curvatura principale piane hanno due cuspidi perché valgono entrambe le equazioni

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

quando si scelga

$$1 - w^2 \sin^2 \psi = 0.$$

Quest'ultima equazione in relazione all'equazione della superficie rappresenta dunque una curva di regresso; nei due punti $w = \pm 1$ dove taglia la curva doppia del piano XY , possiede una cuspidi dove la tangente è orizzontale e la superficie è simmetrica rispetto al piano XY . Da questi punti in poi, la curva doppia procede isolata. Per la costruzione dei modelli è stato scelto $g = 5^{\text{cm}}$.

Monaco di Baviera, dicembre 1881.

³⁵Lo spigolo di regresso è la curva involuppo delle generatrici di una superficie sviluppabile, ossia il luogo dei punti di intersezione di generatrici infinitamente vicine.

Osservazioni. Il modello qui descritto è identificato come condotto in base alla teoria di Bianchi. Questa osservazione si riferisce al lavoro [16] di cui abbiamo riportato una traduzione in italiano nell'Appendice F. Come accennato, Bianchi si era laureato a Pisa sotto la guida di Ulisse Dini che, nella prima parte della sua carriera scientifica, si era interessato alla geometria differenziale ed in particolare ai problemi di applicazione di una superficie su un'altra. Come notato nella nota di accompagnamento al modello in gesso, il lavoro sugli *Annalen* è un estratto della tesi di abilitazione all'insegnamento che era stato pubblicato da poco sugli *Annali* della Scuola Normale e parte di essa anche sul *Giornale di Matematiche* diretto da Giuseppe Battaglini. Poco dopo la laurea, Bianchi ottenne un posto di perfezionamento all'estero nelle matematiche ed egli scelse di recarsi a Monaco dove si era trasferito Felix Klein. Oltre a seguire i corsi del grande matematico tedesco, Bianchi partecipò attivamente ai *Colloquium*, dei seminari organizzati da Klein e riservati ai suoi collaboratori ed allievi più stretti; Bianchi tenne tre seminari di cui due vertevano su argomenti riguardanti la teoria di Klein dell'icosaedro ed i suoi legami con la risoluzione delle equazioni di quinto grado. Il primo in ordine cronologico dei seminari era invece intitolato:

Sulla curvatura delle superficie e sul teorema di Weingarten

e fu tenuto il 17 e il 24 gennaio 1880. Il lavoro di Bianchi dovette attirare l'attenzione di Klein, che evidentemente lo invitò a scrivere un sunto della sua tesi da pubblicare sugli *Mathematische Annalen*, di cui egli era il principale redattore, garantendo alle idee di Bianchi la diffusione al di fuori dei confini nazionali. In questi seminari, di cui i *Klein Protokolle* contengono un sunto redatto dai loro autori, Bianchi ripercorre succintamente gli stessi teoremi discussi nel lavoro che avrebbe pubblicato verso la conclusione del biennio trascorso a Monaco.

In quel momento, a seguire i seminari organizzati da Klein vi era anche il suo assistente, Walther Dyck, che faceva parte del gruppo di studenti e studiosi che, coordinati da Alexander Brill, erano coinvolti nella produzione dei modelli in gesso di superficie notevoli. Al termine di una lettera indirizzata, il 21 febbraio 1881, a Bianchi da Lipsia, dove Dyck si era spostato al seguito del trasferimento di Klein, egli scrive

Avrai probabilmente saputo che la tua superficie a curvatura negativa costante è stata realizzata a *Monaco*, sotto la guida del Prof.
BRILL: una superficie davvero famosa!

Nel lavoro di Bianchi [16] ricorre spesso il nome di Julius Weingarten (1836-1910), matematico tedesco con il quale Bianchi intrattenne un'importante corrispondenza scientifica. Weingarten, che svolse per la maggior parte della vita la professione di insegnante presso una scuola superiore a Berlino, scrisse il lavoro [73], a cui Bianchi si riferisce e che costituisce la chiave per comprendere la genesi delle superfici a curvatura costante negativa che propose nella sua dissertazione di laurea.

L'estensore della nota di accompagnamento, invece, è Theodor Kuen, che continuò ad occuparsi di superfici a curvatura negativa costante pubblicando un

lavoro nel 1884 in cui, a partire dall'esperienza maturata sotto la guida di Brill, egli propose una superficie a curvatura negativa costante uguale a -1 [42], che è in effetti un caso particolare di superficie di Enneper a curvatura costante e di cui fa cenno nella scheda. La caratteristica che la rende notevole, come osservò lo stesso Kuen [42, p. 194], è che

le sue coordinate rettangolari sono esprimibili solo grazie a funzioni ciclotomiche³⁶ e non, come nel caso generale, tramite funzioni ellittiche di due parametri.

Non abbiamo ulteriori informazioni sullo studente J. Mack che effettivamente realizzò il modello. Quanto agli altri matematici citati, quanto scritto da Kuen permette di evidenziare una doppia genesi delle superfici ottenute da Bianchi: Kuen si riferisce a diversi lavori che Alfred Enneper aveva pubblicato a partire dalla metà degli anni '60 dell'Ottocento, dedicati a trovare superficie le cui linee di curvatura fossero dotate di particolari proprietà.

Alfred Enneper (1830-1885) fu un matematico tedesco che si laureò a Gottinga sotto la guida di Dirichlet con una tesi sulla funzione $\Pi(z)$ introdotta da Gauss e strettamente legata alla funzione Γ di Eulero; a partire dal 1859, insegnò sempre all'università di Gottinga. Come si vede dall'estratto della lettera di Dyck a Bianchi, non solo il matematico italiano, ma anche i colleghi di Monaco non avevano colto il legame tra le superfici ottenute con la costruzione di Bianchi e quelle ottenute da Enneper. Quest'ultimo, scrivendo da Gottinga a Bianchi il 24 febbraio 1885, un mese solo prima della prematura scomparsa, si esprimeva così in merito ai suoi risultati

Sono già più di 20 anni che mi occupo di superficie dotate di un sistema di linee di curvatura principale piane o sferiche. Può consultare su questo punto il *Mathematische Zeitschrift* per gli anni 1862, 1863 "Ueber einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen" e per il 1864 "Analytisch-geometrische Untersuchungen". Menziono questi vecchi lavori, senza però voler entrare nel dettaglio degli stessi. Questi soffrono per una scelta non buona delle notazioni e perché non hanno il desiderabile grado di generalità. Per mie necessità personali ho nuovamente raccolto in dettaglio le ricerche sulle superficie con linee di curvatura principali piane o sferiche, completandole e riunendole. Infine, dopo diversi anni, ho raccolto i risultati per pubblicarli tra i lavori dell'Accademia delle Scienze di qui nel 1878 e nel 1880. Ho fatto questo per poter citare risultati che, forse per troppo tempo, non avevo pubblicato e di cui qualche caso particolare era già stato menzionato e in particolare era stato dedotto. Questi lavori sono la fonte autentica delle ricerche pubblicate sui "Nachrichten" nel 1867 e nel 1868.

Mi permetta ora di dirigere la sua attenzione in primo luogo al lavoro del 1878 ma solo su una sua piccola parte. Per quanto riguarda la notazione, è racchiusa in quella ordinaria.

³⁶Cioè le funzioni trigonometriche.

Le coordinate x, y, z di un punto su una superficie saranno viste come funzioni di due variabili u e v . Queste variabili corrispondono sulla superficie a due sistemi di curve che, per semplicità, assumeremo essere le linee di curvatura principale. Si hanno così le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} \frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du} \frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du} \frac{dz}{dv} &= 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} \frac{d^2x}{du^2} & \frac{d^2y}{du^2} & \frac{d^2z}{du^2} \\ \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \end{array} \right| &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 + \left(\frac{dz}{du} \right)^2 &= E, \\ \left(\frac{dx}{dv} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dv} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dv} \right)^2 &= G. \end{aligned}$$

I raggi di curvatura principale r' ed r'' nel punto (x, y, z) sono determinati da

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{d^2x}{du^2} & \frac{d^2y}{du^2} & \frac{d^2z}{du^2} \\ \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \end{array} \right| = \frac{E\sqrt{EG}}{r'}, \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{d^2x}{dv^2} & \frac{d^2y}{dv^2} & \frac{d^2z}{dv^2} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \\ \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \end{array} \right| = \frac{G\sqrt{EG}}{r''}.$$

A queste equazioni aggiungo anche le seguenti

$$\left\{ \begin{aligned} d \frac{\frac{\sqrt{E}}{r'}}{dv} &= \frac{1}{r''} \frac{d\sqrt{E}}{dv}, & d \frac{\frac{\sqrt{G}}{r''}}{du} &= \frac{1}{r'} \frac{d\sqrt{G}}{du}. \\ d \frac{\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d\sqrt{E}}{dv}}{dv} + d \frac{\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{d\sqrt{G}}{du}}{du} + \frac{\sqrt{EG}}{r'r''} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (\theta)$$

A p. 7 del lavoro del 1878 sono raccolte alcune formule sulla teoria delle curve a doppia curvatura. A pag. 10 fanno seguito delle formule fondamentali sulle linee di curvatura principali. Per semplicità, grazie alle equazioni (14) e (23) sono state introdotte due quantità H_1 e H_2 che servono *solo* per brevità e che non compaiono più nel seguito delle ricerche generali. Alle pp. 17-23 sono raccolte alcune osservazioni sulle linee di curvatura piane e sferiche. Vorrei pregarla di gettare un'occhiata alle prime 23 pagine del lavoro del 1878 perché il suo contenuto contribuisce essenzialmente alla comprensione di quel che segue.

Il libretto intitolato "Analytisch-geometrische Untersuchungen" contiene una serie di comunicazioni fatte alla locale Accademia delle Scienze. Di queste, hanno interesse per i suoi obiettivi solo quelle che seguono. Delle definizioni nella comunicazione I e II, quelle nella II si trovano anche nel lavoro del 1878. Ho introdotto dei simboli speciali nelle sezioni V e VI. Si trovano trattate le equazioni (θ) di questa lettera nel caso in cui $r'r'' = g^2$ o $r'r'' = -g^2$, dove g indica una costante. I risultati corrispondenti si riferiscono alle superficie a curvatura costante. Lì fu posta per la prima volta la domanda, per quale di queste superficie esiste un sistema di linee di curvatura piane o sferiche? Per quanto riguarda la notazione, troverete indicato

alle pp. 421-422 di VI il centro di curvatura della sfera osculatrice di una superficie nel punto (x, y, z) con (ξ, η, ζ) . Queste stesse quantità sono indicate con $(\xi_2^*, \eta_2^*, \zeta_2^*)$. Sembra necessario segnalare questa piccola modifica di notazione per ridurre la possibilità di errori.

Con l'aiuto di quel che precede, la lettura delle comunicazioni del 1868 non comporterà la minima difficoltà per voi. Se qualche punto dovesse risaltarle poco chiaro, la prego di volermi scrivere, perché la risposta sarà evidentemente più rapida di quanto sia stata questa risposta alle vostre amichevoli righe.

La prego di volermi ricordare al Sig. BETTI

in tutta umiltà
A. ENNEPER

La lettera riportata rappresenta una guida alla lettura che Enneper offrì a Bianchi, che a sua volta doveva aver chiesto chiarimenti in merito ai suoi lavori sulle superfici a curvatura costante, con una particolare attenzione alle notazioni utilizzate che, variando frequentemente, potevano portare a fraintendimenti. Enneper inviò a Bianchi più lavori che furono pubblicati nell'arco di circa quindici anni, a partire da [27], fino alla corposa memoria in due parti [30]. Il lavoro del 1868 [28] è quello dedicato specificamente alle superfici a curvatura costante, positiva o negativa. Il lavoro di Enneper fu continuato da Georg Bockwoldt la cui tesi di dottorato [18] è citata da Kuen insieme a quella di Ernst Lenz [43]: la prima è dedicata alle superfici a curvatura positiva, la seconda a quelle aventi curvatura costante negativa.

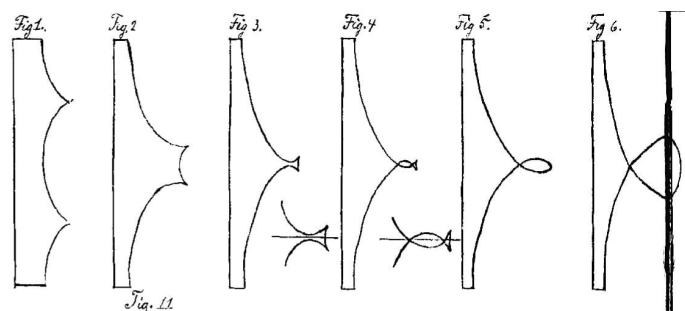


Figura 4.28 Esempio degli studi di Ernst Lenz sulle superfici a curvatura gaussiana negativa costante, tratto da [43, pp. 29–30]. Le sei figure presenti nella tavola rappresentano diverse forme assunte dalle linee di curvatura piane associate alle superfici di Enneper a curvatura gaussiana negativa costante. La sequenza evidenzia come tali curve varino progressivamente al modificarsi dei parametri della costruzione geometrica, passando da configurazioni semplici a profili caratterizzati da *strozzature*, *punti di contatto* e successivamente da *cappi* e *auto-intersezioni*.

Nel secondo volume delle sue lezioni di geometria differenziale, Bianchi dedicherà l'intero Capitolo XXI a uno studio dettagliato delle superfici che hanno un

sistema di linee di curvatura piane oppure sferiche osservando-siamo nel 1903- [17, p. 255]

La classe di superficie, di cui trattiamo nel presente capitolo, ha formato l'oggetto delle ricerche di un gran numero di geometri; noi ci proponiamo qui di far conoscere i principali risultati della teoria, che permettono di riguardare queste superficie come perfettamente note.

Nel corso dell'intero capitolo Bianchi si serve di una proprietà dell'immagine sferica, cioè sotto l'azione della mappa di Gauss, di una linea di curvatura piana, vale a dire di avere per immagine una circonferenza posta in un piano parallelo a quello della linea di curvatura assegnata. A partire dal § 330 di [17], Bianchi si dedica al problema di trovare le superficie pseudosferiche aventi un sistema di linee di curvatura piane, fornendo la seguente caratterizzazione [17, p. 292]:

La più generale superficie pseudosferica di raggio $= 1$, colle linee di curvatura v piane, è definita dalla seguente forma del ds^2 riferita alle linee di curvatura u, v :

$$ds^2 = \tanh(u+v) \frac{du^2}{C - A \cosh 2u + B \sinh 2u} + \frac{1}{\cosh^2(u+v)} \frac{dv^2}{A \cosh 2v + B \sinh 2v + C - 1}, \quad (4.28)$$

restando A, B, C costanti arbitrarie.

In chiusura dell'articolo 330, Bianchi cita i lavori di Enneper e Kuen:

Le superficie pseudosferiche con un sistema di linee di curvatura piane dipendono quindi da due costanti arbitrarie, cioè formano una doppia infinità. Fra esse le più semplici, che erano sfuggite all'analisi di Enneper, e furono avvertite da Kuen, corrispondono all'ipotesi $A = B$.

Spazio ancor maggiore sarà riservato alle ricerche di Enneper da Bianchi nella terza edizione delle *Lezioni*.

Un matematico che si interessò al metodo di Bianchi per generare superficie a curvatura costante negativa fu Sophus Lie che, come ricorda Kuen, si occupò di questa classe di superficie a partire dalla fine degli anni '70. Nel primo lavoro [44] determinò le linee di curvatura principali nonché le linee asintotiche sulle superficie a curvatura costante negativa, trovando per le corrispondenti equazioni differenziali i rispettivi fattori integranti. Osserviamo che in questo lavoro Lie si servì di un risultato di Enneper [29], relativo alla forma particolare che l'elemento di lunghezza assume quando le curve coordinate a u e v costante sono curve asintotiche:

$$ds^2 = E(u)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(v)dv^2,$$

in cui due degli elementi della prima forma fondamentale dipendono solo da una delle coordinate Gaussianne sulla superficie. Nel secondo lavoro [45] Lie riduce

il problema della determinazione di tutte le superficie a curvatura costante, a quello di trovare immagini sferiche nella rappresentazione di Gauss delle curve asintotiche dotate della proprietà di ripartire la superficie sferica in regioni "rettangolari" aventi diagonali congruenti. Come accadeva diverse volte, ai matematici più in vista che pubblicavano su riviste poco accessibili era chiesto di pubblicare un sunto dei loro lavori che contenesse i risultati principali da loro ottenuti. Lie inviò il riassunto dei due lavori [44] e [45] al *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* dove dovette riconoscere che molti dei risultati presentati in [45] erano stati ottenuti da Ulisse Dini [26]. Al contrario, Lie si accorse subito del lavoro di Bianchi che è alla base delle successive due memorie sulle superficie a curvatura costante e negativa [46], [47]. Il legame tra Lie e Bianchi è indotto, in un certo senso, dai lavori di Weingarten, grazie ai quali Lie osservò la possibilità di ridurre alle quadrature il problema di determinare le geodetiche su una superficie complementare di una data superficie a curvatura costante negativa. Con ciò, osserva Lie, la determinazione di superficie a curvatura costante non richiederebbe più l'integrazione di un'equazione differenziale. Riprendendo un'osservazione dello stesso Bianchi, Lie [46, pp. 282–283] procedette affermando:

Sorge pertanto la domanda, già posta da Bianchi, se grazie all'applicazione successiva della sua operazione sulla pseudosfera o, mi si permetta di dirlo con più generalità, su una superficie a curvatura costante scelta a piacere, sia possibile ottenere ogni altra superficie dello stesso tipo, una domanda fondamentale per la teoria di queste superficie. Preciso questa domanda in questo modo:

Sia assegnata una superficie a curvatura costante, cioè una superficie integrale dell'equazione

$$s^2 - rt = \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{a^2}.$$

Pongo la domanda se quelle superficie a curvatura costante che si ottengono da quella data ripetendo un numero infinito di volte l'operazione **di Bianchi** debbono soddisfare anche ad un'altra equazione differenziale, oltre all'equazione

$$s^2 - rt = \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{a^2}.$$

Nella prima delle note del 1880, [46] Lie non riesce a rispondere completamente alla domanda posta ma vi riuscirà nella memoria [47] pubblicata poco dopo, fornendo risposta negativa al quesito posto. Non vi è modo di entrare nel dettaglio delle memorie di Lie, che completerà la serie di lavori dedicati alle superficie a curvatura costante nel 1881 con la memoria [48]; qui ci limitiamo ad osservare che già a partire da [46], Lie si accorse che l'operazione di Bianchi condotta a partire da una pseudosfera conduceva ad una superficie del tipo studiato da Enneper.

Conclusione

Il percorso ricostruito in questo elaborato mostra come la nascita della geometria iperbolica rappresenti uno dei processi più complessi e significativi della storia della matematica. Lungi dall'essere il risultato di una scoperta improvvisa, essa emerge al termine di una lunga riflessione critica sui fondamenti della geometria euclidea sviluppatasi attorno al problema del V postulato. I tentativi di dimostrazione che si susseguirono, dall'antichità fino all'età moderna, ebbero infatti l'effetto paradossale di mettere progressivamente in discussione proprio quell'unicità della geometria euclidea che intendevano difendere. In questa prospettiva, figure come Khayyām, Lambert e soprattutto Giovanni Girolamo Saccheri contribuirono a costruire gli strumenti concettuali che avrebbero reso possibile la rivoluzione matematica del XIX secolo.

In tale contesto, il contributo di Eugenio Beltrami assume un significato che trascende il problema specifico della geometria di Lobačevskij. Attraverso l'impiego della teoria delle superfici a curvatura costante negativa, egli rese possibile il passaggio da una geometria percepita come una costruzione puramente formale ad una teoria con un preciso contenuto matematico, dotata di un *substrato reale* in cui manifestarsi. La rilevanza del suo lavoro non va pertanto individuata nell'introduzione di modelli della geometria iperbolica, ma nell'aver mostrato che la validità di una teoria geometrica non dipende dalla sua immediata rappresentabilità intuitiva bensì dalla sua coerenza interna e dalla struttura delle relazioni che la definiscono.

Le riflessioni sviluppate da Beltrami, e successivamente approfondite alla luce delle idee di Riemann, contribuiscono inoltre a chiarire una trasformazione più generale che caratterizza la matematica della seconda metà dell'Ottocento: il progressivo passaggio da una concezione della geometria come scienza dello spazio fisico a una concezione della geometria come studio di strutture astratte. La curvatura diviene così l'elemento unificante capace di ricondurre geometrie apparentemente diverse entro un quadro teorico più ampio, nel quale i casi euclideo, sferico e iperbolico appaiono come manifestazioni particolari di un medesimo costruito teorico.

Proprio in questo passaggio emerge uno dei temi più significativi dell'intera tesi: la variazione del rapporto tra intuizione e rappresentazione geometrica. Se la geometria classica poteva ancora appoggiarsi a una percezione immediata dello spazio, le nuove geometrie richiedevano strumenti concettuali e visuali in grado di rendere accessibili strutture sempre più astratte. È in questo contesto che assume particolare importanza il ruolo dei modelli materiali. L'analisi dei modelli materiali mostra come tale evoluzione non abbia comportato l'abban-

dono dell'intuizione geometrica. Al contrario, la materializzazione di superfici pseudosferiche e di altri oggetti legati alla geometria differenziale testimonia il tentativo di elaborare nuove forme di visualizzazione adeguate ai problemi emergenti.

Da questo punto di vista, la Collezione dei Modelli Matematici dell'Università di Pavia non costituisce soltanto una testimonianza storica della didattica matematica tra Otto- e Novecento, ma rappresenta una traccia concreta del ruolo che i modelli ebbero nella produzione stessa della conoscenza geometrica. In questo quadro, la figura di Beltrami riacquista un ruolo centrale. La realizzazione della cosiddetta *Cuffia di Beltrami* mostra infatti come la costruzione materiale potesse diventare parte integrante dell'attività scientifica. I modelli non diventavano quindi semplici illustrazioni di risultati già acquisiti, ma strumenti attraverso cui verificare intuizioni, formulare nuove domande e consolidare relazioni tra differenti ambiti della matematica. Essi rappresentavano il tentativo di ristabilire un rapporto tra realtà e teoria proprio nel momento in cui la geometria si stava avviando verso livelli sempre maggiori di astrazione.

L'opera di Luigi Bianchi conferma inoltre che la stagione aperta da Beltrami non si esaurì nella legittimazione della geometria non euclidea. Le ricerche sulle trasformazioni delle superfici pseudosferiche e sulle superfici a curvatura costante negativa mostrano infatti come le idee pionieristiche di Beltrami siano state trasformate in un ampio programma di ricerca, capace di generare nuovi problemi, nuovi metodi risolutivi e nuove rappresentazioni. In questa prospettiva emerge con chiarezza il ruolo svolto dalla scuola geometrica italiana nella costruzione della geometria differenziale moderna e nella circolazione internazionale delle idee matematiche tra XIX e XX secolo. I modelli conservati a Pavia relativi alle superfici realizzate da Beltrami, Bacharach e Kuen costituiscono ancora oggi una testimonianza tangibile di questo sviluppo.

Nel loro insieme, le vicende ricostruite in questo lavoro mostrano come la storia della geometria iperbolica non possa essere interpretata soltanto come la storia di una rivoluzione teorica. Essa è anche la storia di una complessa rete di relazioni tra matematici, istituzioni, strumenti e pratiche di ricerca. Il caso pavese appare particolarmente significativo proprio perché consente di osservare simultaneamente tutte queste dimensioni: dalla riflessione fondazionale di Saccheri alla legittimazione matematica operata da Beltrami, fino alla produzione e conservazione dei modelli che accompagnarono l'evoluzione della geometria differenziale.

Le considerazioni sviluppate nel corso di questo lavoro suggeriscono infine che la principale eredità della geometria non euclidea risieda nella trasformazione del concetto stesso di geometria. Il riconoscimento della legittimità di spazi caratterizzati da differenti proprietà metriche e differenti curvature rese possibile una concezione più ampia della disciplina, nella quale il problema non è più individuare l'unica geometria dello spazio fisico, ma comprendere le strutture e le relazioni che definiscono molteplici geometrie possibili. Questo cambiamento di prospettiva ebbe conseguenze che superarono i confini della matematica stessa, offrendo gli strumenti concettuali necessari per la formulazione di nuove teorie fisiche dello spazio e del tempo. Le geometrie sviluppate nel corso dell'Ottocento e la successiva formalizzazione degli spazi curvi costituirono in-

fatti un presupposto fondamentale per le teorie della relatività generale, nelle quali la struttura geometrica dello spazio-tempo assume un ruolo centrale nella descrizione dei fenomeni fisici. È all'interno di questo mutamento concettuale che si collocano tanto il contributo teorico di Beltrami quanto il valore storico e scientifico dei modelli conservati a Pavia, aspetti complementari di una stagione della matematica che ha profondamente ridefinito il modo di pensare lo spazio e le sue rappresentazioni.

Appendice A

Gli *Elementi* di Euclide: le prime ventisei proposizioni del libro I

Come abbiamo già sottolineato, gli *Elementi* di Euclide furono un testo fondamentale per quasi due millenni. In questa sezione ricordiamo, dopo una breve panoramica dell'opera, le prime ventisei proposizioni del libro I: tali risultati sono quelli che Saccheri pone a fondamento del proprio testo *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Le proposizioni di questa sezione sono tratte da [31].

All'interno degli *Elementi* possiamo individuare alcuni blocchi tematici [64]:

- I libri I-IV sono dedicati alla geometria piana e contengono tutti i risultati che non necessitano della teoria delle proporzioni per essere dimostrati. Nel libro I vengono enunciati i principi della teoria e i risultati legati alla congruenza dei triangoli, oltre alla teoria delle parallele e all'equivalenza dei poligoni, fino ad arrivare al teorema di Pitagora e al teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo. Il libro II contiene i risultati che possono essere considerati a posteriori come teoremi di algebra elementare: viene affrontata la quadratura dei poligoni e il teorema di Carnot o teorema del coseno. Il libro III si occupa delle proprietà delle circonferenze e nel libro IV si considerano invece i risultati legati ai poligoni regolari.
- I libri V e VI si occupano della teoria delle proporzioni e della sua applicazione alla geometria piana, sviluppando la similitudine tra poligoni.
- I libri VII-IX trattano di aritmetica, intesa come teoria dei numeri interi (si trova in questi libri il teorema sull'infinità dei numeri primi).
- Il libro X contiene la classificazione degli irrazionali quadratici, cioè degli irrazionali che risolvono un'equazione di secondo grado a coefficienti interi.
- I libri XI-XIII hanno per oggetto la geometria solida e in particolare la costruzione dei solidi platonici.

Ecco le prime ventisei proposizioni.

Proposizione I.1. Su una retta terminata costruire un triangolo equilatero.

Proposizione I.2. Applicare ad un punto dato una retta uguale ad una retta data.

Proposizione I.3. Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore.

Proposizione I.4. Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati ed hanno uguali gli angoli compresi fra i lati uguali, avranno anche la base uguale alla base, il triangolo sarà uguale al triangolo, e gli angoli rimanenti [del primo], opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti [del secondo].

Proposizione I.5. Nei triangoli isosceli gli angoli alla base sono uguali fra loro, e venendo prolungati i lati uguali gli angoli sotto la base saranno [pure] uguali fra loro.

Proposizione I.6. Se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro, anche i lati opposti agli angoli uguali saranno uguali fra loro.

Proposizione I.7. Su una retta data e da ciascun suo estremo si conducano due rette che si incontrano in un punto; non è possibile costruire con gli stessi estremi e dalla stessa parte altre due rette rispettivamente uguali a quelle prima costruite ed aventi un diverso punto d'incontro.

Proposizione I.8. Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati ed hanno anche la base uguale alla base, avranno uguali anche gli angoli compresi dai lati uguali.

Proposizione I.9. Dividere per metà un angolo rettilineo dato.

Proposizione I.10. Dividere per metà una retta terminata data.

Proposizione I.11. Su una retta data, da un punto dato su essa, innalzare una linea retta perpendicolare.

Proposizione I.12. Ad una data retta illimitata, da un punto dato ad essa esterno, condurre una linea retta perpendicolare.

Proposizione I.13. Se una retta innalzata su un'altra retta forma degli angoli, essa verrà a formare o due angoli retti od angoli la cui somma è uguale a due retti.

Proposizione I.14. Se per un punto di una retta, da parti opposte rispetto ad essa, si tracciano due altre rette, e queste formano con la prima angoli adiacenti la cui somma sia uguale a due retti, esse saranno per diritto fra loro.

Proposizione I.15. Se due rette si tagliano fra loro, formano gli angoli opposti al vertice tra loro uguali.

Proposizione I.16. In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti.

Proposizione I.17. In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.

Proposizione I.18. In ogni triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore.

Proposizione I.19. In ogni triangolo, ad angolo maggiore è opposto lato maggiore.

Proposizione I.20. In ogni triangolo la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente.

Proposizione I.21. Se su uno dei lati di un triangolo, a partire dagli estremi, si costruiscono due rette che si incontrino internamente al triangolo stesso, le rette così costruite, sommate assieme, saranno [complessivamente] minori dei due rimanenti lati del triangolo pure sommati assieme, ma verranno a comprendere un angolo maggiore.

Proposizione I.22. Con tre rette uguali a tre rette date, costruire un triangolo: occorre dunque che la somma di due di esse, comunque prese, sia maggiore della rimanente (Proposizione I.20).

Proposizione I.23. Costruire su una retta data, e [con vertice] in un [dato] punto di essa, un angolo rettilineo uguale ad un angolo rettilineo dato.

Proposizione I.24. Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente, avranno anche la base maggiore della base.

Proposizione I.25. Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno la base maggiore della base, avranno anche l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente.

Proposizione I.26. Se due triangoli hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli ed un lato uguale ad un lato, o quello [adiacente] agli angoli uguali o quello che è opposto ad uno degli angoli uguali, essi avranno anche i lati rimanenti uguali rispettivamente ai lati rimanenti, e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente.

Indichiamo anche le Proposizioni 27, 28 e 29 del libro I, che costituiscono, come detto nella Sezione 1.1, la teoria delle parallele sviluppata da Euclide.

Proposizione I.27. Se una retta che venga a cadere su altre due rette forma gli angoli alterni uguali fra loro, le due rette saranno fra loro parallele.

Proposizione I.28. Se una retta che cada su due rette forma l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto e che è dalla stessa parte, oppure angoli interni, dalla stessa parte, la cui somma sia uguale a due retti, le rette saranno parallele fra loro.

Proposizione I.29. Una retta che cada su rette parallele forma gli angoli alterni uguali fra loro, l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto, ed angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti.

Appendice B

Le *Disquisitiones generales* di Gauss

Le *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, presentate da Gauss all'Accademia delle Scienze di Gottinga nel 1827 e pubblicate nel 1828, rappresentano uno dei lavori più importanti della geometria differenziale moderna. In quest'opera Gauss sviluppò in forma sistematica una teoria della curvatura delle superfici che superava definitivamente la concezione puramente estrinseca ereditata dalla geometria classica, con l'obiettivo non soltanto di descrivere una superficie come immersa nello spazio tridimensionale, ma individuare proprietà che appartenessero alla superficie stessa indipendentemente dal modo in cui essa fosse collocata nello spazio. Tale impostazione culminò nella formulazione del celebre *Theorema Egregium*, uno dei risultati più profondi dell'intera storia della matematica. Le *Disquisitiones* sono articolate in ventinove articoli che possono essere suddivisi in cinque nuclei principali: una parte introduttiva dedicata alla definizione della curvatura e agli strumenti analitici necessari al suo studio (§§ 1-8); la dimostrazione del *Theorema Egregium* e la formulazione intrinseca della teoria delle superfici (§§ 9-13); lo studio delle geodetiche (§ 14); la teoria dei triangoli geodetici, con in particolare lo studio dell'eccesso e del difetto angolare (§§ 15-20); infine, alcune applicazioni alla geodesia (§§ 21-29). Nel loro insieme esse segnano la nascita della geometria intrinseca [64, p. 260].

B.1 La rappresentazione delle superfici

Dopo aver introdotto la nozione di piano tangente e la condizione di ortogonalità tra la normale alla superficie e gli spostamenti infinitesimi tangenti, Gauss affronta il problema di descrivere analiticamente una superficie curva. Nelle *Disquisitiones* egli presenta diversi metodi equivalenti di rappresentazione, soffermandosi in particolare su quello relativi alla parametrizzazione locale della superficie.

Sia assegnata una superficie e siano p e q due variabili indipendenti idonee a individuare i suoi punti. Le coordinate cartesiane di un punto della superficie

possono allora essere espresse come funzioni di tali parametri:

$$x = x(p, q), \quad y = y(p, q), \quad z = z(p, q). \quad (\text{B.1})$$

Le quantità p e q , dette *coordinate gaussiane*, permettono di descrivere gli spostamenti infinitesimi mediante le relazioni [64, p. 261]

$$dx = a dp + a' dq, \quad dy = b dp + b' dq, \quad dz = c dp + c' dq, \quad (\text{B.2})$$

dove

$$a = \frac{\partial x}{\partial p}, \quad a' = \frac{\partial x}{\partial q}, \quad b = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad b' = \frac{\partial y}{\partial q}, \quad c = \frac{\partial z}{\partial p}, \quad c' = \frac{\partial z}{\partial q}. \quad (\text{B.3})$$

Queste relazioni descrivono come varia la posizione di un punto quando ci si muove infinitesimamente lungo le due famiglie di curve coordinate a p o q costanti. Le derivate rispetto a p e q identificano due direzioni tangenti fondamentali alla superficie nel punto considerato.

Gauss utilizza questa rappresentazione per determinare l'orientazione della normale alla superficie: se (X, Y, Z) sono i coseni direttori della normale unitaria¹, la condizione di ortogonalità tra la normale e tutti gli spostamenti tangenti implica che valga

$$X dx + Y dy + Z dz = 0. \quad (\text{B.4})$$

Sostituendo allora le espressioni differenziali precedenti e osservando che la relazione deve valere per qualunque scelta di dp e dq , si ottiene il sistema [64, p. 262]

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = 0, \\ a'X + b'Y + c'Z = 0. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

La normale risulta dunque ortogonale ai due vettori tangenti associati alle coordinate p e q , cioè è parallela al loro prodotto vettoriale. Gauss ricava infatti che i coseni direttori della normale sono proporzionali alle quantità [64, p. 262]

$$bc' - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba' \quad (\text{B.6})$$

e, dopo opportuna normalizzazione, ottiene che tali espressioni forniscono le componenti della normale unitaria alla superficie.

L'introduzione delle coordinate (p, q) permette a Gauss di sviluppare tutta la teoria successiva della curvatura; infatti, le curve individuate da $p = \text{cost.}$ e $q = \text{cost.}$ definiscono una rete di coordinate intrinseca alla superficie grazie alla quale diventano calcolabili le lunghezze, le aree e, soprattutto, la misura della curvatura. Sarà proprio a partire da questa parametrizzazione che Gauss introdurrà i coefficienti E, F, G , dai quali deriva l'espressione dell'elemento

¹I coseni direttori di un vettore unitario sono i coseni degli angoli che esso forma con gli assi coordinati di riferimento; se $\mathbf{n} = (X, Y, Z)$ è la normale unitaria a una superficie, allora X, Y e Z rappresentano, rispettivamente, i coseni degli angoli che $\mathbf{n}$ forma con gli assi x, y e z . Essendo $\mathbf{n}$ un versore, tali quantità soddisfano la relazione $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$.

lineare ds^2 , ossia la prima forma fondamentale della superficie.

B.2 La prima forma fondamentale

La prima forma fondamentale descrive la geometria metrica della superficie, cioè il modo in cui vengono misurate lunghezze, angoli ed aree. Essa nasce dall'espressione dell'elemento lineare

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (\text{B.7})$$

che rappresenta il quadrato della distanza tra due punti della superficie a distanza infinitesima; sostituendo le espressioni differenziali delle coordinate presenti in (B.2) e raccogliendo i termini si ottiene [64, p. 265]

$$ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2, \quad (\text{B.8})$$

dove²

$$\begin{aligned} E &= a^2 + b^2 + c^2, \\ F &= aa' + bb' + cc', \\ G &= a'^2 + b'^2 + c'^2. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Le quantità E , F e G dipendono in generale dalla posizione in cui vengono calcolate e costituiscono i coefficienti di quella che oggi viene chiamata *prima forma fondamentale*.

L'importanza di questo oggetto è straordinaria: conoscendo esclusivamente E , F e G è infatti possibile determinare la lunghezza di una curva tracciata sulla superficie, l'angolo tra due direzioni tangenti, l'area di una porzione di superficie, le equazioni delle geodetiche e la struttura metrica intrinseca della superficie. Dal punto di vista geometrico, le quantità $\sqrt{E} dp$ e $\sqrt{G} dq$ rappresentano gli elementi di lunghezza lungo le curve coordinate a q costante e p costante, rispettivamente; inoltre, il coefficiente misto F misura il grado di non ortogonalità delle coordinate: infatti, se ω indica l'angolo tra le curve coordinate, vale $\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$. L'elemento di area infinitesimo associato alla parametrizzazione risulta invece $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dp dq$.

Nelle *Disquisitiones* Gauss attribuisce alla prima forma fondamentale un ruolo centrale: egli osserva che essa costituisce l'espressione più generale della natura di una superficie. Due superfici che hanno la stessa prima forma fondamentale sono isometriche. Questa idea rappresenta l'aspetto più rivoluzionario dell'opera di Gauss: la superficie è considerata attraverso le sue relazioni metriche interne riassunte nella prima forma fondamentale.

²Introducendo il vettore posizione $\mathbf{r}(p, q) = (x(p, q), y(p, q), z(p, q))$ e i vettori tangenti $\mathbf{r}_p = (a, b, c)$ e $\mathbf{r}_q = (a', b', c')$, i coefficienti E , F , G possono essere espressi in forma compatta mediante i prodotti scalari: $E = \langle \mathbf{r}_p, \mathbf{r}_p \rangle$, $F = \langle \mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q \rangle$, $G = \langle \mathbf{r}_q, \mathbf{r}_q \rangle$.

B.3 La seconda forma fondamentale

Se la prima forma fondamentale descrive la metrica interna della superficie, la seconda forma fondamentale misura il comportamento della superficie rispetto allo spazio ambiente.

A partire dai coseni direttori della normale unitaria alla superficie X, Y, Z , dipendenti in generale dalle coordinate gaussiane (p, q) , è possibile determinare la curvatura della superficie. Indicando con $\mathbf{n} = (X, Y, Z)$ la normale unitaria e con $\mathbf{r}_p = (a, b, c)$, $\mathbf{r}_q = (a', b', c')$ i vettori tangenti alle curve coordinate, sono introdotte tramite prodotto scalare le quantità

$$L = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial p^2}, \mathbf{n} \right\rangle, \quad M = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial p \partial q}, \mathbf{n} \right\rangle, \quad N = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^2}, \mathbf{n} \right\rangle, \quad (\text{B.10})$$

che misurano la componente normale delle derivate seconde della parametrizzazione e descrivono il modo in cui la superficie si allontana dal proprio piano tangente nelle varie direzioni. Le tre quantità L, M ed N costituiscono i coefficienti della *seconda forma fondamentale*:

$$II = L dp^2 + 2M dp dq + N dq^2. \quad (\text{B.11})$$

Mentre la prima forma fondamentale dipende esclusivamente dai vettori tangenti alla superficie, la seconda forma fondamentale coinvolge esplicitamente anche la normale e fornisce una misura della curvatura della superficie nello spazio; per questo motivo essa viene interpretata come lo strumento che descrive le proprietà estrinseche della superficie. Il significato geometrico della seconda forma fondamentale emerge considerando una direzione tangente arbitraria individuata dai differenziali dp e dq : in tale direzione, la curvatura normale della superficie è data dal rapporto

$$k_n = \frac{L dp^2 + 2M dp dq + N dq^2}{E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2}, \quad (\text{B.12})$$

nel quale compaiono simultaneamente la seconda e la prima forma fondamentale. Le direzioni per cui questa quantità assume il valore massimo e minimo sono dette *direzioni principali*, mentre i corrispondenti valori estremi k_1 e k_2 sono le *curvature principali* della superficie.

La seconda forma fondamentale svolge dunque un ruolo essenziale nello studio locale delle superfici: essa permette di determinare le curvature principali e le direzioni principali e, inoltre, fornisce una formula per il calcolo della curvatura gaussiana. Proprio l'analisi delle relazioni tra prima e seconda forma fondamentale, in più, conduce al *Theorema Egregium*, il risultato che rende le *Disquisitiones* una delle opere più importanti della matematica.

B.4 La misura di curvatura di una superficie

Dopo aver introdotto la nozione di normale a una superficie, Gauss affronta il problema di definire la sua curvatura. Egli considera un elemento infinitesimo

di area della superficie e l'elemento corrispondente sulla sfera ottenuto tramite l'applicazione normale: la misura di curvatura viene quindi definita come il rapporto tra tali aree infinitesime [64, p. 263].

Indicando con $d\sigma$ un elemento di area della superficie e con $d\Sigma$ l'elemento corrispondente sulla sfera unitaria, si ha

$$K = \frac{d\Sigma}{d\sigma}. \quad (\text{B.13})$$

Gauss distingue questa quantità dalla curvatura totale di una regione superficiale, ottenuta integrando la misura di curvatura sull'intera area considerata [64, p. 263]:

$$K_I = \int K d\sigma. \quad (\text{B.14})$$

Nel caso particolare in cui la superficie sia rappresentata localmente dall'equazione $z = z(x, y)$, posti

$$t = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad u = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad T = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad U = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad V = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad (\text{B.15})$$

Gauss ottiene la formula [64, p. 264]

$$K = \frac{TV - U^2}{(1 + t^2 + u^2)^2}. \quad (\text{B.16})$$

Successivamente, egli considera un sistema di riferimento scelto lungo le direzioni principali della superficie, facendo in tal modo scomparire il termine misto e ottenendo l'espressione

$$K = TV. \quad (\text{B.17})$$

Poiché T e V coincidono con le curvature principali, la misura di curvatura risulta uguale al loro prodotto: se R_1 e R_2 indicano i raggi di curvatura principali, Gauss mostra infatti che

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = k_1 k_2. \quad (\text{B.18})$$

La misura di curvatura della superficie in un punto, dunque, coincide con il prodotto delle due curvature principali³.

B.5 Il *Theorema Egregium*

Gauss giunge, a questo punto, a uno dei risultati più profondi delle *Disquisitiones*. Dal momento che la curvatura può essere espressa esclusivamente mediante i coefficienti E , F e G della prima forma fondamentale e le loro derivate, Gauss osserva che non è più necessario conoscere esplicitamente le funzioni $x(p, q)$, $y(p, q)$ e $z(p, q)$ che determinano la superficie per dedurre le proprietà metriche

³La curvatura, con la notazione precedentemente adottata, può essere anche espressa come $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$, mettendo in relazione i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

della stessa, ma è sufficiente conoscere l'elemento lineare ds^2 . Ciò acquista particolare rilievo quando si considerano due superfici sviluppabili l'una sull'altra [64, p. 265]:

È però evidente, dalla stessa nozione di *sviluppo* di una superficie su un'altra che gli elementi corrispondenti in entrambe le superficie sono necessariamente uguali e pertanto si verifica identicamente

$$E = E' \quad F = F' \quad G = G'. \quad (\text{B.19})$$

Questa osservazione permette a Gauss di formulare quello che definisce un teorema *egregium* [64, p. 265]:

[Teorema Egregium] Se una superficie curva è sviluppata su un'altra superficie, la misura di curvatura nei punti singoli resta invariata.

Se due superfici possono essere sviluppate l'una sull'altra senza stiramenti né lacerazioni, gli elementi lineari corrispondenti coincidono e quindi risultano identici anche i coefficienti E , F e G . Poiché la curvatura gaussiana può essere espressa esclusivamente mediante tali coefficienti, essa deve rimanere invariata durante la deformazione. Il risultato mostra inoltre che la curvatura gaussiana non dipende dalla particolare immersione della superficie nello spazio, ma soltanto dalla sua struttura metrica interna. La curvatura risulta pertanto una proprietà intrinseca della superficie.

B.6 Geodetiche, coordinate geodetiche e triangoli geodetici

Dopo aver stabilito la natura intrinseca della curvatura, Gauss rivolge la propria attenzione alle geodetiche, ottenendone l'equazione differenziale. Lo studio delle geodetiche non costituisce, tuttavia, soltanto un problema autonomo: esso diventa lo strumento principale per costruire sistemi di coordinate particolarmente adatti all'analisi geometrica delle superfici.

A partire da un punto assegnato della superficie, Gauss considera infatti le geodetiche a cui esso appartiene e introduce le cosiddette *coordinate polari geodetiche*: in tale sistema, una coordinata rappresenta la distanza geodetica dal punto fissato, mentre l'altra individua la direzione iniziale della geodetica sul piano tangente. Una proprietà fondamentale dimostrata nelle *Disquisitiones* è che le curve ottenute mantenendo costante la distanza geodetica risultano ortogonali alle geodetiche che le generano [64, p. 268].

L'utilità di queste coordinate risiede nelle notevoli semplificazioni che esse introducono nell'espressione dell'elemento lineare e della misura di curvatura: grazie a tale formalismo, Gauss riesce a collegare la curvatura di una superficie alle proprietà metriche dei triangoli geodetici tracciati su di essa. In particolare, se α , β e γ indicano gli angoli interni di un triangolo geodetico, egli dimostra che [64, p. 270]:

$$\iint_{ABC} K d\sigma = \alpha + \beta + \gamma - \pi, \quad (\text{B.20})$$

stabilendo che l'eccesso o il difetto della somma degli angoli rispetto al valore euclideo π è determinato dalla curvatura integrale della regione racchiusa dal triangolo. Tale risultato estende alla geometria delle superfici il *teorema di Girard-Cavalieri* sull'eccesso sferico e mette in luce il legame profondo tra proprietà locali della curvatura e proprietà globali delle figure tracciate sulla superficie.

Nell'ultima parte delle *Disquisitiones*, motivata da problemi di geodesia terrestre, Gauss introduce un ulteriore sistema di coordinate, oggi note come *coordinate geodetiche parallele*, e generalizza un celebre teorema di Legendre sui piccoli triangoli sferici. Egli mostra come gli angoli di un piccolo triangolo geodetico differiscano da quelli del corrispondente triangolo piano di quantità determinate dalla curvatura nei vertici del triangolo stesso. Con questi risultati le *Disquisitiones* si concludono collegando in modo organico curvatura, geodetiche e misure geodetiche, fornendo il quadro teorico che costituirà il punto di partenza per gli sviluppi successivi della geometria differenziale del XIX secolo.

Appendice C

I fondamenti della geometria di Hilbert

Alla fine del XIX secolo, l'emergere delle geometrie non euclidee impose una radicale revisione dei fondamenti della geometria, evidenziando le mancanze logiche dell'impianto euclideo e l'insostenibilità di un approccio fondato sull'intuizione visiva, ormai ritenuto inadeguato a garantire il rigore formale. In questo contesto, David Hilbert (1862-1943) pubblicò nel 1899 i *Grundlagen der Geometrie*¹, sancendo il definitivo superamento dell'assiomatica materiale a favore di una prospettiva puramente formale: egli si pone l'esplicito obiettivo di risolvere le lacune del precedente impianto logico euclideo, riguardanti soprattutto l'ordinamento (già individuate da Moritz Pasch) e la continuità (come indicato da Richard Dedekind), e di rifondare la geometria come un sistema ipotetico-deduttivo puro e autosufficiente.

Nell'opera di Hilbert, i concetti primitivi perdono qualsiasi ancoraggio all'intuizione spaziale e assumono il ruolo di enti sintattici definiti in modo implicito e univoco dalle relazioni create dagli assiomi stessi, che vengono organizzati in gruppi secondo una nuova catalogazione: incidenza (o collegamento), ordinamento, congruenza, parallelismo e continuità. Nel superare il suo obiettivo programmatico, infine, Hilbert dimostra la coerenza relativa del sistema, sfruttando i modelli cartesiani e stabilendo l'indipendenza logica dei singoli assiomi. Indichiamo di seguito l'impianto assiomatico proposto nel lavoro di Hilbert, facendo riferimento a [20].

I concetti primitivi del sistema sono: Punti, Rette, Piani, Giacere, Contenere, Stare tra, Congruenza.

Gli assiomi sono organizzati in 5 gruppi:

- (A) **assiomi di incidenza o collegamento** (8 assiomi): hanno il compito di stabilire le relazioni di base;
- (B) **assiomi di ordinamento** (4 assiomi): forniscono le regole della relazione "tra", garantendo che la retta sia una linea costituita da infiniti punti ordinati;

¹Fondamenti della geometria

- (C) **assiomi di congruenza** (5 assiomi): definiscono le nozioni di congruenza per segmenti e angoli, permettendo di trasportarli e confrontarli;
- (D) **assioma di parallelismo** (1 assioma): formalizza il postulato euclideo delle parallele;
- (E) **assiomi di continuità** (2 assiomi): includono gli assiomi realizzati da Archimede e Dedekind.

Elenchiamo tutti gli assiomi, mantenendo l'organizzazione in gruppi:

- Assiomi di incidenza:
 - (A1) per ogni coppia di punti distinti A, B esiste una retta che li contiene entrambi;
 - (A2) per ogni coppia di punti distinti A, B non esiste più di una retta che li contiene entrambi;
 - (A3) esistono almeno due punti su una retta. Esistono almeno tre punti che non giacciono su una retta²;
 - (A4) per ogni terna di punti A, B, C che non giacciono sulla stessa retta esiste un piano α che li contiene tutti e tre. Per ogni piano esiste un punto che vi giace;
 - (A5) per ogni terna di punti A, B, C che non giacciono sulla stessa retta non esiste più di un piano che li contiene tutti e tre;
 - (A6) se due punti A, B di una retta a giacciono in un piano α allora ogni punto di a giace sul piano α ;
 - (A7) se due piani α, β hanno un punto A in comune allora hanno almeno un altro punto B in comune;
 - (A8) esistono almeno quattro punti che non giacciono in un piano.
- Assiomi di ordinamento:
 - (B1) se un punto B giace tra un punto A e un punto C allora i punti A, B, C sono tre punti distinti di una retta, e B giace a sua volta tra C ed A ;
 - (B2) per ogni coppia di punti A, C , esiste almeno un punto B sulla retta AC tale che C giace tra A e B ;
 - (B3) per ogni terna di punti su una retta ne esiste uno solo che giace tra gli altri due³;
 - (B4) (Assioma di Pasch) siano A, B, C tre punti che non giacciono sulla stessa retta e sia a una retta nel piano ABC che non contiene nessuno dei tre punti A, B, C . Se la retta passa per un punto del segmento

²Gli assiomi A1-A3 riguardano solo i punti e le rette e costituiscono il primo gruppo di assiomi della geometria elementare piana.

³Gli assiomi B1-B3 si dicono assiomi lineari di ordinamento: essi consentono di dare la definizione di segmento, di punti interni del segmento e di estremi del segmento.

AB , passa anche per un punto del segmento AC , oppure per un punto del segmento BC ⁴.

- Assiomi di congruenza:

(C1) se A, B sono due punti su una retta a , ed A' è un punto sulla stessa o su un'altra retta a' allora è sempre possibile trovare un punto B' da una certa parte assegnata della retta a' tale che AB e $A'B'$ siano congruenti;

(C2) se un segmento $A'B'$ ed un segmento $A''B''$ sono congruenti allo stesso segmento AB , allora i segmenti $A'B'$ ed $A''B''$ sono congruenti l'uno all'altro;

(C3) siano AB e BC due segmenti su una retta a che abbiano in comune il solo punto B . Inoltre, sulla stessa retta o su un'altra retta a' , siano $A'B'$ e $B'C'$ due segmenti che abbiano in comune il solo punto B' . Se $AB = A'B'$ e $BC = B'C'$, allora $AC = A'C'$ ⁵;

(C4) se $\angle ABC$ è un angolo e se $B'C'$ è una semiretta, allora esiste esattamente una semiretta $B'A'$ da ciascuna parte della $B'C'$ tale che $\angle A'B'C' = \angle ABC$. Inoltre ogni angolo è congruente a sé stesso⁶;

(C5) se per due triangoli $\triangle ABC$ ed $\triangle A'B'C'$ valgono le congruenze $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\angle BAC = \angle B'A'C'$, allora è verificata la congruenza $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ ⁷.

- Assiomi di continuità:

(D1) (Assioma di Archimede) se AB e CD sono segmenti, allora esiste un numero n tale che n copie di CD costruite con contiguità da A lungo la semiretta AB oltrepasseranno il punto B ⁸;

(D2) (Assioma di completezza della retta) non esiste una estensione di una retta con il suo ordine e le sue relazioni di congruenza che conservi le relazioni esistenti tra gli elementi originali così come le proprietà fondamentali dell'ordine e della congruenza⁹.

⁴Grazie agli assiomi B1-B4 è possibile dare senso alla nozione di ordine dei punti su una retta ed è possibile fornire la definizione di di linea poligonale, di triangolo e, più generalmente, di poligono.

⁵Si può introdurre a questo punto la definizione di angolo: due semirette h, k uscenti da un medesimo punto O e non appartenenti a una medesima retta costituiscono un angolo.

⁶Gli assiomi C1 e C4 sono anche detti del trasporto di segmenti ed angoli.

⁷L'assioma C5 stabilisce un legame tra la congruenza dei segmenti e degli angoli; in particolare, da esso seguono quelli che vanno sotto il nome di *criteri di congruenza dei triangoli*.

⁸L'assioma D1 consente di confrontare tra loro i segmenti attraverso l'uso di un'unità di misura e di sviluppare un procedimento di misura basato su approssimazioni razionali; tuttavia, per associare univocamente a ogni segmento una lunghezza espressa da un numero reale positivo è necessario assumere anche un opportuno assioma, come ad esempio D2; l'assioma D1 infatti non è sufficiente, poiché esso vale già nel campo dei numeri razionali, che non è completo.

⁹L'assioma D2 è equivalente, supposti veri tutti gli assiomi precedenti, all'assioma di Dedekind: sia data una qualsiasi retta r nel piano e sia fissato un suo verso di percorrenza, sia (s, t) una partizione di r tale che S precede T per ogni $S \in s$ e per ogni $T \in t$; allora esiste ed è unico il punto P sulla retta, tale che esso sia preceduto da tutti i punti di s , o al più coincida con un punto di s e preceda tutti i punti di t , o al più coincida con un punto di t .

- Assioma di parallelismo:

(E1) se a è una retta ed A un punto che non le appartiene, esiste ed è unica nel piano la retta che passa per A e non interseca a ¹⁰.

Grazie a tale struttura logico-deduttiva è possibile ottenere tutti i risultati della geometria moderna. In particolare, come conseguenza dei gruppi di assiomi A-C, si ricava la teoria delle perpendicolari e il teorema dell'angolo esterno, oltre agli altri teoremi sul confronto tra gli elementi di un triangolo e di due triangoli tra loro; d'altra parte, gli assiomi dei gruppi A-D consentono di introdurre sistemi di coordinate per la retta, il piano e lo spazio. L'introduzione di un sistema di coordinate sulla retta dà poi la possibilità di determinare una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta e l'insieme dei numeri reali: ne consegue che l'insieme dei punti di una retta ha la stessa cardinalità dei numeri reali e che tra l'insieme ordinato dei punti di una retta e l'insieme dei numeri reali esiste una corrispondenza biunivoca che conserva l'ordine (continuità della retta). La possibilità di trasformare una retta in retta numerica mediante l'introduzione di un sistema di coordinate consente anche l'applicazione dell'analisi alla geometria.

Il sistema di proposizioni che si possono dedurre a partire dai soli assiomi A-D, escludendo dunque l'assioma di parallelismo, va sotto il nome di geometria assoluta o neutrale.

Gli assiomi A-E costituiscono, nella loro totalità, il fondamento della geometria euclidea. Se però al sistema assiomatico della geometria neutrale (assiomi dei gruppi A-D) si aggiunge il seguente:

(F1) (Postulato iperbolico) Data una retta r e un punto P esterno ad essa, esistono almeno due rette distinte passanti per P che non incontrano la retta r ,

si ottiene il sistema geometrico che prende il nome di geometria iperbolica. D'altra parte, se al sistema assiomatico della geometria neutrale (assiomi dei gruppi A-D) si aggiunge:

(G1) (Postulato di Riemann) Date due rette qualsiasi in un piano, esse hanno sempre almeno un punto in comune,

si ottiene il sistema geometrico che prende il nome di geometria sferica.

¹⁰Grazie all'assioma E1 si ricava la teoria euclidea delle parallele e, in particolare, il teorema di Pitagora.

Appendice D

Le lettere di Beltrami a Manganotti

Le due lettere qui presentate sono conservate presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Pavia. Si tratta di documenti manoscritti e autografi di Eugenio Beltrami, indirizzati al gesuita Angelo Manganotti e datati rispettivamente 23 maggio 1889 e 9 gennaio 1891.

L'interesse di tali documenti è legato alla figura stessa di Manganotti, il quale ebbe un ruolo fondamentale nella riscoperta dell'*Euclides ab omni naevo vindicatus* di Saccheri. Come riconobbe esplicitamente Beltrami nelle pagine conclusive di [8], fu proprio Manganotti a richiamare la sua attenzione sul trattato settecentesco del gesuita ligure, dando avvio a quel processo di rilettura storica che avrebbe restituito a Saccheri un posto di primo piano nella storia delle geometrie non euclidee.

Le lettere testimoniano, inoltre, l'esistenza di un rapporto scientifico e personale tra i due studiosi. Accanto a considerazioni riguardanti la diffusione degli studi su Saccheri e l'opuscolo che Paul Mansion dedicò alla sua opera [53], vi compaiono riflessioni sui fondamenti dell'analisi infinitesimale, sui metodi geometrici e analitici e sulle difficoltà connesse alla costruzione di una geometria generale. Esse offrono quindi una rara testimonianza diretta dell'ambiente culturale nel quale maturò la rivalutazione ottocentesca di Saccheri e del dialogo che essa suscitò tra matematici e studiosi della Compagnia di Gesù.

Le trascrizioni qui riportate sono state realizzate direttamente a partire dagli originali manoscritti conservati presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia. Nella trascrizione si è cercato di preservare il più possibile le caratteristiche linguistiche e stilistiche dei documenti.

D.1 La lettera del 23 maggio 1889

Lettera autografa di Eugenio Beltrami al Padre Angelo Manganotti, datata Pavia, 23 maggio 1889. Nella missiva Beltrami discute alcune questioni relative alla fisica matematica e alle teorie molecolari, soffermandosi sui limiti dell'analisi infinitesimale nell'interpretazione dei fenomeni fisici e riflettendo sulle difficoltà di una sintesi tra rigore matematico e intuizione fisica.

Pavia, 23 maggio 1889

Chiarissimo Padre Manganotti (1828–1907)

[p. 1] Ho lasciato scorrere qualche giorno prima di rispondere alla pregiatissima sua del 17 perché ho voluto vedere se mi riusciva di soddisfare il di Lei desiderio, circa il *Saggio di interpretazione* etc.; cosa per me non priva di difficoltà, perché con mio molto rossore debbo riconoscere che non sono capace di mantenere l'ordine nelle cose mie, malgrado il molto desiderio che ne avrei. Veramente ero già quasi certo di non trovare più alcun esemplare del detto Saggio, ricordandomi d'aver dovuto altre volte rispondere negativamente a gentili richieste; ma ho voluto rifrugare, disgraziatamente senza frutto, nei miei scaffali. Mi resta ancora la speranza di avere forse qualche esemplare della traduzione francese, e se mi verrà fatto di trovarlo, glielo spedirò ben volentieri. Ma debbo differire di qualche poco tale ricerca, perché essa non potrebbe riuscire proficua se non ricorrendo a certe casse che da [p. 2] gran tempo non ho aperte e che dovrò pure fra non molto vuotare, per altre mie necessità; ma aspetto la prossima fine delle lezioni, giacché ora sono appunto occupatissimo nel dare a queste tutto quel compimento che è conciliabile colle malizie, col tempo e colle mie forze. Può essere benissimo che, come Ella dice, seguendo l'illustre Lamè e tanti altri sommi, gli ulteriori progressi della fisica matematica sieno da cercarsi nel riconoscimento delle leggi molecolari, leggi forse molto diverse dalle supposte fin qui. Non posso però sottrarmi ad un dubbio fondamentale, che è questo: Potremo noi trarre partito dall'analisi infinitesimale in tale ricerca e nelle relative deduzioni? Il substrato necessario di quell'analisi è il continuo: rimossa questa base, l'analisi rimane uno strumento puramente matematico, non più suscettibile d'accordo coll'interpretazione dei fenomeni. Se Ella ben guarda, tutte le ricerche analitiche istituite in base alle ipotesi molecolari hanno perpetuamente questa [p. 3] mira, di eliminare le molecole e di sostituire in loro vece un mezzo continuo, cosicché tutti gli sforzi che sono stati fatti in questo senso presentano questa singolarità, di essere diretti a far senza del loro proprio punti di partenza. Sono moltissimi, a questo proposito, i rimproveri fatti (dallo stesso Lamè) a Navier ed a Poisson di convertire certe somme in integrali, senza giustificazione sufficiente. Questa che ho accennato mi pare essere proprio la più grave fra le difficoltà che inceppano il progresso decisivo della scienza fisico-meccanica. In linea pratica ve n'è poi un'altra, che inceppa invece la diffusione di questi studii, ed è che gli scrittori, o sono buoni matematici e, generalmente parlando, non sono molto forti in fisica, o sono buoni fisici e, altrettanto in generale, non sono profondi matematici. Di qui segue che le dimostrazioni loro pigliano due correnti del tutto distinte, che restano quasi senza comunicazione fra loro e che, in tal qual modo, non simpatizzano l'una coll'altra. E questo ho voluto dire, come rimessa mia opinione, per rispondere ad una di Lei allusione, mossa per certo [p. 4] da sentimento benevolo; a quella, cioè, della possibilità che io m'inducessi a redigere un libro su qualche parte della fisica-matematica. Mi sarebbe ben grato il fare del lavoro riassuntivo, che gioverebbe moltissimo all'ordinamento delle mie proprie idee; ma creda pure che per accontentare gli

uni e gli altri dei predetti signori, come pur vorrei, dovrei faticar tanto (massime senza l'ajuto d'un fisico di professione) da venire troppo facilmente alla conclusione che è meglio lasciar fare ai Lamè dell'avvenire: quelli soltanto potranno dar opera utile e gradita a tutti. Le spedisco sotto-fascia una dozzina di copie del noto Opuscolo, tenendone altre a di Lei disposizione in caso di bisogno. Non potrò poi che gradire il lavoro del defunto Carbonnelle [gesuita belga], da Lei così gentilmente offertomi. E così pure non potrò che tenermi onorato da una traduzione che eventualmente si volesse fare del suddetto articolo: badi però di non mettere in mala vista qualche suo collega di Francia [Legendre], inducendolo a dar maggiore pubblicità ad una rivendicazione che danneggia un francese, ed un russo per giunta [Lobacevskij]. Col prof. Gunther non ho relazioni. Mi creda sempre.

Devotissimo obbligatissimo, suo
E. Beltrami

D.2 La lettera del 9 gennaio 1891

Lettera autografa di Eugenio Beltrami a Padre Manganotti, datata Pavia, 9 gennaio 1891. Nella missiva Beltrami commenta questioni di geometria differenziale e geometria non euclidea, soffermandosi sul ruolo dei metodi analitici nello studio delle geodetiche e discutendo alcune proprietà dei sistemi ortogonali di geodetiche sulle superfici.

Pavia, 9 gennaio 1891

Chiarissimo Sig. Professore

[p. 1] La ringrazio molto del cortese invio dell'Opuscolo del Prof. Mansion. Io avevo già ricevuto, dal medesimo Autore, una copia di questo interessante lavoro, e però mi permetterò di riporre una delle due copie che vengo così a possedere nella incipiente libreria della nostra Scuola Normale, affinché i giovani che in questa si preparano alla carriera dell'insegnamento abbiano occasione di conoscere una produzione che molto può interessarli e che può anche avviarli a studii più speciali sull'argomento. Io però la pregherei se Ella si trova in rapporto coll'egregio matematico di Gand, di volerlo ringraziare a mio nome del suo gradito presente. Non avrei, al momento, verun lavoro mio col quale ricambiarlo [p. 2] Non v'è alcun dubbio che, ove si tratti di considerazioni infinitesimali, il pangeometra non possa pienamente affidarsi alle formole ordinarie. È anzi in ciò che sta il grande vantaggio dei metodi analitici, e segnatamente di quelli di Gauss (intendo dire dei metodi che pongono a fondamento l'espressione dell'elemento lineare di quello spazio che si vuol considerare), per lo studio della geometria generale. Peccato che questi metodi, appunto per essere analitici, sieno troppo poco geometrici: la frase pare poco seria, ma Ella comprenderà benissimo ciò che voglio dire. E del resto non alludo già a ricerche di carattere

speciale, in cui ogni metodo è buono, ma a quelle che avessero per obiettivo la costruzione *ab imis fundamentis* di un sistema generale di geometria. Non riesco bene ad orientarmi circa i fenomeni geodetici di cui Ella mi chiede. È probabile che si trovino nelle *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, che comparvero [p. 3] nel giornale di Battaglini, anni 1864-65. Altri lavori miei in cui si tratti di sistemi di geodetiche non saprei ricordare, a meno che non fosse la Memoria sui parametri differenziali (Acc. Bologna 1869), dove però non feci che generalizzare i teoremi di Gauss. L'enunciato che Ella formulerebbe (dubitativamente) non può essere esatto, salvo in un caso. Risulta infatti dai celebri teoremi di Gauss che se q è l'arco variabile d'una linea qualunque, e se dall'estremo di questo si conduce un arco geodetico normale di lunghezza p , il luogo dell'estremo di questo è ortogonale a tutti gli analoghi archi geodetici normali, e l'elemento lineare ds della superficie è esprimibile nella forma

$$ds^2 = dp^2 + G dq^2$$

dove G è una certa funzione di p e di q , dipendente dalla natura della superficie. Ora il sistema delle geodetiche p è *qualunque*, perché, dato un tal sistema, si può [p. 4] sempre tracciare una linea che lo attraversi normalmente ed assumerla come linea q . Ciò posto se il dato sistema qualunque di geodetiche p ammettesse un sistema ortogonale pure geodetico, questo secondo sistema sarebbe necessariamente quello delle linee $p = \text{cost.}$ e, presa ad arbitrio *una* delle geodetiche p , si potrebbe farla servire all'ufficio cui prima serviva la linea q . Ma allora le antiche geodetiche diventerebbero i luoghi dei punti equidistanti da quella, e la distanza

$$ds = \sqrt{G} dq \quad (dp = 0)$$

di due geodetiche infinitamente vicine dovrebbe essere costante ed uguale a dq , distanza iniziale. Quindi $\sqrt{G} = 1$ e

$$ds^2 = dp^2 + dq^2,$$

cioè la superficie sarebbe applicabile sul piano euclideo $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Vegga Ella se può darmi qualche indizio che mi metta meglio sulla via. La salute di mia moglie procede ora, la Dio mercè,¹ assai meglio, e sono un po' più tranquillo. La ringrazio della sua allusione a ciò e mi dico

[suo devotissimo]
E. Beltrami

¹Vale a dire: per grazia di Dio.

Appendice E

Una lettera di Cassani a Manganotti

La lettera qui pubblicata è conservata in forma manoscritta presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia. Il documento è autografo di Pietro Cassani (1832-1905) ed è datato 25 agosto 1903. Esso riveste un interesse particolare sia per la figura del suo autore sia per le informazioni che offre sulla ricezione italiana della geometria non euclidea e sull'attività scientifica di Eugenio Beltrami. La trascrizione che segue è stata realizzata direttamente sul manoscritto originale, cercando di conservarne, per quanto possibile, le caratteristiche linguistiche e stilistiche.

Pietro Cassani nacque a Venezia il 4 giugno 1832. Dopo gli studi d'ingegneria e architettura presso l'Università di Padova, si dedicò prevalentemente all'insegnamento delle matematiche. La sua produzione scientifica si svolse in diversi ambiti della geometria, ma il nucleo più significativo della sua attività fu legato alla divulgazione e alla discussione delle nuove problematiche sorte attorno ai fondamenti della disciplina nella seconda metà dell'Ottocento [24].

L'interesse di Cassani per tali questioni nacque negli anni immediatamente successivi alla diffusione, in Italia, delle opere di Lobačevskij e Bòlyai; in particolare, egli seguì con attenzione il dibattito suscitato dalle memorie pubblicate nel *Giornale di Matematiche* di Battaglini e intrattenne rapporti scientifici con Eugenio Beltrami, la cui celebre memoria [4] esercitò su di lui una profonda influenza. Cassani contribuì infatti alla diffusione delle nuove idee geometriche attraverso il *Saggio di geometria rigorosa* (1872), opera in cui cercò di presentare in forma accessibile alcuni dei risultati e delle questioni teoriche emerse dalla riflessione sulle geometrie non euclidee [24].

Pur non appartenendo al ristretto gruppo degli innovatori che contribuirono direttamente allo sviluppo delle nuove geometrie, Cassani occupò un posto non trascurabile nella loro ricezione italiana. La sua attività di divulgatore e interprete delle teorie di Lobačevskij e Beltrami lo rese infatti una figura di collegamento tra il mondo della ricerca matematica e quello dell'insegnamento [24]. La sua lunga familiarità con Beltrami conferisce perciò particolare valore alle testimonianze contenute nella presente lettera, redatta quando gli eventi narrati appartenevano ormai a un passato di oltre trent'anni.

La missiva è indirizzata a padre Angelo Manganotti (1828-1907), gesuita e studioso noto soprattutto per il ruolo svolto nella riscoperta dell'*Euclides ab omni naevo vindicatus* di Girolamo Saccheri (si veda l'Appendice D). In essa, Cassani ricorda alcune conversazioni avute con Beltrami negli anni in cui si stavano affermando le idee di Lobačevskij e le interpretazioni proiettive di Arthur Cayley. Il documento contiene riferimenti all'*assoluto* di Cayley, alla genesi del *Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea*, alla costruzione della pseudosfera e alle reazioni che tale lavoro suscitò presso alcuni matematici italiani.

Sebbene il carattere memorialistico della testimonianza consigli prudenza nell'utilizzo puntuale dei singoli ricordi, la lettera costituisce una fonte di notevole interesse storico. Essa documenta infatti il modo in cui, agli inizi del Novecento, un protagonista della cultura matematica italiana interpretava la nascita e la diffusione delle geometrie non euclidee, offrendo al tempo stesso un importante testimonianza dei rapporti personali e scientifici intercorsi tra Cassani, Beltrami e Manganotti.

E.1 La lettera del 25 agosto 1903

Lettera autografa di Pietro Cassani a padre Angelo Manganotti, datata Gron di Sospirolo (Belluno), 25 agosto 1903. Nella missiva Cassani rievoca alcune conversazioni avute con Eugenio Beltrami negli anni successivi alla diffusione delle geometrie non euclidee, soffermandosi sul rapporto tra le idee di Cayley e quelle di Lobačevskij, sulla genesi del *Saggio* di Beltrami e sulle discussioni suscitate dalla pseudosfera.

Provincia di Belluno, 25 agosto 1903

Reverendissimo Padre Angelo,

[p. 1] Mi permetta alcune notizie a schiarimento de' miei convincimenti geometrici. Quando si seppe (non ricordo ben l'anno, ma doveva essere intorno al 1870) dall'epistolario di Gauss, che egli, scrivendo a Schumacher aveva dichiarata *magistrale* l'opera di Lobatchewski, uscì nelle Transactions Philosophical, un articolo di quel sommo geometra inglese che fu il Cayley. L'illustre novatore stabiliva la geometria analitica del piano in coordinate omogenee legando le tre variabili con una relazione omogenea di 2° grado che egli chiamava l'*assoluto del piano*. Io non avevo ancora veduto questo articolo ed il prof. Beltrami fu il primo a parlarmene nelle nostre passeggiate serali a Venezia. Nel farmi questa comunicazione, il Beltrami esprimeva una profonda meraviglia, non scevra da una certa titubanza nell'accettare i concetti di quel sommo pensatore. L'assoluto del piano sarebbe quella conica reale od immaginaria che rende ragione della geometria delle due o della nessuna parallela, e che si riduce a due rette sovrapposte per il campo euclideo. Sarebbe la linea terminale (all'infinito) del piano escogitata da quell'eminente geometra allo scopo di rendere *proiettive* anche le proprietà *metriche* come le grafiche, mentre, nel campo euclideo, le metriche, propriamente dette, non sono proiettive. Rammento questa cosa unicamente,

per legar con essa quello che dirò poi. Col Beltrami si parlò lungamente di queste dottrine e finalmente, una sera, mi disse: "io sono convinto che queste ragioni del Cayley si collegano coi concetti di Lobatchewski". Non poteva però vincer del tutto la sua meraviglia per una tale trovata. Qualche sera dopo mi annunciò che intendeva fare una ricerca generale. Voleva scoprire la superficie attuante le idee lobacevskiane, senza uscire dal campo euclideo. E fu così che compose quel suo maestrevole lavoro *Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea*, che fu pubblicato nel *Giornale matematico* di Battaglini. [p. 2] Gli avversari delle vedute del valente rettore dell'Università di Kazan, gongolarono d'allegrezza! Il prof. Giusto Bellavitis scrisse in una delle sue Riviste: "I pangeometri, come rimasero scornati quando videro che il piano di Lobachevski si riduceva ad una prosaica superficie di cartone".¹ (Non rammento le precise parole, ma si fa presto a trovare nelle Riviste all'Istituto di Scienze). Il Beltrami non s'era accontentato di scoprire la superficie in discorso, che egli chiamò *pseudosfera*, ma la costruiva materialmente, con un gran numero di pezzetti di cartone, e ne fece due esemplari, l'uno che egli regalò al sommo Helmholtz, l'altro al Gabinetto di Pavia. (Una prosaica superficie di cartone!!! Dove si arriva!.. *Prosaica e di cartone*. Colla sua trovata il Beltrami non aveva menomamente contraddette le idee di Lobachevsky poiché era ben naturale che assumesse come indiscutibili le determinazioni euclidee; la ricerca del Beltrami non poteva mai condurlo al piano euclideo, ed egli stesso lo sapeva bene). Lei sa che fu attaccato fieramente il concetto del Beltrami e anche che a quest'ora Ella abbia potuto vedere quei *bei resoconti* nei quali se ne parla.

Io mossi un giorno al Beltrami la seguente quistione. Ammesse come indiscutibili le determinazioni lobacevskiane relative al piano, cerchiamo: qual è la superficie sulla quale ad una geodesica, da un punto fuori d'essa, non si può condurre che una parallela? Egli stette un po' sopra pensiero, poi mi disse che si doveva ottenere l'*orificio*². Così mi pare almeno; ma l'orificio è lineare, qui si tratta d'una superficie. Ma non garantisco di quanto riporto, garantisco solamente la forma della quistione da me sollevata.

Ma temo d'averla annoiata abbastanza e chiudo dichiarandomi con la più riconoscente affezione.

25 Agosto 1903
Gron di Sospirolo
Provincia di Belluno
"alla Rosa"

Suo obbligatissimo,
Pietro Cassani

¹Cassani dichiara di non ricordare le parole precise impiegate da Bellavitis.

²La lettura del termine è incerta.

Appendice F

L'articolo di Bianchi sugli *Mathematische Annalen*

La presente appendice contiene la traduzione italiana dell'articolo di Luigi Bianchi intitolato *Über Flächen von constanter negativer Krümmung* (*Sulle superfici a curvatura negativa costante*), pubblicato negli *Mathematische Annalen* nel 1880. Il lavoro rappresenta uno dei contributi del geometra pisano sullo studio delle superfici pseudosferiche e si inserisce nel filone di ricerche inaugurato da Eugenio Beltrami sulla geometria a curvatura costante negativa.

Nell'articolo, Bianchi raccoglie alcuni risultati ottenuti nelle proprie ricerche precedenti (soprattutto nei lavori *Sulle superfici applicabili* e *Ricerche sulle superfici elicoidali e sulle superfici a curvatura costante*), introducendo un metodo per costruire nuove superfici a curvatura negativa costante a partire da una superficie assegnata della stessa natura. In tale contesto compaiono le nozioni di *superficie complementare*, di *trattrice accorciata* e *trattrice allungata*.

Il testo qui riprodotto è basato sulla traduzione italiana realizzata dal Professor Riccardo Rosso, che ha reso accessibile un contributo originale scritto in tedesco e oggi non sempre facilmente reperibile. La traduzione conserva l'impostazione e il contenuto matematico dell'articolo, consentendo al lettore di apprezzare direttamente il linguaggio, le idee e le tecniche geometriche impiegate da Bianchi. Si è ritenuto opportuno includere integralmente questo documento per fornire un riferimento diretto alle fonti storiche discusse nella tesi.

Über Flächen von constanter negativer Krümmung

Sulle superficie a curvatura negativa costante

di L. BIANCHI a Monaco

Nella mia dissertazione*) ho fatto conoscere un metodo per ottenere, a partire da una superficie nota con curvatura negativa costante, un'infinità di superficie con la stessa proprietà. Il metodo consiste nel trattare la superficie

*) Pisa, 1879.

assegnata come una falda dell'evoluto di una superficie e nel costruirne la seconda falda. Più precisamente, vale la proprietà seguente: *Si consideri su una superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$ un sistema di geodetiche parallele e si trasporti su ogni tangente di queste curve un segmento di lunghezza costante R a partire dal punto di contatto. Il luogo degli estremi di questo segmento ha la stessa curvatura costante $-\frac{1}{R^2}$.*

Sia S una superficie qualsiasi e, su di essa, (G) sia un sistema semplicemente infinito di linee geodetiche G . Le tangenti a tutte queste linee formano le normali di una serie di superficie parallele Σ . La superficie S è una falda dell'evoluto delle superficie Σ ; chiamo la seconda falda S' la *superficie complementare* di S in riferimento alle linee geodetiche G . Se sono assegnati S ed il sistema di linee geodetiche (G) , è possibile costruire la superficie complementare riportando su ciascuna tangente alle linee G a partire dal punto di contatto un segmento uguale alla differenza $r_1 - r_2$ dei raggi di curvatura principale dell'evolvente Σ . Ora, questa differenza è uguale al raggio di curvatura geodetica della traiettoria ortogonale alla linea G che passa per il punto di contatto con ciascuna tangente. (*) Riportato su ogni tangente alla curva geodetica G a partire dal punto di contatto un segmento uguale al raggio di curvatura geodetica della corrispondente traiettoria ortogonale, il luogo degli estremi di questi segmenti costituisce la superficie complementare cercata. Se ci si serve ora di un teorema di Beltrami**) sulla costruzione del raggio di curvatura geodetica di una curva qualsiasi su di una superficie, è possibile anche procedere in questo modo. Sulla superficie S consideriamo il sistema (L) di curve le cui tangenti sono tangenti coniugate delle curve G nel senso del teorema di Dupin. Se in tutti i punti in cui una di queste curve L taglia le curve G , tracciamo la tangente a quest'ultima, queste tangenti formeranno una sviluppabile. Se la curva L percorre tutto il suo sistema, allora lo spigolo di regresso di questa sviluppabile descrive la superficie complementare S' di S .

Passo ora al caso particolare in cui la superficie S si ottenga per deformazione di una superficie di rotazione. Si farà anche l'ipotesi che le curve geodetiche G siano le trasformate dei meridiani. Con queste restrizioni si ottiene facilmente dai noti teoremi di Weingarten***) come riportato da Beltrami nella nota citata sopra:

Se una serie di superficie sono sviluppabili su un'unica superficie di rotazione, anche le superficie complementari sono sviluppabili una sull'altra e su una superficie di rotazione.

Si osservi inoltre che grazie alla stessa costruzione risulta stabilita una corrispondenza tra i punti della superficie S e quelli della superficie complementare S' . In questo senso le trasformate dei paralleli della corrispondente superficie di rotazione su S ed S' sono curve corrispondenti.

Ora, quando S ha curvatura costante, in accordo con la condizione menzionata, non esiste un solo sistema (G) , ma ne esistono infiniti, dal momento

*) V. Dini, Ricerche sopra la teoria delle superficie. Atti dei XL. Firenze, 1869.

**) Ricerche di Analisi applicata alla Geometria. Giornale di Battaglini, Volumi II e III. Il riferimento è alla lunga memoria [2].

***). Journal di Crelle, Vol. LIX, p. 382.

che una superficie di quel tipo, come è noto, può essere mandata in sé con una flessione in infiniti modi.

Se in particolare la curvatura costante di S è negativa, avviene quanto segue. Se (G) è un sistema di geodetiche passanti per un punto P della superficie S , è possibile deformare S conferendogli la forma di una superficie di rotazione in modo tale che le geodetiche G diventino i meridiani. A seconda della natura del punto P , si ottengono tre diversi tipi di superficie di rotazione, a seconda che P sia all'infinito, sia un punto reale al finito o sia immaginario. È possibile caratterizzare questi tre casi ricorrendo alle tre formule seguenti per l'elemento di linea della superficie di rotazione di interesse*):

$$\begin{aligned} ds^2 &= du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2, \\ ds^2 &= du^2 + k^2 \sinh^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2, \\ ds^2 &= du^2 + k^2 \cosh^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2, \end{aligned}$$

dove $-\frac{1}{R^2}$ è la curvatura della superficie e k è una costante arbitraria. Consideriamo ora la superficie S come una falda dell'evoluta di una superficie Σ ; in riferimento a r_1 , il teorema di Weingarten insegna che la corrispondente relazione tra i raggi di curvatura principale r_1, r_2 di Σ è una delle tre seguenti**)

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= R \\ r_1 - r_2 &= R \operatorname{tgh} \frac{r_1 + c}{R} \\ r_1 - r_2 &= R \operatorname{coth} \frac{r_1 + c}{R} \end{aligned}$$

dove c indica una costante arbitraria. Se calcoliamo ora con la formula di Weingarten

$$ds_2^2 = dr_2^2 + e^{2 \int \frac{dr_2}{r_2 - r_1}} dv^2,$$

l'elemento di linea della seconda falda dell'evoluta, otteniamo

$$\begin{aligned} ds_2^2 &= dr_2^2 + e^{-\frac{2r_2}{R}} dv^2, \\ ds_2^2 &= \operatorname{tgh}^4 \frac{r_1 + c}{R} dr_1^2 + \frac{dv^2}{\cosh^2 \frac{r_1 + c}{R}}, \\ ds_2^2 &= \operatorname{coth}^4 \frac{r_1 + c}{R} dr_1^2 + \frac{dv^2}{\sinh^2 \frac{r_1 + c}{R}}. \end{aligned}$$

Nel primo caso, pertanto, anche la seconda falda ha la stessa curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$. In questo caso, anche la costruzione della superficie complementare assume una forma molto semplice perchè il raggio di curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali è costante ed uguale a R . Bisogna solamente riportare su ogni tangente alle geodetiche parallele, a partire dal punto di contatto, un segmento di lunghezza costante R nella direzione lungo cui le geodetiche vanno verso il punto comune all'infinito. Il luogo degli estremi di questi segmenti costituisce pure una superficie a curvatura costante negativa.

Nel secondo e nel terzo caso, se cerchiamo l'equazione $z = \varphi(r)$ del meridiano della corrispondente superficie di rotazione, dove l'asse z è l'asse di rotazione

*) Beltrami l.c. come anche Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. Giornale di Battaglini. Volume VI.

**) Beltrami l.c. Dini, Sulle superficie di curvatura costante. Volume III.

ed r il raggio del generico parallelo, si ottiene nel secondo caso

$$z = \varphi(r) = \int \frac{\sqrt{R^2 - (1 + \lambda^2 R^2)r^2}}{r} dr, \quad (1)$$

e nel terzo caso

$$z = \varphi(r) = \int \frac{\sqrt{R^2 - (1 - \lambda^2 R^2)r^2}}{r} dr, \quad (2)$$

dove λ indica una costante arbitraria. Se poniamo, rispettivamente

$$r = \frac{R}{\sqrt{1 + \lambda^2 R^2}} \sin \vartheta, \quad r = \frac{R}{\sqrt{1 - \lambda^2 R^2}} \sin \vartheta,$$

si ottengono per il meridiano cercato la formule seguenti:

$$r = \frac{R}{\sqrt{1 + \lambda^2 R^2}} \sin \vartheta, \quad z = R \left\{ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta + \cos \vartheta \right\}, \\ r = \frac{R}{\sqrt{1 - \lambda^2 R^2}} \sin \vartheta, \quad z = R \left\{ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta + \cos \vartheta \right\}.$$

Ora è noto che la formula

$$r = R \sin \vartheta, \quad z = R \left\{ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta + \cos \vartheta \right\},$$

fornisce una trattrice la cui tangente è uguale ad R e il cui asintoto è l'asse z .

Pertanto, la prima curva non è altro che una proiezione ortogonale della trattrice su un piano passante per l'asintoto. Al contrario, la seconda curva ha la trattrice come proiezione ortogonale. Vogliamo indicare queste curve rispettivamente come trattrice *accorciata* e *allungata*. In entrambi i casi è possibile supporre che l'angolo μ che il piano della trattrice accorciata o allungata forma con il piano della trattrice stessa sia compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ poiché, rispettivamente, è

$$\cos \mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 R^2}}, \quad \cos \mu = \sqrt{1 - \lambda^2 R^2}$$

e λ può assumere tutti i valori tra 0 e ∞ .

Tuttavia, mentre la trattrice accorciata esaurisce tutte le curve meridiane rilevanti, ciò non si verifica per la trattrice allungata. Infatti, la formula (1) fornisce una trattrice accorciata per ogni valore di λ . Viceversa, perché dalla formula (2) si possa ricavare una trattrice allungata, occorre supporre $0 < \lambda < \frac{1}{R}$. Quando $\lambda = \frac{1}{R}$, si ottiene la *curva logaritmica* $z = R \log r$. Per $\lambda > \frac{1}{R}$ si ottiene una nuova serie di curve. Dal punto di vista geometrico, possiamo dire quanto segue. Sulla superficie di rotazione di una trattrice accorciata si stacca un segmento arbitrario tra due meridiani. Se allora si uniscono i bordi piegandoli, si ottiene nuovamente la forma di una superficie di rotazione. Il nuovo meridiano è ancora una trattrice accorciata; solo che il corrispondente angolo μ è diventato più grande. Viceversa, se si taglia questa superficie di rotazione lungo un meridiano e si separano i margini del taglio, quando alla superficie è ridata la forma di una superficie di rotazione, il meridiano diventa una trattrice accorciata; l'angolo μ rilevante è però più piccolo.

Se si applica lo stesso processo alla superficie di rotazione della trattrice allungata, si ottengono nel primo caso trattrici allungate cui corrispondono valori μ dell'angolo sempre più piccoli. Nel secondo caso si ottiene dapprima delle trattrici allungate cui corrispondono valori sempre maggiori dell'angolo μ , quindi una curva logaritmica e, procedendo ulteriormente con la stessa operazione, un'intera serie di nuove curve.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nella seguente proposizione:

La superficie complementare di una superficie a curvatura costante negativa, in riferimento ad un sistema di geodetiche passanti per un punto della superficie, è applicabile su una superficie di rotazione che ha come meridiano una trattrice, una trattrice accorciata o allungata e come asse l'asintoto, a seconda che il punto comune delle geodetiche sia all'infinito, sia reale e al finito o immaginario.

Se ora sono note: una superficie S a curvatura costante negativa; su di essa un sistema di geodetiche passanti per un suo punto (reale, immaginario o all'infinito); le loro traiettorie ortogonali: allora è possibile ottenere formule che forniscono tutti i sistemi di geodetiche dei tre tipi di cui si è parlato.*) è anche possibile ottenere senza integrazione un'infinità semplice di nuove superficie a curvatura costante negativa, così come un'infinità doppia di superficie che sono applicabili sulla superficie di rotazione della trattrice accorciata o allungata. Per ciò che riguarda in particolare le nuove superficie S' a curvatura costante negativa, si osservi che è già noto su di esse un sistema di trasformate dei paralleli della superficie di rotazione della trattrice. Pertanto, occorre solo integrare un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine per trovare un sistema di geodetiche parallele**)

È dunque possibile ottenere da S' infinite nuove superficie a curvatura costante negativa, ecc. Quando, ad esempio, ci si basa sulla superficie di rotazione della trattrice, si ottengono le seguenti formule per le coordinate delle superficie complementari:

$$x = 2R \frac{\sin u}{1+(v^2+k)\sin^2 u} (\cos v + v \sin v),$$

$$y = 2R \frac{\sin u}{1+(v^2+k)\sin^2 u} (\sin v + v \cos v),$$

$$z = R \left\{ \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} u + \frac{2 \cos u}{1+(v^2+k)\sin^2 u} \right\}$$

Quando qui è $k = 0$. si ottiene una superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$. Quando però $k > 0$ o $k < 0$, si ottiene una classe di superficie che sono applicabili una sull'altra e sulla superficie di rotazione della trattrice accorciata o allungata, rispettivamente.

La superficie complementare si traccia in modo particolarmente semplice quando si sceglie il sistema di geodetiche ortogonali ad una trattrice meridiana. Una tale superficie complementare è applicabile sulla superficie di rotazione

*) Beltrami. Saggio etc. l.c.

**) Da una lettera del Prof. Lie al Prof. Klein, questa equazione differenziale è sempre integrabile.

della trattrice allungata. La sua equazione in coordinate cilindriche è la seguente

$$r\vartheta = R \cosh \frac{z}{R}.$$

Diventa ora evidente che *i paralleli della superficie di rotazione della trattrice allungata si trasformano nelle curve $r = \text{cost.}$, cioè in una usuale catenaria curva su un cilindro concentrico. Un certo meridiano si trasforma nella spirale iperbolica $z = 0$.*

Monaco di Baviera, 7 Febbraio 1880.

Bibliografia

- [1] N. Arcozzi. Beltrami's Models of Non-Euclidean Geometry. In S. Coen, editor, *Mathematicians in Bologna 1861–1960*, pages 1–30. Springer, Milano, 2012.
- [2] E. Beltrami. Ricerche di analisi applicata alla geometria. *Giornale di Matematiche*, 2-3:(2):267–282, 297–306, 331–339, 355–275, (3):15–22, 33–41, 82–91, 228–240, 311–314, 1864–65.
- [3] E. Beltrami. Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette. *Annali di Matematica pura ed applicata*, VII(Serie I):185–204, 1865.
- [4] E. Beltrami. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. *Giornale di Matematiche*, VI:284–312, 1868.
- [5] E. Beltrami. Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. *Annali di Matematica pura ed applicata*, II(Serie II):232–255, 1869.
- [6] E. Beltrami. Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudo-sferiche. *Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane*, 10:147–159, 1872.
- [7] E. Beltrami. Teorema di geometria pseudosferica. *Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane*, 10:53, 1872.
- [8] E. Beltrami. Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky. *Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti*, V(Serie 4, 1° Semestre):441–448, 1889.
- [9] E. Beltrami. *Opere matematiche di Eugenio Beltrami. Tomo Primo*. Ulrico Hoepli, Milano, 1902. Pubblicate per cura della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma. Con ritratto e biografia dell'autore.
- [10] E. Beltrami. *Opere matematiche di Eugenio Beltrami. Tomo Secondo*. Ulrico Hoepli, Milano, 1904. Pubblicate per cura della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma.
- [11] E. Beltrami. *Opere matematiche di Eugenio Beltrami. Tomo Terzo*. Ulrico Hoepli, Milano, 1910. Pubblicate per cura della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma.
- [12] E. Beltrami. *Opere matematiche di Eugenio Beltrami. Tomo Quarto ed ultimo*. Ulrico Hoepli, Milano, 1920. Pubblicate per cura della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma.

- [13] E. Beltrami, E. Betti, P. Tardy, and S. Gherardi. *Le lettere di Eugenio Beltrami a Betti, Tardy e Gherardi*. A cura di Livia Giacardi e Rossana Tazzioli. Collana di Materiali per la Costruzione delle Biografie di Matematici Italiani dall'Unità. Mimesis Edizioni, Sesto San Giovanni (Milano), 2012.
- [14] E. Beltrami and D. Chelini. *Il carteggio Beltrami-Chelini (1863-1873)*. Mimesis Edizioni, Sesto San Giovanni (Milano), 2009. A cura di Maria Rosaria Enea. Collana di Materiali per la Costruzione delle Biografie di Matematici Italiani dall'Unità.
- [15] E. Beltrami and J. Hoüel. *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère: Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868-1881)*. A. Blanchard, Parigi, Francia, 1998. Introduzione, note e commenti critici di L. Boi, L. Giacardi, R. Tazzioli.
- [16] L. Bianchi. Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung. *Mathematische Annalen*, 16:577–582, 1880.
- [17] L. Bianchi. *Lezioni di Geometria Differenziale. Seconda edizione riveduta e considerevolmente aumentata*, volume 2. Spoerri, Pisa, 1903.
- [18] G. Bockwoldt. "Ueber die Enneper'schen Flächen mit constantem positivem Krümmungsmaas, bei denen die eine Schaar der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet wird.". Dieterich, "Göttingen", 1878.
- [19] R. Bonola. *La geometria non-euclidea: esposizione storico-critica del suo sviluppo*. N. Zanichelli, Bologna, Italia, 1906. Con prefazione di Federico Enriques.
- [20] O. Caligaris. *Assiomi, Modelli e Geometrie*. Università di Genova - Polo di Savona, Cogne, Italia, 2005. Seminario SMA (Scuola di Matematica Applicata), 2-4 giugno 2005.
- [21] F. Casorati. Discorso per l'inaugurazione degli studi universitari a Pavia il 16 novembre 1873. In Unione Matematica Italiana, editor, *Opere*, pages 34–51. Edizioni Cremonese, Roma, 1951.
- [22] A. Cogliati. Farkas e János Bolyai: dalla teoria delle parallele alla quadratura del cerchio. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 6(3):259–285, 2021.
- [23] A. Cogliati. *Ars inveniendi. La genesi della geometria differenziale*. Pisa University Press, Pisa, 2022. Collana: Mathematica.
- [24] P. Delsedime. Cassani, Pietro. In *Dizionario Biografico degli Italiani*, volume 21. Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 1978.
- [25] U. Dini. "Sulle superficie di curvatura costante". *Giornale di matematiche*, 3:241–256, 1865.
- [26] U. Dini. "Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie, e loro applicazioni". *Annali di Matematica pura e applicata*, 4:175–206, 1870.
- [27] A. Enneper. Ueber einige Formeln aus der analytischen Geometrie der Flächen. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 7:75–92, 1862.
- [28] A. Enneper. Analytisch-geometrischen untersuchungen. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts Universität in Göttingen*, pages 258–276, 1868.

- [29] A. Enneper. Ueber asymptotische Linien. *"Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts Universität in Göttingen"*, pages 493–509, 1870.
- [30] A. Enneper. "Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien". *"Abhandlungen von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen"*, 23:1–96, 1878.
- [31] Euclide. *Gli Elementi*. UTET, Torino, 1970. Testo a cura e traduzione di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni. Fa parte della collana 'Classici della scienza' diretta da Ludovico Geymonat.
- [32] G. Fano. *Geometria non Euclidea. Introduzione geometrica alla teoria della relatività*. Zanichelli, Bologna, 1935.
- [33] G. Fischer. *Mathematical Models from the Collections of Universities and Museums*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986. Traduzione inglese dell'originale tedesco *Mathematische Modelle aus den Sammlungen von Universitäten und Museen*.
- [34] M. Friedman and K. Krauthausen, editors. *Model and Mathematics: From the 19th to the 21st Century*. Birkhäuser, Cham, 2022. Collana: Trends in the History of Science.
- [35] C. F. Gauss. Soluzione generale del problema: rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca, nelle sue parti infinitesime, una figura simile alla figura rappresentata. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 4(1):214–232, 1861. Traduzione italiana di Eugenio Beltrami.
- [36] L. Giacardi. *Problematiche emergenti dalla corrispondenza inedita Beltrami-Houël. Parte prima: Eugenio Beltrami artigiano della pseudosfera*. Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, Università di Torino, Torino, 1984. Quaderni di Matematica, n. 77, ottobre 1984.
- [37] L. Giacardi. Corrado segre maestro a torino. la nascita della scuola italiana di geometria algebrica. *Annali di storia delle università italiane*, 5:139–163, 2001.
- [38] T. Hall. *Carl Friedrich Gauss: a biography*. The MIT Press, Cambridge, 1970. Traduzione dallo svedese di Albert Froderberg. Titolo originale: 'Carl Friedrich Gauss: en biografi' (1965).
- [39] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. B. G. Teubner, Leipzig, 1899.
- [40] F. Joachimstahl. *"Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung"*. Teubner, Leipzig, 1872.
- [41] F. Klein. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Andreas Deichert, Erlangen, 1872. Inauguralvortrag, noto come "Programma di Erlangen".
- [42] T. Kuen. Ueber Flächen von constantem Krümmungsmaass. *"Sitzungsberichte der mathematisch-physicalischen Classe der königlichen bayerischen Akademie der Wissenschaften"*, 14:193–206, 1884.

- [43] E. Lenz. *"Ueber die Enneper'schen Flächen constantem positivem Krümmungsmaasses, mit einem Systeme ebener Krümmungslinien."*. Dieterich, "Göttingen", 1879.
- [44] S. Lie. Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung. I. Bestimmung ihrer Haupttangenten und Krümmungslinien. *"Archiv for Mathematik og Naturvidenskab"*, 4:345–354, 1879.
- [45] S. Lie. Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung. II. Das sphärische Bild der Haupttangenten- und Krümmungskurven. *"Archiv for Mathematik og Naturvidenskab"*, 4:355–366, 1879.
- [46] S. Lie. Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung. III. *"Archiv for Mathematik og Naturvidenskab"*, 5:282–306, 1880.
- [47] S. Lie. Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung. IV. Bestimmung aller Flächen konstanter Krümmung. *"Archiv for Mathematik og Naturvidenskab"*, 5:328–358, 1880.
- [48] S. Lie. Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung. V. *"Archiv for Mathematik og Naturvidenskab"*, 5:518–541, 1881.
- [49] N. I. Lobachevsky. *Geometrical Researches on the Theory of Parallels*. G. Fincke'sche Buchhandlung, Berlin, 1840.
- [50] N. I. Lobačevskij. *Nuovi principi della geometria: con una teoria completa delle parallele*. Paolo Boringhieri, Torino, 1963. Testo a cura e traduzione di Lucio Lombardo-Radice. Collana: Biblioteca di cultura scientifica, Serie azzurra.
- [51] G. Loria. *Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al secolo XIX*, volume II. STEN, Torino, 1929.
- [52] Ludwig Schläfli. Nota alla Memoria del sig. Beltrami, sugli spazii di curvatura costante. *Annali di Matematica pura ed applicata*, II(5):178–193, 1872.
- [53] P. Mansion. Analyse des recherches du p. saccheri, s. j., sur le postulat d'euclide. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 14:46–59, 1890. 2e partie.
- [54] F. Minding. Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst bemerkungen über die flächen von unveränderlichem krümmungsmaasse. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 19:370–387, 1839.
- [55] J. F. Nash. The imbedding problem for riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, 63(1):20–63, 1956.
- [56] G. Ottaviani. *Il modello di Poincaré*. Università degli Studi di Firenze, Firenze, 2008. Dispense per il corso di Geometria.
- [57] N. Palladino and F. Palladino. I modelli matematici costruiti per l'insegnamento delle matematiche superiori pure e applicate. *Ratio Mathematica*, 19:31–88, 2009.
- [58] F. Plantade. Jules Houël: un mathématicien pédagogue du XIXe siècle pour lequel une approche historique est indissociable d'un fondement rigoureux des mathématiques. Exemple des «quantités complexes». In *Actes du colloque EMF 2012*, pages 653–662, 2012.

- [59] E. Pozzato. Bianchi, luigi. In *Dizionario Biografico degli Italiani*, volume 10. Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 1968.
- [60] R. Rashed and B. Vahabzadeh. *Al-Khayyām Mathématicien*. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1999. Contiene un'analisi critica e la traduzione delle opere matematiche di Omar Khayyam. Progetto «Bayt al-Hikma».
- [61] B. Riemann. Über die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen. In H. Weber and R. Dedekind, editors, *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, pages 272–287. Teubner, Leipzig, 1876.
- [62] B. A. Rosenfeld. *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space*. Springer-Verlag, New York, 1988. Traduzione dall'originale russo 'Istoriya neevklidovoy geometrii' (1976) ad opera di Abe Shenitzer con la collaborazione editoriale di Hardy Grant.
- [63] R. Rosso. *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*. Università di Pavia, Pavia, 2023-2024. Dispense del corso di Matematiche elementari da un punto di vista superiore.
- [64] R. Rosso. *Storia della Matematica: la Storia della Geometria*. Università di Pavia, Pavia, 2023-2024. Dispense del corso di Storia della Matematica: la Storia della Geometria.
- [65] R. Rosso. Quadri da un'esposizione: la collezione di modelli geometrici dell'Università di Pavia. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 9(2-3):215–232, 2024.
- [66] R. Rosso. *Matematiche complementari*. Università di Pavia, Pavia, 2024-2025. Dispense del corso di Matematiche complementari.
- [67] G. Saccheri. *L'Euclide emendato*. Ulrico Hoepli, Milano, 1904. Traduzione italiana dell'opera originale 'Euclides ab omni naevo vindicatus' (1733), con note, del Prof. G. Boccardini. Con 55 incisioni.
- [68] G. Saccheri. *Euclide liberato da ogni macchia*. Bompiani, Milano, 2001. Testo latino a fronte. A cura di Pierangelo Frigerio. Saggio introduttivo di Imre Toth e Elisabetta Cattanei.
- [69] G. Saccheri. *Logica dimostrativa*. Opera omnia di Gerolamo Saccheri. Edizioni della Normale, Pisa, 2012. Testo latino a fronte. Opera a cura di Massimo Mugnai e Massimo Girondino. Traduzione di Massimo Girondino.
- [70] F. Schilling. *Die Pseudosphäre und die nichteuclidische Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1931.
- [71] E. Seidl, F. Loose, and E. Bierende. *Mathematik mit Modellen. Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung*. Tübingen Universität, Tübingen, 2018.
- [72] S. Stahl. *A Gateway to Modern Geometry: The Poincaré Half-Plane*. Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, Massachusetts, second edition, 2008.
- [73] J. Weingarten. Ueber eine Klasse auf einander abwickelbaren Flächen. *Journal für die Reine und angewandte Mathematik*, 59:382–392, 1861.