



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
Dipartimento di Scienze della Terra e dell'Ambiente
Direttore: Prof. S. Seno

Corso di Laurea Magistrale in Conservazione della Biodiversità,
Didattica e Comunicazione Scientifica

MISURARE LE OMBRE, COSTRUIRE SIGNIFICATI: UN PERCORSO ESPERIENZIALE VERSO IL CONCETTO DI RAPPORTO

Relatore:
Prof. George Richard Paul Santi

Tesi di Laurea Magistrale
di Martina Pappalardo
matr. 536939

Anno Accademico 2025/2026

Indice

Introduzione	4
1 Quadro teorico: Didattica della matematica.....	6
1.1 La matematica come costruzione di significato	7
1.2 Il campo di esperienza nella didattica della matematica	9
1.3 L'apprendimento come attività mediata	11
1.4 La dimensione affettiva nell'apprendimento matematico.....	13
1.5 Il pensiero proporzionale e le difficoltà degli studenti e studentesse	16
2 Quadro teorico: Pedagogia dell'esperienza	19
2.1 Outdoor Education: definizione e principi	19
2.2 Radici pedagogiche dell'apprendimento esperienziale e ruolo dell'ambiente	22
2.3 Outdoor Education e didattica della matematica	25
2.4 Implicazioni educative e collegamento con la ricerca.....	28
3 Materiali e metodi	30
3.1 Contesto della ricerca	30
3.2 Metodologie della ricerca	31
3.3 Disegno della ricerca	33
3.4 Strumenti e tipologia di dati raccolti	37
3.4.1 Questionario affettivo iniziale.....	37
3.4.2 Test sulle preconoscenze	43
3.4.3 Secondo incontro – raccolta dati	50
3.4.4 Terzo incontro – analisi dati.....	53
3.4.5 Quarto incontro – stima del reale	56
3.4.6 Questionario affettivo finale	59
3.4.7 Test finale	65
4 Risultati	72
4.1 Questionario affettivo iniziale	72
4.2 Test sulle preconoscenze	77
4.3 Secondo incontro – raccolta dati.....	80
4.4 Terzo incontro – analisi dati	83
4.5 Quarto incontro – stima del reale.....	88
4.6 Questionario affettivo finale	90
4.7 Test finale.....	94
5 Discussione	97
5.1 Questionario affettivo	97
5.2 Confronto delle conoscenze	100
5.3 Secondo incontro – raccolta dati.....	103
5.4 Terzo incontro – analisi dati	106

5.5	Quarto incontro – stima del reale.....	109
6	Conclusioni.....	111
6.1	Risposta alla domanda di ricerca.....	111
6.2	Limiti della ricerca	114
6.3	Prospettive future	116
7	Appendici	118
	Bibliografia	143

Introduzione

Nella scuola secondaria di primo grado, matematica e scienze sono tradizionalmente presentate come discipline distinte, spesso separate sia sul piano organizzativo sia su quello didattico. Questa distinzione netta, se da un lato risponde a esigenze curriculari, dall'altro rischia di ostacolare una comprensione autentica della realtà, che si presenta invece come un sistema complesso e interconnesso. Nel mondo reale la matematica non è separata dalla scienza, ma ne costituisce il linguaggio, lo strumento privilegiato per descrivere, interpretare e comprendere ciò che accade.

Proprio questa separazione può contribuire a rendere la matematica una disciplina percepita come astratta, distante e poco significativa dagli studenti e dalle studentesse. Spesso essa viene vissuta come un insieme di regole e procedure difficili da collegare alla realtà quotidiana. Diventa quindi centrale interrogarsi su come sia possibile restituire alla matematica il suo ruolo originario di strumento per leggere il mondo, favorendo una costruzione di significati più autentica e condivisa.

Un possibile punto di incontro tra matematica e scienze risiede proprio nell'**esperienza**. Diverse teorie pedagogiche sottolineano come il significato nasca dall'interazione diretta con la realtà, dall'azione e dalla riflessione su di essa. Anche il metodo scout, fondato da Robert Baden-Powell, pone al centro dell'educazione il principio del *learning by doing*: si impara facendo, attraverso esperienze concrete, situate e significative. L'ambiente naturale diventa così un contesto privilegiato di apprendimento, in cui osservare, sperimentare, misurare e collaborare.

In questa direzione si inserisce l'*Outdoor Education*, un approccio educativo che valorizza l'apprendimento all'aperto come occasione per costruire conoscenze in modo attivo e contestualizzato. L'esperienza diretta nel mondo reale consente agli studenti e alle studentesse di confrontarsi con problemi autentici, di mobilitare competenze diverse e di attribuire significato ai concetti attraverso l'azione.

Il progetto didattico al centro di questo lavoro nasce proprio da queste premesse. L'obiettivo è quello di indagare se e come un percorso esperienziale, basato sull'osservazione e sulla misurazione di un evento naturale come le ombre, possa favorire la costruzione del concetto matematico di rapporto, prima ancora della sua formalizzazione. Allo stesso tempo, il progetto didattico si propone di esplorare se un'esperienza di questo tipo possa incidere anche sull'atteggiamento dei discenti nei confronti della materia, contribuendo a modificarne la percezione rendendola uno strumento ai loro occhi più concreto per comprendere la realtà.

Nella prima parte della tesi viene delineato il quadro teorico di riferimento, con particolare attenzione al rapporto tra matematica e realtà, al ruolo dell'esperienza nei processi di apprendimento e alle principali prospettive pedagogiche che valorizzano l'azione situata e il contesto. All'interno di questo inquadramento si collocano anche i contributi dello scoutismo e dell'*Outdoor Education*, che mettono in evidenza le potenzialità educative dell'apprendimento all'aperto e dell'esperienza diretta come dispositivi di costruzione del significato.

Su queste basi teoriche si sviluppa la presentazione del progetto didattico, di cui vengono esplicitati i criteri di progettazione, gli obiettivi e le scelte metodologiche. Una parte centrale del lavoro è dedicata all'analisi delle preconoscenze degli studenti e delle strategie intuitive emerse durante le attività, interpretate in relazione ai processi di concettualizzazione e alla costruzione condivisa del significato.

La discussione dei risultati consente infine di mettere in relazione i dati raccolti con il quadro teorico di riferimento, al fine di evidenziare le implicazioni didattiche del percorso e le possibili ricadute sia sugli apprendimenti sia sull'atteggiamento degli studenti nei confronti della matematica.

1 Quadro teorico: Didattica della matematica

Per costruire una cornice interpretativa utile alla comprensione dei processi di insegnamento e apprendimento della matematica, è necessario fare riferimento ad alcune principali prospettive teoriche della didattica della disciplina. In primo luogo, si assume una visione della matematica come costruzione di significato, che segna il superamento di un approccio puramente trasmissivo a favore di una prospettiva centrata sull'attività del discente e sul ruolo fondamentale dell'esperienza nella costruzione della conoscenza.

In questo quadro si colloca il concetto di campo di esperienza, elaborato da Paolo Boero, che individua nei contesti significativi e riconoscibili dagli studenti il luogo privilegiato per la costruzione dei concetti matematici, mettendo in relazione sapere scolastico ed esperienza vissuta. A questa prospettiva si affianca il contributo dell'*Activity Theory*, che sottolinea il ruolo centrale degli strumenti e delle studentesse e dell'interazione sociale nei processi di apprendimento, evidenziando come la conoscenza si sviluppi all'interno di pratiche condivise e mediate culturalmente.

Un ulteriore elemento di analisi riguarda la dimensione affettiva dell'apprendimento matematico, considerata non come aspetto marginale ma come componente strutturale dei processi cognitivi. In particolare, il modello tridimensionale proposto da Di Martino e Zan consente di interpretare l'atteggiamento verso la matematica come l'interazione tra emozioni, visione della disciplina e competenza percepita, offrendo una chiave di lettura della relazione che studenti e studentesse instaurano con la matematica.

All'interno di questa cornice teorica si inserisce infine l'attenzione allo sviluppo del pensiero proporzionale, mettendo in evidenza sia le principali difficoltà che gli studenti incontrano nell'acquisizione di questo concetto, sia il ruolo della discussione di classe come dispositivo fondamentale per la costruzione condivisa dei significati matematici.

1.1 La matematica come costruzione di significato

Nella didattica della matematica contemporanea si è progressivamente affermata una concezione dell'apprendimento come processo di costruzione di significato, in contrapposizione a un approccio trasmissivo basato sulla semplice acquisizione di regole e procedure (Sfard, 2001; Cobb, 1994). In questa prospettiva, la matematica non è considerata un insieme di conoscenze predefinite da trasmettere, ma un sistema di significati che gli studenti e le studentesse costruiscono attivamente attraverso l'esperienza, l'interazione e la riflessione.

Parlare di "costruzione di significato" implica riconoscere che i concetti matematici acquistano senso per gli studenti e le studentesse solo quando vengono messi in relazione con esperienze concrete e contesti significativi. In questa direzione si collocano anche le Indicazioni Nazionali per il curriculum, che sottolineano come la matematica non debba essere ridotta a un insieme di regole da applicare, ma riconosciuta come strumento per interpretare la realtà, affrontare problemi e costruire conoscenze attraverso l'esperienza (MIUR, 2012). Un primo riferimento fondamentale in questa direzione è rappresentato dal costruttivismo di Jean Piaget secondo cui la conoscenza non è una copia della realtà, ma il risultato di un processo attivo di costruzione da parte del soggetto (Piaget, 1970). I bambini non nascono con concetti matematici già formati, ma li sviluppano attraverso l'interazione con l'ambiente, mediante processi di assimilazione e accomodamento: nel primo caso, le nuove informazioni vengono interpretate alla luce delle strutture cognitive già esistenti; nel secondo, tali strutture vengono modificate e riorganizzate per adattarsi a nuove esperienze. L'apprendimento matematico, in questa prospettiva, è strettamente legato all'azione: è manipolando, osservando e sperimentando che il bambino costruisce progressivamente strutture cognitive sempre più complesse.

Se Piaget pone l'accento sulla dimensione individuale della costruzione della conoscenza, Lev Vygotsky introduce una prospettiva complementare, sottolineando il ruolo fondamentale dell'interazione sociale nei processi di apprendimento. Attraverso il concetto di Zona di Sviluppo Prossimale (ZPD), Vygotsky evidenzia come lo sviluppo cognitivo avvenga grazie al supporto di altri individui più competenti, quali insegnanti o pari (Vygotsky, 1978). In ambito matematico, ciò significa che la costruzione del significato non è solo un processo individuale, ma si realizza attraverso il linguaggio, la discussione e la collaborazione. Il confronto tra idee, la negoziazione dei significati e l'uso condiviso del linguaggio matematico diventano strumenti essenziali per l'apprendimento.

In continuità con queste prospettive, la didattica della matematica ha sviluppato modelli che

valorizzano il ruolo del contesto e dell'esperienza nella costruzione del significato. In particolare, il concetto di "campo di esperienza", proposto da Paolo Boero, sottolinea come l'apprendimento matematico si sviluppi all'interno di situazioni significative, nelle quali gli studenti e le studentesse possono mobilitare conoscenze pregresse e metterle in gioco in nuove attività (Boero, 2007). I campi di esperienza sono contesti ricchi e concreti – come la misurazione di ombre, l'uso di scale o la preparazione di ricette – che offrono agli studenti e alle studentesse l'opportunità di esplorare relazioni, formulare ipotesi e costruire concetti matematici a partire da problemi reali. In questi contesti, il passaggio dall'esperienza alla formalizzazione non è immediato, ma avviene attraverso un processo graduale di rielaborazione e generalizzazione (Boero, 2012).

Un ulteriore contributo alla comprensione della costruzione del significato matematico è offerto dalla teoria dei registri semiotici di Raymond Duval. Secondo Duval, la comprensione di un concetto matematico non si esaurisce in una singola rappresentazione, ma richiede la capacità di coordinare diversi registri semiotici, quali il linguaggio verbale, le rappresentazioni grafiche e le espressioni simboliche (Duval, 1995). Il passaggio da un registro all'altro – ad esempio dalla descrizione verbale di una relazione alla sua rappresentazione grafica o simbolica – è un processo cruciale per la costruzione del significato.

Insegnare matematica significa progettare ambienti di apprendimento che favoriscano la costruzione attiva di significati, attraverso l'esperienza, l'interazione sociale e l'uso di diversi registri rappresentativi. Non si tratta di trasmettere contenuti già pronti, ma di accompagnare gli studenti e le studentesse in un percorso di costruzione progressiva (Cobb, 1994).

In questa prospettiva si colloca la presente tesi, che propone un percorso didattico basato sull'osservazione e misurazione delle ombre, con l'obiettivo di favorire la costruzione del concetto di rapporto attraverso un'esperienza concreta, condivisa e progressivamente formalizzata.

1.2 Il campo di esperienza nella didattica della matematica

All'interno della prospettiva della matematica come costruzione di significato, il concetto di campo di esperienza, elaborato da Paolo Boero, rappresenta un riferimento teorico centrale per comprendere i processi attraverso cui gli studenti e le studentesse costruiscono conoscenze matematiche a partire dall'interazione con la realtà. Tale concetto nasce nell'ambito delle ricerche condotte dal Nucleo di Ricerca in Didattica (NRD) dell'Università di Genova a partire dagli anni Ottanta, con l'obiettivo di superare una visione della matematica scolastica come insieme di procedure astratte e decontestualizzate (Boero, 2007).

In questo quadro, il campo di esperienza viene definito come "l'insieme delle attività concrete attraverso cui l'allievo si confronta con problemi reali, usando strumenti e linguaggi familiari" (Boero, 2007), configurandosi come un contesto nel quale la matematica emerge come strumento per interpretare fenomeni e risolvere problemi. Diversamente da un'impostazione tradizionale, in cui la teoria precede l'applicazione, il campo di esperienza rovescia questa logica: è l'esperienza concreta a costituire il punto di partenza del processo di apprendimento, mentre la formalizzazione matematica rappresenta un momento successivo.

Questo cambiamento implica una ridefinizione del ruolo della matematica nella didattica: essa non è più un insieme di conoscenze astratte da acquisire, ma un sistema di strumenti concettuali che si sviluppano a partire dall'azione. Gli studenti e le studentesse costruiscono significati attraverso attività che coinvolgono osservazione, manipolazione e confronto (Boero, 2012).

Boero evidenzia come i campi di esperienza possano essere individuati in ambiti della vita quotidiana e scientifica accessibili agli studenti e alle studentesse, quali la misurazione di ombre, l'uso di scale o la gestione di grandezze variabili. In tali contesti, gli studenti e le studentesse affrontano problemi autentici, individuano relazioni e costruiscono modelli. Come sottolineato anche nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo, la matematica assume valore quando consente di "affrontare e porsi problemi significativi" (MIUR, 2012).

Un elemento rilevante della teoria è la presenza di tre contesti interconnessi:

- il contesto esterno, costituito da oggetti, strumenti e rappresentazioni;
- il contesto interno dello studente, relativo alle strategie e alle rappresentazioni mentali attivate;
- il contesto interno dell'insegnante, che riguarda le scelte didattiche e la mediazione

tra sapere e apprendimento (Boero, 2007).

Il processo educativo si sviluppa nell'interazione tra questi tre livelli.

Dal punto di vista metodologico, il lavoro nei campi di esperienza si articola attraverso una routine ricorsiva: una fase iniziale di esplorazione individuale o in piccoli gruppi, seguita da una discussione collettiva, in cui le strategie vengono confrontate e validate, e infine una sintesi guidata dall'insegnante. Questo processo evidenzia come la conoscenza matematica si costruisca attraverso cicli successivi di esplorazione, confronto e formalizzazione (Boero, 2007).

Le ricerche del NRD mostrano come la costruzione del significato matematico avvenga attraverso l'integrazione di dimensione operativa, sociale e simbolica. Gli studenti e le studentesse iniziano agendo su oggetti concreti, discutono e negoziano significati attraverso il linguaggio, e infine formalizzano le relazioni individuate. Le strutture matematiche emergono quindi dall'esperienza e non la precedono (Boero, 2012).

In questo contesto, la conoscenza assume inizialmente una forma operativa, che precede e sostiene la formalizzazione. Le relazioni di proporzionalità, ad esempio, emergono come regolarità osservate nei fenomeni e vengono solo successivamente espresse in forma simbolica. L'astrazione rappresenta quindi un punto di arrivo e non di partenza (Boero, 2012).

È importante sottolineare che il campo di esperienza non può essere ridotto a una fase preliminare rispetto alla teoria. Al contrario, esso rappresenta il luogo stesso in cui il significato matematico prende forma. Come afferma Boero, "l'attività pratica non deve essere vista come una fase preliminare alla teoria, bensì come il luogo stesso dove nasce la comprensione matematica" (Boero, 2012).

Alla luce di queste considerazioni, il campo di esperienza si configura come un dispositivo didattico capace di promuovere una comprensione significativa della matematica, integrando dimensione cognitiva, sociale e operativa.

La presente tesi si colloca all'interno di questa cornice teorica: il fenomeno delle ombre è stato assunto come campo di esperienza privilegiato, attraverso il quale gli studenti e le studentesse sono stati guidati a costruire il concetto di rapporto a partire da un'esperienza concreta, condivisa e progressivamente formalizzata.

1.3 L'apprendimento come attività mediata

In continuità con la prospettiva dei campi di esperienza proposta da Boero, tale concetto viene ulteriormente approfondito e interpretato alla luce dell'*Activity Theory*, che consente di esplicitare l'intreccio tra azione, artefatti e costruzione del pensiero matematico.

L'*Activity Theory*, sviluppata a partire dagli studi dello psicologo e pedagogista Lev Vygotsky (1978) e successivamente approfondita da autori come Aleksej Leont'ev (1978) ed Yrjö Engeström (1987), rappresenta un ulteriore punto di riferimento teorico all'interno della prospettiva della matematica come costruzione di significato. Questa consente di interpretare l'apprendimento non come un processo individuale isolato, ma come un'attività situata, sociale e mediata da strumenti.

Secondo l'*Activity Theory*, ogni processo di apprendimento si sviluppa all'interno di un sistema di attività costituito da diversi elementi interconnessi: il soggetto (lo studente), l'oggetto dell'attività (il compito o il problema), gli strumenti di mediazione, la comunità, le regole e la divisione del lavoro (Engeström, 1987). In questa prospettiva, la conoscenza è costruita attraverso l'interazione tra questi elementi.

Un concetto centrale è quello di mediazione: l'attività cognitiva non avviene in modo diretto, ma è sempre mediata da strumenti, che possono essere sia materiali sia simbolici (Vygotsky, 1978). Gli strumenti svolgono una funzione fondamentale nella costruzione del pensiero, in quanto orientano l'azione e rendono possibile l'elaborazione dei significati.

Nel contesto della didattica della matematica, ciò implica che l'apprendimento non possa essere ridotto a un processo mentale interno, ma debba essere considerato come un'attività che si sviluppa attraverso l'uso di strumenti e l'interazione con gli altri. In linea con la prospettiva socioculturale, la costruzione della conoscenza matematica avviene attraverso le interazioni sociali tra studenti e studentesse e insegnante, che permettono di condividere, discutere e negoziare i significati (Vygotsky, 1978).

La dimensione sociale dell'apprendimento assume quindi un ruolo centrale: il lavoro collaborativo, la discussione e il confronto tra strategie consentono agli studenti e alle studentesse di esplicitare i propri ragionamenti e costruire una comprensione più profonda. La classe può essere interpretata come una comunità di apprendimento, nella quale la conoscenza si sviluppa attraverso processi collettivi (Engeström, 1987).

Allo stesso tempo, l'*Activity Theory* attribuisce un ruolo fondamentale alla struttura dell'attività. L'apprendimento è orientato verso un obiettivo e si realizza attraverso azioni e operazioni che si sviluppano nel tempo (Leont'ev, 1978). Questo implica che la progettazione didattica debba considerare l'organizzazione dell'attività al pari dei contenuti:

i compiti proposti, gli strumenti utilizzati, le modalità di interazione e la distribuzione dei ruoli. Strumenti quali il metro, le tabelle, i grafici o le rappresentazioni delle ombre assumono un ruolo centrale: essi non sono semplici supporti, ma veri e propri mediatori cognitivi, che permettono agli studenti e alle studentesse di organizzare l'esperienza e costruire significati matematici. Attraverso l'uso di tali strumenti, gli studenti sono guidati a passare dall'azione concreta alla rappresentazione e alla formalizzazione, in un processo che integra dimensione operativa e simbolica (Vygotsky, 1978).

L'Activity Theory consente inoltre di interpretare l'apprendimento come un processo dinamico e situato, che si sviluppa nel tempo attraverso l'interazione tra soggetti, strumenti e contesto. Cambia la percezione della conoscenza matematica: da prodotto statico a risultato di un'attività condivisa e mediata (Engeström, 1987).

Il percorso didattico *Misure e Ombre* è stato progettato come un sistema di attività in cui gli studenti e le studentesse, organizzati in gruppi e supportati da strumenti concreti e simbolici, sono stati coinvolti in un processo di esplorazione, misurazione e discussione.

Qui, la costruzione del concetto di rapporto è avvenuta attraverso un'attività mediata, in cui strumenti, linguaggio e interazione sociale hanno svolto un ruolo determinante.

1.4 La dimensione affettiva nell'apprendimento matematico

Il campo di esperienza e l'attività mediata si configurano come contesti privilegiati per la costruzione del significato matematico. Tuttavia, affinché tali contesti possano realmente favorire un apprendimento significativo, risulta fondamentale considerare anche la dimensione affettiva dell'apprendimento. L'esperienza, infatti, non viene vissuta in modo neutro dagli studenti e dalle studentesse, ma è sempre accompagnata da emozioni, convinzioni e percezioni di sé che influenzano profondamente il modo in cui essi si rapportano alla matematica.

Nell'ambito della didattica della matematica, l'apprendimento deve essere interpretato come il risultato di una continua interazione tra dimensioni cognitive ed affettive: emozioni, convinzioni e percezioni di sé influenzano profondamente il modo in cui gli studenti e le studentesse si avvicinano alla disciplina, incidendo sui processi di attenzione, partecipazione e costruzione del significato. Come sottolinea Rosetta Zan, docente di Didattica della Matematica presso l'Università di Pisa, l'emozione è un fattore che orienta l'attività cognitiva, modulando l'attenzione e il coinvolgimento dello studente e della studentessa, non può essere considerato come un elemento accessorio (Zan, 2004).

L'esperienza matematica può assumere connotazioni molto diverse: per alcuni studenti e studentesse è fonte di curiosità e soddisfazione, per altri è associata a vissuti di ansia, paura o inadeguatezza. Tali differenze non dipendono esclusivamente dal livello di competenza, ma sono legate al modo in cui il discente interpreta la matematica e il proprio rapporto con essa.

Un contributo significativo è rappresentato dal lavoro di Rosetta Zan e Pietro Di Martino, che propongono un modello tridimensionale dell'atteggiamento del discente verso la matematica, costruito a partire dalle narrazioni degli studenti e delle studentesse (Di Martino & Zan, 2010; 2011). L'interazione dinamica di disposizione emotiva, visione della matematica e competenza percepita rappresenta il sistema complesso che da origine all'atteggiamento che il discente ha verso la materia.

La **disposizione emotiva** riguarda l'insieme dei vissuti che lo studente o la studentessa associa alla matematica e si manifesta attraverso emozioni quali interesse, piacere, ansia o rifiuto. Sebbene spesso venga sintetizzata in espressioni dicotomiche come "mi piace/non mi piace", essa rappresenta una dimensione complessa, che influenza il modo in cui lo studente affronta i compiti matematici e si coinvolge nelle attività.

La **visione della matematica** si riferisce alle convinzioni relative alla natura della disciplina.

Risulta rilevante, citare la distinzione proposta da Richard Skemp, matematico inglese e ricercatore in didattica della matematica, tra comprensione strumentale e comprensione relazionale (Skemp, 1976). Una visione strumentale, centrata sull'applicazione di regole e procedure, è spesso associata all'idea che il successo dipenda dalla memorizzazione; al contrario, una visione relazionale riconosce la matematica come sistema di significati da comprendere e collegare.

La **competenza percepita**, infine, riguarda la rappresentazione che lo studente o la studentessa ha delle proprie capacità in matematica. Essa è strettamente connessa al concetto di autoefficacia e influisce in modo determinante sulla motivazione, sulla perseveranza e sulla disponibilità ad affrontare compiti complessi.

Un elemento centrale del modello è rappresentato dall'interazione tra queste tre dimensioni, che operando in modo dipendente, si influenzano reciprocamente. Le ricerche evidenziano, ad esempio, come una bassa competenza percepita sia frequentemente associata a una visione strumentale della matematica e a una disposizione emotiva negativa. Esperienze ripetute di insuccesso possono infatti portare lo studente o la studentessa a sviluppare la convinzione di non essere in grado di controllare il proprio successo, dando origine a forme di atteggiamento rinunciatario, caratterizzate dall'evitamento del compito o da risposte casuali (Di Martino & Zan, 2010).

Questo modello consente inoltre di superare una visione semplificata dell'atteggiamento come dicotomia positivo/negativo. Un atteggiamento può essere considerato problematico anche quando solo una delle dimensioni risulta negativa, dando origine a configurazioni differenti che richiedono interpretazioni e interventi diversificati. A fini operativi, gli autori Zan e Di Martino propongono una semplificazione basata su polarità opposte, utile per individuare profili ricorrenti senza rinunciare alla complessità del costrutto:

- Disposizione emotiva: positiva/negativa;
- Visione della matematica: relazionale/strumentale;
- Competenza percepita: alta/bassa;

All'interno della dimensione affettiva, un ruolo rilevante è assunto anche dal concetto di errore. Nel libro *Difficoltà in Matematica*, Rosetta Zan (2007) sottolinea come l'errore non deve essere interpretato esclusivamente come segnale di fallimento, ma come una finestra privilegiata sui processi di apprendimento e sulle difficoltà degli studenti e delle studentesse. L'analisi dell'errore consente infatti di comprendere le strategie adottate dagli studenti e dalle studentesse e le interpretazioni che essi costruiscono rispetto ai concetti matematici. Le riflessioni riportate nel testo mostrano come, nella storia del pensiero scientifico, l'errore

sia stato riconosciuto come elemento costitutivo della conoscenza. I filosofi Popper e Bachelard evidenziano che il progresso scientifico avviene proprio attraverso il superamento degli errori e degli ostacoli epistemologici, sottolineando come “si impari di più dagli errori che dalle idee corrette” (Zan, 2007). Allo stesso modo, in ambito didattico, l'errore può essere interpretato come occasione di apprendimento e come strumento per comprendere i processi cognitivi degli studenti e delle studentesse.

Tuttavia, la pratica scolastica tende spesso a privilegiare la correttezza del risultato concentrandosi sul risultato della performance, rispetto alla comprensione dei processi, contribuendo a costruire negli studenti e nelle studentesse una relazione negativa con l'errore. Questo può avere importanti ricadute sulla dimensione affettiva: la paura di sbagliare può ridurre la partecipazione, aumentare l'ansia e compromettere la percezione di competenza (Zan, 2007).

Diventa quindi fondamentale promuovere un ambiente di apprendimento in cui l'errore sia riconosciuto come parte integrante del percorso di costruzione del sapere, favorendo un atteggiamento più consapevole e positivo nei confronti della matematica.

Nella presente tesi si interpreta l'atteggiamento degli studenti e delle studentesse attraverso le tre dimensioni individuate da Di Martino e Zan, ponendo particolare attenzione al ruolo dell'esperienza e del contesto nel modificare la disposizione emotiva, la visione della matematica e la competenza percepita.

1.5 Il pensiero proporzionale e le difficoltà degli studenti e studentesse

Il **pensiero proporzionale** costituisce una competenza centrale nello sviluppo del pensiero matematico, poiché consente di interpretare e modellizzare relazioni tra grandezze variabili. Esso può essere definito come la capacità di ragionare su relazioni quantitative costanti, riconoscendo le grandezze invarianti in seguito a trasformazioni. Il pensiero proporzionale rappresenta una forma evoluta di ragionamento matematico, che permette di passare da una visione aritmetica a una visione relazionale delle quantità (Fischbein, 1987).

Dal punto di vista matematico, il concetto di rapporto costituisce il fondamento del pensiero proporzionale. Il rapporto esprime una relazione tra due grandezze mediante una divisione, mentre la proporzione rappresenta l'uguaglianza tra due rapporti. Questo nucleo concettuale si sviluppa all'interno di molteplici contesti: situazioni di scala, confronti tra grandezze, fenomeni geometrici e problemi della vita quotidiana. In ambito didattico, tali concetti trovano una prima forma di significato in esperienze concrete, nelle quali il rapporto emerge come relazione tra quantità. Ad esempio, in attività di distribuzione o misurazione, il rapporto può essere interpretato come "quota" o "unità di misura condivisa", rendendo evidente il legame tra le grandezze coinvolte (Rocco, M. 2017).

Il pensiero proporzionale si manifesta attraverso diverse competenze: il riconoscimento di relazioni tra quantità, la capacità di operare trasformazioni scalari, l'interpretazione di rapporti e proporzioni, e la comprensione di fenomeni di similitudine.

Un esempio è offerto dall'osservazione delle ombre, che consente di cogliere relazioni proporzionali tra lunghezze. Nella tradizione matematica, tale intuizione trova espressione nella figura del filosofo e astronomo greco Talete, il quale avrebbe determinato l'altezza di una piramide attraverso il confronto tra il rapporto altezza-ombra di un oggetto noto e quello della piramide stessa (Iannamorelli, B. 2019). Questo episodio evidenzia come il pensiero proporzionale nasca dall'esperienza e si sviluppi progressivamente verso la formalizzazione.

Le ricerche in didattica della matematica mettono in luce alcune caratteristiche ricorrenti nei processi di apprendimento del pensiero proporzionale. Gli studenti e le studentesse sviluppano strategie di ragionamento che si evolvono gradualmente, passando da modalità intuitive a forme più strutturate di pensiero moltiplicativo. In questa tesi, la costruzione del significato di rapporto assume un ruolo fondamentale, in quanto consente di interpretare le relazioni tra grandezze in termini di covariazione e non solo di trasformazione numerica

(Fischbein, 1987).

Un contributo significativo alla comprensione dello sviluppo del pensiero proporzionale è offerto dagli studi di Angela Pesci, che analizzano il ruolo della discussione di classe nella costruzione dei significati matematici. Nel volume *Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe*, Pesci (2011) evidenzia come il passaggio a un ragionamento proporzionale non avvenga in modo immediato, ma attraverso un processo progressivo di rielaborazione delle strategie spontanee degli studenti.

Le ricerche documentano come, di fronte a problemi proporzionali, gli studenti tendano inizialmente a adottare strategie di tipo additivo. Ad esempio, in situazioni in cui si richiede di confrontare quantità proporzionali, gli alunni possono ragionare in termini di differenza anziché di rapporto. In un problema del tipo:

“Se 2 quaderni costano 4 euro, quanto costano 6 quaderni?”

Il discente potrebbe costruire il ragionamento aggiungendo valori, pensando che dal numero 2 al numero 6 c'è un aumento di 4 quindi $+4$, e dare come risposta “4 euro”, dimostrando una comprensione errata basata sull'addizione piuttosto che sulla moltiplicazione.

Attraverso la discussione collettiva, queste strategie vengono esplicitate, confrontate e progressivamente rielaborate. In particolare, il confronto tra pari permette agli studenti di riconoscere l'inadeguatezza delle strategie additive in contesti proporzionali e di avvicinarsi a forme di ragionamento moltiplicativo.

Nell'esempio precedente, il discente avrebbe potuto costruire il ragionamento riconoscendo il 6 come il triplo di 2, dando come risposta “il costo deve essere il triplo di 4”, costruendo così una prima forma di relazione proporzionale corretta.

Pesci evidenzia come questo passaggio non sia semplicemente cognitivo, ma profondamente legato alla dimensione sociale dell'apprendimento. La discussione di classe rappresenta infatti il luogo in cui le idee vengono messe in gioco, validate o ristrutturare. Gli studenti e le studentesse sono chiamati a giustificare le proprie strategie, a confrontarsi con quelle degli altri e a rielaborare il proprio pensiero alla luce del dialogo.

Un ulteriore esempio rilevante riguarda situazioni di scala, in cui gli studenti e le studentesse devono interpretare relazioni tra grandezze. Di fronte a una rappresentazione in scala come avviene per esempio in una mappa, il discente potrebbe considerare le differenze tra le misure, oppure riconoscere relazioni di tipo moltiplicativo come “ogni centimetro rappresenta sempre la stessa quantità”. È proprio il confronto tra queste interpretazioni a permettere la costruzione progressiva del concetto di rapporto come relazione costante tra grandezze.

Le ricerche mostrano inoltre come il linguaggio rivesta un ruolo fondamentale nello sviluppo del pensiero proporzionale. Espressioni come “il doppio”, “il triplo”, “ogni volta” o “sempre lo

stesso rapporto” diventano strumenti attraverso cui gli studenti e le studentesse costruiscono e consolidano il significato delle relazioni matematiche.

Come evidenziato anche dagli esempi, il ragionamento si struttura inizialmente su schemi di tipo additivo, che rappresentano una forma di pensiero consolidata nelle esperienze aritmetiche di base. Il passaggio a un pensiero moltiplicativo e relazionale richiede un processo di riorganizzazione concettuale, nel quale il rapporto viene **riconosciuto** come relazione invariabile tra grandezze. Questo passaggio si realizza attraverso esperienze che permettono di osservare regolarità, confrontare situazioni e costruire significati condivisi. Parte della complessità è la gestione dei diversi registri di rappresentazione. Il pensiero proporzionale implica la capacità di coordinare rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche e simboliche, riconoscendo la stessa relazione in forme differenti. La padronanza di tali registri consente di consolidare la comprensione del concetto e di applicarlo in contesti diversificati.

Dal punto di vista didattico, la costruzione del pensiero proporzionale si sviluppa con maggiore efficacia all'interno di contesti significativi e situati. Le attività che coinvolgono misurazioni, confronti e modellizzazione favoriscono l'emergere di relazioni proporzionali e permettono agli studenti di attribuire significato ai concetti matematici. Boero sottolinea il ruolo dei **campi di esperienza** come ambienti privilegiati per la costruzione di concetti matematici attraverso l'azione e la riflessione (Boero, 2004).

Il pensiero proporzionale si configura quindi come un ambito di apprendimento complesso e articolato, nel quale dimensioni cognitive, rappresentative e didattiche si intrecciano. La costruzione del concetto di rapporto richiede tempi distesi, esperienze significative e momenti di formalizzazione progressiva.

Il progetto *Ombre e misure* è rivolto alla scuola secondaria di primo grado, in cui il fenomeno delle ombre rappresenta un contesto esperienziale per favorire la costruzione del pensiero proporzionale, promuovendo una comprensione della materia fondata sulla relazione tra grandezze e sul significato matematico delle situazioni osservate.

2 Quadro teorico: Pedagogia dell'esperienza

Per comprendere il ruolo dell'Outdoor Education nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica, è necessario richiamarne i principali riferimenti teorici e analizzarne i presupposti educativi. In questa prospettiva, l'apprendimento esperienziale rappresenta una radice pedagogica fondamentale, poiché attribuisce valore all'esperienza diretta come elemento generativo di conoscenza e significato. L'ambiente naturale assume il ruolo di contesto privilegiato di apprendimento, capace di offrire situazioni autentiche, stimolanti e ricche di opportunità per l'azione e la riflessione.

All'interno di questo quadro è possibile mettere in evidenza il legame tra *Outdoor Education* e didattica della matematica, sottolineando come i concetti matematici possano emergere a partire dall'esperienza concreta, attraverso processi di osservazione, esplorazione e interpretazione della realtà. L'ambiente esterno diventa così uno spazio in cui i discenti possono costruire significati, collegando il sapere matematico ai fenomeni naturali e alle situazioni vissute.

Questo approccio costituisce il fondamento del progetto didattico *Ombre e misure*, che si sviluppa proprio a partire da tali implicazioni educative, integrando esperienza, contesto e costruzione condivisa della conoscenza matematica.

2.1 Outdoor Education: definizione e principi

Nel quadro teorico delineato nel capitolo precedente, in cui l'apprendimento matematico è stato interpretato come costruzione di significato mediata dall'esperienza e dall'interazione, si colloca l'Outdoor Education (OE) come approccio capace di valorizzare tali dimensioni all'interno di contesti di apprendimento situati.

L'Outdoor Education si configura come un approccio pedagogico che utilizza in modo intenzionale gli ambienti esterni alla scuola come contesti di apprendimento, promuovendo una didattica attiva, esperienziale e in relazione con il territorio. In questa prospettiva, l'apprendimento prende forma attraverso l'esperienza diretta e il contatto concreto con la realtà, valorizzando il ruolo attivo dello studente e della studentessa nella costruzione delle conoscenze (Schenetti, Salvaterra, Rossini, 2015; Giunti et al., 2025).

L'OE comprende una pluralità di esperienze educative accomunate da alcuni elementi

fondamentali: lo svolgimento in ambienti esterni, naturali o urbani, il coinvolgimento attivo degli studenti e delle studentesse e la connessione con il contesto in cui si realizza l'esperienza didattica. Gli spazi di apprendimento includono parchi, giardini, cortili scolastici, ma anche ambienti urbani, che diventano luoghi significativi in cui il discente entra in relazione diretta con il mondo. Questo approccio coinvolge la persona nella sua globalità, integrando dimensione cognitiva, corporea, affettiva e relazionale (Schenetti, Salvaterra, Rossini, 2015).

Si prendono in considerazione alcune dimensioni pedagogiche centrali.

Una prima dimensione riguarda l'apprendimento all'aperto come scelta didattica consapevole, che riconosce l'ambiente come risorsa educativa. Una seconda dimensione è rappresentata dall'apprendimento esperienziale, secondo cui la conoscenza si costruisce attraverso l'azione e la riflessione sull'esperienza (Kolb, 1984). Una terza dimensione riguarda l'apprendimento situato, che attribuisce valore ai contesti autentici nella costruzione dei significati (Brown, Collins, Duguid, 1989), come evidenziato anche nelle linee guida di *Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa* (INDIRE) sull'Outdoor Education (Giunti et al., 2025).

Un aspetto particolarmente rilevante dell'Outdoor Education è l'intenzionalità educativa, che orienta la progettazione delle esperienze e consente di trasformare il contatto con l'ambiente in occasione di apprendimento significativo. L'ambiente esterno diventa uno spazio didattico strutturato, nel quale il docente guida e sostiene il processo di apprendimento (Schenetti, Salvaterra, Rossini, 2015; Giunti et al., 2025).

Tra i principi fondamentali dell'OE emerge il valore dell'esperienza diretta, che si realizza attraverso metodologie attive e situazioni autentiche. A questo si affianca il ruolo del corpo, che diventa mediatore dell'apprendimento e permette di integrare percezione, azione ed emozione (Dewey, 1938). L'apprendimento assume così una dimensione olistica, in cui le diverse componenti della stessa persona partecipano in modo integrato al processo conoscitivo.

Un ulteriore elemento distintivo è rappresentato dalla dimensione relazionale. L'Outdoor Education favorisce la collaborazione tra pari e la costruzione condivisa dei saperi, oltre a promuovere una relazione significativa e profonda con l'ambiente e con il territorio. Le esperienze si sviluppano quindi come occasioni di interazione, confronto e co-costruzione della conoscenza (Schenetti, Salvaterra, Rossini, 2015).

Infine, l'OE si caratterizza per la sua natura interdisciplinare e per la continuità tra contesti indoor e outdoor, che consente di costruire percorsi di apprendimento coerenti e significativi (Giunti et al., 2025).

L'Outdoor Education rappresenta un contesto efficace per lo sviluppo di una didattica della matematica di tipo esperienziale, in cui i concetti emergono dall'interazione con la realtà e dall'azione concreta degli studenti e delle studentesse.

2.2 Radici pedagogiche dell'apprendimento esperienziale e ruolo dell'ambiente

A partire dalla definizione di Outdoor Education come approccio educativo fondato sull'esperienza diretta, sul coinvolgimento attivo e sulla relazione con l'ambiente, è possibile approfondirne le radici pedagogiche, che trovano fondamento nelle teorie dell'apprendimento esperienziale e nella valorizzazione dell'ambiente come elemento attivo nei processi educativi.

Il valore dell'esperienza come fondamento dell'apprendimento trova una prima sistematizzazione nel pensiero del pedagogo e filosofo statunitense **John Dewey**, che interpreta l'educazione come un processo continuo di interazione tra individuo e ambiente. Dewey concepisce l'essere umano come unità psico-fisica, superando la tradizionale separazione tra mente e corpo e riconoscendo come i processi cognitivi si sviluppino in stretta relazione con le condizioni ambientali in cui il soggetto agisce. L'ambiente assume così una valenza pedagogica centrale, in quanto non solo ospita l'esperienza, ma contribuisce attivamente a strutturarla e a orientarne gli esiti.

Nel suo lavoro *Experience and Education* (Dewey, 1938), egli definisce l'esperienza come una relazione dinamica caratterizzata dai principi di continuità e interazione: ogni esperienza si collega alle precedenti e condiziona quelle future, mentre il significato emerge dall'interazione tra il soggetto e il contesto. L'apprendimento si configura come un processo riflessivo, in cui l'azione acquista valore formativo attraverso la rielaborazione cognitiva: “non impariamo dall'esperienza... impariamo riflettendo sull'esperienza” (Dewey, 1938).

In questa prospettiva, l'esperienza diretta – che coinvolge i sensi, il corpo e l'azione – rappresenta il punto di partenza per la costruzione della conoscenza, mentre l'ambiente educativo è chiamato a offrire situazioni ricche, problematiche e generative. L'educatore assume il compito di selezionare e organizzare tali esperienze, individuando quelle capaci di stimolare nuove forme di osservazione, interpretazione e giudizio, ampliando così il campo dell'esperienza futura (Dewey, 1938).

Un contributo altrettanto rilevante è offerto dalla pedagoga italiana **Maria Montessori**, la cui proposta educativa si fonda sull'interazione tra azione, percezione e sviluppo cognitivo. La sua formazione medico-scientifica la porta a considerare il bambino come un organismo in sviluppo, per il quale il benessere psicofisico rappresenta una condizione essenziale dell'apprendimento. Nel metodo montessoriano, la conoscenza si costruisce attraverso la manipolazione di materiali strutturati, progettati per rendere accessibili anche concetti

astratti mediante esperienze sensoriali e operative (Montessori, 1907). L'esperienza assume così una funzione cognitiva, in quanto consente di organizzare le percezioni e di costruire progressivamente rappresentazioni mentali stabili.

Elemento centrale della teoria montessoriana è il concetto di "ambiente preparato", uno spazio educativo organizzato intenzionalmente per favorire autonomia, libertà di esplorazione e autoapprendimento. L'ambiente non si limita a sostenere l'azione, ma la orienta e la rende significativa, configurandosi come un vero e proprio dispositivo pedagogico. Il ruolo dell'insegnante, che nella pedagogia montessoriana viene definito come "direttrice", si ridefinisce come funzione di guida e osservazione, capace di predisporre contesti ricchi e di accompagnare il processo di costruzione della conoscenza senza sostituirsi all'attività del bambino.

All'interno della riflessione montessoriana emerge con particolare forza il valore educativo del rapporto diretto con la natura. Montessori evidenzia come l'allontanamento progressivo dell'essere umano dall'ambiente naturale abbia prodotto una riduzione delle possibilità di esperienza autentica, sottolineando la necessità di restituire al bambino occasioni di contatto diretto con il mondo naturale. Il bambino, infatti, ha bisogno di "vivere" la natura, di sperimentarla attraverso i sensi e l'azione, sviluppando così una relazione profonda con l'ambiente (Montessori, 1934).

Il contributo dello psicologo statunitense **Jerome Bruner** si inserisce in questa tradizione, sviluppando una teoria dell'apprendimento centrata sulla scoperta e sulla costruzione attiva della conoscenza. Bruner (1961) evidenzia come la comprensione si sviluppi attraverso un processo progressivo che parte dall'esperienza concreta e si articola nelle forme di rappresentazione enattiva, iconica e simbolica. L'azione e l'esperienza diretta costituiscono la base per la costruzione delle rappresentazioni più astratte, in un processo di progressiva formalizzazione. L'ambiente assume così il ruolo di spazio di esplorazione e di scoperta, in cui lo studente può agire, osservare, formulare ipotesi e costruire significati. Il docente si configura come facilitatore, progettando situazioni che stimolino la curiosità e sostengano l'attività cognitiva.

Una declinazione particolarmente significativa del rapporto tra esperienza e ambiente si ritrova nella pedagogia scout di **Robert Baden-Powell**, che pone al centro l'educazione attraverso l'azione e la vita all'aria aperta. Nel testo *Scouting for Boys* (Baden-Powell, 1908) propone un modello educativo fondato sul principio del *learning by doing*, in cui l'ambiente naturale diventa un contesto privilegiato per l'apprendimento. Le attività all'aperto coinvolgono il soggetto in esperienze autentiche che richiedono osservazione, decisione e responsabilità, favorendo lo sviluppo di competenze attraverso l'interazione diretta con la

realtà.

L'esperienza scout integra dimensione cognitiva, corporea e affettiva, configurandosi come un apprendimento situato e incarnato. L'immersione nella natura favorisce lo sviluppo dell'autonomia, della consapevolezza e della capacità di affrontare situazioni complesse, mentre il gruppo rappresenta il contesto in cui le competenze vengono costruite e condivise (Morani, 2018; Malara, 2023). Il gioco, l'avventura e la responsabilità assumono una funzione educativa centrale, contribuendo a rendere l'apprendimento significativo e motivante.

Queste prospettive convergono nel riconoscere l'esperienza e l'ambiente come elementi costitutivi e interdipendenti del processo educativo. L'apprendimento si sviluppa attraverso l'azione situata, il coinvolgimento del corpo e l'interazione con contesti significativi, in cui dimensioni cognitive, affettive e sociali si intrecciano nella costruzione della conoscenza. L'ambiente si configura così come uno spazio educativo attivo, capace di orientare l'esperienza e di sostenere la costruzione dei significati.

Tale visione trova ulteriore sviluppo nelle teorie dell'apprendimento situato, secondo cui la conoscenza si costruisce all'interno di contesti sociali e culturali specifici, attraverso la partecipazione a pratiche condivise (Lave, Wenger, 1991). L'apprendimento assume quindi una dimensione contestuale e relazionale, in cui il significato emerge dall'interazione tra soggetto, attività e ambiente.

Da questo quadro teorico, l'ambiente naturale si declina come contesto efficace per promuovere apprendimenti significativi. La presenza di fenomeni osservabili, la possibilità di interazione diretta e la ricchezza degli stimoli favoriscono processi di esplorazione, osservazione e modellizzazione, sostenendo la costruzione attiva dei saperi (Schenetti, Salvaterra, Rossini, 2015; Giunti et al., 2025).

L'Outdoor Education rappresenta dunque una concretizzazione coerente di tali principi, offrendo un contesto educativo in cui esperienza, ambiente e apprendimento si integrano in modo profondo e significativo.

2.3 Outdoor Education e didattica della matematica

Risulta significativo indagare il rapporto tra Outdoor Education e didattica della matematica, per comprendere in che modo tali principi possano tradursi in pratiche didattiche specifiche. L'Outdoor Education offre infatti un contesto privilegiato per l'insegnamento della matematica, in quanto consente di collocare i concetti all'interno di situazioni aperte, dinamiche e ricche di stimoli. La matematica si configura così come strumento per interpretare la realtà, permettendo agli studenti di descrivere, misurare e modellizzare fenomeni osservabili. L'apprendimento matematico si sviluppa così a partire dall'esperienza, attraverso un processo che conduce progressivamente alla formalizzazione dei concetti.

Il legame tra matematica ed esperienza trova un importante riferimento teorico nella didattica della matematica contemporanea, che riconosce il ruolo dei contesti significativi nella costruzione del significato. In particolare, il concetto di campo di esperienza proposto da Boero evidenzia come gli studenti costruiscano conoscenze matematiche a partire da situazioni concrete, nelle quali osservano fenomeni, formulano ipotesi e individuano relazioni (Boero, 2007). L'ambiente naturale si presta in modo particolarmente efficace a questa prospettiva, offrendo contesti autentici nei quali la matematica emerge come risposta a problemi reali.

Un contributo particolarmente rilevante in questa direzione è offerto dal lavoro delle docenti Elisabetta Galliani, Annamaria Pesce e Luisella Pollero (2019), che documentano il percorso di ricerca triennale svolto in una scuola, centrato sull'apprendimento della matematica a partire dall'osservazione di fenomeni naturali, in particolare legati alla luce e alle ombre.

Nel loro libro *Oltre noi e il sole. Imparare a ragionare e argomentare*, le autrici descrivono un percorso didattico in cui gli studenti sono coinvolti in attività di osservazione, misurazione e interpretazione delle ombre, con l'obiettivo di sviluppare competenze di ragionamento, argomentazione e modellizzazione. Il fenomeno naturale diventa un campo di esperienza all'interno del quale gli studenti costruiscono progressivamente concetti matematici, a partire da situazioni concrete e condivise.

La ricerca evidenzia come il lavoro su fenomeni reali favorisca la costruzione di significati matematici attraverso processi di esplorazione, confronto e discussione. Gli studenti e le studentesse osservano variazioni, individuano regolarità e formulano ipotesi, sviluppando una comprensione progressiva delle relazioni tra grandezze. In questo contesto, l'attività matematica si configura come pratica argomentativa, in cui il confronto tra pari e la costruzione condivisa delle spiegazioni assumono un ruolo centrale (Galliani, Pesce,

Pollero, 2019).

Il passaggio dall'esperienza alla formalizzazione è un aspetto significativo. La formalizzazione delle relazioni matematiche emerge dall'analisi dei fenomeni osservati: non vengono introdotte in modo astratto. Le proporzioni e i rapporti si costruiscono così come strumenti per interpretare la realtà, in un processo che integra dimensione empirica e riflessione teorica.

Questi risultati confermano come l'utilizzo di contesti naturali, e in particolare del fenomeno delle ombre, rappresenti un ambiente particolarmente efficace per lo sviluppo del pensiero matematico, offrendo agli studenti opportunità di apprendimento autentico e significativo.

All'interno dell'Outdoor Education, la matematica assume una dimensione fortemente interdisciplinare. L'osservazione dei fenomeni naturali permette di intrecciare matematica, scienze e geografia, favorendo una comprensione integrata della realtà. Elementi quali la luce, le ombre, le distanze, le forme e le trasformazioni nello spazio offrono occasioni per esplorare concetti fondamentali come misura, proporzione e relazione tra grandezze. In questi contesti, la matematica si sviluppa come linguaggio per descrivere fenomeni, e non come insieme isolato di procedure.

L'apprendimento all'aperto favorisce inoltre lo sviluppo di competenze trasversali legate alla creatività, al problem solving e al pensiero critico. Le situazioni non strutturate richiedono agli studenti di adattare strategie, prendere decisioni e rielaborare le proprie conoscenze in funzione del contesto. L'esperienza diretta consente di collegare teoria e pratica, sostenendo una comprensione più profonda dei concetti matematici. Come evidenziato nella letteratura didattica, l'esperienza concreta rappresenta un elemento fondamentale per la costruzione del significato matematico (Boero, 2007), mentre il confronto con situazioni aperte stimola la flessibilità cognitiva e la capacità di rielaborazione.

In questa prospettiva, l'attività matematica assume una dimensione investigativa: gli studenti osservano, raccolgono dati, confrontano risultati e costruiscono modelli interpretativi. Questo approccio si avvicina a quello della matematica come pratica, in cui il sapere si sviluppa attraverso processi di esplorazione, argomentazione e riflessione (Schoenfeld, 1992). Le attività outdoor favoriscono inoltre il lavoro di gruppo e la dimensione sociale dell'apprendimento: la collaborazione, il confronto tra strategie e la negoziazione dei significati diventano elementi centrali del processo.

L'ambiente naturale consente anche il passaggio tra diversi registri di rappresentazione, aspetto fondamentale per la costruzione del significato matematico. Gli studenti possono partire dall'esperienza concreta come misurare un'ombra, passare alla rappresentazione grafica e infine arrivare alla formalizzazione simbolica, sviluppando la capacità di coordinare

diversi livelli di rappresentazione (Duval, 1995). Questo processo favorisce una comprensione più stabile e trasferibile dei concetti.

Numerose esperienze didattiche mostrano come l'apprendimento della matematica in contesti non tradizionali favorisca il coinvolgimento e la partecipazione degli studenti. Attività come la misurazione di elementi naturali, la costruzione di mappe, l'analisi di proporzioni in contesti reali o la raccolta e interpretazione di dati ambientali permettono agli studenti di riconoscere la presenza della matematica nella realtà quotidiana e di attribuirle significato.

Un ulteriore elemento rilevante riguarda la dimensione affettiva dell'apprendimento matematico. L'esperienza in ambiente naturale favorisce curiosità, interesse e motivazione, contribuendo a costruire un rapporto più positivo con la disciplina. Le attività all'aperto permettono agli studenti di vivere la matematica come esperienza significativa e accessibile, sostenendo lo sviluppo della competenza percepita e della fiducia nelle proprie capacità (Di Martino, Zan, 2010).

In questo quadro, l'Outdoor Education si configura come un approccio didattico capace di integrare dimensione cognitiva, affettiva e corporea, offrendo agli studenti opportunità di apprendimento autentico e significativo. La matematica emerge così come strumento per leggere e interpretare il mondo, sviluppando competenze che vanno oltre la semplice applicazione di procedure.

Il progetto *Ombre e misure* è un percorso didattico basato sull'osservazione e la misurazione delle ombre, attraverso il quale gli studenti e le studentesse sono guidati a costruire il concetto di rapporto a partire da un'esperienza concreta, condivisa e che progressivamente verrà formalizzata.

2.4 Implicazioni educative e collegamento con la ricerca

Le considerazioni sviluppate nel paragrafo precedente in relazione al rapporto tra Outdoor Education e didattica della matematica evidenziano come l'apprendimento si sviluppi attraverso l'interazione tra esperienza, ambiente e costruzione del significato. In questo quadro, l'Outdoor Education si configura come un approccio didattico capace di promuovere un apprendimento attivo, situato e significativo, in cui lo studente assume un ruolo centrale nel processo di costruzione della conoscenza.

Dal punto di vista educativo, l'utilizzo dell'ambiente naturale come contesto di apprendimento favorisce lo sviluppo di competenze cognitive, affettive e sociali. L'esperienza diretta consente agli studenti di osservare fenomeni, formulare ipotesi e costruire modelli interpretativi, sostenendo lo sviluppo del pensiero scientifico e matematico. Allo stesso tempo, il coinvolgimento attivo e corporeo contribuisce a rafforzare la motivazione e il senso di competenza, elementi centrali nella relazione con la matematica (Di Martino, Zan, 2010).

L'Outdoor Education permette inoltre di valorizzare la dimensione sociale dell'apprendimento, promuovendo il lavoro di gruppo, il confronto tra pari e la costruzione condivisa dei significati. In questi contesti, il sapere si sviluppa attraverso il dialogo e la negoziazione, in linea con le prospettive dell'apprendimento situato (Lave, Wenger, 1991). Dal punto di vista didattico, emerge l'importanza di progettare attività che partano da fenomeni osservabili e significativi per gli studenti, favorendo il passaggio dall'esperienza alla formalizzazione. In questo senso, l'insegnante assume il ruolo di mediatore, chiamato a costruire contesti di apprendimento ricchi e a guidare gli studenti nel processo di costruzione dei concetti matematici.

Queste considerazioni risultano particolarmente rilevanti per l'insegnamento della matematica, disciplina che spesso viene percepita come astratta e distante dall'esperienza. L'Outdoor Education offre la possibilità di restituire alla matematica una dimensione concreta e significativa, permettendo agli studenti di riconoscerne il ruolo nella lettura e interpretazione della realtà.

Il progetto "Ombre e misure" è stato progettato come un percorso di apprendimento outdoor, in cui gli studenti sono stati coinvolti in attività di osservazione e misurazione delle ombre, con l'obiettivo di costruire il concetto di rapporto a partire da un'esperienza concreta. Il fenomeno delle ombre è stato utilizzato come campo di esperienza attraverso il quale gli

studenti e le studentesse hanno potuto esplorare relazioni tra grandezze, formulare ipotesi e avviare un processo di formalizzazione matematica.

In questo senso, il progetto si propone di indagare in che modo un'esperienza didattica basata sull'Outdoor Education possa influenzare non solo la comprensione dei concetti matematici, ma anche la dimensione affettiva dell'apprendimento, contribuendo a costruire un rapporto più consapevole e positivo con la matematica.

3 Materiali e metodi

3.1 Contesto della ricerca

La ricerca è stata condotta presso una scuola secondaria di primo nella città di Pavia. La scuola dispone di spazi interni ed esterni che hanno consentito lo svolgimento del progetto in contesti differenti: in particolare, alcune attività sono state realizzate nel laboratorio di scienze, mentre altre si sono svolte nel cortile all'aperto, interno al complesso scolastico. Questa organizzazione ha permesso di integrare momenti di lavoro in ambiente strutturato con attività all'aperto.

Il progetto ha coinvolto una classe seconda della scuola secondaria di primo grado, composta da 19 studenti e studentesse. Il gruppo classe si presentava eterogeneo per livelli di competenza e modalità di partecipazione. All'interno della classe era presente uno studente con bisogni educativi speciali (BES), supportato dall'insegnante di sostegno, e una studentessa con disturbi specifici dell'apprendimento (DSA). La progettazione delle attività ha tenuto conto di tali caratteristiche, prevedendo modalità di lavoro inclusive e accessibili a tutti gli studenti e le studentesse.

Al fine di favorire un clima di fiducia e garantire maggiore autenticità nelle risposte, è stata adottata una modalità di raccolta dati basata sull'anonimato. A ciascun partecipante è stato chiesto di scegliere un nickname da utilizzare per tutta la durata del progetto. Questa scelta ha contribuito a ridurre eventuali condizionamenti legati alla valutazione e a favorire l'espressione libera delle proprie idee e percezioni. Ai fini della ricerca, non sono stati considerati dati anagrafici quali nome o genere, in quanto non rilevanti rispetto agli obiettivi dell'indagine.

Il progetto didattico *Ombre e misure* si è svolto nel mese di febbraio 2025, con cadenza settimanale, durante le ore consecutive di matematica e scienze. Le attività sono state realizzate in collaborazione con la docente curricolare della classe che ha supportato la gestione del gruppo e l'integrazione del percorso all'interno della programmazione didattica.

3.2 Metodologie della ricerca

La presente tesi rappresenta il risultato di una ricerca che si colloca nell'ambito di quella educativa e si configura come una ricerca-azione, nella quale l'intervento didattico e l'analisi dei processi di apprendimento si sviluppano in modo integrato all'interno del contesto classe. Questo approccio consente di osservare e interpretare i fenomeni educativi in situazioni autentiche, valorizzando la complessità delle dinamiche che caratterizzano l'apprendimento matematico.

In coerenza con il quadro teorico presentato, la ricerca assume una prospettiva che interpreta l'apprendimento come processo di costruzione di significato, mediato dall'esperienza, dall'interazione sociale e dall'uso di strumenti. Per questo, l'attività didattica è stata progettata come campo di esperienza, nel quale gli studenti e le studentesse sono stati coinvolti in situazioni significative che hanno richiesto osservazione, esplorazione e interpretazione di fenomeni reali.

L'approccio metodologico adottato è prevalentemente qualitativo, in quanto orientato alla comprensione dei processi attraverso cui gli studenti e le studentesse costruiscono il concetto di rapporto e sviluppano una relazione con la matematica. L'attenzione è stata posta sulle modalità di partecipazione, sulle strategie utilizzate, sulle forme di rappresentazione prodotte e sulle interazioni tra pari e con l'insegnante. In particolare, sono stati osservati i passaggi dall'esperienza concreta alla formalizzazione, considerati come momenti chiave nella costruzione del significato.

L'attività della classe è stata interpretata come attività mediata, in cui strumenti materiali e simbolici svolgono una funzione centrale nell'organizzazione dell'azione e nella costruzione del pensiero. Gli artefatti utilizzati nel percorso – strumenti di misura, rappresentazioni grafiche, tabelle e notazioni simboliche – sono stati considerati mediatori cognitivi, in grado di orientare i processi di apprendimento, oltre che supporti operativi.

Un elemento di attenzione ha riguardato la dimensione affettiva dell'apprendimento, intesa come parte integrante del processo di costruzione del significato. In particolare, sono state considerate le trasformazioni nella disposizione emotiva, nella visione della matematica e nella competenza percepita, in coerenza con il modello tridimensionale proposto da Di Martino e Zan.

Accanto alla dimensione qualitativa, sono stati integrati alcuni elementi di tipo quantitativo, in particolare attraverso l'analisi dei risultati delle prove iniziali e finali, al fine di supportare l'interpretazione dei dati e offrire una lettura più articolata del percorso.

Nel complesso, la metodologia adottata ha consentito di analizzare l'apprendimento

matematico come processo dinamico e situato, nel quale esperienza, interazione, strumenti e dimensione affettiva si intrecciano nella costruzione del significato.

3.3 Disegno della ricerca

Alla luce del quadro teorico delineato e delle finalità del progetto didattico, la presente ricerca si propone di indagare il ruolo dell'esperienza nell'apprendimento matematico, con particolare riferimento all'utilizzo dell'Outdoor Education; in questo contesto, la domanda di ricerca che guida il lavoro è la seguente: *In che modo un campo di esperienza basato sui principi dell'Activity theory, caratterizzato dall'osservazione e misurazione delle ombre, contribuisce alla costruzione del concetto di rapporto e influisce sull'affettività nei confronti della matematica?*

In coerenza con tale interrogativo, il disegno della ricerca si configura come un percorso didattico strutturato, progettato in riferimento al quadro teorico e finalizzato alla costruzione del concetto di rapporto attraverso un'esperienza concreta e situata. Il progetto *Ombre e misure* è stato concepito come un campo di esperienza, all'interno del quale gli studenti e le studentesse sono stati coinvolti in attività di osservazione, misurazione e interpretazione del fenomeno delle ombre.

Il campo di esperienza è stato definito a partire dall'analisi della relazione tra oggetti e ombre, utilizzata come contesto significativo per esplorare relazioni tra grandezze. In questo contesto, gli studenti e le studentesse sono stati guidati a individuare regolarità, formulare ipotesi e costruire progressivamente il concetto di rapporto, attraverso un processo che ha integrato esperienza diretta, discussione e formalizzazione. Il percorso si è articolato in cinque incontri, ciascuno caratterizzato da una specifica funzione all'interno del processo di apprendimento.

Nel primo incontro, è stata realizzata una rilevazione iniziale delle preconoscenze e della dimensione affettiva degli studenti e delle studentesse, attraverso la somministrazione di un questionario (Allegato A) e di un test iniziale (Allegato B) strutturati con domande a scelta multipla, quesiti aperti e richieste di rappresentazione grafica. Questa fase ha permesso di delineare il punto di partenza del gruppo classe e lo stato dell'arte.

Il secondo incontro è stato dedicato alla raccolta dei dati, svolta nel laboratorio di scienze. Il gruppo classe, organizzato in piccoli gruppi, ha osservato la formazione delle ombre in condizioni controllate, utilizzando una fonte luminosa artificiale e oggetti solidi. In questa fase sono state mantenute costanti alcune variabili, al fine di rendere confrontabili le misurazioni. Gli studenti e le studentesse hanno utilizzato strumenti quali torce, righelli e una scheda (Allegato C) per registrare e rappresentare i dati raccolti.

Nel terzo incontro, i dati prodotti dai gruppi sono stati condivisi e analizzati collettivamente.

Attraverso il confronto e la discussione, gli studenti e le studentesse hanno potuto individuare regolarità nelle relazioni tra le grandezze osservate e formulato ipotesi interpretative. I dati sono stati successivamente rappresentati su un piano cartesiano (Allegato D), permettendo di evidenziare una relazione lineare tra le variabili considerate e di avviare un primo processo di formalizzazione.

Il quarto incontro ha previsto un'attività all'aperto nel cortile della scuola, strutturata come compito di realtà (Allegato E). Gli studenti, sempre organizzati in gruppi, hanno applicato le conoscenze costruite nelle fasi precedenti per misurare ombre e altezze di oggetti reali. Dopo una prima fase su oggetti direttamente misurabili, l'attività si è focalizzata sulla stima dell'altezza di un edificio scolastico non direttamente accessibile, attraverso l'utilizzo di relazioni proporzionali. In questa fase sono stati utilizzati diversi strumenti di misura, quali metri e altri strumenti disponibili, e gli studenti hanno applicato strategie di calcolo basate sul concetto di rapporto.

Nel quinto incontro è stata somministrata una verifica finale (Allegato F), finalizzata a valutare la comprensione del concetto di rapporto anche in contesti differenti da quello esperienziale, e un questionario conclusivo (Allegato G) volto a rilevare eventuali cambiamenti nella dimensione affettiva.

All'interno del percorso, un ruolo centrale è stato svolto dagli artefatti, intesi come strumenti materiali e simbolici che mediano l'attività e supportano la costruzione del significato. Tra gli strumenti utilizzati si annoverano strumenti di misura, oggetti per la formazione delle ombre e supporti per la raccolta dei dati, mentre tra gli artefatti simbolici rientrano tabelle, rappresentazioni grafiche e notazioni numeriche.

In questo processo, i segni assumono una funzione fondamentale: le rappresentazioni prodotte dagli studenti e dalle studentesse costituiscono strumenti attraverso cui l'esperienza viene rielaborata e trasformata in conoscenza matematica. Il passaggio dall'azione concreta alla formalizzazione si realizza attraverso l'uso coordinato di diversi sistemi di rappresentazione, che permettono di esplicitare e stabilizzare le relazioni individuate.

Il disegno della ricerca si configura come un sistema di attività, in cui l'interazione tra soggetti, strumenti e contesto ha favorito la costruzione progressiva del significato matematico, valorizzando il ruolo dell'esperienza, della mediazione degli artefatti e della dimensione sociale dell'apprendimento.

Inclusione e accessibilità del percorso

All'interno del disegno della ricerca, è stata dedicata attenzione alla progettazione di un percorso accessibile e inclusivo, in grado di coinvolgere tutti gli studenti e le studentesse,

comprese le situazioni con bisogni educativi specifici presenti nella classe.

Nel gruppo erano infatti presenti uno studente con BES e una studentessa con DSA. In fase di progettazione e realizzazione delle attività sono state adottate alcune strategie volte a facilitare la partecipazione e la comprensione, senza tuttavia strutturare un percorso differenziato, ma mantenendo un'impostazione inclusiva e condivisa.

Per quanto riguarda i materiali, le schede di lavoro sono state progettate secondo criteri di alta leggibilità: è stato utilizzato un carattere di dimensione adeguata (12 pt), con interlinea aumentata (1,5) e una maggiore spaziatura tra i caratteri, al fine di rendere il testo più accessibile e ridurre il carico cognitivo legato alla lettura.

Dal punto di vista organizzativo, gli studenti e le studentesse hanno lavorato prevalentemente in gruppi eterogenei, favorendo il confronto tra pari e la collaborazione. Questa scelta ha consentito di sostenere i processi di apprendimento attraverso l'interazione, permettendo a ciascuno di contribuire secondo le proprie modalità e competenze.

Il carattere esperienziale e operativo del percorso sono stati elementi rilevanti. Le attività proposte, basate sull'osservazione diretta, sulla misurazione e sulla manipolazione di oggetti, hanno favorito una modalità di apprendimento concreta e situata. Questo tipo di approccio si è rivelato efficace non solo per gli studenti e le studentesse con bisogni educativi specifici, ma per l'intero gruppo classe, in quanto ha valorizzato modalità di apprendimento diverse.

L'utilizzo del corpo, del movimento e dell'azione ha contribuito a rendere la matematica accessibile attraverso l'esperienza, permettendo agli studenti e alle studentesse di costruire significati a partire da situazioni concrete. L'inclusione è stata perseguita attraverso una progettazione didattica capace di ampliare le possibilità di accesso alla conoscenza per tutti, preferendo questa strategia rispetto quella di creare adattamenti individuali isolati.

Questa impostazione risulta coerente con i principi dell'Universal Design for Learning (UDL), o Progettazione Universale per l'Apprendimento, approccio pedagogico inclusivo secondo cui la progettazione didattica dovrebbe prevedere fin dall'inizio una pluralità di modalità di accesso ai contenuti, di espressione e di coinvolgimento, al fine di rispondere alla variabilità degli studenti e delle studentesse. Il percorso proposto, fondato su attività pratiche, lavoro collaborativo e uso di diversi strumenti e rappresentazioni, ha offerto molteplici opportunità di partecipazione, rendendo l'esperienza accessibile a chi presenta caratteristiche e bisogni differenti.

Infine, è importante sottolineare che, trattandosi di una ricerca orientata all'analisi del cambiamento complessivo del gruppo classe, la presenza di persone con bisogni educativi

specifici non ha costituito una variabile separata di analisi. L'attenzione è stata posta sullo sviluppo della percezione individuale all'interno di un contesto condiviso, in cui ciascun discente ha potuto partecipare al percorso secondo le proprie modalità.

3.4 Strumenti e tipologia di dati raccolti

La ricerca-azione, nella quale l'intervento didattico e l'analisi dei processi di apprendimento si sviluppano in modo integrato all'interno del contesto classe. Questo approccio consente di osservare e interpretare i fenomeni educativi in situazioni autentiche, valorizzando la complessità delle dinamiche che caratterizzano l'apprendimento matematico.

3.4.1 Questionario affettivo iniziale

Il questionario affettivo (Allegato A) iniziale è stato progettato come strumento di rilevazione della relazione degli studenti e delle studentesse con la matematica prima dell'avvio del percorso didattico. La sua funzione principale è quella di delineare il punto di partenza del gruppo classe rispetto alla disciplina, indagando le dimensioni affettive e rappresentazionali che influenzano i processi di apprendimento.

La costruzione dello strumento si fonda sul modello tridimensionale dell'atteggiamento verso la matematica proposto da Di Martino e Zan, secondo cui l'atteggiamento del discente si configura come il risultato dell'interazione tra tre dimensioni fondamentali: **disposizione emotiva**, **competenza percepita** e **visione della matematica**. Il questionario mira a esplorare in modo articolato il modo in cui gli studenti e le studentesse vivono, interpretano e si collocano rispetto all'esperienza della matematica.

Struttura dello strumento

Il questionario *Io e la matematica* è stato costruito secondo una struttura mista, articolata in due sezioni: una prima parte a risposte chiuse e una seconda parte a domande aperte.

Per rispondere all'esigenza di ridurre la pressione legata alla prestazione scolastica del discente e di favorire risposte autentiche, limitando distorsioni dovute al possibile desiderio di conformarsi alle aspettative dell'insegnante, *Io e la matematica* è stato presentato agli studenti e alle studentesse in forma non valutativa, esplicitando l'assenza di risposte giuste o sbagliate e la finalità esclusivamente conoscitiva del questionario

Parte I: item a scala Likert

La prima sezione del questionario è composta da **20 affermazioni**, alle quali gli studenti sono chiamati a rispondere utilizzando una scala Likert a quattro livelli:

- 1 = per niente d'accordo

- 2 = poco d'accordo
- 3 = abbastanza d'accordo
- 4 = molto d'accordo

La scelta di una scala a quattro punti, priva di opzione neutra centrale, è stata effettuata con l'obiettivo di sollecitare una presa di posizione da parte degli studenti e delle studentesse, evitando risposte ambigue o di indecisione. Tale configurazione consente di evidenziare in modo più netto le tendenze e gli orientamenti individuali, rendendo più leggibile la distribuzione delle risposte.

Le 20 affermazioni sono state costruite in modo da coprire le tre dimensioni del modello teorico di riferimento, attribuendo a ciascuno una funzione prevalente pur riconoscendo, in alcuni casi, la possibile intersezione tra più dimensioni.

Item 1. "Mi piace studiare matematica."

Questo item rileva in modo diretto il gradimento della disciplina. È uno degli indicatori più espliciti della disposizione emotiva, perché misura il rapporto affettivo generale con la materia.

Item 2. "La matematica è una materia utile nella vita di tutti i giorni."

Misura una convinzione sulla funzione della matematica. È un item chiaramente legato alla visione della disciplina come sapere utile e connesso alla realtà.

Item 3. "La matematica è interessante."

Questo item appartenente alla disposizione emotiva coglie una sfumatura diversa rispetto al semplice gradimento: non solo il piacere, ma l'interesse cognitivo-affettivo che la disciplina suscita.

Item 4. "Preferisco altre materie rispetto alla matematica."

Item inverso rispetto ai precedenti. Misura il posizionamento relativo della matematica all'interno delle preferenze scolastiche. È utile per cogliere un eventuale distanziamento affettivo.

Item 5. "Mi piace fare attività pratiche che riguardano la matematica."

Questo item appartiene prevalentemente alla disposizione emotiva, perché rileva il gradimento verso attività concrete e operative. Tuttavia, si collega anche alla visione della matematica, poiché implica un'idea della materia come esperienza pratica e non solo astratta.

Item 6. "Quando devo risolvere un problema matematico mi sento tranquillo/a."

Rileva uno stato emotivo situato, legato alla gestione del compito matematico. Misura la tranquillità come opposto dell'ansia.

Item 7. “La matematica mi mette un po’ in ansia.”

Item molto importante per la dimensione emotiva. Permette di rilevare in modo diretto la presenza di uno stato di paura anticipatoria legato alla matematica percepita come una minaccia futura.

Item 8. “Quando capisco un esercizio mi sento soddisfatto/a.”

Questo item misura una reazione emotiva positiva associata alla comprensione. È rilevante perché collega emozione e riuscita cognitiva.

Item 9. “Quando non capisco subito, mi sento scoraggiato/a.”

Rileva il tono emotivo di fronte alla difficoltà. È importante perché consente di capire come il discente vive l’incertezza e il non comprendere immediatamente. Chiave del processo di apprendimento è quello di superare la frustrazione che creano l’incertezza e il non comprendere immediatamente.

Item 10. “Prima di una verifica di matematica mi preoccupa.”

Item centrato sul vissuto emotivo in un contesto tipicamente scolastico e valutativo. Permette di osservare la relazione tra matematica e preoccupazione anticipatoria.

Item 11. “Penso di essere capace in matematica.”

È l’item più diretto di questa categoria. Rileva la percezione globale di competenza.

Item 12. “Spesso riesco a risolvere gli esercizi di matematica da solo/a.”

Misura il senso di autonomia nell’attività matematica, dunque una componente importante della competenza percepita.

Item 13. “Capisco velocemente quando l’insegnante spiega matematica.”

Riguarda la percezione della propria rapidità di comprensione. È una forma specifica di auto-valutazione delle proprie capacità.

Item 14. “Credo di poter migliorare in matematica se mi impegno.”

Questo item è interessante perché rileva una competenza percepita dinamica. Permette di distinguere tra una visione chiusa della propria capacità e una visione di migliorabilità.

Item 15. “Se un compagno ha bisogno, penso di poterlo aiutare in matematica.”

Rileva una forma di competenza percepita socialmente situata: non solo sentirsi capaci per sé, ma anche in grado di sostenere altri.

Item 16. “La matematica è fatta per ‘i bravi’.”

Indaga una visione selettiva ed elitaria della matematica. È un indicatore di una concezione della disciplina come riservata a pochi.

Item 17. “Per capire la matematica serve soprattutto ragionare, non solo fare calcoli.”

Item centrale per la visione della matematica. Permette di rilevare se il discente considera la disciplina come attività di ragionamento oppure come semplice insieme di procedure.

Item 18. “Alcune persone non riusciranno mai in matematica.”

Anch'esso molto importante: misura una concezione fissa delle capacità matematiche e una visione deterministica dell'apprendimento.

Item 19. “Posso imparare la matematica anche sbagliando.”

Questo item tocca una convinzione fondamentale sul ruolo dell'errore. Si collega al tema trattato da Zan: l'errore come occasione di apprendimento e non solo come fallimento.

Item 20. “La matematica si impara meglio lavorando insieme.”

Indaga una visione della matematica come disciplina che può essere costruita anche nel contesto sociale, attraverso interazione, confronto e collaborazione.

La dimensione della **disposizione emotiva** riguarda l'insieme dei vissuti affettivi associati alla matematica, includendo emozioni positive come interesse, piacere, soddisfazione e negative come ansia, preoccupazione, sentirsi scoraggiati. A questa dimensione fanno riferimento gli item 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 che indagano il rapporto emotivo con la disciplina sia in termini generali di gradimento e interesse, sia in situazioni specifiche come la risoluzione di problemi, le verifiche, e la gestione dell'errore.

La presenza di item relativi all'ansia e al sentirsi scoraggiati risponde all'esigenza di intercettare quella componente affettiva che la letteratura riconosce come particolarmente influente nei processi di apprendimento matematico.

La dimensione della **competenza percepita** riguarda la rappresentazione che il discente ha delle proprie capacità in matematica, includendo aspetti quali l'autoefficacia, l'autonomia e la percezione di migliorabilità. Gli item 11, 12, 13, 14 e 15 sono stati progettati per esplorare questa dimensione, distinguendo tra una percezione statica della competenza in cui il discente pensa di essere capace, e una dinamica in cui il discente pensa che se si impegna può migliorare. Inoltre, l'inclusione di item relativi all'aiutare i pari introduce una dimensione sociale della competenza, coerente con una visione dell'apprendimento come processo condiviso.

La dimensione della **visione della matematica** riguarda le convinzioni degli studenti e delle studentesse sulla natura della disciplina, sul suo significato e sulle modalità attraverso cui si apprende.

Gli item 2, 16, 17, 18, 19 e 20 indagano questa dimensione attraverso affermazioni che riguardano l'utilità della matematica, il ruolo del ragionamento, la concezione delle capacità come fisse o modificabili, il valore dell'errore e il ruolo della collaborazione.

La presenza di item formulati in modo negativo consente di rilevare eventuali preconcezioni selettive o deterministiche, permettendo una lettura più articolata delle rappresentazioni degli studenti e delle studentesse.

Parte II: domande aperte

La seconda sezione del questionario è composta da **5 domande aperte**, progettate per integrare i dati quantitativi con informazioni di tipo qualitativo.

Questa scelta risponde all'esigenza di cogliere aspetti difficilmente rilevabili attraverso item chiusi, come il linguaggio utilizzato dagli studenti, le associazioni spontanee e le esperienze personali.

Le domande aperte consentono di:

- approfondire gli elementi di gradimento e di rifiuto della matematica;
- individuare le situazioni in cui gli studenti si percepiscono competenti o in difficoltà;
- analizzare il modo in cui gli studenti descrivono la matematica attraverso parole-chiave e metafore.

In particolare, la richiesta di descrivere la matematica con una parola rappresenta uno strumento utile per accedere alla rappresentazione sintetica della disciplina, offrendo indicazioni preziose per l'interpretazione dei dati.

In particolare, le 5 domande sono state costruite per soddisfare il modello teorico.

Domanda 21. "Una cosa che ti piace della matematica"

Permette di raccogliere elementi spontanei sul gradimento della disciplina. Può fornire informazioni sia sulla disposizione emotiva sia sulla visione della matematica, a seconda delle risposte.

Domanda 22. "Una cosa che non ti piace della matematica"

Consente di individuare fonti di disagio, frustrazione o distanza. Le risposte possono riguardare sia aspetti emotivi sia aspetti cognitivi, come problemi, geometria, calcoli, regole, verifiche.

Domanda 23. "Quando ti senti più bravo/a in matematica?"

Questa domanda è particolarmente importante per la competenza percepita, perché permette di capire in quali situazioni il discente si sente efficace. Le risposte possono evidenziare se la competenza è associata alla correttezza, alla velocità, alla comprensione, al ragionamento o alla partecipazione.

Domanda 24. "Cosa ti fa sentire in difficoltà quando fai matematica?"

Permette di rilevare in forma narrativa le principali fonti di difficoltà percepita. Qui emergono spesso elementi preziosi come paura di sbagliare, ansia, incomprensione della consegna,

problemi aperti, geometria, calcoli.

Domanda 25. “Se dovessi descrivere la matematica con una parola, quale sarebbe? Perché?”

Questa è forse la domanda più ricca sul piano interpretativo, perché permette di osservare la rappresentazione sintetica della disciplina. Le parole usate dagli studenti e dalle studentesse sono molto indicative della loro visione della matematica. La motivazione che accompagna la parola aiuta a comprendere il significato che chi scrive attribuisce alla materia.

Scelte metodologiche

La costruzione del questionario si basa su alcune scelte metodologiche fondamentali.

In primo luogo, la coerenza con il quadro teorico di riferimento garantisce che lo strumento consenta di indagare in modo sistematico le diverse dimensioni dell’atteggiamento, non limitandosi a una rilevazione superficiale del gradimento.

In secondo luogo, la struttura mista permette di integrare dati quantitativi e qualitativi, favorendo una lettura più completa e articolata dei risultati del progetto.

Un ulteriore elemento rilevante riguarda l’uso della scala Likert a quattro livelli, che consente di evitare risposte neutre e di evidenziare in modo più chiaro le tendenze della classe.

Infine, particolare attenzione è stata posta alla scelta linguistica utilizzata per formulare gli item, utilizzando un linguaggio semplice e accessibile, adeguato all’età del target, ma allo stesso tempo capace di intercettare aspetti complessi del rapporto con la matematica.

3.4.2 Test sulle preconoscenze

Il test delle preconoscenze (Allegato B) è stato progettato con l'obiettivo di indagare le rappresentazioni intuitive della classe in relazione al fenomeno delle ombre e alle relazioni tra grandezze prima dell'avvio del percorso didattico *Ombre e misure*.

La sua funzione esplorativa e diagnostica volta a far emergere schemi mentali, strategie spontanee e modelli interpretativi costruiti dagli studenti e dalle studentesse a partire dall'esperienza quotidiana, non valutativa. Le situazioni proposte, tutte legate a contesti concreti e osservabili (come la variazione delle ombre o la crescita di oggetti), mirano a sollecitare forme di ragionamento pre-formale, in cui i discenti possono manifestare intuizioni di tipo proporzionale anche in assenza di un linguaggio matematico strutturato.

Questa impostazione si colloca in linea con la prospettiva della didattica della matematica che riconosce il ruolo centrale delle conoscenze informali e delle intuizioni spontanee nei processi di apprendimento. In particolare, studenti e studentesse dispongono di una rete di esperienze e rappresentazioni che orientano l'interpretazione dei fenomeni e costituiscono la base su cui costruire successivamente i concetti matematici formali (D'Amore, B. 2021), questo gli consente di partire in una condizione privilegiata rispetto alla condizione di "assenza di sapere".

Struttura dello strumento

Lo strumento è composto da dieci quesiti, costruiti secondo una struttura mista che integra domande a scelta multipla, richieste di spiegazione del ragionamento, rappresentazioni grafiche, esercizi su unità di misura, interpretazione di tabelle e problemi aperti. Questa articolazione rende possibile la raccolta di dati differenti: da un lato dati più sintetici, derivanti dalle scelte operate dagli studenti e dalle studentesse; dall'altro dati qualitativi, utili per osservare i processi di pensiero, le strategie, le intuizioni e le eventuali difficoltà.

La sequenza dei quesiti segue una progressione coerente: i primi item sono orientati a far emergere le concezioni spontanee sul fenomeno delle ombre, successivamente vengono introdotte domande che richiedono di mettere in relazione grandezze, interpretare dati e immaginare strategie per affrontare situazioni problematiche

Il test anticipa i nuclei concettuali centrali del percorso didattico, in particolare il passaggio dal confronto additivo al concetto di rapporto tra grandezze.

1. Secondo te, da cosa dipende la lunghezza di un'ombra? *(Puoi scegliere più risposte)*

- ☐ Dall'altezza dell'oggetto
- ☐ Dalla posizione del Sole
- ☐ Dalla distanza dell'oggetto dal Sole
- ☐ Non lo so / Altro:

Il primo quesito è stato per indagare la comprensione dei fattori che determinano la lunghezza dell'ombra, mettendo in relazione concetti appartenenti a diversi ambiti disciplinari, in particolare fisico, astronomico e geometrico. Dal punto di vista scientifico, la risposta corretta presuppone la consapevolezza che la lunghezza dell'ombra dipende dalla posizione del Sole nel cielo, ovvero dall'angolo di incidenza dei raggi luminosi, e, in relazione a questo, dall'altezza dell'oggetto che proietta l'ombra. Tale relazione può essere interpretata, in termini matematici, come un primo esempio di legame tra grandezze variabili, anticipando implicitamente il concetto di proporzionalità tra altezza e lunghezza dell'ombra in condizioni di illuminazione costante.

Dal punto di vista didattico, il quesito si colloca nella fase di esplorazione delle rappresentazioni intuitive, in linea con il modello di Boero, e ha la funzione di far emergere le concezioni spontanee degli studenti e delle studentesse rispetto al fenomeno. La presenza dell'opzione relativa alla distanza dal Sole è stata introdotta intenzionalmente per intercettare possibili misconcezioni, spesso legate a un'interpretazione intuitiva ma non scientificamente corretta, in cui si attribuisce al Sole un ruolo "vicino/lontano" piuttosto che angolare.

La possibilità di selezionare più risposte consente di osservare se gli studenti riconoscono la natura multifattoriale del fenomeno o se tendono a considerare un'unica variabile.

2. Disegna schematicamente nel riquadro un oggetto, la sua ombra e la posizione del Sole: [riquadro per il disegno]

Il secondo quesito richiede di produrre una rappresentazione grafica della situazione e permette di analizzare come gli studenti organizzano il fenomeno nello spazio, in particolare la relazione tra oggetto, ombra e fonte luminosa.

La richiesta di rappresentazione grafica consente di accedere a un registro semiotico diverso da quello verbale, in linea con l'idea che la comprensione matematica si costruisca attraverso l'interazione tra diversi sistemi di rappresentazione. Le risposte del gruppo classe permettono di evidenziare i modelli mentali sottostanti e di distinguere diversi livelli di

comprensione: da rappresentazioni coerenti e strutturate, in cui gli elementi sono correttamente messi in relazione, a rappresentazioni parziali o caratterizzate da misconcezioni, in cui manca la direzionalità della luce o il legame tra oggetto e ombra non è esplicitato.

3. Se il Sole “sale” in cielo (*mattino* → *mezzogiorno*), l’ombra di un oggetto secondo te:

- ☐ Diventa più lunga
- ☐ Diventa più corta
- ☐ Rimane uguale
- ☐ Non lo so

Spiega come hai ragionato:

Il terzo quesito introduce una situazione di variazione e richiede di prevedere come cambia l’ombra al variare della posizione del Sole, accompagnando la risposta con una spiegazione. Ciò consente di osservare la capacità di mettere in relazione due variabili e di giustificare la propria scelta.

Il quesito implica la comprensione del moto apparente del Sole nel corso della giornata e delle sue conseguenze sulla direzione dei raggi luminosi. La risposta corretta presuppone la consapevolezza che, all’aumentare dell’altezza del Sole sull’orizzonte, l’angolo di incidenza dei raggi cresce e la lunghezza dell’ombra diminuisce. Il fenomeno viene quindi interpretato come risultato di una variazione continua, che coinvolge simultaneamente più grandezze.

Le diverse opzioni di risposta permettono di intercettare eventuali misconcezioni, spesso legate a una lettura parziale dell’esperienza quotidiana, e di analizzare il livello di consapevolezza degli studenti e delle studentesse rispetto al carattere variabile del fenomeno.

4. Una corda è lunga 120 cm e l’altra è 1,5 m. Cerchia quella più lunga.

Spiega come hai ragionato:

Il quarto quesito è finalizzato a verificare la capacità di confrontare grandezze espresse in unità diverse. La richiesta di esplicitare il ragionamento permette di distinguere tra confronti superficiali e strategie corrette basate sulla conversione delle unità.

Il quesito mobilita la comprensione del significato di misura e la capacità di trattare grandezze omogenee espresse in unità differenti. La risposta corretta presuppone infatti la

consapevolezza che il confronto tra 120 cm e 1,5 m richiede una conversione in una diversa unità, passaggio indispensabile per attribuire significato ai valori numerici. Verifica una competenza di base ma essenziale: distinguere tra il numero e la grandezza misurata, riconoscendo che il valore numerico dipende dall'unità scelta.

5. Due piante hanno cambiato la loro altezza nel tempo:

- **Pianta A:** da 10 cm a 20 cm
- **Pianta B:** da 20 cm a 30 cm

Secondo te, quale delle due ha subito un cambiamento maggiore rispetto alla sua altezza iniziale?

- ☐ Pianta A
- ☐ Pianta B
- ☐ Il cambiamento è lo stesso
- ☐ Non lo so

Spiega come hai ragionato:

Il quinto quesito è costruito per far emergere il tipo di confronto adottato dagli studenti e dalle studentesse. La situazione proposta consente di distinguere tra un approccio additivo, basato sulla differenza assoluta tra i valori, e un approccio relazionale, basato sul rapporto tra le grandezze.

Indaga la capacità degli studenti e studentesse di distinguere tra variazione assoluta e variazione relativa, introducendo implicitamente il concetto di rapporto. La presenza dell'espressione "rispetto alla sua altezza iniziale" rappresenta un elemento di complessità linguistica rilevante, in quanto richiede al discente di interpretare il cambiamento in termini proporzionali e non semplicemente quantitativi. Le risposte errate evidenziano come molti tendano a privilegiare una lettura assoluta del dato numerico o a confondere il cambiamento con il valore finale, mostrando difficoltà nella traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico.

6. Un bastone alto 1 metro e uno alto 2 metri si trovano nello stesso momento della giornata al Sole. Secondo te, l'ombra del bastone più alto sarà:

- ☐ Il doppio dell'ombra del bastone di 1 metro
- ☐ Più lunga ma non per forza il doppio
- ☐ Uguale
- ☐ Non lo so

Spiega come hai ragionato:

Il sesto quesito introduce una situazione in cui si mantiene costante una variabile, la posizione del Sole, e si osserva la relazione tra altezza e lunghezza dell'ombra. Le possibili risposte permettono di rilevare il livello di intuitività del pensiero proporzionale e la presenza di eventuali schemi rigidi.

Il quesito si fonda su un modello fisico-geometrico del fenomeno, secondo cui, a parità di angolo di incidenza dei raggi solari, oggetti di altezze diverse producono ombre proporzionalmente diverse. Tale relazione può essere formalizzata in termini matematici attraverso il riferimento ai triangoli simili: l'oggetto e la sua ombra costituiscono infatti un sistema di grandezze in proporzione diretta. In questo senso, il quesito introduce implicitamente il concetto di proporzionalità diretta tra altezza e lunghezza dell'ombra.

7. Sono state misurate le lunghezze delle ombre di alcuni oggetti. Nella seconda misurazione però la lunghezza delle ombre è raddoppiata.

Cosa pensi possa essere successo nel mentre?

Il settimo quesito richiede di interpretare un cambiamento nei dati, formulando un'ipotesi sulla causa del raddoppio della lunghezza delle ombre. Questo quesito consente di osservare la capacità di passare dall'osservazione alla spiegazione, mettendo in relazione fenomeni e condizioni.

Il quesito implica la comprensione del legame tra la lunghezza dell'ombra e la posizione del Sole nel cielo, presuppone la consapevolezza che il raddoppio della lunghezza dell'ombra è riconducibile a una variazione dell'angolo di incidenza dei raggi solari, determinata da una diversa altezza del Sole sull'orizzonte. La natura aperta del quesito introduce una maggiore complessità sia cognitiva sia linguistica, poiché richiede agli studenti non solo di individuare una possibile causa, ma anche di esplicitarla in modo coerente.

8. Trasforma nelle unità di misura richieste:

- 100 cm = _____ m
- 2 m e 30 cm = _____ m
- 0,75 m = _____ cm
- 22 m = _____ cm

L'ottavo quesito riguarda la trasformazione delle unità di misura e svolge una funzione di controllo dei prerequisiti operativi necessari per affrontare le attività successive del percorso,

e implica la comprensione del sistema delle unità di misura e la capacità di effettuare conversioni tra unità omogenee. fornisce indicazioni sul possesso di strumenti di base indispensabili per le attività successive del percorso.

9. Osserva la tabella:

Oggetto	Altezza (cm)	Ombra (cm)
A	80	120
B	40	?

Secondo te, quanto potrebbe essere lunga l'ombra dell'oggetto B?

Spiega come hai ragionato:

Il nono quesito introduce una tabella di dati e richiede di formulare una previsione. In questo caso si osserva la capacità di individuare una regolarità e di utilizzarla per completare un'informazione mancante, configurandosi come un primo approccio alla modellizzazione. Esso indaga la capacità di riconoscere e utilizzare una relazione di proporzionalità diretta tra l'altezza di un oggetto e la lunghezza della sua ombra. In condizioni costanti di illuminazione, tale relazione può essere interpretata attraverso un modello riconducibile ai triangoli simili, in cui il rapporto tra le grandezze rimane invariato. La risposta corretta presuppone quindi la capacità di individuare una regolarità nei dati e di estenderla a un caso non esplicitamente fornito.

10. Immagina di essere in cortile senza strumenti di misurazione. Come potresti sapere l'altezza di un albero, senza abbatterlo o salire fino al punto più alto?

Infine, il decimo quesito propone un problema aperto in cui si chiede di immaginare come misurare l'altezza di un albero non direttamente misurabile, senza l'utilizzo di strumenti. Questo quesito consente di rilevare strategie spontanee, intuizioni e tentativi di costruzione di relazioni tra grandezze, offrendo indicazioni sulla capacità di affrontare situazioni non strutturate.

La formulazione del quesito introduce vincoli espliciti, in particolare l'impossibilità di misurare

direttamente l'altezza, che impediscono strategie immediate e orientano lo studente verso una soluzione indiretta. Ciò richiede l'attivazione di competenze di problem solving, di trasferimento di conoscenze e di costruzione di strategie

Ai fini dell'analisi dei dati, i quesiti sono stati organizzati in quattro sezioni, costruite in coerenza con gli obiettivi della ricerca e con le categorie interpretative. Questa suddivisione consente di leggere i risultati non come semplice successione di risposte, ma come espressione di differenti dimensioni del pensiero matematico.

La **Sezione A – Idee sulle ombre e rappresentazioni intuitive** comprende i quesiti 1, 2, 3 e 7 ed è finalizzata a rilevare le concezioni spontanee degli studenti e delle studentesse sul fenomeno delle ombre. In questa sezione si osserva in che modo i discenti individuano le variabili in gioco, rappresentano graficamente la situazione e interpretano le variazioni del fenomeno.

La **Sezione B – Concetto intuitivo di rapporto e proporzionalità** include i quesiti 5, 6 e 9 e rappresenta il nucleo centrale del test. In questa sezione si indaga la modalità di confronto tra grandezze, distinguendo tra approcci di tipo additivo e approcci relazionali, e si osservano le prime forme di pensiero proporzionale.

La **Sezione C – Conversioni e trattamenti** comprende i quesiti 4 e 8 ed è finalizzata a rilevare le competenze operative relative alla gestione delle unità di misura e al confronto tra grandezze espresse in unità differenti.

Infine, la **Sezione D – Problema aperto** è costituita dal quesito 10 e ha l'obiettivo di osservare la capacità degli studenti e delle studentesse di elaborare strategie di soluzione in un contesto reale, mettendo in gioco forme iniziali di modellizzazione.

3.4.3 Secondo incontro – raccolta dati

Il secondo incontro del percorso è stato progettato come un'attività laboratoriale centrata sull'esplorazione del fenomeno delle ombre attraverso la costruzione e l'uso di un modello fisico semplificato, con l'obiettivo di guidare il gruppo classe verso una comprensione più consapevole delle relazioni tra le variabili in gioco mediante un processo di osservazione, manipolazione e raccolta sistematica dei dati.

L'attività è stata svolta in piccoli gruppi eterogenei, ciascuno dei quali ha lavorato utilizzando una scheda strutturata (Allegato C) e un set di materiali poveri, assumendo la forma di una vera e propria indagine in cui studenti e studentesse sono stati chiamati a osservare il fenomeno, formulare ipotesi, verificare relazioni e documentare i risultati.

Il modello utilizzato, composto da una torcia come sorgente luminosa, un piedistallo verticale che ne consentiva lo spostamento, oggetti opachi e un piano di appoggio per l'osservazione delle ombre, ha funzionato come un artefatto didattico, ovvero come uno strumento di mediazione cognitiva capace di rendere osservabili relazioni altrimenti difficilmente accessibili. Attraverso questo artefatto, il fenomeno è stato semplificato, controllato e modellizzato, consentendo di isolare variabili fondamentali quali la posizione della sorgente luminosa, la distanza e l'inclinazione, e favorendo così un'esplorazione sistematica delle loro relazioni.

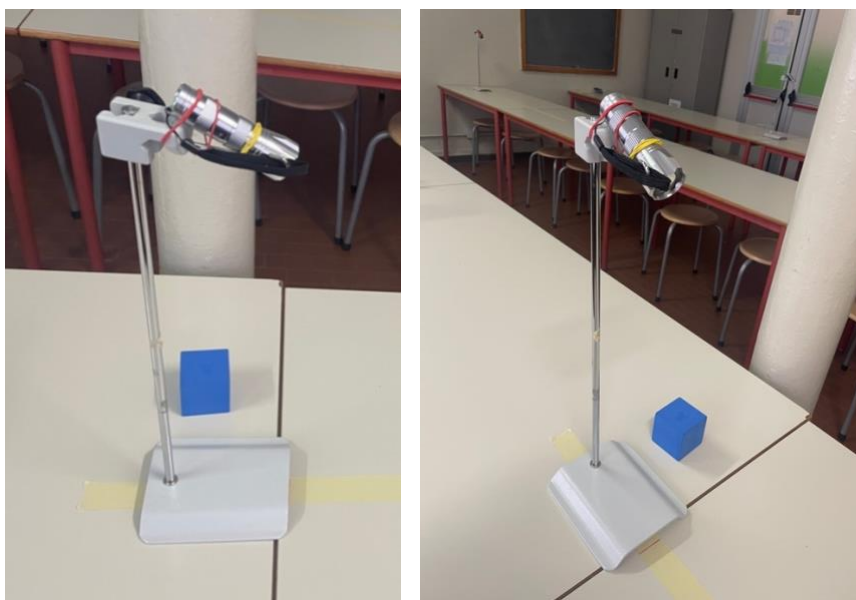


Figura 1 Supporto per la luce realizzato con materiali poveri

A supporto dell'attività è stata progettata una scheda di lavoro articolata in tre esercizi, ciascuno focalizzato su una specifica configurazione del sistema, che ha svolto una funzione di guida all'indagine, orientando l'osservazione e supportando la raccolta e l'organizzazione

dei dati, pur lasciando spazio alla riflessione autonoma del gruppo attraverso la produzione di descrizioni, disegni e spiegazioni.

La struttura della scheda riflette un'impostazione di tipo *inquiry-based*, in quanto accompagna il gruppo classe in un percorso che va **dall'azione all'interpretazione**, favorendo il passaggio da un'osservazione spontanea a un'osservazione strutturata: ogni esercizio si apre con indicazioni operative che orientano l'azione come posizionare, misurare e osservare, richiamando il principio del *learning by doing* e radicando quello che di fatto è l'apprendimento nell'esperienza concreta.

Un elemento centrale della progettazione riguarda il **controllo delle variabili**: nel primo esercizio varia l'altezza della torcia mantenendo costante l'inclinazione, permettendo di osservare che l'ombra si forma solo quando il fascio di luce colpisce l'oggetto, introducendo implicitamente il principio della propagazione rettilinea della luce; nel secondo esercizio varia l'inclinazione della sorgente luminosa a distanza costante, riproducendo il movimento apparente del Sole e mettendo in relazione l'angolo di incidenza con la lunghezza dell'ombra; nel terzo esercizio varia la posizione dell'oggetto mantenendo fissa la torcia, consentendo di osservare come la lunghezza dell'ombra dipenda dalla distanza e dall'altezza dell'oggetto, introducendo implicitamente relazioni riconducibili alla proporzionalità e ai triangoli simili.

Questa organizzazione riflette una logica sperimentale, in cui la variazione controllata di una variabile alla volta favorisce la costruzione di relazioni tra grandezze, prerequisito fondamentale per lo sviluppo del pensiero proporzionale.

La scheda lavora sia sul piano quantitativo che sul piano qualitativo: richiedendo sia descrizioni del fenomeno sia raccolta di dati numerici, favorendo così un processo di matematizzazione che conduce dalla **descrizione** alla **quantificazione** e alla **ricerca** di regolarità. Le domande guida presenti in ogni esercizio svolgono una funzione di *scaffolding* orientando l'attenzione verso le relazioni tra variabili, stimolando la formulazione di ipotesi e sostenendo la costruzione di spiegazioni senza sostituirsi al processo di scoperta.

La richiesta di utilizzare rappresentazioni multiple come tabelle, disegni e descrizioni, favorisce il coordinamento di diversi registri di rappresentazione, contribuendo alla costruzione di una comprensione più profonda del fenomeno.

L'organizzazione del lavoro in gruppi con ruoli assegnati si inserisce nel quadro del *cooperative learning* strutturato, in quanto ogni componente del gruppo assume una responsabilità specifica, favorendo la partecipazione attiva, la responsabilità individuale e la costruzione condivisa della conoscenza.

Gli incarichi sono stati inizialmente distribuiti autonomamente all'interno del gruppo;

successivamente, tutti si sono alternati nei diversi ruoli:

- il **responsabile della luce** si occupava della torcia, verificando che fosse posizionata correttamente e intervenendo, se necessario, per spostarla o inclinarla;
- il **responsabile dell'oggetto** aveva il compito di posizionarlo correttamente, controllarne la disposizione ed eventualmente segnalare al gruppo qualsiasi spostamento;
- il **custode dei dati** trascriveva in forma scritta tutte le misurazioni raccolte, insieme alle eventuali osservazioni dei responsabili dell'oggetto e della luce, compilando le diverse sezioni della scheda;
- il **misuratore** rilevava le misure utilizzando strumenti come squadre e righe, assicurandosi dell'accuratezza dei dati ed evitando possibili errori o imprecisioni.

Il gruppo opera così come una comunità di ricerca, in cui il sapere emerge attraverso il confronto, la negoziazione e la validazione delle idee, in coerenza con la prospettiva socio-costruttivista di Vygotskij e con il concetto di apprendimento situato. Durante l'attività, il gruppo classe ha lavorato attraverso un processo ciclico di osservazione, formulazione di ipotesi, verifica e rielaborazione, sperimentando, confrontando i risultati e producendo rappresentazioni che hanno contribuito alla riorganizzazione delle conoscenze.

Si sono formati 5 gruppi, ognuno con il nome di un colore: *Rosso, Giallo, Verde, Azzurro e Viola*.

L'impostazione del secondo incontro risulta quindi coerente con un approccio didattico che integra esperienza concreta, uso di artefatti per la modellizzazione, lavoro cooperativo e costruzione attiva del sapere, creando un contesto in cui studentesse e studenti possono esplorare il fenomeno in modo diretto e costruire progressivamente significati matematici. Allo stesso tempo, tali scelte metodologiche si collocano in una prospettiva che riconosce il ruolo centrale della dimensione affettiva nell'apprendimento, in linea con il modello di Di Martino e Zan: il contesto laboratoriale favorisce una disposizione emotiva più positiva, il lavoro di gruppo sostiene la competenza percepita e l'esperienza concreta contribuisce a ridefinire la visione della matematica come strumento per interpretare la realtà, promuovendo un atteggiamento più consapevole e partecipativo nei confronti della disciplina.

3.4.4 Terzo incontro – analisi dati

Il terzo incontro del percorso è stato progettato come momento di rielaborazione e sistematizzazione dei dati raccolti nell'attività laboratoriale precedente. Dopo una prima fase centrata sull'osservazione diretta del fenomeno e sulla raccolta sperimentale delle misure, il lavoro si è spostato su un piano di analisi, con l'obiettivo di guidare studenti e studentesse nel passaggio dal dato empirico alla costruzione di una relazione matematica più esplicita. La scheda *Ombre e misure – Analisi dati* (Allegato D) è stata costruita proprio per sostenere questo passaggio, proponendo un'attività di riordino, confronto, calcolo del rapporto e rappresentazione grafica dei dati raccolti nei gruppi.

Dal punto di vista metodologico, la scelta di separare i dati in due tabelle distinte, una relativa alla distanza tra la luce e l'oggetto di 30 cm e una relativa alla distanza di 60 cm, risponde a una logica molto precisa. Questa organizzazione consente di mantenere distinti due insiemi di dati prodotti in condizioni sperimentali diverse, evitando che vengano letti come appartenenti a un'unica situazione. La scheda orienta il gruppo classe a riconoscere che il legame tra altezza dell'oggetto e lunghezza dell'ombra dipende dalle condizioni del sistema osservato e che, cambiando la distanza della sorgente luminosa, cambia anche la relazione tra le grandezze. La struttura della scheda favorisce una lettura controllata del fenomeno, coerente con il lavoro svolto nell'incontro precedente, in cui veniva modificata una variabile alla volta per osservare gli effetti prodotti.

La costruzione della scheda evidenzia una progressione ben definita. In una prima fase, studenti e studentesse sono chiamati a riordinare i dati raccolti dai diversi gruppi nelle due tabelle comuni, mettendo in colonna altezza dell'oggetto, lunghezza dell'ombra e relazione tra le due grandezze. Questo riordino ha una funzione importante: trasforma una raccolta distribuita e frammentata di misure in un insieme unico e leggibile, rendendo possibile un'osservazione più sistematica. La tabella diventa uno strumento per confrontare valori, cercare regolarità e formulare ipotesi.

Dal punto di vista matematico, questa scelta progettuale è orientata a far emergere, a partire dai dati, la presenza di una relazione stabile tra le grandezze. Ci si può aspettare che, all'interno di ciascuna tabella, i valori ottenuti nella colonna *Relazione* mostrino una certa regolarità, con risultati tra loro vicini, nonostante le inevitabili variazioni dovute alla misurazione sperimentale. È plausibile che, mantenendo costante la configurazione del sistema, ad esempio la distanza tra luce e oggetto, il rapporto tra lunghezza dell'ombra e altezza dell'oggetto tenda a stabilizzarsi attorno a un valore caratteristico. Allo stesso tempo,

il confronto tra le due tabelle dovrebbe rendere visibile che tale valore non è unico, ma varia al cambiare delle condizioni di illuminazione.

L'utilizzo del termine *Relazione* all'interno della tabella risponde anche a una scelta linguistica intenzionale. Si tratta di un termine di uso comune, accessibile al gruppo classe e coerente con il linguaggio spontaneo utilizzato da studentesse e studenti nelle fasi precedenti del percorso. In una fase successiva di discussione e formalizzazione, ci si può attendere che emerga progressivamente la necessità di introdurre un lessico più specifico, riconoscendo questa *Relazione* come un **rapporto** tra grandezze e, in determinate condizioni, come una quantità che si mantiene costante.

La scheda guida studenti e studentesse a riconoscere che esiste una relazione stabile tra le grandezze, esprimibile attraverso un rapporto costante. Il passaggio dalla misura al calcolo del rapporto permette di andare oltre una lettura qualitativa del fenomeno e di avvicinarsi a una struttura più propriamente matematica.

Dopo il riordino dei dati, studentesse e studenti costruiscono due rappresentazioni cartesiane, una per la tabella relativa ai 30 cm e una per quella relativa ai 60 cm. La scelta di rappresentare separatamente i due insiemi di dati risulta metodologicamente coerente con la distinzione tra le due configurazioni sperimentali e ha l'obiettivo di rendere visibile, anche sul piano grafico, l'andamento della relazione tra le grandezze.

Ci si può attendere che la rappresentazione grafica permetta di mettere in evidenza una regolarità nell'andamento dei dati. I punti dovrebbero disporsi secondo un andamento crescente, suggerendo la proporzione diretta, osservando che all'aumentare dell'altezza dell'oggetto aumenta anche la lunghezza dell'ombra. Inoltre, il confronto tra i due grafici suggerisce visivamente la presenza di andamenti differenti, riconducibili a diverse inclinazioni della retta, e quindi a diversi valori del rapporto tra le grandezze. La rappresentazione grafica si configura così come uno strumento che consente di passare da una lettura puntuale dei singoli dati a una visione globale dell'andamento complessivo.

È possibile aspettarsi che i dati raccolti non si dispongano in modo perfettamente allineato, ma presentino piccole variazioni. Questo aspetto rende visibile la natura sperimentale delle misurazioni e permette di introdurre l'idea che il modello matematico costituisce una struttura che organizza e interpreta dati reali, i quali possono includere approssimazioni e scarti.

La scheda appare quindi progettata per accompagnare il gruppo classe in un percorso progressivo, che conduce dal riordino dei dati alla loro interpretazione matematica.

Attraverso il confronto tra valori, il calcolo del rapporto e la rappresentazione grafica, studenti e studentesse vengono guidati verso la costruzione di una prima lettura funzionale e proporzionale del fenomeno, ponendo le basi per una successiva fase di esplicitazione e formalizzazione.

3.4.5 Quarto incontro – stima del reale

Il quarto incontro del percorso è stato progettato come un'attività di applicazione e trasferimento, finalizzata a mettere in relazione le conoscenze costruite nei momenti precedenti con una situazione reale. L'obiettivo principale è stato quello di guidare il gruppo classe nell'utilizzo del modello elaborato nel contesto laboratoriale per affrontare un compito di realtà (Allegato E), ovvero la stima dell'altezza di un oggetto non direttamente misurabile. L'attività si è svolta nel cortile scolastico, mantenendo la suddivisione in gruppi già utilizzata negli incontri precedenti, in modo da garantire continuità organizzativa e consolidare le dinamiche collaborative già attivate. Il contesto esterno ha permesso di lavorare su oggetti reali e di confrontarsi con condizioni non controllate, introducendo elementi di complessità legati alla variabilità dell'ambiente.

Struttura dello strumento e analisi della scheda

L'attività è stata progettata secondo una progressione graduale, con l'obiettivo di accompagnare studenti e studentesse dal consolidamento delle procedure già sperimentate fino alla loro applicazione in una situazione problematica reale. La scheda *Ombre e misure – Stima del reale* si configura come uno strumento di guida all'azione e alla riflessione, strutturato in modo da sostenere il passaggio dall'osservazione alla modellizzazione.

La prima parte della scheda presenta una procedura esplicita, in cui vengono indicati i passaggi operativi da seguire: misurare l'altezza dell'oggetto, rilevare la lunghezza dell'ombra, ripetere le misurazioni su più oggetti e calcolare il rapporto tra le due grandezze. Questa scelta risponde all'esigenza di rendere chiaro il compito richiesto, favorendo l'autonomia operativa dei gruppi e garantendo una certa uniformità nella raccolta dei dati. La procedura rappresenta una base comune su cui costruire successivamente una riflessione più ampia.

La struttura della scheda guida il gruppo classe attraverso tre momenti distinti ma strettamente connessi. In una prima fase, l'attenzione è rivolta a oggetti direttamente misurabili, che permettono di applicare in modo relativamente semplice la procedura di rilevazione delle grandezze. Questo passaggio consente di recuperare e consolidare le competenze sviluppate negli incontri precedenti, trasferendole in un contesto reale caratterizzato da una maggiore variabilità rispetto al laboratorio. In una seconda fase, l'attività coinvolge direttamente una componente del gruppo, introducendo una situazione intermedia in cui la misura dell'altezza resta accessibile, ma il contesto si fa più dinamico e meno controllato. Infine, l'attenzione si sposta su un oggetto non direttamente misurabile,

come il muro dell'edificio scolastico, rispetto al quale è possibile rilevare soltanto la lunghezza dell'ombra. In questo caso, la scheda non fornisce indicazioni esplicite sul procedimento da utilizzare, ma lascia che siano studentesse e studenti a costruire una strategia a partire dai dati raccolti e dalle regolarità osservate.

La tabella presente nella scheda, articolata nelle colonne *Oggetto*, *Altezza (h)*, *Lunghezza ombra (O)*, *Rapporto* e *Orario*, svolge un ruolo centrale nell'organizzazione del lavoro. Essa consente di raccogliere in modo ordinato le misurazioni effettuate e di rendere confrontabili i dati. In particolare, la colonna dedicata al rapporto tra altezza e ombra richiama esplicitamente il lavoro svolto nell'incontro precedente, orientando il gruppo classe a riconoscere la presenza di una relazione tra le grandezze anche nel contesto reale. L'inserimento della colonna *Orario* introduce inoltre una variabile temporale, suggerendo implicitamente che le condizioni di illuminazione possono cambiare e influenzare i risultati, e invitando così a considerare il fenomeno nella sua complessità.

Un ulteriore elemento significativo riguarda la possibilità di utilizzare unità di misura alternative nel caso in cui gli strumenti disponibili non siano sufficienti a coprire l'intera lunghezza dell'ombra. Questa indicazione apre uno spazio di riflessione sul significato della misura, spostando l'attenzione dalla rigidità dell'unità standard alla coerenza del procedimento e alla costruzione condivisa di criteri di rilevazione.

La scheda è progettata per sostenere un processo di costruzione del significato che si sviluppa attraverso l'azione, il confronto e la rielaborazione. Il passaggio da oggetti direttamente misurabili a situazioni in cui una grandezza non è accessibile consente di trasformare il rapporto tra altezza e ombra da semplice risultato numerico a strumento per affrontare un problema. In questo modo, il sapere matematico assume una funzione operativa, diventando un mezzo per interpretare e misurare la realtà.

La progressione dell'attività è stata progettata per accompagnare studentesse e studenti da una fase iniziale di osservazione e raccolta dei dati a una fase più avanzata di interpretazione e modellizzazione, nella quale la relazione tra le grandezze viene progressivamente assunta come strumento per affrontare e risolvere un problema concreto. In questo percorso, la scelta di non fornire direttamente la soluzione del problema finale, ma di lasciare spazio alla costruzione autonoma del procedimento, favorisce l'emergere di processi di discussione, argomentazione e negoziazione delle strategie all'interno del gruppo. L'attività si configura così come un compito autentico, poiché propone una situazione reale, significativa e aperta, nella quale studentesse e studenti sono chiamati a mobilitare in modo integrato conoscenze e competenze. La stima dell'altezza dell'edificio,

infatti, richiede non solo l'applicazione di una procedura, ma implica la comprensione del fenomeno, la selezione delle informazioni pertinenti e la costruzione di un modello interpretativo, attraverso il quale la matematica si configura come strumento per leggere, descrivere e comprendere la realtà.

3.4.6 Questionario affettivo finale

Il questionario affettivo finale (Allegato F) è stato progettato come strumento di rilevazione della relazione degli studenti e delle studentesse con la matematica al termine del percorso didattico di *Ombre e misure*. Ha una funzione duplice: da un lato raccogliere dati utili a osservare eventuali trasformazioni nella dimensione affettiva; dall'altro verificare in che modo l'esperienza concreta svolta durante il progetto abbia inciso sulla percezione della matematica, sul senso di competenza e sul coinvolgimento emotivo.

Anche questo strumento è stato costruito in coerenza con il modello tridimensionale dell'atteggiamento verso la matematica proposto da Di Martino e Zan, mantenendo quindi come riferimento le tre dimensioni di disposizione emotiva, competenza percepita e visione della matematica. Tuttavia, rispetto al questionario iniziale, esso presenta una diversa finalità: rilevare in modo più mirato gli effetti di un'esperienza didattica specifica, caratterizzata da osservazione, raccolta dati, lavoro di gruppo, uso di rappresentazioni e connessione con fenomeni reali.

Funzione e logica di costruzione dello strumento

Il questionario finale non costituisce una semplice ripetizione di quello iniziale. La scelta metodologica adottata è stata quella di costruire uno strumento parzialmente confrontabile, ma allo stesso tempo maggiormente situato rispetto all'esperienza svolta.

Alcuni nuclei concettuali del questionario iniziale sono stati mantenuti, al fine di garantire la possibilità di confronto tra i due momenti di rilevazione. Altri item, invece, sono stati riformulati o introdotti ex novo per intercettare aspetti emersi come centrali nel corso del progetto. La logica sottesa alla costruzione dello strumento può essere letta come un passaggio da una rilevazione generale del rapporto con la matematica a una rilevazione contestualizzata, capace di indagare come tale rapporto venga rielaborato all'interno del percorso *Ombre e misure*.

Questa scelta risulta metodologicamente significativa, in quanto consente di osservare anche le trasformazioni legate a specifiche dimensioni dell'esperienza: l'osservazione della realtà, la raccolta e organizzazione dei dati, il lavoro di gruppo, l'uso di rappresentazioni e il rapporto con l'errore.

Struttura dello strumento

Il questionario mantiene la stessa intestazione del precedente *Io e la matematica* ed è introdotto da una formulazione rassicurante, nella quale si esplicita che non esistono

risposte giuste o sbagliate. Questa scelta, già adottata nel questionario iniziale, contribuisce a creare un contesto favorevole all'espressione autentica delle percezioni degli studenti. Lo strumento presenta una struttura mista, articolata in due parti: una prima parte composta da **18 item a risposta chiusa**, organizzati sulla scala Likert:

Item 1. "La matematica è una materia utile nella vita di tutti i giorni."

Questo item presente nel questionario affettivo iniziale è mantenuto anche nel questionario finale perché rappresenta un indicatore importante della visione della matematica come sapere utile e connesso alla realtà.

Item 2. "Per capire la matematica serve soprattutto ragionare, non solo fare calcoli."

Anch'esso riprende un nucleo importante già presente nel questionario iniziale. Serve a verificare se la centralità del ragionamento viene confermata anche dopo il percorso.

Item 3. "Posso imparare la matematica anche sbagliando."

Questo item indaga la rappresentazione dell'errore come parte del processo di apprendimento. La sua permanenza nel questionario finale è metodologicamente rilevante, perché permette di osservare se il percorso ha modificato il modo in cui gli studenti guardano allo sbaglio.

Item 4. "La matematica si impara meglio lavorando insieme."

Item che rileva una visione della matematica come disciplina costruibile anche socialmente. Nel contesto del progetto, questo item è importante perché il lavoro di gruppo è stato una componente strutturale del percorso.

Item 5. "La matematica può nascere dall'osservazione della realtà."

Questo è uno degli item più caratterizzanti del questionario finale. È stato introdotto per rilevare in modo diretto il riconoscimento della matematica come disciplina che può emergere dall'osservazione del mondo, in coerenza con il quadro teorico dei campi di esperienza e con l'impianto dell'Outdoor Education.

Item 6. "La matematica è utile perché ci permette di vedere una regolarità (un ordine) anche in situazioni che sembrano confuse."

Anche questo item è fortemente connesso all'esperienza del progetto. Indaga la visione della matematica come strumento di interpretazione e organizzazione della realtà, cioè come sapere che rende leggibili i fenomeni.

Item 7. "La matematica è una materia creativa: bisogna inventare modi per raccogliere dati e risolvere problemi reali."

Questo item introduce esplicitamente la dimensione creativa, che nel questionario iniziale non era formulata in modo diretto. La sua presenza segnala una scelta metodologica

importante: rilevare se il percorso abbia spostato la rappresentazione della matematica da disciplina esecutiva a disciplina generativa e inventiva.

Item 8. “Penso di essere capace in matematica.”

È l'item più diretto della competenza percepita e viene mantenuto per garantire una continuità con il questionario iniziale.

Item 9. “Quando vedo la matematica applicata a problemi reali, mi sento più capace di affrontarla.”

Questo item rappresenta una riformulazione situata della competenza percepita: non interessa solo se il discente si sente capace “in generale”, ma se l'esperienza concreta modifica il senso di efficacia.

Item 10. “Se non capisco subito come risolvere un problema, so che posso provare ragionamenti diversi o strade alternative.”

Item che rileva una competenza percepita dinamica e strategica. Permette di capire se il discente si rappresenta come capace di cercare alternative, anziché bloccarsi.

Item 11. “Il confronto con il gruppo mi aiuta a sentirmi più sicuro delle mie capacità matematiche.”

Questo item colloca la competenza percepita in una dimensione sociale. Serve a rilevare se la sicurezza cresce grazie al confronto con i pari.

Item 12. “Mi sento bravo in matematica quando riesco a spiegare a parole mie come funziona un fenomeno.”

Qui la competenza viene legata alla capacità di verbalizzazione e comprensione, non soltanto al risultato corretto. È una scelta metodologica molto significativa, perché sposta il focus dalla performance alla spiegazione.

Item 13. “Riesco a capire meglio un concetto matematico se posso usare tabelle e grafici per organizzare quello che osservo.”

Questo item mette in relazione competenza percepita e uso di rappresentazioni. La sua presenza è coerente con il ruolo attribuito nel progetto a tabelle, grafici e organizzazione dei dati.

Item 14. “Mi piace fare attività pratiche che riguardano la matematica.”

Item già presente nel questionario iniziale, utile per osservare eventuali cambiamenti nel gradimento verso attività concrete.

Item 15. “Risolvere un problema di realtà usando i dati che io stesso ho raccolto mi dà soddisfazione.”

Questo item misura una forma di soddisfazione legata al protagonismo del discente nella costruzione dei dati. È un item fortemente ancorato all'esperienza del progetto.

Item 16. “Mi sento più coinvolto e attento quando la matematica nasce da un esperimento che ho fatto io stesso.”

Qui la disposizione emotiva viene letta in termini di coinvolgimento e attenzione. La scelta di questo item mostra chiaramente la volontà di rilevare il valore esperienziale del percorso.

Item 17. “Provo sollievo quando capisco il ‘perché’ di un concetto matematico.”

Item emotivo, ma strettamente legato alla comprensione. Permette di osservare la relazione tra significato e vissuto affettivo.

Item 18. “Mi sento più tranquillo ad affrontare un problema di matematica se posso confrontarmi con il mio gruppo.”

Questo item rileva la dimensione emotiva sociale in relazione al lavoro collaborativo, osservando se il gruppo produce una condizione di maggiore serenità.

Una seconda parte costituita da **4 domande aperte**, finalizzate a raccogliere riflessioni più articolate e situate:

Domanda 19. “C’è stato un momento specifico durante il progetto in cui ti sei sentito particolarmente bravo? Cosa stavi facendo?”

Questa domanda permette di raccogliere episodi concreti di competenza percepita, collocandoli dentro momenti del percorso. Non chiede una valutazione generale, ma il ricordo di una situazione vissuta.

Domanda 20. “Hai mai avuto il dubbio che una misura fosse sbagliata? Racconta cosa hai provato in quel momento e cosa hai fatto per capire se i dati erano corretti.”

Questa domanda è molto ricca sul piano metodologico, perché consente di osservare contemporaneamente il rapporto con l’errore, la reazione emotiva, le strategie di controllo e verifica, il rapporto con i dati.

Domanda 21. “C’è qualcosa che è cambiato nel tuo modo di vedere la matematica dopo aver lavorato con le ombre e il sole? Cosa?”

Questa domanda è direttamente orientata alla trasformazione della visione della matematica. Permette di raccogliere formulazioni spontanee di eventuali cambiamenti.

Domanda 22. “Se dovessi descrivere la matematica dopo questo progetto, useresti la stessa parola dell’inizio? Perché?”

Questa domanda mette implicitamente in confronto il prima e il dopo, senza imporre una risposta predefinita. Consente di osservare continuità o trasformazioni nella rappresentazione sintetica della disciplina.

La scala Likert utilizzata è la medesima del questionario iniziale:

1 = per niente d'accordo

2 = poco d'accordo

3 = abbastanza d'accordo

4 = molto d'accordo

Il mantenimento della stessa scala consente di preservare la coerenza metodologica tra le due rilevazioni e di rendere i dati confrontabili sul piano quantitativo.

Una differenza rispetto al questionario iniziale riguarda il numero degli item, ridotto da 20 a 18. Non risultava necessario ripercorrere tutte le dimensioni già indagate nella fase iniziale. Focalizzare lo strumento sugli aspetti maggiormente sollecitati dal percorso didattico ha permesso di contenere il carico cognitivo per gli studenti e le studentesse, favorendo una compilazione più attenta e consapevole nella fase conclusiva del progetto.

Parte I: item a scala Likert

Il questionario finale si presta a essere letto attraverso le tre dimensioni del modello di Di Martino e Zan, che tuttavia vengono qui declinate in modo più strettamente connesso all'esperienza vissuta.

Nel questionario finale, la **dimensione emotiva** viene indagata attraverso termini di gradimento o ansia, ma anche attraverso indicatori di coinvolgimento, soddisfazione e tranquillità, in relazione alle attività svolte, al lavoro di gruppo e alla dimensione esperienziale.

La **competenza percepita** viene esplorata in modo più situato rispetto al questionario iniziale. L'attenzione si sposta dalla percezione generale di capacità alla capacità di affrontare problemi reali, utilizzare strategie diverse, spiegare fenomeni e lavorare con altri. Gli item fanno riferimento al coinvolgimento nelle attività pratiche, alla soddisfazione derivante dalla raccolta diretta dei dati, al senso di tranquillità nel lavoro collaborativo e al sollievo legato alla comprensione del significato dei concetti.

Viene indagata sia attraverso un item diretto "Penso di essere capace in matematica", sia attraverso item che ne propongono una lettura situata, ad esempio in relazione alla capacità di affrontare problemi reali, di utilizzare strategie alternative, di spiegare fenomeni o di avvalersi del supporto del gruppo.

La **visione della matematica** viene orientata esplicitamente verso il riconoscimento della

disciplina come strumento per interpretare la realtà. Vengono valorizzati aspetti quali la creatività, la modellizzazione, la ricerca di regolarità e la costruzione dei concetti a partire dall'osservazione dei fenomeni. Alcuni item riprendono nuclei già presenti nel questionario iniziale (utilità, ruolo del ragionamento, apprendimento attraverso l'errore), mentre altri introducono elementi più specifici del percorso, come il legame tra matematica e osservazione della realtà, la ricerca di regolarità e la dimensione creativa.

Parte II: domande aperte

La seconda parte del questionario comprende quattro domande aperte, fortemente ancorate all'esperienza del progetto.

Le domande sono state progettate per raccogliere:

- episodi concreti di competenza percepita (domanda 19);
- modalità di gestione dell'errore e verifica dei dati (domanda 20);
- eventuali cambiamenti nella visione della matematica (domanda 21);
- rappresentazioni sintetiche della disciplina, in relazione al confronto tra prima e dopo (domanda 22).

Questa sezione consente di integrare i dati quantitativi con informazioni qualitative più ricche e contestualizzate.

Il questionario finale presenta alcune scelte metodologiche caratterizzanti.

In primo luogo, una forte contestualizzazione degli item, che consente di rilevare il rapporto con la matematica in relazione all'esperienza vissuta.

In secondo luogo, una chiara centralità dell'esperienza, evidente negli item che fanno riferimento all'osservazione della realtà, alla raccolta dei dati e all'attività sperimentale.

In terzo luogo, l'attenzione al ruolo delle rappresentazioni, attraverso item specifici su tabelle e grafici.

Infine, una valorizzazione della dimensione sociale, attraverso item che indagano il ruolo del gruppo sia nella costruzione della conoscenza sia nel vissuto emotivo.

3.4.7 Test finale

Il test finale (Allegato G) è stato progettato come strumento di rilevazione conclusiva, con l'obiettivo di osservare gli apprendimenti costruiti dal gruppo classe al termine del percorso didattico *Ombre e misure*. La sua funzione principale consiste nel documentare in che modo studenti e studentesse abbiano rielaborato i nuclei concettuali affrontati nel progetto, con particolare riferimento alla comprensione del fenomeno delle ombre, al concetto di rapporto, al riconoscimento di relazioni proporzionali, all'uso delle rappresentazioni e alla capacità di applicare tali conoscenze in contesti differenti

Rispetto al test delle preconcoscenze, lo strumento finale assume una funzione differente. Il test iniziale era orientato a far emergere rappresentazioni intuitive, idee spontanee e modalità di ragionamento ancora in formazione; il test finale, invece, è stato costruito per rilevare processi di riorganizzazione concettuale successivi al percorso, osservando se e in che misura il gruppo classe sia in grado di utilizzare modelli matematici più stabili e consapevoli. Il test finale presenta una funzione sia valutativa in senso formativo, sia comparativa, poiché consente di mettere in relazione il punto di partenza e quello di arrivo.

La costruzione del test finale segue una logica intenzionale e progressiva. I primi quesiti riprendono alcuni nuclei concettuali già presenti nel test iniziale, ma li riformulano in modo più diretto e più vicino al modello matematico costruito durante il percorso. In questo modo, lo strumento conserva una continuità con la fase iniziale della ricerca, rendendo possibile un confronto tra prima e dopo. Allo stesso tempo, i quesiti successivi introducono situazioni più strutturate, in cui il gruppo classe è chiamato all'utilizzo consapevole di rapporti, tabelle, grafici e strategie di modellizzazione.

Dal punto di vista concettuale, il test è centrato su alcuni nuclei principali: la relazione tra altezza di un oggetto e lunghezza dell'ombra, il concetto di rapporto come costante che descrive tale relazione, la proporzionalità diretta tra grandezze in condizioni costanti, la lettura di dati organizzati in forma tabellare e grafica, e la capacità di trasferire tali conoscenze a situazioni diverse da quelle affrontate direttamente nel percorso.

Dal punto di vista scientifico, il test mantiene come sfondo il fenomeno fisico della formazione delle ombre, che dipende dalla posizione del Sole e dall'angolo di incidenza dei raggi luminosi. Questo consente di mantenere saldo il legame tra esperienza osservabile e formalizzazione matematica.

Dal punto di vista didattico, lo strumento è costruito in coerenza con il percorso svolto: si passa da domande che verificano la comprensione del fenomeno a quesiti che richiedono

l'uso di rappresentazioni, la lettura di regolarità e la costruzione di modelli. La richiesta frequente di spiegare il ragionamento rende il test particolarmente adatto a una ricerca che intende osservare i processi di costruzione del significato, e non soltanto la correttezza del risultato.

Struttura dello strumento

Il test è composto da **nove quesiti** e presenta una struttura mista. Alcune domande sono a risposta chiusa, altre richiedono il completamento di tabelle o la lettura di grafici, altre ancora sollecitano spiegazioni aperte e argomentate. Questa articolazione rende possibile la raccolta di dati differenti: dati sintetici, relativi alla scelta della risposta, e dati qualitativi, utili per osservare il ragionamento, la capacità di verbalizzazione, la lettura delle rappresentazioni e il livello di interiorizzazione dei concetti affrontati durante il percorso.

1. Secondo te, da cosa dipende la lunghezza di un'ombra? (Puoi scegliere più risposte)

- ☐ Dalla grandezza dell'oggetto
- ☐ Dalla posizione del Sole
- ☐ Dalla distanza dell'oggetto dal Sole
- ☐ Non lo so / Altro:

Il primo quesito riprende una domanda già presente nel test iniziale e chiede da cosa dipenda la lunghezza di un'ombra. La presenza di questa domanda nel test finale consente di osservare se studentesse e studenti abbiano riorganizzato le proprie idee iniziali in un modello più coerente. Dal punto di vista scientifico, la risposta corretta richiede il riconoscimento del ruolo della posizione del Sole e dell'altezza dell'oggetto; dal punto di vista didattico, il quesito permette di verificare se le rappresentazioni intuitive emerse all'inizio del percorso si siano trasformate in una comprensione più strutturata del fenomeno

2. Se il Sole "sale" in cielo (dal mattino verso mezzogiorno), cosa succede all'ombra di un oggetto?

- ☐ Diventa più lunga.
- ☐ Diventa più corta.
- ☐ Rimane uguale.

Il secondo quesito chiede di prevedere cosa accade all'ombra quando il Sole sale in cielo. La domanda esplora la capacità di interpretare una variazione del fenomeno in termini

dinamici. La risposta corretta presuppone la comprensione del fatto che, all'aumentare dell'altezza del Sole sull'orizzonte, la lunghezza dell'ombra diminuisce. Sul piano matematico, il quesito mobilita la capacità di mettere in relazione due variabili; sul piano scientifico, sollecita la comprensione del legame tra posizione della fonte luminosa e variazione dell'ombra

3. Hai un bastone alto 1 m che proietta un'ombra di 2 m. Se usi un bastone alto 3 m nello stesso momento, quanto sarà lunga la sua ombra?

- ☐ metri
☐ metri
☐ metri
☐ Non si può sapere

Il terzo quesito introduce una situazione esplicitamente proporzionale: un bastone alto 1 m proietta un'ombra di 2 m, e si chiede quale ombra produrrebbe un bastone alto 3 m nello stesso momento della giornata. La struttura chiusa del quesito permette di osservare in modo sintetico se il gruppo classe riconosca la costanza del rapporto in condizioni identiche di illuminazione. Dal punto di vista matematico, il quesito indaga la proporzionalità diretta tra altezza e ombra; dal punto di vista didattico, verifica se studentesse e studenti sappiano utilizzare il modello costruito durante il percorso in una situazione semplificata e controllata

4. Osserva e completa la tabella:

Oggetto	Altezza (h)	Ombra (O)
A	80 cm	120 cm
B	40 cm	60 cm
C	10 cm	_____ cm
D	_____ cm	21 cm

Il quarto quesito richiede di completare una tabella in cui sono riportati dati relativi ad altezza e ombra di alcuni oggetti. Questo quesito indaga la capacità di leggere una rappresentazione tabellare e di utilizzare una regolarità per completare informazioni mancanti. Dal punto di vista matematico, il compito richiede di riconoscere una relazione costante tra le grandezze; dal punto di vista didattico, verifica la capacità di passare dal dato osservato alla costruzione di una previsione, entrando così in una prima forma di modellizzazione

5. Cos'è il "rapporto" tra altezza dell'oggetto e lunghezza dell'ombra?

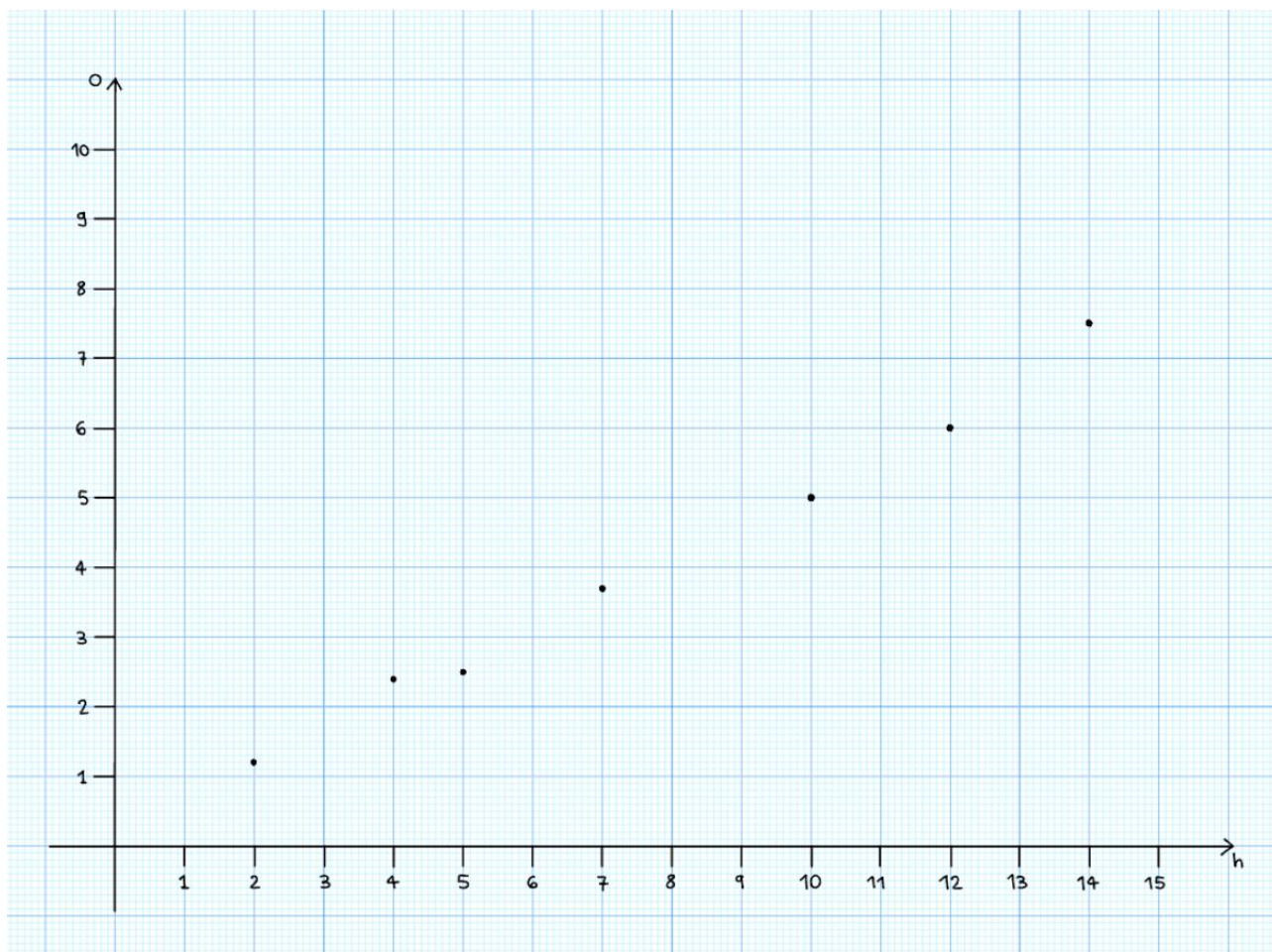
- ☐ È una regola che cambia sempre.
- ☐ È un numero costante che indica la relazione tra l'oggetto e la sua ombra.
- ☐ È la misura dell'ombra.

Il quinto quesito chiede di definire che cosa sia il rapporto tra altezza dell'oggetto e lunghezza dell'ombra. Questo item indaga il livello di concettualizzazione raggiunto. La risposta corretta richiede il riconoscimento del rapporto come numero costante che descrive una relazione tra grandezze. Dal punto di vista didattico, il quesito esplora il passaggio da una pratica di calcolo a una comprensione più esplicita e consapevole del significato del rapporto stesso

6. Se misuriamo il rapporto (k) alle ore 10:00 e poi alle ore 12:00, pensi che il numero k sarà lo stesso? Perché?

Il sesto quesito chiede se il numero k , cioè il rapporto tra altezza e ombra, rimanga lo stesso se misurato alle ore 10:00 e poi alle ore 12:00, richiedendo anche una spiegazione. Questo quesito introduce una variazione di contesto e osserva se il gruppo classe sappia riconoscere che il rapporto dipende dalle condizioni di illuminazione. Scientificamente, la domanda richiama il ruolo della posizione del Sole; matematicamente, consente di distinguere tra un uso rigido del rapporto come "regola fissa" e una comprensione situata, che lo interpreta come costante solo entro un determinato contesto. La richiesta di spiegazione rende il quesito particolarmente utile per osservare il livello di argomentazione raggiunto

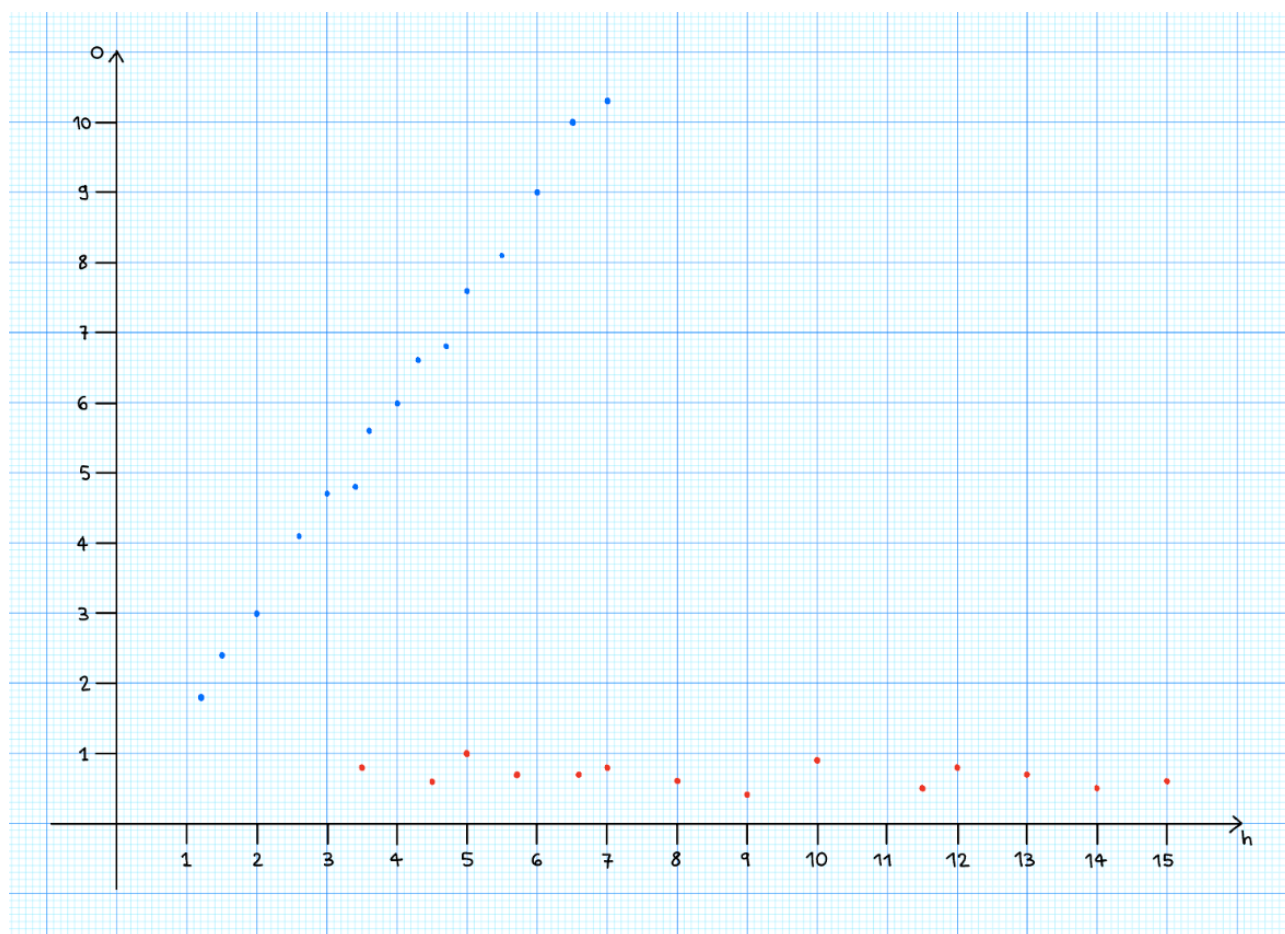
7. Osserva il grafico:



- Quanto misura il rapporto k ?
- Ci sono delle “sbavature” nei dati? Secondo te perché?
- Quanto sarebbe lunga l’ombra di un oggetto alto 40 cm?

Il settimo quesito propone un grafico cartesiano in cui sono rappresentati dati relativi ad altezza e ombra. Viene chiesto di ricavare il valore del rapporto k , di individuare eventuali “sbavature” nei dati e di prevedere la lunghezza dell’ombra di un oggetto alto 40 cm. Questo quesito è molto ricco, perché mobilita contemporaneamente lettura del grafico, interpretazione della regolarità, riconoscimento di possibili scarti sperimentali e formulazione di una previsione. Dal punto di vista matematico, sollecita la lettura della proporzionalità come relazione rappresentabile graficamente; dal punto di vista metodologico e scientifico, introduce l’idea che i dati reali possano presentare approssimazioni e scarti rispetto al modello teorico. Sul piano didattico, il quesito consente di osservare se studentesse e studenti sappiano coordinare il registro grafico con quello numerico e verbale

8. Osserva il grafico:



Sono stati raccolti dei dati in due momenti diversi della stessa giornata.

A che ora circa sono stati presi i dati del colore rosso?

Spiega come hai ragionato

L'ottavo quesito propone un secondo grafico, costruito a partire da dati raccolti in due momenti diversi della stessa giornata, e chiede di ipotizzare a che ora circa siano stati rilevati i dati del colore rosso, motivando la risposta. Il quesito richiede una lettura comparativa di due insiemi di dati e una loro interpretazione in termini temporali. Dal punto di vista scientifico, richiama nuovamente il legame tra posizione del Sole e lunghezza delle ombre; dal punto di vista matematico, implica il confronto tra due andamenti e la lettura di una relazione diversa tra le grandezze. Sul piano didattico, il quesito risulta particolarmente significativo perché chiede di passare da una rappresentazione grafica a un'ipotesi interpretativa sul contesto che ha generato i dati

9. In una fotografia, un uomo alto 1.80 m appare alto 3 cm. Se accanto a lui c'è un albero che nella foto è alto 15 cm, quanto è alto l'albero nella realtà?

Il nono quesito propone una situazione nuova, non direttamente coincidente con quelle affrontate nel percorso: in una fotografia, un uomo alto 1,80 m appare alto 3 cm e, accanto a lui, un albero appare alto 15 cm. Viene chiesto di determinare l'altezza reale dell'albero. Questo quesito verifica la capacità di trasferire il modello proporzionale a un contesto differente, mantenendo la stessa struttura relazionale. Dal punto di vista matematico, si tratta di una situazione di proporzionalità diretta; dal punto di vista didattico, il quesito assume un forte valore di generalizzazione, poiché osserva se il gruppo classe sia in grado di riconoscere il rapporto come strumento utilizzabile anche al di fuori del contesto specifico delle ombre

4 Risultati

4.1 Questionario affettivo iniziale

Il questionario affettivo iniziale è stato somministrato all'inizio del percorso con l'obiettivo di registrare lo stato dell'arte del gruppo classe rispetto al rapporto con la matematica. Lo strumento, composto da item a scala Likert e da domande aperte, ha permesso di raccogliere dati sia quantitativi sia qualitativi, analizzati in modo integrato.

Per quanto riguarda la parte a risposte chiuse, per ciascun item è stata calcolata la distribuzione delle risposte e il valore medio, utilizzato come indicatore sintetico della tendenza del gruppo classe. In una seconda fase, gli item sono stati raggruppati secondo le tre dimensioni del modello di Di Martino e Zan al fine di restituire una lettura più sistematica dei dati. Accanto alla media è stata considerata anche la dispersione delle risposte, al fine di evidenziare il grado di variabilità all'interno del gruppo classe.

Item con valori medi più elevati

Gli item che registrano i valori medi più elevati sono:

- Item 2 – “La matematica è una materia utile nella vita di tutti i giorni” (media: 3,74)
- Item 17 – “Per capire la matematica serve soprattutto ragionare, non solo fare calcoli” (media: 3,74)
- Item 8 – “Quando capisco un esercizio mi sento soddisfatto/a” (media: 3,68)
- Item 12 – “Spesso riesco a risolvere gli esercizi di matematica da solo/a” (media: 3,58)
- Item 14 – “Credo di poter migliorare in matematica se mi impegno” (media: 3,47)

Questi valori indicano la tendenza diffusa da parte del gruppo classe di essere d'accordo con le risposte 3 e 4, rispettivamente “abbastanza d'accordo” e “molto d'accordo”, in particolare per gli item 2 e 17. Mentre per l'item 8 si osserva una prevalenza di risposte elevate legate alla soddisfazione associata alla comprensione.

Item con valori medi più bassi

Gli item che registrano i valori medi più bassi sono:

- Item 18 – “Alcune persone non riusciranno mai in matematica” (media: 1,47)
- Item 16 – “La matematica è fatta per i bravi” (media: 1,63)

- Item 6 – “Quando devo risolvere un problema matematico mi sento tranquillo/a” (media: 2,37)
- Item 7 – “La matematica mi mette un po’ in ansia” (media: 2,53)
- Item 15 – “Se un compagno ha bisogno, penso di poterlo aiutare in matematica” (media: 2,58)
- Item 11 – “Penso di essere capace in matematica” (media: 2,63)
- Item 9 – “Quando non capisco subito, mi sento scoraggiato/a” (media: 2,63)

Per gli item 16 e 18 si osserva che il gruppo classe presenta una concentrazione delle risposte nelle risposte 1 e 2, rispettivamente per niente e poco d'accordo. Mentre per gli item 6, 7 e 9 le risposte risultano distribuite tra i diversi livelli della scala, indicando una maggiore variabilità all'interno della classe.

Analisi per categorie

Disposizione emotiva: Gli item appartenenti a questa categoria (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) presentano valori medi compresi tra circa 2,3 e 3,6. La distribuzione delle risposte risulta eterogenea, con una presenza significativa di risposte collocate sia nelle categorie centrali sia negli estremi della scala.

In particolare, l'item 8 mostra una prevalenza di risposte dal valore elevato, gli item 6 e 7 evidenziano una distribuzione più ampia tra le diverse opzioni di risposta. La dispersione dei dati, evidenziata anche dalla deviazione standard, risulta più elevata rispetto alle altre categorie.

Competenza percepita: Gli item relativi alla competenza percepita (11, 12, 13, 14, 15) presentano valori medi compresi tra 2,5 e 3,6. Le risposte risultano distribuite principalmente nelle categorie intermedie della scala, con una minore concentrazione agli estremi rispetto alla dimensione emotiva.

Alcuni item mostrano una prevalenza di risposte alte ad esempio l'item 12, mentre altri evidenziano una distribuzione più equilibrata tra le diverse categorie come gli item 11 e 15. La dispersione dei dati risulta intermedia.

Visione della matematica: Gli item appartenenti a questa categoria (2, 16, 17, 18, 19, 20) presentano valori medi generalmente più elevati rispetto alle altre categorie. In particolare, gli item 2 e 17 mostrano una forte concentrazione di risposte nelle categorie più alte della scala. Per gli item 16 e 18 si osserva invece una concentrazione nelle categorie di disaccordo. Nel complesso, la distribuzione delle risposte risulta più omogenea rispetto alle altre categorie, con una deviazione standard inferiore.

Analisi delle risposte aperte

Le risposte alle domande aperte sono state analizzate attraverso una lettura tematica, con l'obiettivo di individuare elementi ricorrenti nelle modalità con cui gli studenti descrivono la matematica, le proprie difficoltà e le situazioni in cui si percepiscono competenti.

Per quanto riguarda gli **elementi positivi associati alla matematica**, emerge con frequenza il riferimento al ragionamento e alla logica.

In alcune risposte si esplicita chiaramente questo aspetto, come nel caso di chi afferma che gli piacciono “gli esercizi di logica per sfruttare le mie capacità di ragionamento e migliorarle” (Musetti) oppure “la parte di ragionamento, logica e trovare la strada meno ovvia” (Tony Rovati). Anche Giaguaro Novizio sottolinea come le regole matematiche siano “frutto di collegamenti”, evidenziando una visione non meccanica della disciplina.

Accanto a questa dimensione, si osserva una presenza significativa di riferimenti a elementi più operativi, in particolare calcoli ed esercizi. Alcuni studenti indicano come aspetti positivi “le operazioni” (Francesca), “l'aritmetica” (Diego Armando Maradona; Morton2007) o i “calcoli” (Kalamaro), mostrando un interesse legato alla dimensione procedurale dell'attività matematica.

Emergono inoltre riferimenti alla curiosità e alla dimensione esplorativa della matematica. In alcune risposte, la disciplina viene associata a un'apertura verso la conoscenza, come nel caso di chi la definisce “curiosità” (Francesca; Kalamaro) o di chi sottolinea che “più siamo curiosi della matematica più sappiamo e conosciamo della vita”.

Altri evidenziano la possibilità di collegare la matematica alla realtà, come nel caso di Farfalla D'oro, che indica come elemento positivo “quando riesco ad usarla nella vita reale”.

Le **difficoltà** segnalate dagli studenti si concentrano principalmente su alcuni ambiti ricorrenti.

Un primo nucleo riguarda i calcoli, spesso percepiti come fonte di errore e incertezza. Rondine descrive in modo particolarmente efficace questa difficoltà, affermando che i numeri “si mischiano insieme formandone altri e facendomi sbagliare il risultato”. Anche altri indicano difficoltà nei “calcoli a mente” (L'acquariofilo di turno) o nei calcoli in generale.

Un secondo ambito riguarda le espressioni e la loro complessità, come nel caso di chi segnala difficoltà nelle “espressioni troppo lunghe” (Yao Ming) o nelle espressioni in generale (Diego Armando Maradona).

Un terzo elemento ricorrente è rappresentato dai problemi di geometria, indicati esplicitamente come difficoltà (Francesca; Kalamaro).

Accanto a queste difficoltà di natura più cognitiva e procedurale, emergono anche elementi legati alla dimensione emotiva, in particolare alla paura di sbagliare. Nadi evidenzia come la difficoltà possa derivare dalla “paura di sbagliare” e dall’ansia durante lo svolgimento dell’esercizio, soprattutto quando la consegna non è pienamente compresa.

Le risposte relative ai momenti in cui il gruppo classe si sente più competente mostra una varietà di situazioni.

Per alcuni, la competenza è associata a contesti strutturati e ripetitivi, come nel caso di chi si sente più bravo “quando faccio i calcoli” (Kalamaro) o “quando nelle espressioni i conti tornano” (Yao Ming). In modo analogo, Nadi collega la propria competenza alle “gare di espressioni” e allo svolgimento di esercizi a casa.

Altri hanno associato il sentirsi competenti a contesti di tipo più logico e non puramente procedurale, come nel caso di Rondine, che si sente più a proprio agio “quando devo svolgere problemi senza calcoli ma riguardanti la logica”.

Si osserva inoltre la presenza di risposte che segnalano una percezione di competenza molto bassa o assente, come nel caso di Mortonz007, che alla domanda risponde con una parola sola “mai”.

Le parole utilizzate per **descrivere la matematica** restituiscono una varietà di rappresentazioni della disciplina.

Alcuni utilizzano termini che richiamano una visione ampia e articolata, come “geniale” (Musetti), “infinita” (Erfrendy) o “tutto è matematica” (Tom Gall-777). In particolare, Erfrendy sottolinea come la matematica sia “infinita” perché consente di arrivare alla soluzione di un problema attraverso modalità diverse.

Altri propongono rappresentazioni più critiche o legate alla difficoltà, come nel caso di Tony Rovati, che associa la matematica ai “calcoli” descrivendoli come fonte di irritazione, scoraggiamento e preoccupazione.

In alcuni casi emerge anche una rappresentazione della matematica come attività ripetitiva, come nella risposta di Mortonz007, che la definisce “uguale”, sottolineando la ripetitività dei calcoli e dei problemi.

Sintesi dei risultati

L’analisi dei dati del questionario affettivo iniziale mostra una distribuzione differenziata delle risposte tra le tre dimensioni considerate. La visione della matematica presenta valori medi più elevati e una distribuzione più omogenea, mentre la disposizione emotiva e la

competenza percepita mostrano una maggiore variabilità.

Nel complesso, i dati restituiscono un quadro articolato, caratterizzato da una presenza significativa di risposte distribuite nelle diverse categorie della scala Likert e da una varietà di elementi emersi nelle risposte aperte.

4.2 Test sulle preconoscenze

Il test delle preconoscenze è stato somministrato all'inizio del percorso didattico con l'obiettivo di rilevare il punto di partenza del gruppo classe rispetto ai nuclei concettuali che sarebbero stati sviluppati nel progetto. Hanno partecipato 19 studenti e studentesse. L'analisi dei risultati è stata organizzata in sezioni coerenti con la progettazione dello strumento: idee sulle ombre e rappresentazioni intuitive, concetto intuitivo di rapporto e proporzionalità, conversioni e trattamenti, problema aperto.

Sezione A - Idee sulle ombre e rappresentazioni intuitive

Questa sezione comprende i quesiti 1, 2, 3 e 7 e riguarda la comprensione iniziale del fenomeno delle ombre.

Nel **quesito 1**, relativo ai fattori che determinano la lunghezza dell'ombra, 4 tra studentesse e studenti (21%) forniscono una risposta completa, individuando sia l'altezza dell'oggetto sia la posizione del Sole. 12 risposte (63%) risultano parziali e fanno riferimento a una o più variabili senza una strutturazione completa del fenomeno. 3 risposte (16%) si basano su interpretazioni non coerenti. Il gruppo classe mostra una diffusione ampia di intuizioni, accompagnata da una limitata formalizzazione del modello.

Nel **quesito 2**, che richiede una rappresentazione grafica, 12 tra studentesse e studenti (63%) producono una rappresentazione coerente, 4 (21%) realizzano una rappresentazione parziale e 3 (16%) presentano una organizzazione non corretta. Il gruppo classe evidenzia una buona capacità di rappresentare il fenomeno, con una varietà di livelli nella strutturazione spaziale.

Nel **quesito 3**, relativo alla variazione della lunghezza dell'ombra, 16 tra studentesse e studenti (84%) forniscono una risposta corretta, 1 (5%) presenta una risposta errata e 2 (11%) dichiarano di non sapere. Il dato evidenzia una comprensione diffusa del comportamento del fenomeno nel tempo.

Nel **quesito 7**, che richiede di interpretare una variazione nei dati, 15 tra studentesse e studenti (79%) collegano il cambiamento alla posizione del Sole, mostrando una capacità diffusa di costruire spiegazioni causali, accompagnata da livelli differenti di esplicitazione del modello.

Questa sezione evidenzia una buona presenza di intuizioni legate all'esperienza e una comprensione diffusa del fenomeno, accompagnata da una formalizzazione ancora in fase di sviluppo.

Sezione B

Questa sezione comprende i quesiti 5, 6 e 9 e riguarda le modalità di confronto tra grandezze.

Nel **quesito 5**, relativo al confronto tra variazioni, 12 studentesse e studenti (63%) adottano un approccio basato sul “stesso cambiamento”, 5 (26%) scelgono la pianta A e 2 (11%) forniscono risposte non coerenti o dichiarano incertezza. Il gruppo classe mostra una prevalenza di strategie additive.

Nel **quesito 6**, relativo alla relazione tra altezza e ombra, 8 tra studentesse e studenti (42%) esprimono una risposta di tipo relazionale, riconoscendo il legame proporzionale, 10 (53%) utilizzano un approccio qualitativo e 1 (5%) propone una risposta basata sull'uguaglianza. Il dato evidenzia una presenza significativa di intuizioni relazionali, accompagnata da una forte componente qualitativa.

Nel **quesito 9**, relativo alla tabella, emerge una distribuzione tra risposte di tipo additivo e risposte relazionali. 7 tra studentesse e studenti (37%) utilizzano la differenza tra i valori e 12 (63%) riconoscono il rapporto tra le grandezze.

Nel complesso, questa sezione evidenzia una prevalenza di approcci di tipo additivo, accompagnata da prime forme di pensiero relazionale presenti in una parte del gruppo classe.

Sezione C

Questa sezione comprende i quesiti 4 e 8 e riguarda le competenze operative.

Nel **quesito 4**, relativo al confronto tra unità di misura, tutte le studentesse e tutti gli studenti (19, pari al 100%) forniscono una risposta corretta. Il dato evidenzia una piena padronanza delle conversioni.

Nel **quesito 8**, relativo alla trasformazione delle unità, 10 tra studentesse e studenti (53%) forniscono tutte le risposte corrette, 6 (32%) rispondono correttamente a tre item su quattro e 3 (15%) forniscono una sola risposta corretta. Il gruppo classe mostra una competenza operativa diffusa, accompagnata da diversi livelli di precisione.

Nel complesso, questa sezione evidenzia un livello elevato di competenze operative, con una gestione sicura delle conversioni e dei confronti tra grandezze.

Sezione D

Questa sezione comprende il **quesito 10** e riguarda la capacità di affrontare una situazione non strutturata.

Le risposte mostrano una prevalenza di strategie intuitive, come l'uso di passi, spanne o

oggetti di riferimento. Una parte del gruppo classe propone strategie che mettono in relazione altezza e ombra, anticipando una costruzione proporzionale del problema. Nel complesso, 7 tra studentesse e studenti (37%) propongono strategie di tipo relazionale, mentre 12 (63%) utilizzano approcci intuitivi.

Sintesi dei risultati

Il test delle preconoscenze restituisce un quadro articolato del punto di partenza della classe, evidenziando una differenziazione significativa tra le diverse dimensioni indagate.

La comprensione del fenomeno delle ombre risulta diffusa e radicata nell'esperienza, con una capacità significativa di interpretare le variazioni del fenomeno. Le competenze operative relative alle conversioni risultano consolidate e condivise dall'intero gruppo classe. Il confronto tra grandezze si basa prevalentemente su strategie additive, accompagnate dalla presenza di prime forme di pensiero relazionale in una parte delle studentesse e degli studenti. Il problema aperto evidenzia una ricchezza di intuizioni e una varietà di strategie, con alcuni elementi che anticipano la costruzione di relazioni proporzionali.

Il quadro complessivo evidenzia una base solida di intuizioni e competenze operative, su cui si innesta il percorso didattico finalizzato allo sviluppo di un pensiero relazionale e proporzionale più strutturato.

4.3 Secondo incontro – raccolta dati

L'analisi delle produzioni dei gruppi durante il secondo incontro consente di osservare in modo qualitativo i processi di costruzione del significato attivati dal gruppo classe nel contesto laboratoriale. I dati raccolti attraverso le schede compilate dai cinque gruppi (rosso, giallo, verde, azzurro, viola) mostrano una partecipazione attiva e una progressiva strutturazione delle osservazioni, delle rappresentazioni e delle spiegazioni del fenomeno.

Esercizio 1: variazione dell'altezza della luce

Nel primo esercizio, i gruppi registrano in modo sistematico la presenza o l'assenza dell'ombra al variare dell'altezza della torcia lungo il piedistallo. Le tabelle risultano compilate in tutte le loro parti, con indicazione delle diverse altezze e della comparsa o meno dell'ombra. I dati raccolti evidenziano come ogni gruppo abbia effettuato più rilevazioni, mantenendo costante la posizione dell'oggetto e modificando esclusivamente la posizione verticale della sorgente luminosa. In diversi casi vengono annotate anche misure aggiuntive o osservazioni relative alla lunghezza dell'ombra, segnalando un'attenzione non solo alla presenza del fenomeno ma anche alle sue caratteristiche.

Le risposte alle domande aperte mostrano descrizioni articolate del comportamento dell'ombra. Alcuni gruppi indicano con precisione le condizioni in cui l'ombra compare per la prima volta o scompare, riportando valori numerici specifici. In altre produzioni emergono descrizioni del fenomeno in termini di posizione della luce rispetto all'oggetto, con riferimenti alla direzione del fascio luminoso, evidenziando una prima forma di generalizzazione del fenomeno.

Dal punto di vista grafico, i disegni presenti nelle schede rappresentano la disposizione spaziale degli elementi coinvolti. In alcuni casi viene esplicitata la direzione della luce attraverso frecce, mentre in altri vengono evidenziate diverse configurazioni del sistema. Le rappresentazioni risultano eterogenee per livello di dettaglio, ma generalmente coerenti con la situazione osservata.

Esercizio 2: variazione dell'inclinazione della luce

Nel secondo esercizio, i gruppi sono tenuti ad osservare come vari la lunghezza dell'ombra in relazione a diverse posizioni della luce: dall'alto, inclinata, quasi orizzontale.

I dati raccolti risultano completi e organizzati, con misurazioni espresse in centimetri.

Le registrazioni evidenziano differenze nella lunghezza dell'ombra nelle diverse condizioni.

In alcune schede viene indicata una lunghezza nulla o molto ridotta per la luce dall'alto, mentre per la luce inclinata e quasi orizzontale vengono riportati valori progressivamente maggiori. In alcuni casi, la lunghezza dell'ombra viene descritta come molto grande o non facilmente misurabile, utilizzando anche simboli o annotazioni qualitative.

Le risposte alle domande guida risultano articolate e fanno riferimento alle variazioni osservate. I gruppi descrivono le differenze tra le diverse configurazioni della luce, utilizzando termini come "più corta", "più lunga" e riferimenti alla posizione della sorgente luminosa. In alcune risposte compaiono collegamenti con situazioni reali, come il mezzogiorno o il tramonto.

Le rappresentazioni grafiche associate a questo esercizio mostrano la variazione dell'inclinazione della luce e il conseguente cambiamento dell'ombra. In diversi disegni vengono rappresentate più configurazioni della stessa situazione, evidenziando le differenze tra le diverse posizioni della sorgente luminosa.

Esercizio 3: variazione della distanza dell'oggetto

Nel terzo esercizio del secondo incontro, i gruppi hanno analizzato la relazione tra distanza della sorgente luminosa, altezza dell'oggetto e lunghezza dell'ombra, mantenendo fissa la posizione della torcia e variando la posizione dell'oggetto. L'attività è stata svolta utilizzando due oggetti differenti, permettendo un confronto tra situazioni diverse.

Dalla raccolta dei dati emerge che tutti i gruppi hanno compilato le tabelle in modo completo, registrando più misurazioni per ciascuna configurazione. Le rilevazioni mostrano che, al variare della distanza tra l'oggetto e la sorgente luminosa, la lunghezza dell'ombra subisce variazioni evidenti. In particolare, avvicinando l'oggetto alla sorgente luminosa, i gruppi registrano un aumento della lunghezza dell'ombra, mentre allontanando l'oggetto la lunghezza dell'ombra tende a ridursi. Il confronto tra i due oggetti utilizzati evidenzia che, a parità di posizione rispetto alla sorgente luminosa, oggetti con altezze diverse producono ombre di lunghezza diversa. I dati riportati nelle tabelle mostrano quindi una variazione simultanea delle grandezze, in cui sia la distanza sia l'altezza dell'oggetto influenzano il risultato osservato. Le risposte alle domande aperte presenti nella scheda mostrano che i gruppi hanno descritto le variazioni osservate utilizzando prevalentemente un linguaggio qualitativo, facendo riferimento a espressioni come "più vicino fa l'ombra più lunga" o "più lontano l'ombra diventa più corta". In alcuni casi emerge anche il tentativo di confrontare le misurazioni effettuate con i due oggetti, mettendo in relazione altezza e lunghezza dell'ombra. Un ulteriore elemento osservabile riguarda la presenza di più rilevazioni per la

stessa configurazione, che in alcuni casi presentano piccole differenze tra loro. Le tabelle mostrano infatti valori non perfettamente coincidenti, con leggere variazioni nelle misure registrate, dovute alle modalità di rilevazione e alle condizioni sperimentali.

I risultati dell'esercizio 3 evidenziano che il gruppo classe ha raccolto dati coerenti con la variazione delle grandezze coinvolte, registrando differenze nella lunghezza dell'ombra in funzione sia della distanza della sorgente luminosa sia dell'altezza dell'oggetto. Le tabelle compilate e le descrizioni fornite mostrano una rappresentazione del fenomeno basata sull'osservazione delle variazioni e sul confronto tra le diverse configurazioni analizzate.

4.4 Terzo incontro – analisi dati

Nel terzo incontro, i dati raccolti dai diversi gruppi nel laboratorio del precedente incontro sono stati riportati all'interno di due tabelle, distinte in base alla distanza tra sorgente luminosa e oggetto: una relativa alla distanza di 30 cm e una relativa alla distanza di 60 cm. Questa operazione ha permesso di riunire i valori ottenuti dai cinque gruppi, rendendo possibile una lettura comparativa e più ordinata delle misurazioni raccolte.

Nella **Tabella 1**, relativa alla distanza luce–oggetto di 30 cm, sono stati riportati dieci valori di altezza dell'oggetto, le corrispondenti lunghezze dell'ombra e il valore ottenuto nella colonna "Relazione", calcolato come rapporto tra ombra e altezza dell'oggetto. I dati mostrano che i valori della relazione si distribuiscono in un intervallo ristretto. Una prima osservazione numerica ha quindi evidenziato che la maggior parte dei valori si colloca intorno a 1, pur con alcune oscillazioni. Questo andamento ha reso visibile una certa regolarità nei dati raccolti: al variare dell'altezza degli oggetti, la lunghezza dell'ombra tende a mantenere una relazione abbastanza stabile con essa.

Altezza oggetto	Lunghezza ombra	Rapporto (O/h)
10,4 cm	10,1 cm	0,97
8,6 cm	7,6 cm	0,88
10,2 cm	11 cm	1,08
15,6 cm	17,5 cm	1,12
6 cm	8,7 cm	1,45
15,2 cm	15,2 cm	1,00
9,9 cm	11 cm	1,11
12,7 cm	13,2 cm	1,04
10 cm	9,5 cm	0,95
13,2 cm	11,5 cm	0,87

Tabella 1 Distanza 30cm

Nella **Tabella 2**, relativa alla distanza luce–oggetto di 60 cm, i dati sono stati nuovamente riportati mettendo in relazione altezza, lunghezza dell'ombra e valore del rapporto. In questo

secondo insieme i valori risultano più elevati rispetto alla prima tabella e si distribuiscono intorno a circa 1,8–1,9. Anche in questo caso, la lettura numerica ha portato a rilevare una concentrazione dei valori attorno a uno stesso ordine di grandezza, pur con alcune variazioni. Il confronto tra le due tabelle ha quindi reso evidente che, in entrambe le configurazioni, i risultati del rapporto mostravano una certa stabilità interna, ma con valori diversi tra la prima e la seconda situazione.

Altezza oggetto	Lunghezza ombra	Rapporto (O/h)
10,4 cm	18 cm	1,73
8,6 cm	13,9 cm	1,62
10,2 cm	19,5 cm	1,91
15,6 cm	32,5 cm	2,08
6 cm	12,7 cm	2,12
15,2 cm	29,8 cm	1,96
9,9 cm	19 cm	1,92
12,7 cm	24 cm	1,89
10 cm	18 cm	1,80
13,2 cm	25 cm	1,89

Tabella 2 Distanza 60cm

Questa prima fase di analisi numerica ha permesso al gruppo classe di confrontare i dati raccolti non solo come misure isolate, ma come valori organizzati e confrontabili. La colonna del rapporto ha reso visibile il fatto che i numeri ottenuti non variavano in modo casuale, ma presentavano una distribuzione riconoscibile all'interno di ciascuna tabella.

Nella seconda parte dell'attività, studenti e studentesse hanno costruito due rappresentazioni cartesiane, una per i dati della tabella relativa ai 30 cm e una per quelli della tabella relativa ai 60 cm.

Nel **grafico 1**, relativo alla distanza di 30 cm, i punti risultano distribuiti in modo crescente: all'aumentare dell'altezza dell'oggetto aumenta anche la lunghezza dell'ombra. I punti si dispongono in prossimità di una stessa direzione e vengono accompagnati da una linea tracciata che ne sintetizza l'andamento complessivo. La disposizione dei dati mostra una certa vicinanza alla linea di tendenza, anche se alcuni punti si collocano leggermente sopra

o sotto di essa. Questa configurazione rende visibile una regolarità nell'andamento dei dati e permette di osservare che le grandezze considerate variano in modo coerente.

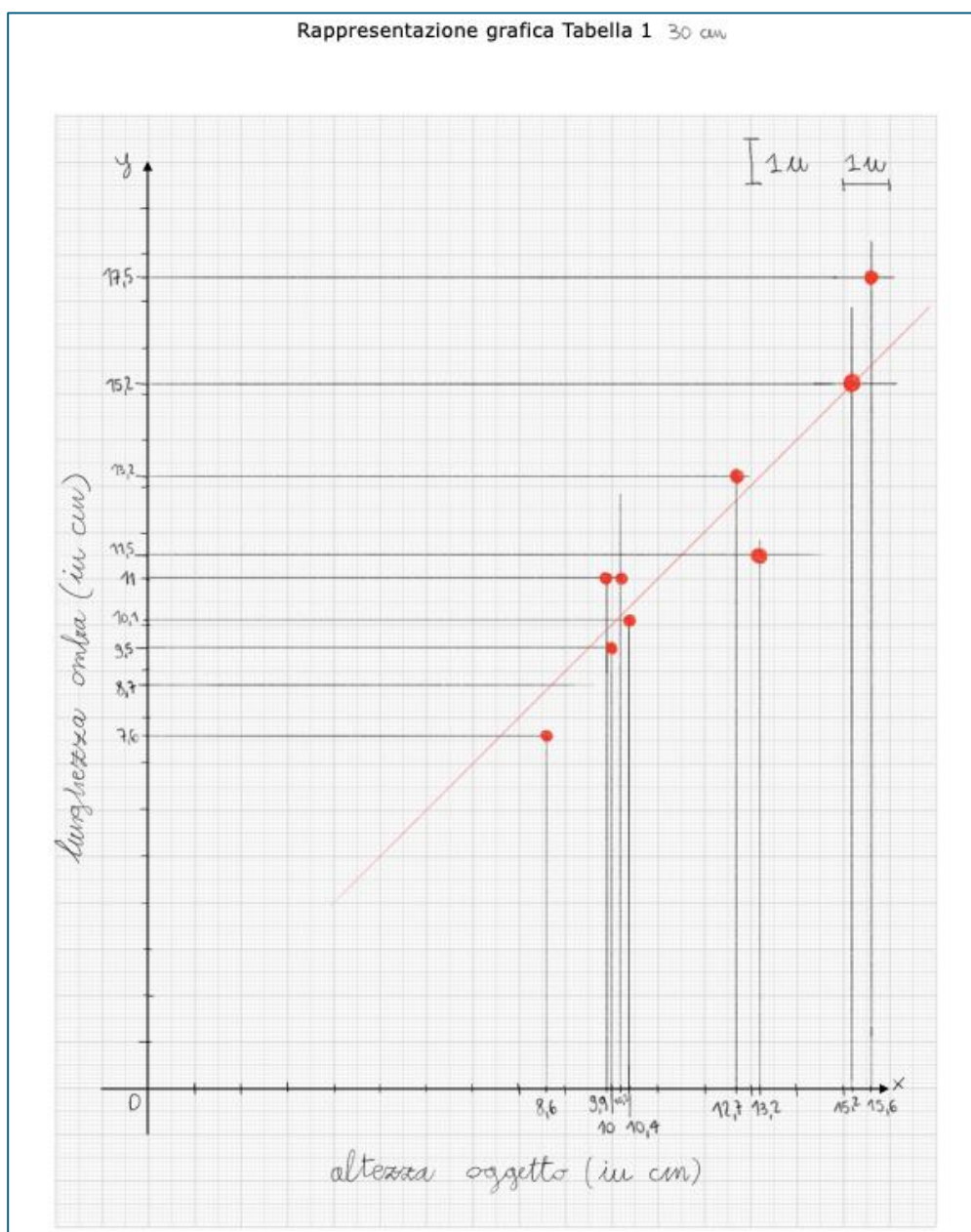


Grafico 1 Distanza da 30cm

Nel **grafico 2**, relativo alla distanza di 60 cm, i punti presentano anch'essi un andamento crescente, ma risultano collocati più in alto rispetto a quelli del primo grafico, a parità di altezza dell'oggetto. Anche in questo caso, i dati si dispongono in prossimità di una linea crescente, con una distribuzione che evidenzia una direzione comune e una maggiore inclinazione rispetto al grafico precedente. In termini descrittivi, questo significa che, per oggetti di altezza simile, le ombre registrate nella seconda tabella risultano complessivamente più lunghe rispetto a quelle della prima.

Rappresentazione grafica Tabella 2 60 cm

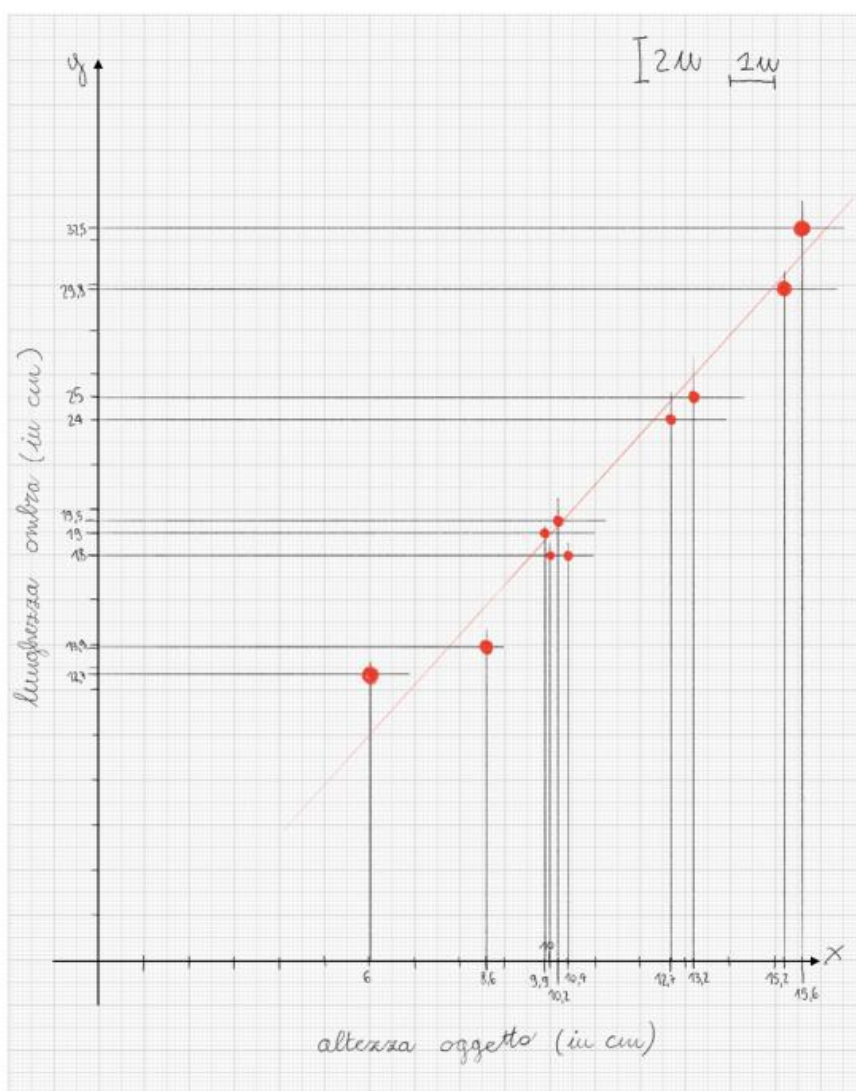


Grafico 2 Distanza da 60cm

Il confronto tra i due piani cartesiani ha quindi reso particolarmente evidente la presenza di due andamenti distinti. In entrambi i casi i punti seguono una disposizione ordinata e crescente, ma il secondo grafico presenta una retta più inclinata e valori della lunghezza dell'ombra mediamente più elevati. La rappresentazione grafica ha consentito così di visualizzare in modo immediato un elemento che era già emerso nella lettura numerica delle tabelle: all'interno di ciascuna configurazione i dati mostrano una propria regolarità, mentre il confronto tra le due configurazioni mette in evidenza una differenza sistematica tra gli andamenti.

Un aspetto osservabile riguarda la presenza di piccoli scarti nella disposizione dei punti. I valori raccolti non si collocano tutti esattamente sulla linea tracciata, ma mostrano leggere variazioni. Dal punto di vista descrittivo, questo elemento rende conto del carattere

sperimentale delle misurazioni effettuate e della presenza di approssimazioni nei dati riportati.

I risultati del terzo incontro mostrano che il riordino dei dati in tabelle, il calcolo della relazione tra le grandezze e la successiva rappresentazione sul piano cartesiano hanno reso progressivamente più visibile una regolarità nei dati raccolti. Le tabelle hanno permesso una prima lettura numerica degli andamenti, mentre i grafici hanno reso osservabile in forma globale la disposizione dei punti e il diverso comportamento delle due configurazioni sperimentali. In questo modo, il gruppo classe ha potuto lavorare su dati condivisi, confrontarli e rappresentarli, passando da una raccolta distribuita di misure a una visione più ordinata e leggibile del fenomeno.

4.5 Quarto incontro – stima del reale

Nel corso del quarto incontro, i gruppi hanno applicato il modello costruito nelle fasi precedenti per stimare l'altezza di oggetti reali, a partire dalla misurazione delle ombre. I dati raccolti sono stati organizzati all'interno delle schede attraverso la registrazione delle grandezze rilevate, il calcolo dei rapporti tra lunghezza dell'ombra e altezza e l'indicazione dell'orario di misurazione.

Il gruppo *Rosso* ha svolto un lavoro articolato, prendendo in considerazione un modello di solido regolare, due componenti del gruppo, l'edificio scolastico e successivamente anche la scala antincendio. I valori del rapporto ottenuti risultano pari a 1,18; 1,38; 1,38, rilevati tra le 12:38 e le 13:08. Il gruppo ha calcolato la media dei rapporti e l'ha utilizzata come valore di riferimento per stimare l'altezza dell'edificio, ottenendo un risultato pari a 8,74 metri.

Il gruppo *Azzurro* ha lavorato su un solido regolare, una componente del gruppo, l'edificio e ha esteso l'attività anche alla misurazione di un palo. I rapporti calcolati risultano pari a 1,43; 1,44; 1,50, con rilevazioni effettuate tra le 12:55 e le 13:10. Anche in questo caso, il gruppo ha utilizzato la media dei valori ottenuti per stimare l'altezza dell'edificio, che è risultata pari a 7,69 metri.

Il gruppo *Viola* ha effettuato più rilevazioni, misurando tre solidi, una componente del gruppo e l'edificio. I valori del rapporto risultano pari a 1,46; 1,40; 1,24; 1,45, registrati tra le 12:42 e le 13:13. Il gruppo ha calcolato un valore medio del rapporto e lo ha utilizzato per la stima dell'altezza dell'edificio, ottenendo un risultato pari a 7,59 metri.

Il gruppo *Verde* ha lavorato su un insieme più ampio di oggetti, comprendente un solido, una persona, un paletto, una scatola e l'edificio. I rapporti registrati risultano pari a 1,59; 1,41; 1,50; 1,50, con rilevazioni effettuate tra le 12:37 e le 13:10. Anche questo gruppo ha utilizzato la media dei valori per stimare l'altezza dell'edificio, ottenendo un risultato pari a 8,31 metri.

Il gruppo *Giallo* ha misurato un solido, una componente del gruppo e l'edificio, registrando rapporti pari a 1,50 e 1,37 tra le 12:38 e le 12:58. A partire da questi dati, ha calcolato un valore medio utilizzato per la stima finale, ottenendo un'altezza dell'edificio pari a 7,9 metri.

Tutti i gruppi hanno seguito una procedura analoga, basata sulla raccolta di più misurazioni, sul calcolo del rapporto tra le grandezze e sull'utilizzo di un valore medio come riferimento per la stima finale. I risultati ottenuti mostrano valori dell'altezza dell'edificio compresi tra 7,59 metri e 8,74 metri, evidenziando una certa vicinanza tra le stime prodotte dai diversi gruppi, pur in presenza di variazioni legate alle specifiche misurazioni effettuate e alle

condizioni operative.

4.6 Questionario affettivo finale

Il questionario affettivo finale è stato somministrato al termine del percorso didattico con l'obiettivo di rilevare il rapporto degli studenti e delle studentesse con la matematica dopo l'esperienza *Ombre e misure*. I dati raccolti sono stati analizzati attraverso una combinazione di indicatori quantitativi quali le medie e la dispersione delle risposte su scala Likert, e qualitativi, quale l'analisi delle risposte aperte.

Per ciascun item è stata calcolata la media delle risposte e la deviazione standard, al fine di evidenziare sia la tendenza generale sia il grado di variabilità all'interno della classe. I dati sono stati successivamente letti anche per categorie, in riferimento alle tre dimensioni del modello di Di Martino e Zan.

Si segnala che il numero del campione varia a causa di studenti e studentesse assenti al momento della compilazione del questionario finale, elemento che incide leggermente sulla distribuzione complessiva dei dati, ma trascurabile.

Item con valori medi più elevati

Gli item che presentano le medie più alte sono:

- Item 1 – “La matematica è una materia utile nella vita di tutti i giorni” (media: 3,62)
- Item 2 – “Per capire la matematica serve soprattutto ragionare” (media: 3,68)
- Item 17 – “Provo sollievo quando capisco il ‘perché’ di un concetto matematico” (media: 3,56)
- Item 18 – “Mi sento più tranquillo se posso confrontarmi con il gruppo” (media: 3,31)

Questi item presentano anche una deviazione standard relativamente contenuta, indicando una distribuzione delle risposte abbastanza omogenea.

Item con valori medi intermedi

Un gruppo consistente di item si colloca in una fascia intermedia (circa tra 3 e 3,2), tra cui:

- Item 5 – matematica come osservazione della realtà (media: 3,18)
- Item 6 – matematica come ricerca di regolarità (media: 3,18)
- Item 10 – uso di strategie alternative (media: 3,25)
- Item 12 – spiegare a parole proprie (media: 3,25)
- Item 15 – soddisfazione nel lavorare con dati raccolti (media: 3,06)
- Item 16 – coinvolgimento attraverso l'esperimento (media: 3,18)

In questi casi, le deviazioni standard risultano generalmente più elevate, segnalando una maggiore variabilità nelle risposte.

Item con valori medi più bassi

Gli item con le medie più basse sono:

- Item 7 – “La matematica è una materia creativa” (media: 2,25)
- Item 8 – “Penso di essere capace in matematica” (media: 2,25)
- Item 13 – uso di tabelle e grafici (media: 2,56)
- Item 14 – attività pratiche (media: 2,87)

Questi item presentano anche valori più elevati di deviazione standard, indicando una distribuzione più dispersa delle risposte.

Analisi per categorie

Visione della matematica: Gli item relativi alla visione della matematica (1,2,3,4,5,6,7) presentano valori medi generalmente elevati, con una concentrazione delle risposte nelle categorie più alte della scala. In particolare, gli item relativi all'utilità della matematica e al ruolo del ragionamento mostrano una forte convergenza nel gruppo classe.

Tuttavia, alcuni item della stessa categoria, in particolare quello relativo alla creatività, mostrano valori medi più bassi e una maggiore dispersione.

Competenza percepita: Gli item relativi alla competenza percepita (8,9,10,11,12,13) presentano valori medi più variabili, con una distribuzione delle risposte che tende a concentrarsi nelle categorie centrali della scala. In particolare, l'item relativo alla percezione generale di capacità mostra uno dei valori medi più bassi dell'intero questionario.

Altri item, come quelli relativi all'uso di strategie o alla spiegazione dei fenomeni, mostrano valori medi più elevati ma accompagnati da una maggiore dispersione.

Disposizione emotiva: Gli item relativi alla disposizione emotiva (14,15,16,17,18) presentano valori medi compresi tra circa 2,8 e 3,5. Alcuni item mostrano una distribuzione abbastanza omogenea, ad esempio, quello relativo al sollievo nella comprensione, mentre altri presentano una maggiore variabilità, come nel caso degli item legati al coinvolgimento nelle attività pratiche.

Analisi delle risposte aperte

Le risposte alle domande aperte permettono di approfondire e articolare i dati quantitativi,

evidenziando esperienze e vissuti legati al percorso svolto.

Nel gruppo classe, alcuni individuano momenti specifici del percorso in cui si sono sentiti competenti, alcuni fanno riferimento alla comprensione di relazioni matematiche, come nel caso di Musetti, che indica il momento in cui ha “capito il rapporto tra l'altezza dell'oggetto e la lunghezza dell'ombra”, oppure Oliva, che descrive il momento in cui è riuscita a determinare l'altezza dell'edificio attraverso l'ombra.

Altri collegano la competenza al lavoro di gruppo, come Farfalla D'oro, che si sente efficace nel momento in cui aiuta i compagni a descrivere il lavoro svolto.

In altri casi, la competenza è associata a situazioni operative, come nel caso di Kalamaro, che si sente competente “quando in cortile [...] ragionava e faceva calcoli senza usare la calcolatrice”.

Accanto a queste risposte, sono presenti anche dichiarazioni che evidenziano una percezione di competenza più fragile, come nel caso de L'acquariofilo di turno, che afferma di non essersi sentito particolarmente bravo durante il percorso.

Le risposte relative alla **gestione dell'errore** e dei dati mostrano come gli studenti abbiano utilizzato strategie diverse per verificare la correttezza delle misure.

Rondine, ad esempio, descrive il confronto con il gruppo come modalità principale per verificare i dati raccolti, evidenziando un uso della discussione come strumento di controllo.

Alcune risposte evidenziano **cambiamenti nel modo di vedere la matematica**. In particolare, L'acquariofilo di turno sottolinea come la matematica sia stata riconosciuta come “qualcosa di più pratico [...] presente nella nostra vita”, mentre Inverno evidenzia come essa sia “in ogni cosa [...] anche in natura”.

Francesca afferma di averla vista con occhi diversi, mentre Erfrendy la descrive come molteplice, sottolineando la possibilità di risolvere lo stesso problema in modi diversi.

Il caso di Musetti, che dichiara di aver sempre trovato la matematica interessante, rientra tra i discenti che evidenziano una continuità nella propria visione.

Le parole utilizzate per **descrivere la matematica** mostrano una varietà di rappresentazioni. Si mantengono i riferimenti alla logica, ma arricchiti di nuove dimensioni, come nel caso de L'acquariofilo di turno, che associa alla matematica anche “felicità, divertimento, collaborazione”.

Vengono introdotti elementi legati alla complessità o alla difficoltà, come nel caso di Yao

Ming, che la descrive come “più complicata”.

Sintesi descrittiva

Nel complesso, i dati del questionario affettivo finale mostrano una distribuzione dei valori prevalentemente nella fascia medio-alta della scala Likert, con una maggiore concentrazione delle risposte nelle categorie di accordo per diversi item. Le deviazioni standard evidenziano una variabilità differenziata tra le diverse dimensioni, mentre le risposte aperte mostrano una pluralità di esperienze e rappresentazioni legate al percorso svolto.

4.7 Test finale

Il test finale è stato somministrato al termine del percorso didattico con l'obiettivo di rilevare il livello di consolidamento dei nuclei concettuali affrontati. Hanno partecipato 16 studenti e studentesse. L'analisi dei risultati è stata organizzata in sezioni coerenti con la struttura dello strumento: comprensione del fenomeno, rapporto e proporzionalità, uso delle rappresentazioni e argomentazione.

Comprensione del modello Sole-ombra

Questa sezione comprende i quesiti 1, 2 e 6 e riguarda la capacità di interpretare il fenomeno delle ombre mettendo in relazione le variabili coinvolte.

Nel **quesito 1**, relativo ai fattori che determinano la lunghezza dell'ombra, 9 tra studenti e studentesse (56%) individuano correttamente sia l'altezza dell'oggetto sia la posizione del Sole. 5 risposte (31%) risultano parziali, in quanto fanno riferimento a una sola variabile o includono elementi accessori. 2 risposte (13%) si basano su un'interpretazione non coerente del fenomeno.

Il gruppo classe mostra una buona capacità di riconoscere le variabili fondamentali, con una parte che struttura la risposta in modo completo e una parte che evidenzia una comprensione ancora in evoluzione.

Nel **quesito 2**, che richiede di prevedere la variazione dell'ombra al variare della posizione del Sole, 13 tra studenti e studentesse (81%) forniscono una risposta corretta, indicando che l'ombra si accorcia quando il Sole sale. 3 risposte (19%) si discostano da questa interpretazione. Il dato evidenzia una comprensione consolidata della relazione dinamica tra le variabili.

Nel **quesito 6**, relativo alla variazione del rapporto in momenti diversi della giornata, 14 tra studentesse e studenti (88%) riconoscono che il valore cambia in funzione della posizione del Sole e accompagnano la risposta con una spiegazione coerente. 1 risposta (6%) risulta non coerente e 1 risposta (6%) risulta assente. Il gruppo classe mostra una capacità diffusa di collegare il modello matematico alle condizioni fisiche del fenomeno.

Questa sezione evidenzia un livello elevato di comprensione del fenomeno, con una larga parte del gruppo classe in grado di mettere in relazione le variabili e interpretarne le variazioni.

Rapporto e proporzionalità diretta

Questa sezione comprende i quesiti 3, 4, 5 e 9 e riguarda l'uso del rapporto come strumento per interpretare relazioni tra grandezze.

Nel **quesito 3**, relativo a una situazione proporzionale diretta, 12 tra studentesse e studenti (75%) individuano correttamente la lunghezza dell'ombra, riconoscendo la costanza del rapporto. 4 risposte (25%) si discostano da questo modello. Il dato evidenzia una buona capacità di applicazione del modello proporzionale in contesti guidati.

Nel **quesito 4**, che richiede di completare una tabella, 9 tra studentesse e studenti (56%) forniscono una risposta corretta, 2 (13%) producono una risposta parziale, 4 (25%) presentano errori e 1 (6%) lascia la risposta in bianco. Il gruppo classe mostra una competenza diffusa, accompagnata da alcune difficoltà nella gestione della rappresentazione tabellare.

Nel **quesito 5**, relativo al significato del rapporto, 15 tra studentesse e studenti (94%) riconoscono il rapporto come valore costante che descrive la relazione tra grandezze, mentre 1 risposta (6%) si discosta da questa interpretazione. Il dato evidenzia un livello molto elevato di interiorizzazione del concetto.

Nel **quesito 9**, che richiede il trasferimento del modello proporzionale a una situazione diversa, 9 tra studentesse e studenti (56%) forniscono una risposta corretta, 2 (13%) presentano errori e 5 (31%) non producono risposta. Il dato evidenzia una buona capacità di applicazione, accompagnata da una parte del gruppo classe che incontra difficoltà nel trasferimento a contesti nuovi.

Questa sezione evidenzia un buon livello di sviluppo del pensiero proporzionale, con una forte interiorizzazione del concetto di rapporto e una capacità diffusa di applicazione, accompagnata da alcune difficoltà nei contesti meno guidati.

Uso delle rappresentazioni e lettura dei dati

Questa sezione comprende i quesiti 4, 7 e 8 e riguarda la capacità di leggere e interpretare tabelle e grafici.

Nel **quesito 7**, relativo alla lettura e interpretazione di un grafico, 7 tra studentesse e studenti (44%) forniscono una risposta corretta. Tra queste, 4 risposte evidenziano un'inversione del rapporto, accompagnata da una comprensione coerente della relazione tra grandezze. 5 risposte (31%) risultano parziali, 1 (6%) presenta errori e 3 (19%) risultano assenti. Il gruppo classe mostra una capacità significativa di interpretare la relazione, accompagnata da alcune difficoltà nella formalizzazione.

Nel **quesito 8**, che richiede di interpretare un grafico in relazione al tempo della giornata, 10 tra studentesse e studenti (63%) forniscono una risposta corretta, 3 (19%) presentano

errori e 3 (19%) non producono risposta. Il dato evidenzia una buona capacità di collegare la rappresentazione grafica al fenomeno reale.

Questa sezione evidenzia un livello intermedio di competenza, con una parte consistente del gruppo classe in grado di leggere e interpretare le rappresentazioni e una parte che mostra difficoltà nella formalizzazione e nell'uso completo del grafico.

Argomentazione e spiegazione del ragionamento

Questa dimensione attraversa in particolare i quesiti 6, 7, 8 e 9 e riguarda la capacità di esplicitare il ragionamento.

Circa 8–9 tra studentesse e studenti (50–56%) producono spiegazioni strutturate e coerenti, in cui il procedimento viene esplicitato e collegato alle relazioni tra grandezze. 4–5 risposte (25–31%) risultano parziali, mentre 2–3 risposte (13–19%) presentano una spiegazione limitata o risultano assenti.

Il gruppo classe mostra una buona capacità di verbalizzazione del ragionamento, con una parte consistente che esplicita in modo chiaro le relazioni matematiche e una parte che esprime il procedimento in forma sintetica o non completamente strutturata.

Sintesi dei risultati

Nel complesso, il test finale restituisce un quadro positivo del livello di apprendimento raggiunto dal gruppo classe.

La comprensione del fenomeno delle ombre risulta ampiamente consolidata, con una capacità diffusa di mettere in relazione le variabili e interpretarne le variazioni. Il concetto di rapporto risulta interiorizzato in modo solido, come evidenziato dai risultati del quesito 5, e viene utilizzato in modo efficace in contesti guidati.

L'uso delle rappresentazioni mostra un livello intermedio, con una parte consistente del gruppo classe in grado di leggere e interpretare tabelle e grafici e una parte che incontra difficoltà nella formalizzazione.

La capacità di argomentazione evidenzia uno sviluppo significativo, con molte studentesse e studenti in grado di esplicitare il proprio ragionamento in modo coerente.

Il quadro complessivo evidenzia un passaggio verso forme di pensiero relazionale più strutturate, in cui la matematica viene utilizzata come strumento per interpretare fenomeni e costruire relazioni tra grandezze.

5 Discussione

5.1 Questionario affettivo

L'analisi congiunta dei risultati del questionario affettivo iniziale e finale consente di evidenziare alcune trasformazioni significative nel rapporto tra gli studenti e la matematica, interpretabili alla luce del quadro teorico di riferimento.

Il confronto tra i valori medi delle tre dimensioni del modello di Di Martino e Zan mostra un andamento differenziato, visibile nel *Grafico 3*. La disposizione emotiva registra un incremento, passando da 2,88 a 3,2; la visione della matematica evidenzia un miglioramento ancora più marcato, passando da 2,80 a 3,24; la competenza percepita, invece, mostra una lieve diminuzione, passando da 3,00 a 2,84.

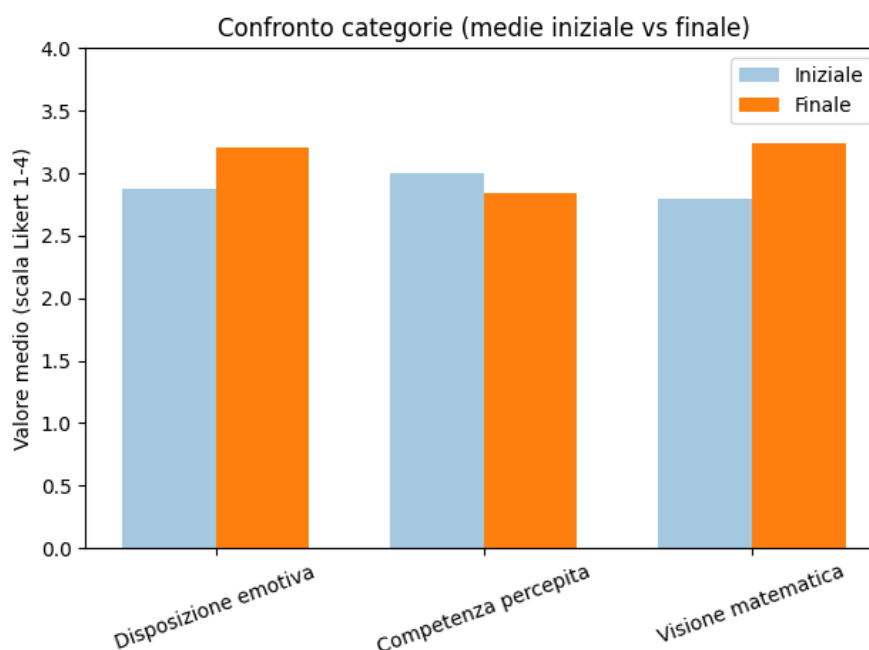


Grafico 3 Confronto categorie

Questi dati delineano un quadro articolato, in cui il percorso didattico sembra incidere in modo significativo sulla dimensione affettiva e rappresentazionale, ma in maniera più complessa sulla percezione di competenza.

Per quanto riguarda la **visione della matematica**, i risultati evidenziano un rafforzamento della concezione della disciplina come strumento per interpretare la realtà. Le risposte degli studenti mostrano una maggiore attenzione al legame tra matematica e fenomeni osservabili: la matematica viene descritta come presente nella vita, utile per capire la realtà, molteplice e capace di offrire diverse strategie di soluzione. Questo dato è coerente con la

prospettiva dei **campi di esperienza** proposta da Boero, secondo cui la costruzione del significato matematico avviene all'interno di situazioni significative e contestualizzate (Boero, 2007). Il percorso *Ombre e misure*, fondato sull'osservazione di fenomeni reali, ha favorito l'emergere della matematica come risposta a problemi concreti, contribuendo a trasformare la rappresentazione della disciplina da insieme di procedure a sistema di relazioni e strumenti interpretativi.

Questa trasformazione si osserva anche nelle risposte aperte, in cui diversi sottolineano come la matematica non sia solo formule e calcoli, ma qualcosa di più pratico e presente nella realtà. In questa prospettiva, il dato empirico conferma quanto sostenuto dalla didattica della matematica contemporanea: il significato matematico non è dato a priori, ma si costruisce attraverso l'esperienza e l'interazione con contesti autentici.

Per quanto riguarda la **disposizione emotiva**, questa mostra un miglioramento complessivo. L'aumento del valore medio suggerisce una maggiore disponibilità emotiva nei confronti della matematica, accompagnata da vissuti positivi legati al coinvolgimento, alla soddisfazione e alla partecipazione attiva. Le risposte degli studenti e delle studentesse evidenziano come l'esperienza concreta, il lavoro di gruppo e il protagonismo nella raccolta dei dati abbiano contribuito a rendere la matematica più accessibile e significativa.

Questo risultato è interpretabile alla luce degli studi di Di Martino e Zan, che sottolineano come la **dimensione affettiva non sia separata da quella cognitiva**, ma profondamente intrecciata con essa. In particolare, il miglioramento della disposizione emotiva appare strettamente connesso al tipo di attività proposte: contesti aperti, situazioni autentiche e possibilità di esplorazione favoriscono un rapporto più positivo con la disciplina (Di Martino, Zan, 2010).

Allo stesso tempo, le risposte aperte mettono in evidenza il ruolo centrale del **lavoro di gruppo**, spesso associato a sensazioni di maggiore sicurezza, collaborazione e coinvolgimento. Questo dato è coerente con la prospettiva socioculturale di Vygotsky e con l'**Activity Theory**, secondo cui l'apprendimento si sviluppa attraverso l'interazione sociale e la mediazione di strumenti (Vygotsky, 1978; Engeström, 1987). Il gruppo si configura come contesto in cui gli studenti e le studentesse possono confrontare strategie, negoziare significati e costruire conoscenza in modo condiviso, contribuendo anche a una maggiore serenità nell'affrontare i compiti matematici.

Diverso è il caso della **competenza percepita**, che non mostra un incremento, ma una lieve diminuzione. Questo dato, apparentemente controintuitivo, può essere interpretato alla luce della natura delle attività proposte. Il passaggio da compiti più strutturati a situazioni aperte, non immediatamente risolvibili attraverso procedure note, espone il gruppo classe a una

maggior complessità e incertezza.

Le risposte aperte confermano questa lettura: è emerso il non essersi sentiti particolarmente competenti durante il percorso, ma anche chi ha individuato momenti specifici di riuscita legati a situazioni concrete, come la misurazione dell'altezza dell'edificio o la comprensione del rapporto tra grandezze. La competenza percepita appare quindi più situata, non più legata esclusivamente alla correttezza del risultato, ma alla capacità di comprendere, spiegare e partecipare al processo.

Questo risultato è coerente con una concezione dinamica della competenza, che si sviluppa attraverso l'interazione con problemi complessi e contesti non strutturati. La lieve diminuzione della competenza percepita non rappresenta un elemento negativo, ma può essere letta come un segnale di maggiore consapevolezza rispetto alla complessità della matematica e ai propri processi di apprendimento. Un ulteriore elemento significativo riguarda il **ruolo delle rappresentazioni**, emerso sia nei dati quantitativi sia nelle risposte aperte. Gli studenti hanno utilizzato tabelle, grafici e rappresentazioni per organizzare i dati e individuare regolarità, sperimentando il passaggio dall'esperienza concreta alla formalizzazione. Questo processo è coerente con la teoria dei registri semiotici di Duval, secondo cui la comprensione matematica si costruisce attraverso il coordinamento di diverse forme di rappresentazione (Duval, 1995). L'attività svolta ha permesso agli studenti e alle studentesse di passare dall'osservazione delle ombre alla rappresentazione grafica, fino alla costruzione di relazioni matematiche, favorendo una comprensione più profonda e articolata. Nel complesso, i risultati del questionario affettivo evidenziano come il percorso didattico abbia inciso in modo significativo sulla dimensione affettiva e sulla visione della matematica, contribuendo a costruire un rapporto più positivo, consapevole e orientato al significato. La matematica emerge come disciplina legata alla realtà, alla ricerca di regolarità e alla costruzione condivisa del sapere.

Questi risultati permettono di rispondere alla domanda di ricerca, mostrando come un percorso di Outdoor Education, fondato sull'osservazione e sull'esperienza diretta, possa influenzare non solo la comprensione dei concetti matematici, ma anche il modo in cui gli studenti percepiscono e vivono la disciplina. In particolare, il progetto *Ombre e misure* ha favorito lo sviluppo di una visione più relazionale della matematica e di una disposizione emotiva più positiva, pur mettendo in luce la complessità della costruzione della competenza percepita in contesti di apprendimento aperti e non strutturati.

5.2 Confronto delle conoscenze

Il confronto tra i risultati del test delle preconoscenze e quelli del test finale consente di osservare in modo articolato l'evoluzione dei processi di apprendimento del gruppo classe, con particolare riferimento alla comprensione del fenomeno, allo sviluppo del pensiero proporzionale, all'uso delle rappresentazioni e alla capacità di argomentazione.

L'analisi evidenzia un passaggio significativo da forme di conoscenza prevalentemente intuitive e situate a forme di pensiero più strutturate, in cui la matematica viene utilizzata come strumento per interpretare e modellizzare la realtà.

Dalla rappresentazione intuitiva al modello Sole-ombra

Nel test iniziale, la comprensione del fenomeno delle ombre si fonda su intuizioni legate all'esperienza quotidiana. Nel quesito 1, solo 4 studentesse e studenti (21%) individuano in modo completo le variabili rilevanti, mentre la maggior parte del gruppo classe (63%) fornisce risposte parziali. Nel test finale, la stessa competenza mostra un consolidamento significativo: 9 tra studentesse e studenti (56%) forniscono una risposta completa, mentre una parte consistente del gruppo classe riconosce il ruolo della posizione del Sole e dell'altezza dell'oggetto.

Anche nella lettura della variazione del fenomeno si osserva una continuità e un rafforzamento. Nel test iniziale, 16 tra studentesse e studenti (84%) riconoscono che l'ombra cambia nel corso della giornata; nel test finale, 13 tra studentesse e studenti (81%) descrivono correttamente il comportamento dell'ombra in relazione alla posizione del Sole e 14 (88%) collegano la variazione del rapporto alle condizioni di illuminazione.

Questo passaggio evidenzia una riorganizzazione delle conoscenze, che da descrittive diventano progressivamente relazionali e coerenti con un modello fisico-geometrico. Tale evoluzione risulta coerente con quanto descritto da Boero, secondo cui le rappresentazioni iniziali costituiscono una base su cui si costruiscono modelli più strutturati attraverso l'attività didattica (Boero, 1999).

Dall'approccio additivo al pensiero proporzionale

Il confronto tra i due momenti di rilevazione evidenzia in modo particolarmente significativo lo sviluppo del pensiero proporzionale, che rappresenta uno degli obiettivi centrali del percorso.

Nel test iniziale, il confronto tra grandezze si basa prevalentemente su un approccio additivo. Nel quesito 5, 12 tra studentesse e studenti (63%) utilizzano il criterio del

“medesimo aumento”, mentre solo 5 (26%) mostrano un approccio relazionale. Nel quesito 6, 10 risposte (53%) si collocano su un piano qualitativo, mentre 8 (42%) esprimono una relazione proporzionale.

Nel test finale, il quadro risulta profondamente modificato. Nel quesito 5, 15 tra studentesse e studenti (94%) riconoscono il rapporto come costante, mostrando una interiorizzazione esplicita del concetto. Nel quesito 3, 12 tra studentesse e studenti (75%) applicano correttamente la proporzionalità, mentre nel quesito 9, 9 studentesse e studenti (56%) utilizzano il modello in un contesto nuovo.

Questa evoluzione evidenzia il passaggio da un confronto basato sulla differenza tra grandezze a un confronto basato sulla relazione tra le grandezze stesse. Tale passaggio risulta coerente con quanto descritto da Vergnaud, che individua nel superamento dell'approccio additivo uno snodo fondamentale per la costruzione delle strutture moltiplicative (Vergnaud, 1983).

Dall'uso implicito alle rappresentazioni come strumenti di pensiero

Nel test iniziale, le rappresentazioni risultano presenti in forma limitata e spesso non sistematizzata. Nel quesito 2, 12 tra studentesse e studenti (63%) producono rappresentazioni coerenti, mentre una parte del gruppo classe organizza gli elementi in modo parziale.

Nel test finale, le rappresentazioni assumono un ruolo centrale nei processi di ragionamento. Nel quesito 7, 7 tra studentesse e studenti (44%) leggono correttamente il grafico, mentre 5 (31%) mostrano una comprensione parziale della relazione. Nel quesito 8, 10 (63%) interpretano correttamente il grafico in relazione al tempo.

Il dato evidenzia un passaggio da un uso descrittivo delle rappresentazioni a un uso funzionale, in cui tabelle e grafici diventano strumenti per individuare regolarità e formulare previsioni. Questo risultato si colloca in linea con il quadro teorico proposto da Duval, secondo cui la comprensione matematica si sviluppa attraverso il coordinamento di diversi registri di rappresentazione (Duval, 1993).

Evoluzione della capacità di argomentazione

Nel test iniziale, le spiegazioni fornite dal gruppo classe assumono spesso una forma descrittiva, con riferimenti all'esperienza e al contesto osservato. Nel test finale, 9 tra studentesse e studenti (56%) producono spiegazioni strutturate, in cui il procedimento viene esplicitato e collegato alle relazioni tra grandezze.

Questa evoluzione evidenzia un rafforzamento della capacità di verbalizzare il

ragionamento e di costruire argomentazioni coerenti. Il dato risulta coerente con l'idea di matematica come attività di costruzione di significato, in cui il linguaggio svolge un ruolo centrale nel processo di apprendimento (Freudenthal, 1991).

Sintesi interpretativa

Il confronto tra test iniziale e test finale evidenzia un'evoluzione significativa del gruppo classe.

Le conoscenze iniziali, caratterizzate da intuizioni legate all'esperienza e da un uso prevalente di strategie additive, si riorganizzano progressivamente in forme di pensiero relazionale più strutturate. Il concetto di rapporto viene interiorizzato come strumento per interpretare la realtà, mentre le rappresentazioni diventano strumenti operativi per leggere e organizzare i dati.

Il percorso didattico ha quindi favorito il passaggio da una matematica vissuta come insieme di procedure a una matematica intesa come strumento per comprendere e modellizzare fenomeni reali. Questo risultato risponde alla domanda di ricerca e si inserisce in modo coerente nel quadro teorico di riferimento, mettendo in luce l'importanza dell'esperienza basata sul confronto tra pari, guidata dal docente nella costruzione attiva del sapere, al fine di favorire la trasformazione degli apprendimenti.

5.3 Secondo incontro – raccolta dati

L'analisi dei risultati emersi durante il secondo incontro consente di mettere in evidenza il ruolo centrale dell'attività laboratoriale nel processo di costruzione del significato matematico, sia sul piano cognitivo sia su quello affettivo-relazionale. Il lavoro svolto dal gruppo classe si configura come un'esperienza di apprendimento attivo, in cui l'osservazione diretta del fenomeno, mediata dall'uso di artefatti, ha favorito l'emergere di domande, intuizioni e prime forme di strutturazione delle relazioni tra grandezze.

Dal punto di vista cognitivo, l'attività ha attivato processi riconducibili a una logica di tipo esplorativo e induttivo. Studenti e studentesse hanno lavorato su dati raccolti direttamente attraverso l'osservazione di un modello fisico, costruendo progressivamente relazioni tra le variabili attraverso misurazioni, confronti e rielaborazioni. In diverse schede emergono formulazioni che mostrano il tentativo di collegare le osservazioni a regolarità del fenomeno, come nel caso di un gruppo che annota: “quando la luce è più bassa l'ombra diventa più lunga”, oppure “se la torcia è troppo alta l'ombra non si vede”. Queste espressioni evidenziano una prima organizzazione dell'esperienza in termini relazionali.

Questo processo risulta coerente con la prospettiva della matematizzazione proposta da Freudenthal, in cui la conoscenza matematica emerge dall'organizzazione dell'esperienza e dalla ricerca di regolarità nei fenomeni osservati.

La struttura dell'attività, basata sulla variazione controllata delle variabili, ha favorito l'emergere di relazioni tra grandezze, creando le condizioni per lo sviluppo del pensiero proporzionale. Il fatto che studentesse e studenti abbiano lavorato modificando una variabile alla volta ha reso possibile una lettura progressiva del fenomeno, in cui ogni osservazione si inserisce in una rete di relazioni più ampia. Questo emerge anche nelle osservazioni relative al confronto tra oggetti, come in una scheda in cui viene riportato: “con oggetti diversi cambia l'ombra ma bisogna usare la stessa distanza per confrontarli”. Coerentemente, l'attività si colloca all'interno dell'approccio *inquiry-based*.

Un elemento particolarmente rilevante riguarda l'emergere di **conflitti cognitivi** all'interno dei gruppi. Le osservazioni della giornata evidenziano come all'interno del gruppo classe, abbiano confrontato punti di vista differenti, discutendo interpretazioni diverse del fenomeno e negoziando significati condivisi. Questo tipo di dinamica risulta coerente con la prospettiva socio-costruttivista di Vygotskij (1978), secondo cui l'interazione sociale e il confronto tra pari rappresentano un motore fondamentale per lo sviluppo cognitivo. Il conflitto cognitivo, in questo contesto, non assume una valenza negativa, ma si configura come occasione di

riorganizzazione delle conoscenze e di approfondimento della comprensione.

Il lavoro a gruppi con ruoli assegnati ha contribuito in modo significativo a sostenere questi processi. L'organizzazione dell'attività secondo i principi del *cooperative learning* strutturato ha favorito una partecipazione diffusa e una responsabilizzazione individuale all'interno del gruppo. Ogni componente ha avuto la possibilità di contribuire attivamente, sia nella fase di osservazione sia in quella di registrazione e discussione dei dati, creando un contesto di apprendimento condiviso e partecipato.

Accanto alla dimensione cognitiva, l'attività ha avuto un impatto rilevante anche sul piano **affettivo**. Le osservazioni raccolte evidenziano un alto livello di coinvolgimento, curiosità e partecipazione da parte del gruppo classe. Studenti e studentesse si sono mostrati attivi nell'esplorazione del fenomeno, ponendo domande, formulando ipotesi e mostrando interesse per le relazioni osservate. Alcune espressioni riportate nelle schede, come "abbiamo provato più volte per capire meglio" oppure "all'inizio pensavamo una cosa ma poi abbiamo cambiato idea", restituiscono un atteggiamento di apertura e disponibilità alla revisione. Questo tipo di coinvolgimento risulta coerente con una disposizione emotiva positiva nei confronti della matematica, intesa non come insieme di procedure, ma come attività di scoperta e comprensione.

Inoltre, il contesto laboratoriale ha favorito lo sviluppo della **competenza percepita**, in quanto studentesse e studenti hanno potuto contribuire attivamente al lavoro del gruppo, sperimentando il proprio ruolo all'interno di un processo condiviso. La possibilità di osservare direttamente il fenomeno e di verificare le proprie ipotesi ha sostenuto un senso di efficacia legato al processo, più che al risultato finale, come emerge in osservazioni del tipo: "abbiamo capito facendo le prove".

Per quanto riguarda la **visione della matematica**, in questo contesto emerge come disciplina strettamente connessa alla realtà e all'osservazione dei fenomeni. L'attività ha contribuito a costruire un'immagine della matematica come strumento per interpretare il mondo, in linea con il modello di Di Martino e Zan (2010), che sottolinea l'importanza della dimensione affettiva nella relazione con la disciplina.

Infine, l'incontro ha prodotto una ricca base di dati, osservazioni e intuizioni che sono state riprese e rielaborate nell'incontro successivo. Il materiale raccolto durante questa fase ha rappresentato un passaggio fondamentale nel percorso, in quanto ha permesso di rendere espliciti i processi di costruzione del significato e di avviare una successiva fase di sistematizzazione e formalizzazione.

5.4 Terzo incontro – analisi dati

Il terzo incontro del percorso rappresenta un passaggio cruciale nel processo di costruzione del significato matematico, in quanto segna il momento in cui le osservazioni empiriche raccolte nel laboratorio vengono progressivamente riorganizzate e condotte verso una prima forma di formalizzazione. La discussione collettiva, sviluppata a partire dai dati riportati nelle tabelle e dalle rappresentazioni grafiche costruite dal gruppo classe, ha costituito uno spazio privilegiato di negoziazione dei significati, in cui studenti e studentesse hanno potuto confrontare, esplicitare e rielaborare le proprie intuizioni.

Un primo elemento emerso con chiarezza riguarda il **riconoscimento di una regolarità** nei valori della relazione tra altezza dell'oggetto e lunghezza dell'ombra. Attraverso il confronto tra i dati, il gruppo classe ha osservato come, mantenendo costanti le condizioni del sistema *Distanza tra sorgente luminosa e oggetto* i valori ottenuti risultassero tra loro molto simili. Questo ha portato alcune studentesse e alcuni studenti a formulare esplicitamente l'idea che "il numero viene sempre uguale" o che "rimane più o meno lo stesso", avviando così un primo processo di generalizzazione. Tale passaggio risulta coerente con la prospettiva della matematizzazione proposta da Freudenthal (1991), in cui la conoscenza matematica emerge dall'organizzazione dell'esperienza e dalla ricerca di regolarità nei fenomeni osservati.

Il confronto tra le due tabelle ha favorito il riconoscimento del fatto che **tale regolarità dipende dalle condizioni del sistema**. In particolare, è emersa l'osservazione che modificando la distanza tra la fonte luminosa e l'oggetto cambia anche la relazione tra altezza e ombra. Alcuni interventi hanno messo in evidenza che tale variazione è legata al modo in cui la luce colpisce l'oggetto, introducendo in modo spontaneo il riferimento all'angolo di incidenza dei raggi luminosi. In questo contesto, il gruppo classe ha iniziato a ragionare in termini geometrici, collegando la situazione osservata alla costruzione di triangoli formati dalla luce, dall'oggetto e dall'ombra. Pur in assenza di una formalizzazione esplicita, sono emerse intuizioni riconducibili al concetto di triangoli simili: alcune studentesse e alcuni studenti hanno osservato che le figure ottenute risultano "uguali ma più grandi o più piccole", anticipando una lettura relazionale tra le grandezze. Questo tipo di ragionamento si inserisce nella prospettiva descritta da Boero (1999), secondo cui le conoscenze matematiche si sviluppano a partire da modelli intuitivi che vengono progressivamente resi espliciti.

La rappresentazione grafica ha svolto un ruolo particolarmente significativo nel sostenere questo processo. Osservando i punti riportati sul piano cartesiano, il gruppo classe ha

riconosciuto che essi “formano una linea”, “vanno tutti nella stessa direzione” e “non sono casuali”, mostrando la capacità di cogliere una struttura all’interno dei dati. Alcuni studenti e studentesse hanno introdotto l’idea di tracciare una linea che sintetizzasse l’andamento complessivo, distinguendo tra i punti che si collocano al di sopra e al di sotto di essa. In questo modo, la posizione dei punti è stata interpretata in relazione ai valori della relazione, mostrando una prima lettura del grafico come strumento interpretativo. Questo passaggio risulta coerente con la teoria dei registri di rappresentazione semiotica di Duval (1993), secondo cui la comprensione matematica si sviluppa attraverso il coordinamento tra diversi registri, in questo caso numerico, grafico e verbale.

Un ulteriore elemento di rilievo riguarda **la capacità di utilizzare il grafico in modo predittivo**. Durante la discussione, è emersa l’idea che, osservando l’andamento dei punti, sia possibile stimare la lunghezza dell’ombra corrispondente a un’altezza diversa, anche in assenza di una misurazione diretta. Questo segnala un passaggio significativo, in quanto il grafico viene utilizzato non solo per rappresentare dati già noti, ma anche per formulare previsioni, avvicinandosi a una lettura funzionale della relazione tra le grandezze.

La discussione ha inoltre toccato aspetti legati alla modellizzazione del fenomeno fisico. Il gruppo classe ha riflettuto sulle caratteristiche dei raggi solari, introducendo l’idea che, pur essendo la Terra una superficie curva, in un contesto limitato come quello del cortile essa possa essere considerata approssimativamente piana. Di conseguenza, i raggi del Sole, provenendo da una sorgente molto distante, sono stati interpretati come raggi tra loro paralleli. Questa semplificazione ha permesso di costruire un modello coerente del fenomeno, rendendo più chiara la relazione tra le grandezze osservate e collegando l’esperienza concreta a una rappresentazione geometrica.

Dal punto di vista delle dinamiche di classe, la discussione si è configurata come un momento di costruzione condivisa del sapere. Studentesse e studenti hanno partecipato attivamente, intervenendo uno alla volta, ascoltando le posizioni degli altri e cercando di costruire un significato comune. Sono emerse anche situazioni di disaccordo, che hanno generato momenti di confronto e rielaborazione, contribuendo alla chiarificazione delle idee. Alcuni hanno sostenuto le proprie ipotesi attraverso spiegazioni verbali, altri attraverso rappresentazioni grafiche alla lavagna, mostrando l’importanza del linguaggio e dei diversi strumenti espressivi nella costruzione del pensiero. Questo tipo di dinamica risulta coerente con la prospettiva socio-costruttivista di Vygotskij (1978), in cui l’interazione sociale e il confronto tra pari svolgono un ruolo centrale nello sviluppo cognitivo.

Infine, i processi osservati risultano particolarmente significativi anche alla luce del modello affettivo di Di Martino e Zan (2010). Il coinvolgimento attivo, la curiosità, la disponibilità al

confronto e la partecipazione alla discussione evidenziano una disposizione emotiva positiva nei confronti della matematica. Allo stesso tempo, la possibilità di contribuire alla costruzione del sapere ha sostenuto la competenza percepita, mentre il lavoro su dati reali e su un fenomeno osservabile ha contribuito a rafforzare una visione della matematica come disciplina significativa e connessa alla realtà.

Nel complesso, il terzo incontro mostra come il passaggio dalla raccolta dei dati alla loro analisi e rappresentazione possa attivare processi profondi di costruzione del significato matematico. La regolarità osservata nei dati, la rappresentazione grafica e la discussione collettiva hanno contribuito a rendere esplicita una relazione tra grandezze, avviando il gruppo classe verso una prima formalizzazione del concetto di rapporto e ponendo le basi per una comprensione più strutturata del legame proporzionale.

5.5 Quarto incontro – stima del reale

Il quarto incontro rappresenta un momento di particolare rilevanza all'interno del percorso, in quanto segna il passaggio dall'elaborazione di un modello matematico alla sua applicazione in un contesto reale. L'attività di stima dell'altezza dell'edificio ha permesso al gruppo classe di utilizzare il rapporto tra altezza e lunghezza dell'ombra come strumento operativo, evidenziando come una relazione costruita in un contesto laboratoriale possa essere trasferita e utilizzata per interpretare una situazione autentica.

Dal punto di vista cognitivo, i comportamenti osservati durante l'attività mostrano come studenti e studentesse abbiano interiorizzato il modello costruito negli incontri precedenti. Tutti i gruppi hanno infatti adottato una procedura coerente, basata sulla raccolta di più misurazioni, sul calcolo del rapporto e sull'utilizzo di un valore medio per la stima finale. Questo tipo di approccio evidenzia un passaggio significativo: il rapporto non viene più considerato come un semplice risultato numerico, ma come uno strumento per affrontare un problema.

L'attività ha inoltre favorito il trasferimento delle conoscenze in un contesto non controllato, caratterizzato da variabili non completamente gestibili. In questo senso, la stima dell'altezza dell'edificio si configura come un vero e proprio compito autentico, in cui studentesse e studenti sono chiamati a mobilitare conoscenze e competenze in modo integrato. La necessità di selezionare i dati, costruire un procedimento e giustificare il risultato evidenzia un livello di comprensione che va oltre l'applicazione meccanica di una procedura.

Un elemento particolarmente significativo riguarda la gestione delle difficoltà operative legate alla misurazione. In diverse situazioni, gli strumenti a disposizione non risultavano sufficienti a coprire l'intera lunghezza dell'ombra. In questi casi, i gruppi hanno messo in atto strategie autonome, come l'utilizzo dei passi o di oggetti di uso quotidiano, quali l'astuccio, per stimare la lunghezza e successivamente convertirla in centimetri.

Questo comportamento evidenzia una buona padronanza del concetto di misura e una capacità di adattamento alle condizioni reali, mostrando come studentesse e studenti siano in grado di riorganizzare le proprie conoscenze in funzione del contesto. Dal punto di vista teorico, questo tipo di processo può essere interpretato come un esempio di costruzione di significato situato in cui la conoscenza prende forma all'interno di pratiche concrete.

La dimensione collaborativa ha svolto un ruolo centrale anche in questo incontro. Tutti i gruppi hanno partecipato in modo attivo e curioso, mostrando un forte coinvolgimento nella risoluzione del problema. L'obiettivo di determinare l'altezza dell'edificio ha rappresentato un elemento motivante, che ha sostenuto l'impegno e la partecipazione. Al termine

dell'attività, nel tempo restante, molti gruppi hanno scelto spontaneamente di estendere l'indagine ad altri oggetti presenti nel cortile, segno di un interesse autentico verso il problema e di una disponibilità a esplorare ulteriormente il fenomeno.

Questo tipo di atteggiamento risulta particolarmente significativo alla luce del modello di Di Martino e Zan (2010). La partecipazione attiva, la curiosità e la disponibilità a sperimentare evidenziano una disposizione emotiva positiva nei confronti della matematica.

Il quarto incontro mostra come la matematica possa essere vissuta come strumento per interpretare e misurare la realtà. L'attività di stima dell'altezza dell'edificio ha permesso al gruppo classe di sperimentare in modo concreto il valore del modello costruito, consolidando il legame tra esperienza, rappresentazione e formalizzazione e contribuendo a una trasformazione del rapporto con la disciplina.

6 Conclusioni

6.1 Risposta alla domanda di ricerca

La presente tesi si è posta l'obiettivo di rispondere alla seguente domanda: *In che modo un campo di esperienza basato sui principi dell'Activity theory, caratterizzato dall'osservazione e misurazione delle ombre, contribuisce alla costruzione del concetto di rapporto e influisce sull'affettività nei confronti della matematica?*

L'analisi dei dati raccolti nel percorso consente di affermare che l'esperienza proposta ha prodotto effetti significativi sia sul piano cognitivo, in relazione alla costruzione del concetto di rapporto, sia sul piano affettivo, contribuendo a una trasformazione del rapporto tra studentesse, studenti e matematica.

Dal punto di vista della costruzione del significato matematico, il percorso ha favorito un passaggio progressivo da una comprensione intuitiva e frammentaria delle relazioni tra grandezze a una lettura più strutturata e consapevole. I risultati del test sulle preconoscenze evidenziavano inizialmente difficoltà nel riconoscere relazioni proporzionali e una prevalenza di strategie di tipo qualitativo o additivo. Nel corso delle attività, tuttavia, il gruppo classe è riuscito a costruire progressivamente il concetto di rapporto a partire dall'esperienza, attraverso l'osservazione del fenomeno.

Durante il terzo incontro è emerso in modo esplicito il riconoscimento di una regolarità nei dati, con la formulazione spontanea dell'idea che il rapporto tra altezza e lunghezza dell'ombra "rimane sempre uguale" se le condizioni del sistema restano invariate. Questo momento rappresenta un passaggio chiave nel processo di matematizzazione, in quanto segna il passaggio dall'osservazione empirica alla costruzione di una relazione stabile tra grandezze. La successiva applicazione di tale relazione nel quarto incontro, per la stima dell'altezza dell'edificio, evidenzia ulteriormente come il concetto sia stato interiorizzato e utilizzato come strumento operativo in un contesto reale.

Un elemento interpretativo rilevante riguarda il ruolo dell'ambiente di apprendimento progettato. Il percorso ha infatti esposto i discenti a un campo di esperienza strutturato, in cui attività, strumenti e obiettivi risultano strettamente interconnessi. In questa prospettiva, le attività possono essere lette alla luce dell'*Activity Theory*, secondo cui l'apprendimento si sviluppa attraverso pratiche mediate da artefatti. Gli strumenti utilizzati come il modello torcia–oggetto, le tabelle di raccolta dati, i grafici e le situazioni reali di misura, hanno reso osservabili le relazioni tra grandezze e hanno sostenuto attività che riproducono

operativamente la struttura del concetto di rapporto. Studentesse e studenti hanno così costruito il significato del rapporto non a partire da una definizione formale, ma attraverso azioni come misurare, confrontare, rappresentare e utilizzare i dati per risolvere problemi. La costruzione del concetto si è sviluppata attraverso una continua interazione tra esperienza e formalizzazione. Il fatto che studenti e studentesse siano stati in grado di utilizzare autonomamente il rapporto per affrontare il problema della stima dell'altezza dell'edificio, scegliendo strategie, gestendo le misurazioni e adattandosi alle condizioni del contesto, mostra una comprensione che va oltre la semplice applicazione procedurale. Il rapporto viene infatti utilizzato come modello per interpretare la realtà, confermando l'efficacia di un approccio didattico basato sull'esperienza e sulla costruzione attiva del sapere.

Accanto alla dimensione cognitiva, i risultati del questionario affettivo evidenziano un miglioramento significativo nella relazione con la matematica. In particolare, si osserva un miglioramento della disposizione emotiva, che passa da una media iniziale di 2,88 a una media finale di 3,2, indicando un maggiore coinvolgimento e un atteggiamento più positivo nei confronti delle attività matematiche. Anche la visione della matematica mostra un incremento rilevante, passando da 2,80 a 3,24, suggerendo una trasformazione nella percezione della disciplina, sempre più riconosciuta come conoscenza relazionale utile per comprendere la realtà.

La competenza percepita si mantiene su valori complessivamente stabili in uno spettro da 3,00 a 2,84, ma le osservazioni qualitative raccolte durante le attività evidenziano una maggiore sicurezza nell'affrontare situazioni problematiche, una maggiore disponibilità a sperimentare strategie diverse e una partecipazione più attiva all'interno del gruppo. Questo dato suggerisce che il senso di competenza si sia spostato da una dimensione legata alla prestazione individuale a una dimensione condivisa.

Le osservazioni in classe confermano questi risultati quantitativi. Durante gli incontri, studenti e studentesse hanno partecipato in modo attivo e curioso, mostrando interesse per il fenomeno osservato e per le relazioni che emergevano dai dati. Il lavoro a gruppi ha favorito il confronto tra pari, la negoziazione dei significati e la costruzione condivisa delle conoscenze.

Nel quarto incontro, l'attività di stima dell'altezza dell'edificio ha rappresentato un momento particolarmente significativo anche dal punto di vista affettivo. L'obiettivo concreto e situato del compito di realtà ha favorito il coinvolgimento e la motivazione, spingendo i gruppi a proseguire spontaneamente l'attività anche oltre il compito richiesto, misurando altri oggetti

presenti nel cortile. Inoltre, la gestione autonoma delle difficoltà operative, come l'utilizzo di unità di misura alternative come passi e astucci, e la loro conversione, evidenzia un atteggiamento attivo e flessibile nei confronti del problema.

I risultati mostrano come un percorso esperienziale basato sull'osservazione e misurazione delle ombre possa favorire una costruzione significativa del concetto di rapporto, rendendolo comprensibile e utilizzabile in contesti diversi, e contribuire al tempo stesso a una trasformazione positiva dell'atteggiamento costituito dai tre vertici del modello tripartito di Di Martino e Zan nei confronti della matematica. La disciplina emerge come strumento per interpretare e comprendere la realtà, sostenendo un coinvolgimento più profondo e consapevole da parte di studentesse e studenti.

6.2 Limiti della ricerca

Nel corso della realizzazione del percorso sono emersi alcuni elementi che è opportuno considerare come limiti della ricerca, non tanto in termini di criticità, quanto come aspetti legati alle condizioni concrete entro cui l'esperienza si è sviluppata.

Un primo elemento riguarda la dimensione temporale. Il progetto è stato condotto all'interno delle ore curricolari di matematica e scienze, caratterizzate da una durata di circa cinquanta minuti e inserite in una scansione scolastica rigida. Questo ha comportato la necessità di organizzare le attività in tempi contenuti, riducendo le possibilità di soffermarsi su momenti di riflessione più prolungati o di rielaborazione condivisa. La costruzione di concetti come il rapporto e la proporzionalità richiede infatti tempi distesi, che permettano a studentesse e studenti di interiorizzare progressivamente le relazioni osservate. In questo senso, il contesto scolastico ha richiesto un continuo equilibrio tra l'esigenza di sviluppare il percorso e il rispetto dei tempi della didattica ordinaria.

Un secondo aspetto riguarda le caratteristiche del campione. Il percorso è stato realizzato all'interno di una singola classe, composta da 19 studentesse e studenti con livelli di partenza eterogenei. Inoltre, alcune assenze durante momenti chiave del percorso hanno inciso sulla possibilità di garantire a tutte e tutti una partecipazione continua e completa all'esperienza. La natura fortemente esperienziale delle attività rende infatti più complesso un recupero successivo, in quanto non si tratta semplicemente di contenuti trasmissibili, ma di situazioni vissute e condivise.

Un ulteriore limite è legato alla raccolta dei dati qualitativi. Per motivi di tutela della privacy non è stato possibile effettuare registrazioni audio o video durante le attività di gruppo. Questo ha reso più complessa l'analisi approfondita delle interazioni tra studentesse e studenti, in particolare per quanto riguarda l'uso del linguaggio, i gesti, le dinamiche comunicative e i processi di costruzione condivisa del sapere, che avrebbero potuto fornire ulteriori elementi di analisi.

Anche il contesto ambientale ha rappresentato un fattore rilevante. Le attività all'aperto, necessarie per l'osservazione delle ombre, sono risultate fortemente dipendenti dalle condizioni meteorologiche. La presenza di giornate nuvolose ha richiesto una continua riorganizzazione del calendario, con la necessità di monitorare le condizioni meteo e adattare la pianificazione delle attività. Questo ha comportato una certa complessità organizzativa, mitigata tuttavia dalla disponibilità del contesto scolastico a supportare il percorso.

Infine, è opportuno considerare alcuni aspetti legati alla strumentazione utilizzata. Le attività

sono state realizzate con materiali semplici e accessibili, coerentemente con l'impostazione laboratoriale del percorso. Pur avendo cercato di garantire condizioni il più possibile uniformi tra i gruppi, non è possibile escludere completamente variazioni nelle configurazioni sperimentali, ad esempio nella posizione o nell'inclinazione della sorgente luminosa durante le attività di laboratorio. Queste variazioni possono aver influito, almeno in parte, sui dati raccolti, evidenziando al tempo stesso la natura concreta e situata dell'esperienza.

Nel complesso, tali elementi non riducono il valore del percorso, ma contribuiscono a delineare il contesto reale entro cui la ricerca si è sviluppata, offrendo indicazioni utili per una lettura più consapevole dei risultati e per eventuali sviluppi futuri.

6.3 Prospettive future

I risultati emersi dalla ricerca aprono a diverse possibili prospettive di sviluppo, sia sul piano della ricerca didattica sia su quello della pratica educativa.

Un primo ambito di approfondimento riguarda la possibilità di sviluppare un'analisi più sistematica delle dinamiche semiotiche che si attivano durante attività di questo tipo. Nel corso del percorso, infatti, studentesse e studenti hanno utilizzato una pluralità di registri espressivi — linguaggio verbale, rappresentazioni grafiche, gesti, azioni sul modello — che hanno contribuito in modo significativo alla costruzione del significato matematico. Un'analisi più approfondita di questi aspetti, supportata da strumenti di raccolta dati più articolati, potrebbe permettere di indagare in modo più preciso i processi di trasformazione e coordinazione tra registri, offrendo un contributo rilevante alla comprensione dei meccanismi di apprendimento.

Un secondo sviluppo riguarda l'estensione del percorso ad altri nuclei fondanti della matematica. L'approccio adottato, basato su esperienze concrete, uso di artefatti e costruzione progressiva del significato, si presta infatti a essere utilizzato come metodologia didattica anche per altri concetti, come ad esempio la funzione, la misura, la geometria o il concetto di variabile. In questa prospettiva, il percorso non si configura solo come un'esperienza isolata, ma come un possibile modello di progettazione didattica, replicabile e adattabile a diversi contenuti.

Un ulteriore ambito di interesse riguarda la dimensione temporale degli effetti osservati. La ricerca ha evidenziato un miglioramento nella disposizione affettiva e nella partecipazione del gruppo classe nel corso del progetto; tuttavia, risulta significativo interrogarsi sulla stabilità di tali cambiamenti nel tempo. In questo senso, sarebbe utile prevedere studi longitudinali che permettano di osservare se e in che modo l'atteggiamento nei confronti della matematica si mantenga anche a distanza di tempo.

A questo proposito, un primo riscontro qualitativo è emerso dal feedback dell'insegnante della classe, che ha osservato, dopo la conclusione del percorso, un generale aumento della partecipazione. In particolare, è stato segnalato il cambiamento di uno studente che, in precedenza, mostrava un atteggiamento più ritirato e una scarsa propensione a esporsi, mentre successivamente ha iniziato a intervenire con maggiore sicurezza, mostrando una minore paura dell'errore e una maggiore disponibilità a partecipare attivamente. Questo tipo di osservazione, pur non sistematizzata, suggerisce come il percorso possa avere avuto un impatto non solo sulle conoscenze, ma anche sulle dinamiche relazionali e sulla percezione di sé all'interno del contesto classe.

Infine, un'ulteriore prospettiva riguarda l'integrazione di strumenti e tecnologie che possano ampliare le possibilità di esplorazione e analisi. L'utilizzo di strumenti digitali per la raccolta e rappresentazione dei dati, o di ambienti dinamici per la visualizzazione delle relazioni tra grandezze, potrebbe arricchire ulteriormente il percorso, mantenendo al centro l'esperienza concreta ma ampliando le modalità di accesso al concetto.

Nel complesso, le prospettive delineate evidenziano come il percorso proposto rappresenti non solo un'esperienza didattica significativa, ma anche un punto di partenza per ulteriori sviluppi di ricerca e sperimentazione, orientati a una didattica della matematica sempre più attenta alla costruzione del significato e alla dimensione esperienziale dell'apprendimento.

7 Appendici

- Allegato A: *Io e la Matematica* Questionario affettivo iniziale
- Allegato B: *Ombre e misure* Test preconoscenze
- Allegato C: *Ombre e misure* Raccolta dati
- Allegato D: *Ombre e misure* Analisi dati
- Allegato E: *Ombre e misure* Stima del reale
- Allegato F: *Io e la Matematica* Questionario affettivo finale
- Allegato G: *Ombre e misure* Test finale

Nome:

Io e la Matematica

*Non ci sono risposte giuste o sbagliate: è importante dire ciò che pensi davvero.
Le tue risposte non verranno valutate.*

Per ciascuna frase, segna una crocetta:

1 = per niente d'accordo

2 = poco d'accordo

3 = abbastanza d'accordo

4 = molto d'accordo

1. Mi piace studiare matematica.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

2. La matematica è una materia utile nella vita di tutti i giorni.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

3. La matematica è interessante.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

4. Preferisco altre materie rispetto alla matematica.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

5. Mi piace fare attività pratiche che riguardano la matematica.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

6. Quando devo risolvere un problema matematico mi sento tranquillo/a.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

7. La matematica mi mette un po' in ansia.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

8. Quando capisco un esercizio mi sento soddisfatto/a.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

9. Quando non capisco subito, mi sento scoraggiato/a.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

10. Prima di una verifica di matematica mi preoccupo.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

11. Penso di essere capace in matematica.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

12. Spesso riesco a risolvere gli esercizi di matematica da solo/a.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

13. Capisco velocemente quando l'insegnante spiega matematica.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

14. Credo di poter migliorare in matematica se mi impegno.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

15. Se un compagno ha bisogno, penso di poterlo aiutare in matematica.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

16. La matematica è fatta per "i bravi".

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

17. Per capire la matematica serve soprattutto ragionare, non solo fare calcoli.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

18. Alcune persone non riusciranno mai in matematica.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

19. Posso imparare la matematica anche sbagliando.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

20. La matematica si impara meglio lavorando insieme.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

21. Una cosa che ti piace della matematica:

22. Una cosa che non ti piace della matematica:

23. Quando ti senti più "bravo/a" in matematica?

24. Cosa ti fa sentire in difficoltà quando fai matematica?

25. Se dovessi descrivere la matematica con una parola, quale sarebbe?

Perché?

Nome:

Ombre e misure

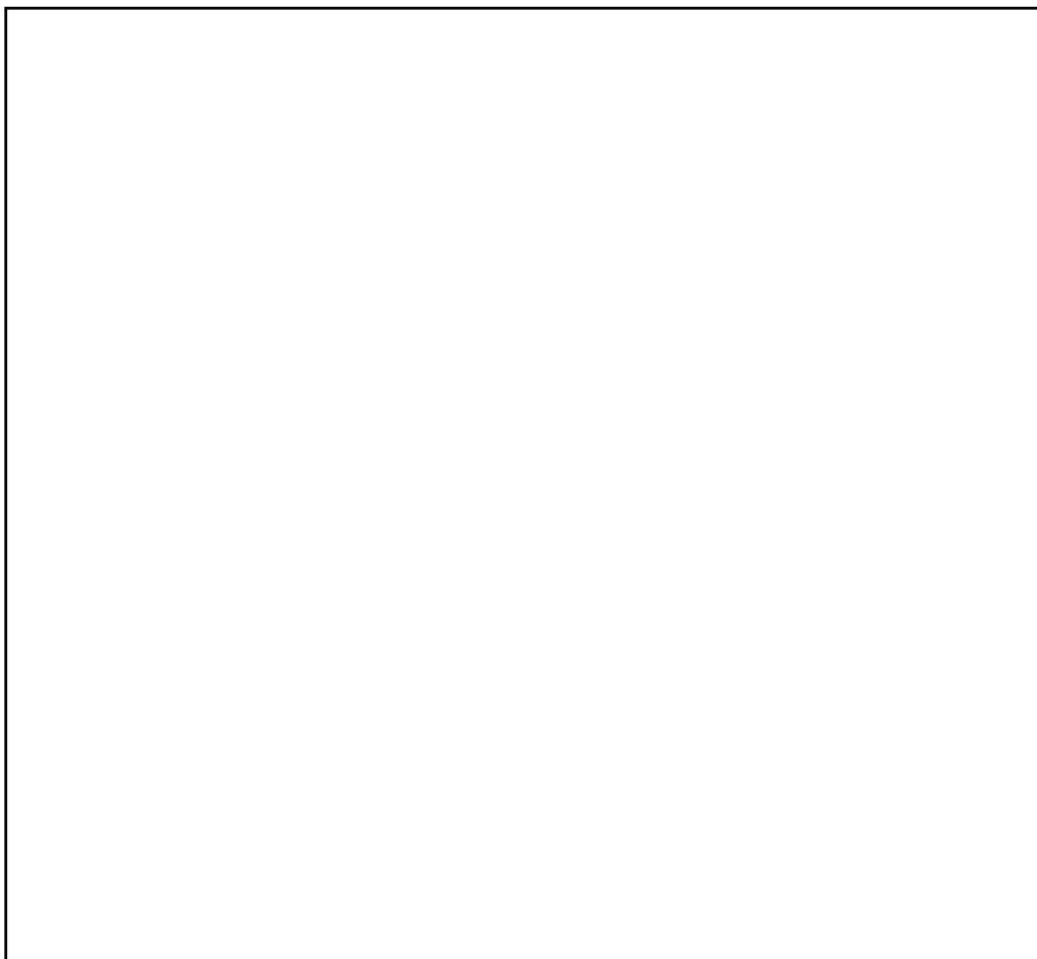
Le domande servono a capire come pensi e come ragioni. Non è una verifica: non ci sono risposte giuste o sbagliate.

1. Secondo te, da cosa dipende la lunghezza di un'ombra?

(Puoi scegliere più risposte)

- ☐ Dall'altezza dell'oggetto
- ☐ Dalla posizione del Sole
- ☐ Dalla distanza dell'oggetto dal Sole
- ☐ Non lo so / Altro: _____

2. Disegna schematicamente nel riquadro un **oggetto**, la sua **ombra** e la posizione del **Sole**:



3. Se il Sole "sale" in cielo (*mattino* → *mezzogiorno*), l'ombra di un oggetto secondo te:

- ☐ Diventa più lunga
- ☐ Diventa più corta
- ☐ Rimane uguale
- ☐ Non lo so

Spiega come hai ragionato:

4. Una corda è lunga **120 cm** e l'altra è **1,5 m**. Cerchia quella più **lunga**.

Spiega come hai ragionato:

5. Due piante hanno cambiato la loro altezza nel tempo:

- **Pianta A:** da 10 cm a 20 cm
- **Pianta B:** da 20 cm a 30 cm

Secondo te, quale delle due ha subito un **cambiamento maggiore rispetto alla sua altezza iniziale?**

- ☐ Pianta A
- ☐ Pianta B
- ☐ Il cambiamento è lo stesso
- ☐ Non lo so

Spiega come hai ragionato:

6. Un bastone alto **1 metro** e uno alto **2 metri** si trovano nello stesso momento della giornata al Sole.

Secondo te, l'ombra del bastone più alto sarà:

- ☐ Il doppio dell'ombra del bastone di 1 metro
- ☐ Più lunga ma non per forza il doppio
- ☐ Uguale
- ☐ Non lo so

Spiega come hai ragionato:

7. Sono state misurate le lunghezze delle ombre di alcuni oggetti. Nella seconda misurazione però la lunghezza delle ombre è **raddoppiata**. Cosa pensi possa essere successo nel mentre?

8. Trasforma nelle unità di misura richieste:

- 100 cm = _____ m
- 2 m e 30 cm = _____ m
- 0,75 m = _____ cm
- 22 m = _____ cm

9. Osserva la tabella:

Oggetto	Altezza (cm)	Ombra (cm)
A	80	120
B	40	?

Secondo te, quanto potrebbe essere lunga l'ombra dell'oggetto B?

Spiega come hai ragionato:

10. Immagina di essere in cortile senza strumenti di misurazione. Come potresti sapere l'altezza di un albero, senza abbatterlo o salire fino al punto più alto?

Colore gruppo:

Ombre e misure

Raccolta dati

Incarichi:

All'interno del gruppo, assegnate a ciascun componente un incarico:

- Responsabile della luce
- Custode dei dati
- Responsabile dell'oggetto
- Misuratore

Procedura – Esercizio 1

Quando compare l'ombra

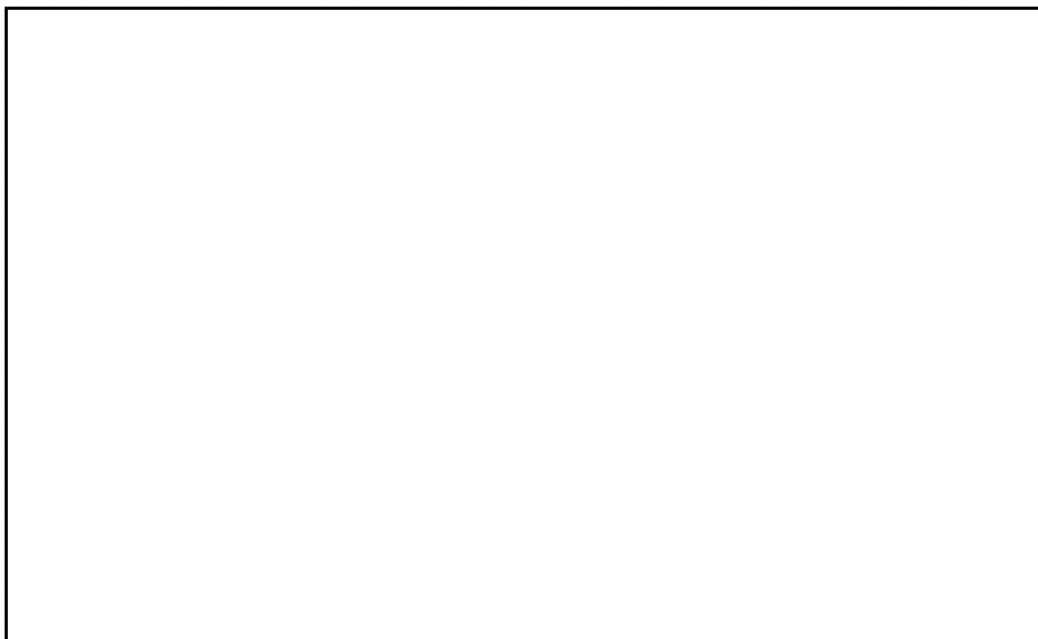
1. Posizionate l'oggetto lungo la striscia sul tavolo. L'oggetto deve restare **sempre fermo**, ogni variazione compromette l'esperimento.
2. Fissate la torcia al **pedistallo**.
3. Muovete la torcia **solo lungo la verticale del pedistallo** (verso l'alto e verso il basso).
4. Per diverse altezze della torcia:
 - osservate se l'ombra **compare o non compare**
 - misurate l'**altezza della torcia** lungo il pedistallo
5. Annotate nella tabella:
 - l'altezza della torcia
 - se l'ombra è presente o assente
 - eventuali osservazioni sull'ombra.

Altezza della torcia	L'ombra compare?
1. _____ cm	☐ Sì ☐ No
2. _____ cm	☐ Sì ☐ No
3. _____ cm	☐ Sì ☐ No
4. _____ cm	☐ Sì ☐ No

Osservazioni:

- A quale altezza della torcia **compare per la prima volta** l'ombra?
- A quale altezza **l'ombra non si vede più**?
- Secondo voi, **perché** in alcune posizioni l'ombra non compare?
- Che cosa deve succedere, secondo voi, perché si formi un'ombra?
- Prova a disegnare ciò che hai osservato

Colore gruppo:



Colore gruppo:

Procedura – Esercizio 2

Come cambia l'ombra quando cambia la direzione della luce

1. Posizionate l'oggetto lungo la striscia sul tavolo. L'oggetto deve restare **sempre fermo**, ogni variazione compromette l'esperimento.
2. Mantenete la torcia alla stessa distanza dall'oggetto per tutta la prova.
3. Orientate la torcia in **tre direzioni diverse**:
 - luce dall'alto (quasi verticale)
 - luce inclinata (circa a metà tra alto e lato)
 - luce quasi orizzontale
4. Per ciascuna direzione della luce:
 - osservate la forma e la lunghezza dell'ombra
 - misurate la lunghezza dell'ombra
5. Registrate le osservazioni e le misure nella tabella.

Posizione della luce	Direzione della luce	Lunghezza dell'ombra
Luce dall'alto	Quasi verticale mezzogiorno	_____ cm
Luce inclinata	Obliqua pomeriggio	_____ cm
Luce quasi orizzontale	Quasi parallela al piano tramonto/alba	_____ cm

Osservazioni:

- In quale posizione della luce l'ombra è più corta?
- In quale posizione l'ombra è più lunga?
- Cosa cambia nell'ombra quando la luce è più inclinata?
- Secondo voi, perché al tramonto e all'alba le ombre sono più lunghe che a mezzogiorno?
- Prova a disegnare ciò che hai osservato

Colore gruppo:



Handwriting practice lines consisting of 20 horizontal dashed lines.

Colore gruppo:

Procedura – Esercizio 3

Come cambia l'ombra quando cambia la distanza della luce

1. Ogni gruppo ha a disposizione 2 oggetti diversi.
2. Posizionate il primo oggetto con il centro della base sulla **X dei 30 cm** segnata sul tavolo
3. Con l'oggetto in questa posizione (30 cm dalla fonte luminosa):
 - misurate l'altezza dell'oggetto
 - misurate la lunghezza dell'ombra, a partire dalla base dell'oggetto
 - ripetete la misura **due volte**
4. Spostate lo stesso oggetto sulla **X dei 60 cm** dalla fonte luminosa.
5. Con l'oggetto in questa posizione ripetete le misurazioni del punto 3
6. Ripetete tutta la procedura (punti 1–4) con il **secondo oggetto**, utilizzando le **stesse due posizioni**: 30 cm e 60 cm.
7. Registrate tutte le misurazioni nella tabella.

Oggetto	Distanza luce-oggetto	Altezza oggetto	Ombra: 1° misurazione	Ombra: 2° misurazione
1	30 cm	_____	_____	_____
1	60 cm	_____	_____	_____
2	30 cm	_____	_____	_____
2	60 cm	_____	_____	_____

Osservazioni:

- Quando la luce è **più vicina**, l'ombra è più lunga o più corta?
- Quando la luce è **più lontana**, cosa notate confrontando le ombre dei due oggetti?
- Perché, secondo voi, è importante usare **le stesse distanze** per tutti gli oggetti?

Colore gruppo:

Handwriting practice lines consisting of 25 horizontal dashed lines.

Nome:

Ombre e misure

Analisi dati

Riordina i dati raccolti nelle due tabelle sottostanti:

Tabella 1: Distanza luce-oggetto 30 cm

Altezza oggetto	Lunghezza ombra	Relazione
1. _____ cm	_____ cm	
2. _____ cm	_____ cm	
3. _____ cm	_____ cm	
4. _____ cm	_____ cm	
5. _____ cm	_____ cm	
6. _____ cm	_____ cm	
7. _____ cm	_____ cm	
8. _____ cm	_____ cm	
9. _____ cm	_____ cm	
10. _____ cm	_____ cm	

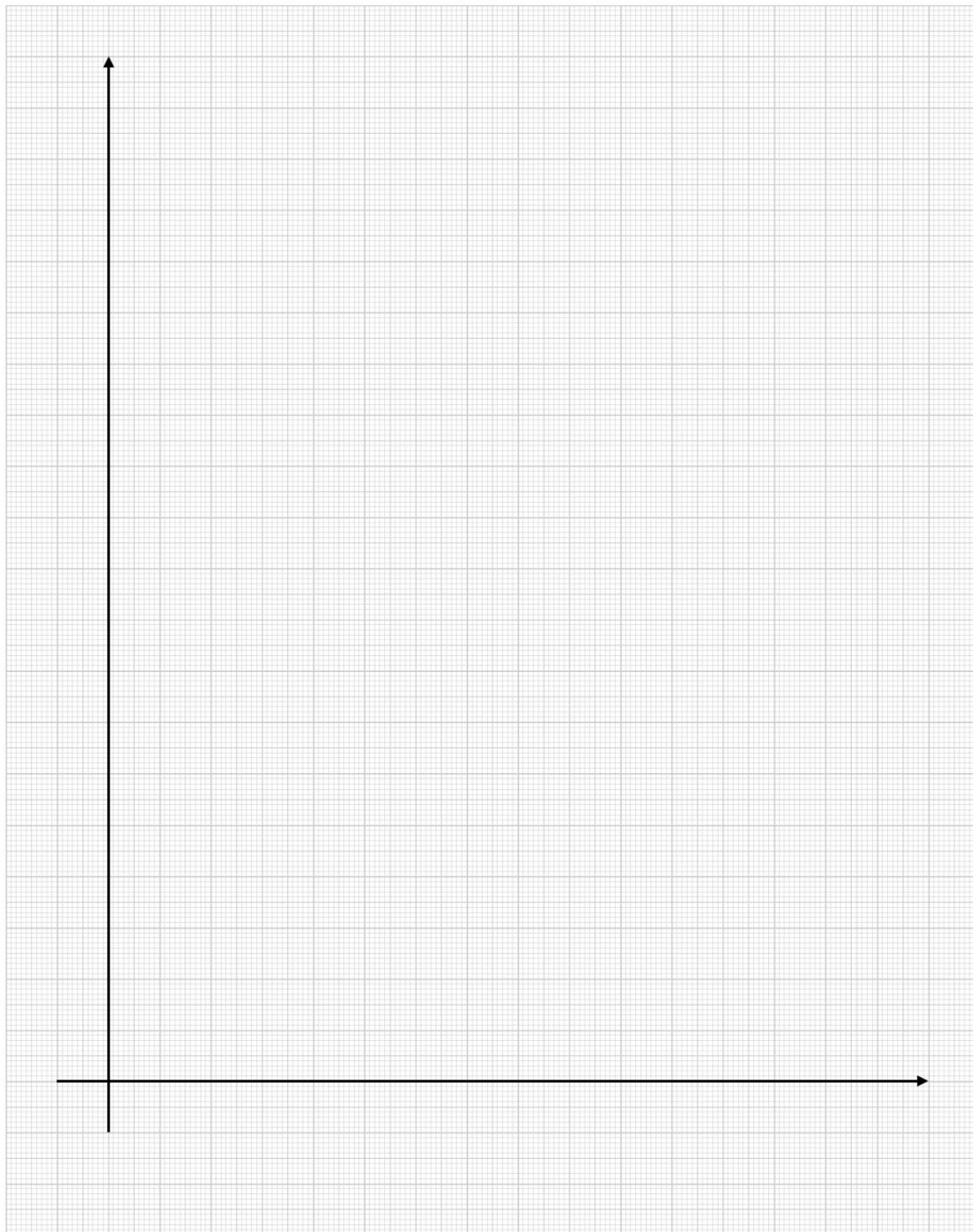
Tabella 2: Distanza luce-oggetto 60 cm

Altezza oggetto	Lunghezza ombra	Relazione
1. _____ cm	_____ cm	
2. _____ cm	_____ cm	
3. _____ cm	_____ cm	
4. _____ cm	_____ cm	
5. _____ cm	_____ cm	
6. _____ cm	_____ cm	
7. _____ cm	_____ cm	
8. _____ cm	_____ cm	
9. _____ cm	_____ cm	
10. _____ cm	_____ cm	

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Nome:

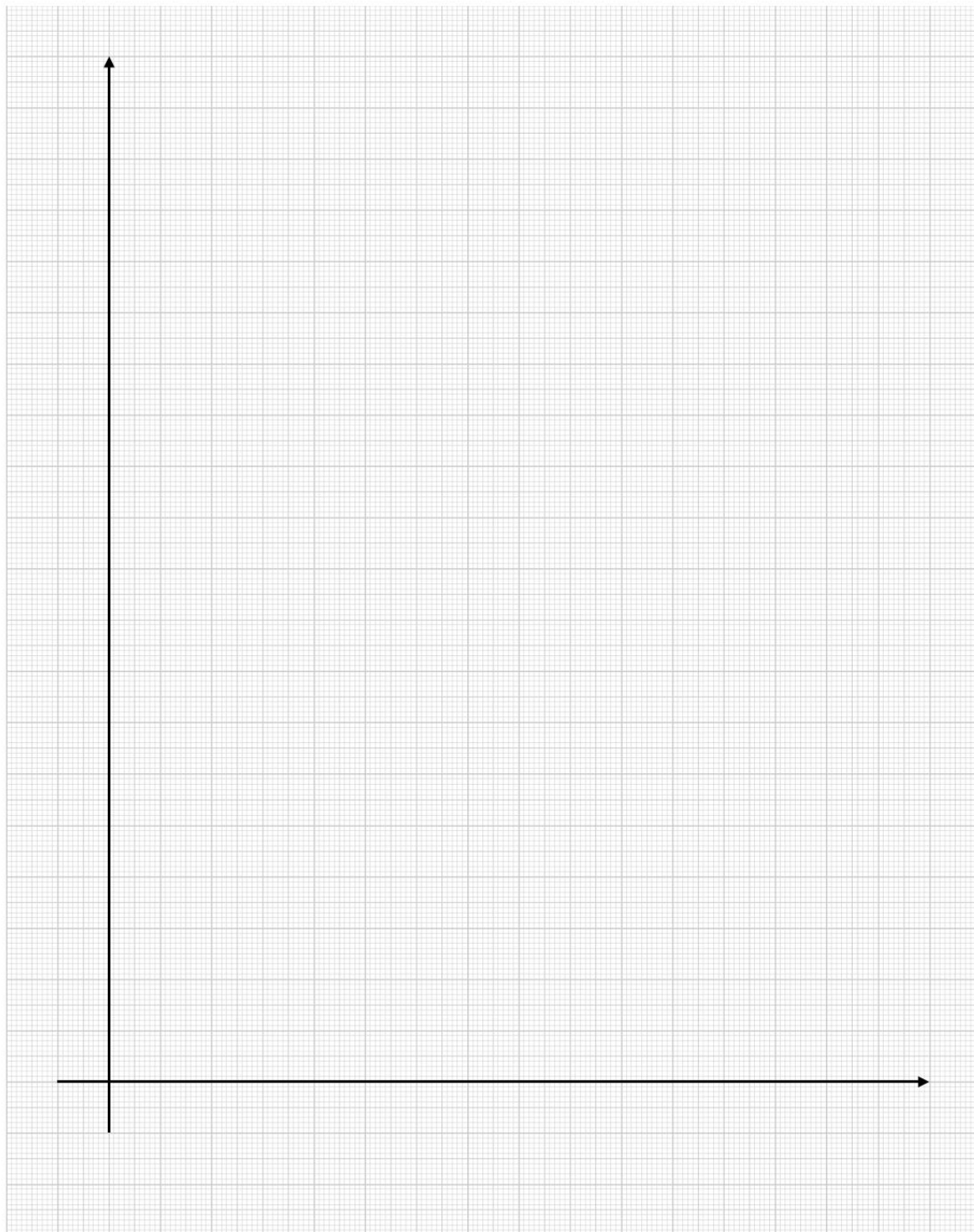
Rappresentazione grafica Tabella 1



3

Nome:

Rappresentazione grafica Tabella 2



Colore gruppo:

Ombre e misure

Stima del reale

Procedura

1. Misurare l'**altezza dell'oggetto** (h).
2. Misurare la **lunghezza dell'ombra** (O) partendo dalla base dell'oggetto fino alla punta dell'ombra.
3. Ripetere le misurazioni di **h** e **O** con altri oggetti.
4. Calcolare il **rapporto**.

Attenzione: Se lo strumento di misura a disposizione **non è sufficientemente lungo** per coprire l'intera ombra, è possibile utilizzare un'**unità di misura alternativa**, purché venga misurata e definita con precisione.

Oggetto	Altezza Oggetto (h)	Lunghezza Ombra (O)	Rapporto	Orario
1. _____	_____	_____	_____	_____
2. _____	_____	_____	_____	_____
3. _____	_____	_____	_____	_____
4. _____	_____	_____	_____	_____
5. _____	_____	_____	_____	_____

Spazio per i calcoli:

[illegible]

Nome:

Io e la Matematica

*Non ci sono risposte giuste o sbagliate: è importante dire ciò che pensi davvero.
Le tue risposte non verranno valutate.*

Per ciascuna frase, segna una crocetta:

1 = per niente d'accordo

2 = poco d'accordo

3 = abbastanza d'accordo

4 = molto d'accordo

1. La matematica è una materia utile nella vita di tutti i giorni.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

2. Per capire la matematica serve soprattutto ragionare, non solo fare calcoli.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

3. Posso imparare la matematica anche sbagliando.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

4. La matematica si impara meglio lavorando insieme.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

5. La matematica può nascere dall'osservazione della realtà.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

6. La matematica è utile perché ci permette di vedere una regolarità (un ordine) anche in situazioni che sembrano confuse.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

7. La matematica è una materia creativa: bisogna inventare modi per raccogliere dati e risolvere problemi reali.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

8. Penso di essere capace in matematica.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

Nome:

9. Quando vedo la matematica applicata a problemi reali, mi sento più capace di affrontarla.
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐
10. Se non capisco subito come risolvere un problema, so che posso provare ragionamenti diversi o strade alternative.
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐
11. Il confronto con il gruppo mi aiuta a sentirmi più sicuro delle mie capacità matematiche.
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐
12. Mi sento bravo in matematica quando riesco a spiegare a parole mie come funziona un fenomeno.
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐
13. Riesco a capire meglio un concetto matematico se posso usare tabelle e grafici per organizzare quello che osservo.
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐
14. Mi piace fare attività pratiche che riguardano la matematica.
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐
15. Risolvere un problema di realtà usando i dati che io stesso ho raccolto mi dà soddisfazione.
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐
16. Mi sento più coinvolto e attento quando la matematica nasce da un esperimento che ho fatto io stesso.
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐
17. Provo sollievo quando capisco il 'perché' di un concetto matematico.
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐
18. Mi sento più tranquillo ad affrontare un problema di matematica se posso confrontarmi con il mio gruppo.
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐

Nome:

19.C'è stato un momento specifico durante il progetto in cui ti sei sentito particolarmente bravo? Cosa stavi facendo?

20.Hai mai avuto il dubbio che una misura fosse sbagliata? Racconta cosa hai provato in quel momento e cosa hai fatto per capire se i dati erano corretti.

21. C'è qualcosa che è cambiato nel tuo modo di vedere la matematica dopo aver lavorato con le ombre e il sole? Cosa?

22.Se dovessi descrivere la matematica dopo questo progetto, useresti la stessa parola dell'inizio? Perché?

Nome:

Ombre e misure

Verifichiamo le conoscenze apprese

1. Secondo te, da cosa dipende la lunghezza di un'ombra? (Puoi scegliere più risposte)
☐ Dall'altezza dell'oggetto
☐ Dalla posizione del Sole
☐ Dalla distanza dell'oggetto dal Sole
☐ Non lo so / Altro:
2. Se il Sole "sale" in cielo (dal mattino verso mezzogiorno), cosa succede all'ombra di un oggetto?
☐ Diventa più lunga.
☐ Diventa più corta.
☐ Rimane uguale.
3. Hai un bastone alto 1 m che proietta un'ombra di 2 m. Se usi un bastone alto 3 m nello stesso momento, quanto sarà lunga la sua ombra?
☐ 4 metri
☐ 5 metri
☐ 6 metri
☐ Non si può sapere

4. Osserva e completa la tabella:

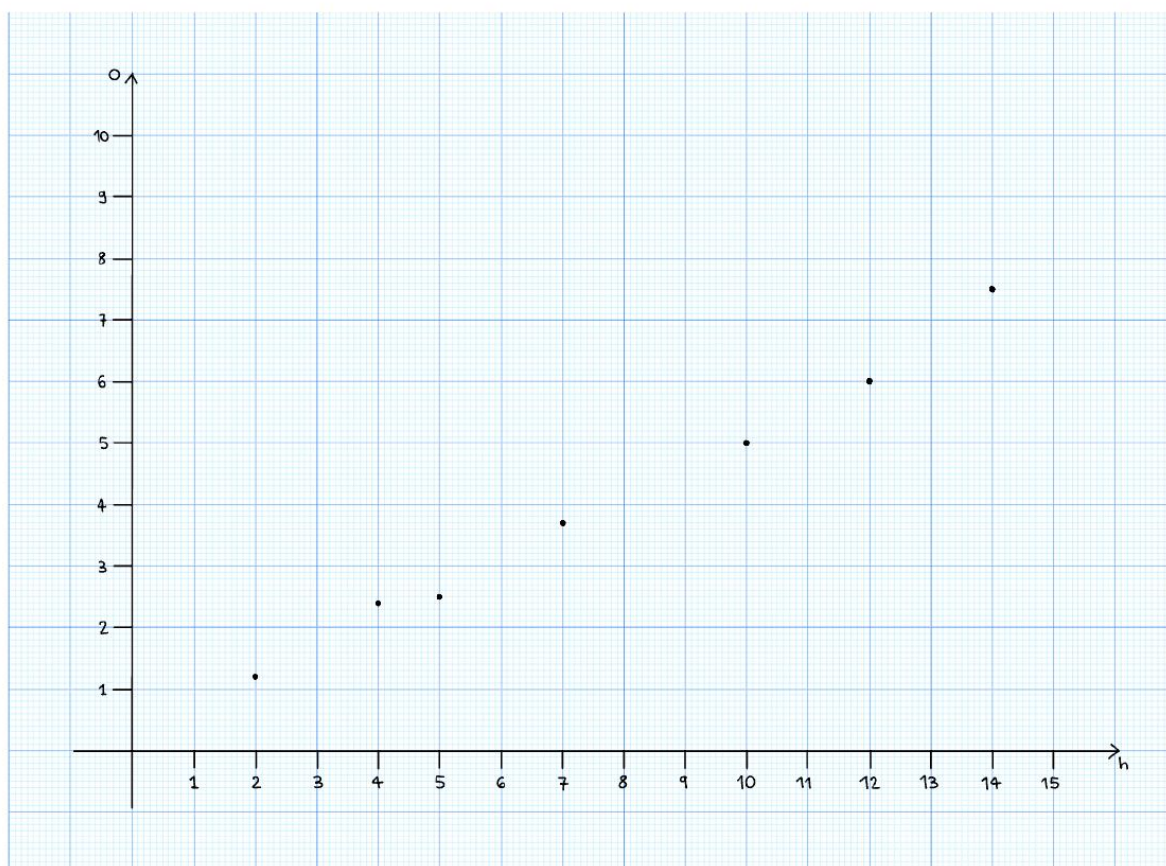
Oggetto	Altezza (h)	Ombra (O)
A	80 cm	120 cm
B	40 cm	60 cm
C	10 cm	_____ cm
D	_____ cm	21 cm

5. Cos'è il "rapporto" tra altezza dell'oggetto e lunghezza dell'ombra?
- ☐ È una regola che cambia sempre.
 - ☐ È un numero costante che indica la relazione tra l'oggetto e la sua ombra.
 - ☐ È la misura dell'ombra.

Nome:

6. Se misuriamo il rapporto (k) alle ore 10:00 e poi alle ore 12:00, pensi che il numero k sarà lo stesso? Perché?

7. Osserva il grafico:

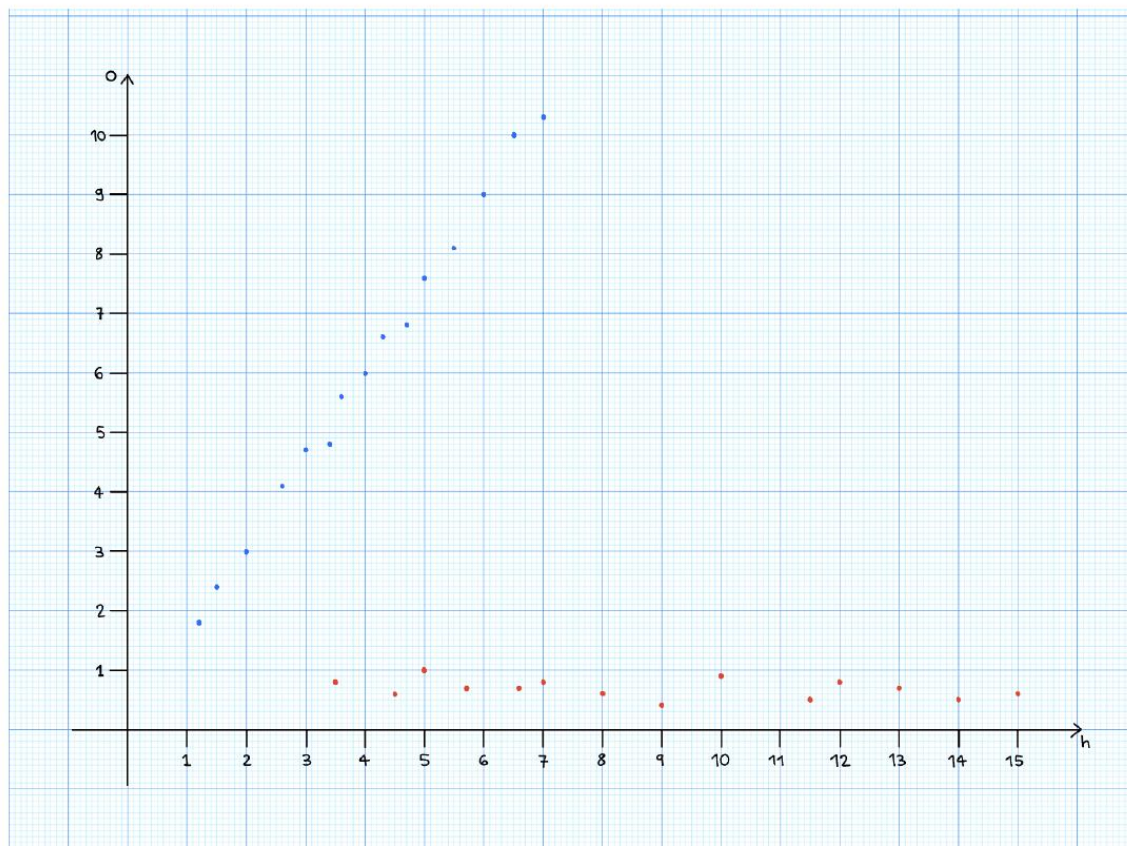


- Quanto misura il rapporto k ? _____
- Ci sono delle "sbavature" nei dati? Secondo te perché?

- Quanto sarebbe lunga l'ombra di un oggetto alto 40 cm? _____

Nome:

8. Osserva il grafico:



Sono stati raccolti dei dati in due momenti diversi della stessa giornata. A che ora circa sono stati presi i dati del colore rosso? Spiega come hai ragionato

9. In una fotografia, un uomo alto 1.80 m appare alto 3 cm. Se accanto a lui c'è un albero che nella foto è alto 15 cm, quanto è alto l'albero nella realtà?

Bibliografia

- Baden-Powell, R. (1908), *Scouting for Boys*, London, Horace Cox.
- Boero, P. (2004), *Didattica della matematica: un campo di esperienza*, Genova, NRD – Università di Genova.
- Boero, P. (2007), *L'insegnamento della matematica tra teoria e pratica*, Torino, UTET.
- Boero, P. (2012), *Esperienza e modellizzazione nella didattica della matematica*, Roma, Carocci.
- Brown, J. S., Collins, A., Duguid, P. (1989), "Situated cognition and the culture of learning", in *Educational Researcher*, 18(1), pp. 32–42.
- Bruner, J. S. (1961), *The Process of Education*, Cambridge (MA), Harvard University Press.
- Cobb, P. (1994), "Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development", in *Educational Researcher*, 23(7), pp. 13–20.
- D'Amore, B. (2021). Riflessioni sull'apprendimento della Matematica nella Scuola dell'Infanzia ... e anche prima. *Bambini*, 37(5), 28-33.
- Dewey, J. (1938), *Experience and Education*, New York, Macmillan.
- Di Martino, P., Zan, R. (2010), "'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives", in *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), pp. 27–48.
- Di Martino, P., Zan, R. (2011), "Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions", in *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 43(4), pp. 471–482.
- Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Berna, Peter Lang.
- Engeström, Y. (1987), *Learning by Expanding: An Activity-Theoretical Approach to Developmental Research*, Helsinki, Orienta-Konsultit.
- Fischbein, E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*, Dordrecht, Reidel.
- Galliani, E., Pesce, A., Pollero, L. (2019), *Oltre noi e il sole. Imparare a ragionare e argomentare*, Milano, FrancoAngeli.
- Giunti, C., Lotti, P., Mosa, E., Naldini, M., Orlandini, L., Panzavolta, S., Tortoli, L. et al. (a cura di) (2025), *"Avanguardie educative". Linee guida per l'implementazione dell'Idea "Outdoor education"*, versione 2.1, Firenze, INDIRE.
- Iannamorelli, B. (2019), "La storia della matematica nella didattica: Talete e il suo teorema", in *Mondo Matematico e Dintorni*, 2(1), pp. 37–46.
- Kolb, D. A. (1984), *Experiential Learning: Experience as the Source of Learning and*

- Development*, Englewood Cliffs (NJ), Prentice Hall.
- Lave, J., Wenger, E. (1991), *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Leont'ev, A. N. (1978), *Activity, Consciousness and Personality*, Englewood Cliffs (NJ), Prentice Hall (ed. orig. russo 1975).
- Malara, S. (2023), "Scoutismo e didattica. Un'ibridazione generativa", in *Attualità Pedagogiche*, 2(1), pp. 49–62.
- MIUR (2012), *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, Roma, Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca.
- Montessori, M. (1907), *Il metodo della pedagogia scientifica applicato all'educazione infantile nelle case dei bambini*, Roma, Loescher.
- Montessori, M. (1934), *Il segreto dell'infanzia*, Milano, Garzanti.
- Montessori, M. (1948), *Educazione e pace*, Milano, Garzanti.
- Morani, R. M. (2018), *La natura tra scoutismo e scuole nel bosco*, Firenze, INDIRE.
- Pesci, A. (2011), *Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe*, Milano, FrancoAngeli.
- Piaget, J. (1970), *Psychology of Intelligence*, Totowa (NJ), Littlefield, Adams & Co. (ed. orig. *La psychologie de l'intelligence*, Paris, Armand Colin, 1947).
- Rocco, M. (2017), "Un gioco manipolativo per un percorso didattico su rapporti e proporzioni", in *Quaderni CIRD*, 14, pp. 13–31.
- Schenetti, M., Salvaterra, I., Rossini, B. (2015), *Outdoor education: prospettive teoriche e buone pratiche*, Trento, Erickson.
- Schoenfeld, A. H. (1992), "Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making", in Grouws, D. A. (a cura di), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York, Macmillan, pp. 334–370.
- Sfard, A. (2001), "There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning", in *Educational Studies in Mathematics*, 46(1–3), pp. 13–57.
- Skemp, R. R. (1976), "Relational understanding and instrumental understanding", in *Mathematics Teaching*, 77, pp. 20–26.
- Vygotsky, L. S. (1978), *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*, Cambridge (MA), Harvard University Press (ed. orig. russo anni '30).
- Zan, R. (2004), "Emozioni e apprendimento matematico", in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 27B(1), pp. 3–18.
- Zan, R. (2007), *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, Roma,

Carocci.