

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA



UNIVERSITÀ
DI PAVIA

**Analisi del contratto didattico in una Thinking
Classroom**

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Relatore:

George Richard Paul Santi

Correlatrice:

Gabriella Pocalana

Tesi di Laurea di:

Stefano Medaglia

Matricola 526892

Anno Accademico 2025-2026

Indice

1	Introduzione	7
2	Il contratto didattico e la Teoria delle Situazioni	11
2.1	La Teoria delle Situazioni Didattiche	13
2.1.1	Alcuni elementi fondamentali	14
2.2	Il contratto didattico	17
2.3	Le clausole del contratto didattico	19
2.3.1	Un primo esempio: il "Problema dell'età del capitano" . . .	19
2.3.2	Il "Problema della gita"	20
2.3.3	Il "Problema dei soldati"	21
2.3.4	Un ultimo esempio: "La spesa di Giovanna e Paola" . . .	22
2.3.5	Ancora qualche considerazione sulle clausole	23
2.4	Gli effetti del contratto didattico	24
2.4.1	Effetto Dienes	24
2.4.2	Effetto Topaze	25
2.4.3	Effetto Jourdain	26
2.5	Alcuni paradossi del contratto didattico	28
2.6	Ultime osservazioni sul contratto didattico	31
2.7	La teoria degli ostacoli	31
2.8	La situazione a-didattica	33
2.8.1	Le sei fasi di una situazione a-didattica	37
2.8.2	Fase 1: devoluzione	37
2.8.3	Fase 2: implicazione	37
2.8.4	Fase 3: costruzione della conoscenza personale	38
2.8.5	Fase 4: validazione	38
2.8.6	Fase 5: socializzazione	38
2.8.7	Fase 6: istituzionalizzazione	38
2.8.8	Le situazioni che favoriscono le sei fasi	38
2.9	Conclusioni riguardo la TSD	40
3	Thinking Classroom	41
3.1	Il lancio	44
3.1.1	La scelta dei gruppi	44
3.1.2	Superfici verticali non permanenti ("Vertical non-permanent surfaces" (VNPS))	47
3.1.3	La scelta delle consegne	49

3.2	Il corpo	50
3.2.1	Il flow	50
3.2.2	Thin-slicing e mantenimento del flow	54
3.3	La chiusura	56
3.3.1	I tre tipi di consolidamento	57
3.3.2	Appunti significativi	59
3.3.3	Check-Your-Understanding (CYU)	62
3.4	Alcune osservazioni finali sulla TC	64
4	Relazioni tra gli elementi del quadro teorico	67
4.1	Elementi di coerenza	67
4.1.1	Obiettivi	67
4.1.2	Cosa significa apprendere?	67
4.1.3	Autonomia dello studente	70
4.1.4	Il triangolo della didattica	70
4.1.5	Suddivisione della lezione	71
4.2	Differenze significative	72
4.2.1	Appunti	72
4.2.2	L'uso del "gioco"	73
4.2.3	La scelta del "compito"	74
4.3	Milieu	74
4.4	Uno scambio equo tra TSD e TC	76
5	Metodologia	79
5.1	Domande di ricerca	80
5.2	Descrizione, progettazione e svolgimento del progetto	80
5.2.1	Dati raccolti	81
5.2.2	Progettazione dei problemi	82
5.2.3	Preparazione della classe e presentazione del problema	85
5.2.4	Lavoro nei gruppi	88
5.2.5	Confronto dei lavori dei gruppi	89
5.2.6	Discussione con tutta la classe e consolidamento	91
5.2.7	Appunti degli studenti	92
5.3	Metodologia di analisi dei dati	93
6	Analisi dei dati	95
6.1	Classe1	96
6.1.1	Il lancio della lezione	96
6.1.2	Gruppo1 prima domanda	98
6.1.3	Gruppo2 prima domanda	101
6.1.4	Presentazione della seconda e terza domanda	103
6.1.5	Gruppo3 seconda domanda	104
6.1.6	Gruppo5 terza domanda	109
6.1.7	Chiusura della lezione	110
6.1.8	Alcune osservazioni	116
6.2	Classe2	117
6.2.1	Il lancio della lezione	117

6.2.2	Gruppo2 prima domanda	118
6.2.3	Gruppo3 prima domanda	119
6.2.4	Terza domanda	121
6.2.5	Discussione di classe	124
6.2.6	La circonferenza goniometrica	129
6.2.7	Osservazioni finali	134
6.3	Confronto con la TC dei due adattamenti	135
6.3.1	Considerazioni emerse in merito alla TC	144
7	Conclusioni	147
7.0.1	Prospettive per il futuro	151

Capitolo 1

Introduzione

Il compito dell'insegnante è spesso difficile e delicato. Come ogni lavoro ha degli obblighi, forniti dal sistema scolastico, per esempio: seguire delle linee guida (come quelle delle Indicazioni Nazionali per i licei in Italia) affinché i suoi studenti sviluppino competenze specifiche entro l'anno scolastico (che non sempre sembra essere sufficiente in termini di tempo); avere un certo numero di valutazioni affinché vi siano prove tangibili dell'apprendimento dello studente; essere aggiornato sui metodi di insegnamento e sulle tecnologie utilizzate (si pensi all'introduzione del registro elettronico e delle lavagne multimediali negli ultimi decenni). Deve anche riuscire a mantenere un certo tipo di rapporto con i suoi studenti, tenendo conto che ciascuno di loro ha personalità, interessi, soglia dell'attenzione e situazioni (ad esempio familiari) differenti.

Per evitare questi (e altri) problemi, spesso gli insegnanti di matematica decidono di aderire ad un approccio “tradizionale” di insegnamento: lo studente resta seduto al banco a prendere appunti su ciò che l'insegnante scrive o dice alla lavagna. Questo approccio “**trasmissivo**” di insegnamento *vede la conoscenza*, secondo la terminologia usata da **Paulo Freire** [15], *come una merce che viene trasferita direttamente dall'insegnante all'allievo*. Tale “passaggio” di conoscenza viene verificato a livello istituzionale da una valutazione (fornita da verifiche e interrogazioni) che stima quanto lo studente sia in grado di riprodurre in modo fedele ciò che l'insegnante gli ha detto o mostrato. L'apprendimento dello studente quindi, in questa concezione, si basa sull'assorbimento, la ripetizione e memorizzazione di concetti. Il protagonista è l'insegnante, il possessore della conoscenza in aula, che mette in atto la lezione mentre il pubblico di studenti ascolta e accoglie tale conoscenza. Tra i *vantaggi* di questo metodo vi sono: l'insegnante decide come avviene l'esposizione dei concetti (il ritmo, il rigore) e ne ha il controllo; permette di “trasmettere” agli studenti il maggior numero di nozioni nel minor tempo (fattore favorevole per le tempistiche scolastiche). Vi sono però anche *svantaggi* non indifferenti, come per esempio: lo studente rischia di essere relegato al ruolo di “ricettore passivo”, che si limita a “copiare senza pensare” ciò che detta l'insegnante, rischiando di abbassare i suoi livelli di attenzione e di motivazione; è un metodo che rischia di non tener conto dei tempi di apprendimento diversi per ciascun studente.

In particolare, in aula si viene a formare quello che **Guy Brousseau** ha chiamato “**contratto didattico**” [6], cioè *un insieme di attese, obblighi e regole (prevalentemente implicite) che dettano le relazioni e le divisioni di responsabilità che hanno tra loro i tre vertici del “triangolo della didattica”: studente, insegnante e Sapere* (obiettivo del programma scolastico). Questo “contratto” esiste a prescindere dall’approccio tradizionale di insegnamento. Il problema consiste nel suo essere “implicito”: non sapendo quali siano le clausole, i paradossi insiti, gli effetti o ancora gli ostacoli che porta con sé, non è facile intervenire. L’unico modo per prenderne consapevolezza è cercare di avere dei momenti di “**rottura del contratto didattico**”, affinché tutti questi fattori vengano alla luce. L’esempio classico, che verrà di seguito esposto, è quello del “*Problema dell’età del capitano*”, ovvero il fatto che *secondo molti studenti ogni problema fornito dagli insegnanti debba avere soluzione e solo coi dati forniti*. Accade quindi che davanti ad un problema “impossibile” gli studenti reagiscono in base a cosa credono che l’insegnante voglia da loro, senza ragionarvi. Nel momento in cui tale problema viene proposto, il contratto viene alla luce, rivelando le “clausole” che vincolano il comportamento degli studenti.

Secondo Brousseau in particolare il contratto è insito in quella che lui definisce “*situazione didattica*” [6] di cui la “*lezione frontale*” tradizionale è un esempio. *Occorre quindi trovare strade alternative affinché l’apprendimento dello studente sia più significativo*. Due esempi, che vengono presentati nel dettaglio in questa tesi sono:

- la “**Teoria delle Situazioni Didattiche**” di **Guy Brousseau**;
- l’approccio “**Thinking Classroom**” di **Peter Liljedahl**.

In particolare entrambi si fondano su come *la preparazione dell’ambiente* (il milieu direbbe Brousseau, mezzo di comunicazione con lo studente, costituito non solo da oggetti fisici, ma anche sociali, culturali e umani) *in aula, da parte dell’insegnante, influisce sull’apprendimento dello studente, su come vi reagisce, adatta*. Tale preparazione va dalla scelta, progettazione e presentazione di un’attività (per esempio la durata, in che modo si svolge, la divisione o meno in gruppi, quanto e dove interviene l’insegnante, ecc) che porti allo sviluppo del concetto matematico che ne è l’obiettivo, alla sistemazione fisica dell’aula e ai materiali da utilizzare (come sistemare i banchi, fornire un cellophane dove scrivere a ciascun gruppo, ecc).

La teoria di **Brousseau** nasce proprio dall’esigenza di *superare il contratto didattico*, in particolare avvalendosi di “**situazioni a-didattiche**” che possano romperlo.

L’approccio di **Liljedahl** invece nasce come alternativa alla lezione tradizionale, che vede spesso gli studenti a lezione in uno stato in cui si limitano a ricopiare ciò che l’insegnante scrive, a distrarsi o fingere di ascoltare. Il fine è di *favorire la collaborazione tra gli allievi, coinvolgerli attivamente nel processo di apprendimento, permettendo loro di sviluppare il pensiero critico*, attraverso

un ambiente appositamente organizzato dall'insegnante.

In questa tesi in particolare viene presentato un *progetto universitario di ricerca* svoltosi nell'anno scolastico 2025-2026 che ha coinvolto due classi terze di un Liceo Scientifico della Lombardia a cui io e un altro tesista abbiamo avuto occasione di partecipare.

Il progetto didattico, sulla base di un'esperienza analoga nelle due stesse classi (e con gli stessi due insegnanti) svoltasi l'anno precedente, prevedeva l'utilizzo dell'approccio *Thinking Classroom* per aiutare gli studenti a costruire la teoria matematica obiettivo del programma scolastico. In questo caso l'obiettivo era aiutarli a costruire definizioni, teoremi e dimostrazioni *nell'ambito della trigonometria*. L'approccio *Thinking Classroom* non è stato seguito alla lettera, ma ognuno dei due insegnanti ha scelto, in base a esigenze educative, di mantenere gli aspetti che più gli sembravano consoni ai propri obiettivi. Con tale approccio si è riusciti, come si vedrà poi nel capitolo dedicato, a rendere più partecipi gli studenti nel processo di apprendimento, lasciando che fossero loro, e non direttamente gli insegnanti, a lavorare su problemi aperti.

In questo contesto, l'obiettivo di questa tesi è di indagare se un contesto progettato secondo l'approccio *Thinking Classroom* può aiutare a “rompere” il contratto didattico in analogia a quanto Brousseau ha supposto parlando di “*situazioni a-didattiche*”.

Nei prossimi capitoli viene presentata la Teoria delle Situazioni Didattiche, insieme a una descrizione del “contratto didattico”, a seguire, l'approccio *Thinking Classroom* e un'interpretazione di come la TC sia un possibile milieu a-didattico. Viene successivamente fornita una presentazione del progetto didattico, di come si è svolto e della metodologia utilizzata per la sua progettazione. I capitoli finali si concentrano invece sulle *domande di ricerca* che hanno guidato questa tesi:

L'approccio Thinking Classroom può configurarsi come un milieu a-didattico? In tal caso, un milieu così costruito può contribuire a rompere il contratto didattico?

Vengono in particolare analizzati due episodi riguardanti la prima giornata di videoregistrazione del progetto, confrontando gli adattamenti apportati dai due docenti all'approccio TC e fornendo le dovute conclusioni in merito alle domande di ricerca.

Capitolo 2

Il contratto didattico e la Teoria delle Situazioni

Quando negli anni '60 - '70 Brousseau iniziò a introdurre le sue ricerche prevalevano ancora le idee di **Jean Piaget**.

Piaget considerava *la conoscenza come il frutto di un adattamento*, operato da un organismo complesso (il soggetto apprendente), *ad un ambiente* tramite l'oggetto del sapere (obiettivo dell'apprendimento). Tale **adattamento** avviene tramite due processi:

1. **Assimilazione:** è l'inclusione di un oggetto, un nuovo evento (un nuovo dato di esperienza), all'interno di uno "schema mentale" (comportamentale o cognitivo), che il bambino possiede già, senza che questo schema venga modificato. Si parla, per esempio, di schemi di spiegazione (o di previsione) e di schemi di azione (di tipo percettivo-motorio). Si pensi ad esempio a uno studente che, per risolvere un'equazione di primo grado come $7x + 3x = 20$, per sommare i monomi simili può riutilizzare, senza modificare, lo schema che gli permette di sommare due numeri (in questo caso $7 + 3$).
2. **Accomodamento:** è un processo, complementare all'assimilazione, in cui lo schema posseduto viene modificato, adattato, per includere nuovi oggetti o eventi prima sconosciuti. Ad esempio, lo studente di prima, quando dovrà risolvere per la prima volta un'equazione di secondo grado, come $x^2 - 16 = 0$, si accorgerà che non basterà più isolare il termine con la x (portando al secondo membro il -16 cambiato di segno). Gli servirà un nuovo schema concettuale per risolvere il problema: per l'equazione presa come esempio, dovrà estrarre la radice quadrata e considerare entrambe le soluzioni (in questo caso 4 e -4).

Durante il suo sviluppo, l'individuo fa prevalere uno dei due processi.

Lo sviluppo della struttura mentale del bambino per Piaget si può vedere nel modo seguente [17]:

1. Tramite l'assimilazione il bambino integra le nuove informazioni a quelle che possiede già dando senso alla nuova situazione.
2. Se le nuove informazioni non possono essere inserite negli schemi esistenti, quindi se le sue conoscenze non sono sufficienti a comprendere la nuova situazione, il bambino si confonde e si crea uno stato di **disequilibrio**, anche detto di “**conflitto cognitivo**”.
3. Se tale conflitto cognitivo non è troppo grave, si crea nel bambino il desiderio di comprendere questa nuova situazione, iniziando il processo di “**equilibratura**”: al fine di ristabilire l'equilibrio, tramite l'accomodamento il bambino modifica la sua struttura cognitiva per adattarsi alla situazione.
4. Lo schema mentale del bambino è stato modificato e l'**equilibrio** è stato ripristinato. Acquisite le nuove informazioni potrà, col processo di assimilazione, usare il nuovo schema fino al prossimo disequilibrio.



Figura 2.1: Schema riassuntivo del processo di equilibratura

Piaget individua inoltre **quattro fasi dello sviluppo cognitivo**, divise in base all'età del bambino in [2]:

1. **Stadio senso-motorio** (*nascita-2 anni*): il neonato riesce a distinguere sé stesso da ciò che gli sta intorno. *Prevalgono schemi senso-motori* (cioè di azione): i significati non sono ancora definibili a livello di linguaggio, ma solo di manipolazione. Ha la concezione di un certo senso di “*permanenza dell'oggetto*”: se lo sposta o se si sposta lui, rimane lo stesso oggetto di prima.

2. **Stadio del pensiero pre-operatorio** (2-7 anni): è una fase “*egocentrica*” nella quale il bambino ha difficoltà a capire il punto di vista degli altri. Iniziano le prime classificazioni in base a caratteristiche essenziali, l'utilizzo di parole e immagini, nonché il formarsi di un pensiero simbolico, sebbene non ancora deduttivo.
3. **Stadio delle operazioni concrete** (7-11 anni): il bambino ottiene, tramite più esperienza e una visione meno egocentrica del mondo, un'organizzazione mentale più autonoma che gli permetta di usare *operazioni logiche*.
4. **Stadio delle operazioni formali** (11-15 anni): si fanno i primi passi verso la concettualizzazione e il pensiero astratto, portando alla creazione di *ragionamento ipotetico-deduttivo*.

Tutto converge al fatto che sia il bambino a costruire le proprie conoscenze.

Lo psicologo **Ernst von Glasersfeld** prese spunto dalle idee di Piaget per elaborare quello che venne chiamato “**costruttivismo radicale**” [2] secondo cui:

- *la conoscenza non è qualcosa di ricevuto passivamente dall'ambiente, ma viene costruita attivamente dal soggetto cognitivo;*
- *tale conoscenza deriva non tanto dallo scoprire qualcosa di preesistente, indipendente, ma da un processo adattivo che detta come si fa esperienza, un “atto costruttivo”.*

Fu il lavoro di **Guy Brousseau** a dare una svolta alla didattica della matematica con la **Teoria delle Situazioni Didattiche** e la definizione di “**contratto didattico**”.

2.1 La Teoria delle Situazioni Didattiche

La prima teoria che viene trattata in modo approfondito all'interno di questa tesi è quella che **Guy Brousseau** chiamò la “**Teoria delle Situazioni Didattiche**” (che qui verrà abbreviata come **TSD**).

Sebbene fosse già in fase di elaborazione alla fine degli anni '70, ad esempio con la nozione di “**contratto didattico**” (che verrà esaminata in questo capitolo), si può far risalire l'esordio di tale teoria ad un lavoro di Brousseau del 1986. In questo ha descritto il frutto di venti anni di studi e di ricerche (anche svolte concretamente in classe) in cui esplora quello che accade in una situazione in aula: l'apprendimento, il mancato apprendimento, le cause dell'insuccesso e le interazioni tra i vertici di quello che di seguito viene chiamato “**triangolo della didattica**” (**studente-insegnante-sapere**).

Il “**triangolo della didattica**” nasce da un'idea di **Chevallard** (1982 [2]) di “**sistema didattico**” comprendente i tre vertici del triangolo i quali sono inseriti nella **noosfera** (la “*sfera in cui si pensa*” al sistema d'insegnamento) in

cui si trova anche la società. Questa idea si basa sul fatto che, *per studiare i processi di insegnamento-apprendimento, si devono analizzare le relazioni tra i tre vertici del triangolo, quindi tra studente, insegnante e sapere*. La noosfera vi si inserisce perché il triangolo ne subisce le influenze e può anche influenzarla. Essa include ad esempio chi redige i programmi ministeriali, i politici e i pedagoghi inoltre fa da intermediaria tra il sistema scolastico e il **Sapere** (*il "sapere sapiente", puro e rigoroso*) cercando di venire incontro alle attese della società (quelle delle famiglie degli allievi, del mercato del lavoro, ecc).

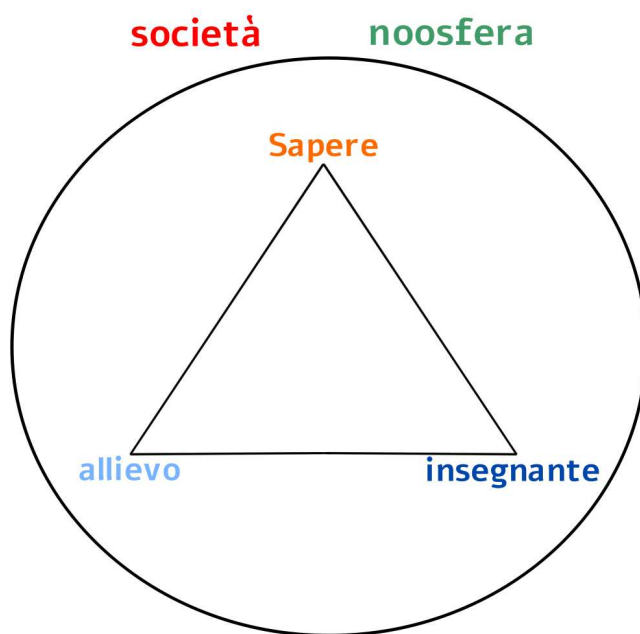


Figura 2.2: Schema del sistema didattico secondo Chevallard

Alla base della TSD c'è la convinzione che **l'apprendimento è un fenomeno di adattamento dell'individuo agli stimoli dell'ambiente in termini di assimilazione e accomodamento**.

È opportuno specificare che siccome la TSD ha come riferimento la matematica, allora *si occupa prettamente di conoscenza matematica*. Tale conoscenza necessita di vari tipi di "situazioni", in quanto non è composta solo da concetti ma anche da vari processi (di sviluppo e validazione delle idee matematiche per esempio) così come da registri di rappresentazione simbolica. Una **situazione fondamentale**, legata a un certo concetto matematico che deve essere insegnato, si forma *se viene proposto un problema la cui soluzione è proprio tale conoscenza*. È compito dell'insegnante, dopo aver identificato il problema, contestualizzarlo affinché sia recepito nel modo migliore dalla classe.

2.1.1 Alcuni elementi fondamentali

L'approccio tradizionale per insegnare la matematica è quello di tipo

“**assiomatico**”: si parte da concetti primitivi e assiomi per poi, tramite inferenze logiche, andare a collegarli tra loro per dimostrare nuove proposizioni e teoremi. Questo approccio permette, nel minor tempo, di definire il maggior numero di concetti basati su quelli precedenti. Il processo viene poi ultimato attraverso la risoluzione di problemi che richiedano l'utilizzo di tali conoscenze. Il punto debole di questo approccio è che nasconde completamente il percorso storico, il “vero funzionamento della scienza”: come vi siano state varie difficoltà che, superate, hanno portato alla creazione di questi concetti. L'insegnante opera, in questi casi, un processo di **trasposizione didattica** dove, attraverso un processo di *decontestualizzazione*, *depersonalizzazione* e *detemporalizzazione*, si rendono più accessibili tali concetti allo studente. In questo modo sarà convinto dei risultati senza dover passare per il lungo percorso (che storicamente vi è stato nella disciplina).

Secondo **Brousseau** invece, la conoscenza deve diventare la “conoscenza dello studente”, quella che nasce come risposta naturale a particolari condizioni (che diano senso a tale conoscenza). Queste condizioni sono fornite da una particolare situazione che l'insegnante organizza (si parla di “**ingegneria didattica**”), con un processo di *ricontestualizzazione* e *ripersonalizzazione del sapere* (controcorrente quindi rispetto al lavoro del ricercatore). L'insegnante cerca di proporre problemi particolari allo studente, a cui, “adattandosi”, potrà trovare la risposta-conoscenza attesa.

Imparare la matematica non si riduce solo alle definizioni, ai teoremi, ma significa: porsi domande e affrontare problemi; provare, formulare, costruire modelli, concetti, linguaggi. A tal fine l'insegnante simula in classe una “*microsocietà*” nella quale si scambiano, tramite discussioni, idee, opinioni tra gli studenti. Alla fine *gli studenti dovranno ridecontestualizzare e ridepersonalizzare le loro conoscenze*, in modo che possano identificarsi con quelle riconosciute dalla comunità matematica.

La conoscenza nasce perciò da processi di assimilazione e accomodamento, attivati da “conflitti cognitivi” (nel senso descritto da Piaget) interni allo studente e nati dall'interazione che questo ha con l'ambiente preparato dall'insegnante. Le nuove risposte date dallo studente a seguito dell'adattamento si manifestano come prove del suo apprendimento.

Si consideri che, sebbene vi sia un'impronta piagetiana, Brousseau non ne condivide il ruolo marginale dato all'insegnante, che rischia di essere privato di ogni responsabilità didattica.

Lo scopo della TSD non è di stabilire come avvenga il processo di apprendimento dell'allievo, quanto quello di *evitare e studiare le cause del mancato apprendimento, proponendo attività che possano renderlo più efficace*. Entrano quindi in gioco le seguenti componenti:

- **Triangolo della didattica:** *studente - insegnante - Sapere* (con la "S" maiuscola, quello matematico, colto, rigoroso);

- **Noosfera:** la “sfera in cui si pensa” (da nous=mente, e sphaira=sfera), ovvero in cui si pensa al sistema di insegnamento, in questa rientra la società;
- **Milieu:** “ambiente” organizzato dall’insegnante (punto focale delle situazioni a-didattiche) all’interno dell’aula per favorire l’apprendimento dello studente.

Secondo Brousseau l’**epistemologia scolastica**, quell’insieme di convinzioni (esplicite e non), presenti nell’ambiente scolastico, influenza l’attività didattica e la sua progettazione, nella scelta dei metodi da usare come anche nei saperi da insegnare. Questa è distinta dall’**epistemologia della società** che invece detta gli obblighi scolastici come, per esempio, quello di ottenere un risultato (per approfondimenti su come questa influenzi la valutazione si veda [10]).

Si forma anche una “**epistemologia dell’insegnante**”: una serie di convinzioni e comportamenti che generano pratiche di insegnamento inadeguate per lo studente, il quale sarà dunque in difficoltà. Esempi sono forniti in [10] (qui ne vengono riportati due):

- l’insegnante deve riuscire a insegnare all’allievo tutto ciò che ritiene debba sapere e l’allievo deve ricordare ogni cosa detta dall’insegnante;
- ciò prevederebbe allora che lo studente si impari tutto a memoria, o che inventi o indovini la risposta richiesta.

Sono comportamenti che portano fuori strada rispetto all’obiettivo didattico e anzi generano quelli che di seguito vengono chiamati “**effetti del contratto didattico**”.

Nella TSD si cerca di comprendere sotto quali condizioni il soggetto venga indotto a “fare matematica” senza che sia influenzato da questi obblighi, queste condizioni didattiche. Diventa fondamentale, nella TSD, aggiungere una nuova componente (già prima menzionata) al triangolo della didattica, il **milieu** (l’ambiente), facendo in modo che la risposta dello studente sia derivante invece da una *necessità*.

Per Brousseau il milieu ha due aspetti [1]:

- **Diacronico:** come una successione di azioni “compiute” dai tre vertici del triangolo all’interno dell’ambiente-aula;
- **Sincronico:** legato alla relazione tra insegnamento e apprendimento.

Il *milieu* rappresenta il mezzo di comunicazione (tramite diversi registri, non solo orale) con lo studente ed è *costituito non solo da oggetti fisici, ma anche sociali, culturali, umani, con cui interagisce in una “situazione”*.

Secondo Brousseau:

“Una situazione è caratterizzata in una istituzione da un insieme di relazioni e di ruoli reciproci di uno o più soggetti (allievo, docente ecc.) con un milieu, che guardano la trasformazione di questo milieu secondo un progetto.” [1]

Tali relazioni si possono rappresentare coi cosiddetti “**poligoni della didattica**” [12], come il triangolo prima menzionato che, *aggiungendovi il “vertice milieu”*, diventa il “**quadrilatero della didattica**”. Si potrebbero aumentare i vertici andando sempre più nel dettaglio (ad esempio se si volesse fare una divisione delle varie tipologie di sapere), ma non è l’obiettivo di questa tesi.

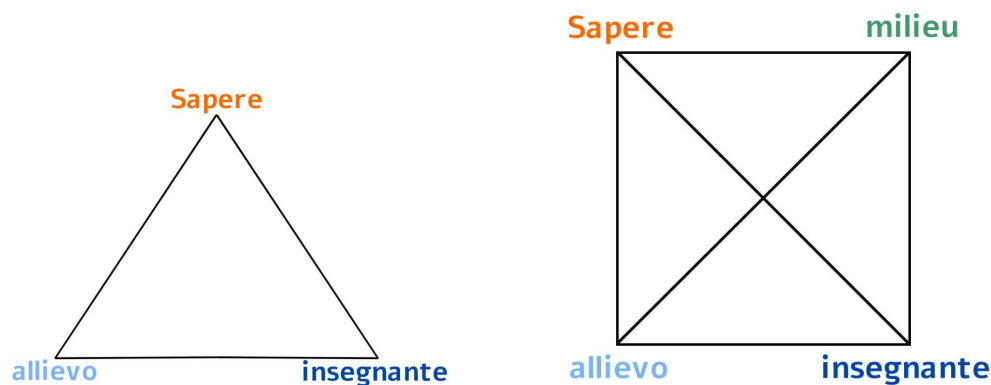


Figura 2.3: Sono rappresentati a sinistra il triangolo e a destra il quadrilatero della didattica.

È importante *non limitarsi a uno solo dei “vertici” della didattica*:

- porsi come obiettivo il solo studio della conoscenza matematica (i metodi di dimostrazione, la costruzione di problemi..) non è sufficiente;
- anche un approccio che si occupa solamente dello studente e di come pensa è insufficiente;
- persino limitarsi a considerare l’insegnante nei suoi rapporti socio-affettivi, al modo con cui si relaziona coi suoi allievi, non soddisfa tutte le esigenze.

Per questo l’idea di “**triangolo della didattica**” è fondamentale, perché pone queste tre componenti in una relazione continua. Diventa importante anche l’idea di **ingegneria didattica**, che studia i vari metodi che permettono la **trasposizione didattica**, quel passaggio che l’insegnante deve fare per trasformare il **Sapere** (*colto, rigoroso, frutto di anni di studi universitari*) in un “**sapere da insegnare**”, *adatto agli allievi* tenendo conto delle loro conoscenze, del loro percorso e della loro maturità, in modo che diventi poi “**Sapere insegnato**”.

Insieme al milieu, un altro ruolo fondamentale nella TSD è quello assunto dal **contratto didattico**, che viene introdotto nella sezione seguente.

2.2 Il contratto didattico

Secondo **Rousseau** [2] ogni interazione sociale si poggia su un certo tipo di “**contratto sociale**”, che definisce i diritti e i doveri di ciascuna delle due

parti. Tale contratto viene firmato, e accettato, nel momento stesso in cui si entra a far parte di una società e le regole che implica sono per lo più implicite. Questo “testo non scritto” non viene però alla luce tranne che nei cosiddetti “**momenti di rottura del contratto**”, quando quindi chi lo ha “firmato” ne diventa consapevole.

Quest’idea può estendersi ad un contesto scolastico in quello che, fin dagli anni ‘70 (e più approfondito negli anni ‘80), **Brousseau** chiamò “**contratto didattico**”, ovvero ciò *che detta le relazioni, le regole (soprattutto implicite), e le divisioni di responsabilità, tra studente, insegnante e il Sapere* obiettivo del programma scolastico (i tre vertici del triangolo della didattica).

“Il contratto didattico [...] è la giustificazione che l’insegnante ha per presentare la situazione. Ma l’evoluzione della situazione modifica il contratto, che poi consente che si verifichino nuove situazioni. [...] Non è un contratto pedagogico generale. Dipende strettamente dalla conoscenza specifica in gioco.” (Brousseau [6])

Si tenga conto che, secondo contratto, se l’apprendimento non avviene la colpa è di ambedue le parti. Infatti *sia insegnante che allievo hanno le loro responsabilità*:

- L’insegnante deve accettare i risultati che si presenteranno, far sì che lo studente abbia tutti i mezzi necessari a risolvere il problema e che riesca ad acquisire la conoscenza obiettivo.
- L’allievo deve accettare di risolvere problemi che gli sono forniti senza che gli siano state insegnate le soluzioni.

Fondamenti del contratto sono i comportamenti che l’insegnante si aspetta dall’allievo e viceversa. Si pensi alle abitudini dell’insegnante che lo studente rileva (come azioni ripetute più volte) nelle varie lezioni, e che quindi si aspetterà si ripetano sempre. *Un esempio* può essere considerare come, in classe, vi sia una marcata divisione dei ruoli: solo l’insegnante può porre domande e conoscere le risposte; l’alunno deve rispondere correttamente e se fornisce una risposta, questa sarà sbagliata se l’insegnante ripete la domanda.

Tali “*attese*” sono frutto di accordi impliciti che vanno ad affiancarsi ad altre regole di funzionamento interpersonale esplicitamente riconosciute nell’ambiente scolastico. Il contratto serve quindi a spiegare per esempio: in che modo l’allievo accede a un compito (un problema matematico proposto dall’insegnante) tramite l’interpretazione delle informazioni e delle domande che gli sono state fornite; gli obblighi che vengono imposti (implicitamente dal contratto sia allo studente che all’insegnante); come venga influenzata l’idea di matematica, vista spesso come “svolgimento di calcoli”, e di scuola, percepita come istituzione rigida che non lascia libertà di espressione agli alunni. Il contratto riassume inoltre tutto l’insieme di comportamenti adatti al conseguimento dei processi di insegnamento e apprendimento (basati sulla comunicazione interpersonale), in cui l’insegnante si occupa del “**sapere da insegnare**” e lo studente del

“sapere da apprendere”.

Sono di rilievo le osservazioni fatte in uno studio di **Schubauer - Leoni** (come accennato in [8]) in cui è stato chiesto (come gioco) a dei bambini, di prima e seconda elementare, di smettere di interpretare il ruolo di “alunni” e passare a quello di “insegnanti”. Dovevano quindi inventarsi dei problemi di aritmetica che avrebbero potuto proporre a un compagno (della stessa classe o di quelle inferiori). Emerse che un “buon problema” deve essere difficile, deve far sbagliare: l’insegnante deve mantenere un certo “potere” e non avrà compiuto il suo dovere se il suo allievo non sbaglierà cercando di risolvere il problema.

Per approfondire come agisca il contratto didattico, risulta opportuno trattare di:

- clausole del contratto didattico;
- effetti del contratto;
- paradossi.

2.3 Le clausole del contratto didattico

2.3.1 Un primo esempio: il "Problema dell'età del capitano"

Un primo esempio, per trattare di contratto didattico, è quello che offrì lo scrittore francese **Gustave Flaubert** nel 1843: il "problema dell'età del capitano".

Il testo, contenuto in una lettera che inviò alla sorella, recita così:

“Una nave si trova in mare, è partita da Boston carica di indaco, ha un carico di duecento barili, fa vela verso Le Havre, l'albero maestro è rotto, c'è del muschio sul castello di prua, i passeggeri sono in numero di dodici, il vento soffia in direzione NNE, l'orologio segna le tre e un quarto del pomeriggio, si è nel mese di maggio. Si richiede l'età del capitano.” [2]

Sebbene tale problema sia stato scritto come invettiva contro la matematica, con cui lui in gioventù l'autore ebbe difficoltà, fornisce anche un ottimo appiglio per ciò di cui si parla in questo capitolo. Una delle maggiori convinzioni (che qui viene smontata) degli studenti è infatti ad esempio che “ogni problema ha sempre una soluzione”.

Una versione alternativa viene fornita da **D'amore** [13], che ha deciso, per un suo studio, di riadattare il problema di Flaubert per una classe di quarta elementare di un centro agricolo:

“Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?”

Dopo aver proposto il problema, i bambini risposero “18”, fatto sconcertante per la maestra che li seguiva, meno invece dal punto di vista del contratto didattico [13]:

- la maestra non aveva mai proposto problemi impossibili o senza soluzioni, di conseguenza (come clausola implicita) erano convinti che quindi dovesse avere una risposta;
- tale risposta, per un'altra clausola, doveva essere trovata utilizzando tutti i dati numerici forniti dal problema, forse anche nell'ordine in cui comparivano nel testo;
- perciò arrivarono a fare $12 + 6$, operazione che venne giustificata da uno dei bambini dicendo che altrimenti, con un'altra operazione diversa dall'addizione, l'età del pastore sarebbe risultata troppo piccola.

Si è creato quello che può esser definito “**effetto età del capitano**”:

“La condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, allorché questo problema non possiede una soluzione numerica.” (Sarrazy [14])

Il modo migliore per accorgersi di questi effetti negativi, di queste regole che gli studenti (ma anche l'insegnante) creano inconsciamente, è di provare attività di questo tipo che “violino il contratto”. Questo nuovo problema, questa nuova situazione, porta lo studente a rivalutare le proprie convinzioni, attese, abitudini. Se riesce a rendersi conto che il problema posto porta con sé dell'assurdo, allora può farsi carico personalmente della **rottura del contratto didattico** rispondendo che il problema non presenta soluzione.

2.3.2 Il "Problema della gita"

In un suo studio del 1993, D'amore propose in una scuola primaria il seguente problema [14]:

“I 18 allievi di seconda vogliono fare una gita scolastica di un giorno da Bologna a Verona. Devono tener conto dei seguenti dati:

1. *due di essi non possono pagare;*
2. *da Bologna a Verona ci sono 120 km;*
3. *un pulmino da 20 posti costa 200.000 lire al giorno più 500 lire al chilometro (compresi i pedaggi autostradali).*

Quanto verrà a spendere ciascuno?”

Il problema venne proposto alla classe che venne quindi divisa in gruppi. Un errore si ripropose in tutti i gruppi: “*moltiplicavano 500 per 120 senza tener conto del ritorno*”.

Un caso particolare fu quello di un bambino che riconobbe esplicitamente che in una gita ci debba essere il viaggio di ritorno come quello di andata infatti: scrisse “*Bologna → Verona 120 km*” e “*Verona → Bologna 120 km*”. Lo stesso bambino, tuttavia, nella risoluzione tenne poi conto solo dell’andata.

Una causa dell’errore può essere un fattore emotivo, che porta i bambini ad affezionarsi di più al viaggio di andata che al ritorno. Differenti motivi invece sono ad esempio:

- Per gli allievi, "se qualcosa non viene scritto all'interno della consegna allora non si deve considerare".
- Non si sentono autorizzati a usare dati, se non quelli che appaiono esplicitamente nel testo. Non conta il senso di ciò che chiede la domanda, quanto più l'utilizzo di questi dati.

Il contratto didattico impone loro tali limitazioni.

2.3.3 Il "Problema dei soldati"

Un altro studio che ha portato a considerazioni simili è stato quello di **Schoenfeld** del 1987 [14] con 45000 studenti, di età circa 15 anni, ai quali propose il seguente problema:

“Un bus dell’esercito trasporta 36 soldati. Se 1128 soldati devono essere trasportati in bus al campo d’addestramento, quanti bus devono essere usati?”

Solo il 23% degli alunni riuscì a rispondere “32”, ovvero la risposta attesa. Secondo Schoenfeld questo dipende dal fatto che *gli studenti, una volta raggiunto un risultato numerico tramite un processo aritmetico, non riescono a tornare sul testo e reinterpretare la soluzione ottenuta affinché si adatti all’effettiva richiesta del problema.*

Anni dopo, **D’amore e Martini**, riproposero tale studio aggiungendo due variabili: *gli studenti erano liberi di usare o meno la calcolatrice e venivano intervistati.* Dalle risposte emerse che [12]:

- soprattutto chi utilizzò la calcolatrice scrisse “ $31, \bar{3}$ ” o “31,33333” oppure “31,3”;
- alcuni arrivarono a scrivere “31” riconoscendo, dopo un controllo semantico, che risulta difficile utilizzare un bus spezzato. Altri invece non si sentirono autorizzati a scriverlo;
- pochi si sentirono “autorizzati” a scrivere “32”, anche dopo un controllo semantico, tra questi nessuno aveva usato la calcolatrice.

Da una parte il fatto che lo studente faccia un controllo semantico sul testo ne influenza il risultato, dall’altra però *l’allievo crede che un “errore” in matematica possa essere solo di calcolo* (o che derivi dall’applicazione sbagliata di una

regola) e non possa derivare da un'interpretazione semantica errata, arrivando ad accusare l'insegnante di aver inserito una "domanda trabocchetto".

Questo, è un buon esempio di quello che D'amore e Martini definiscono "**clausola di delega formale**"[12]: l'allievo, dopo aver scelto che operazioni fare sui dati fa scattare tale clausola che gli impedisce di ragionare sulla risposta. L'utilizzo di calcoli a mano, calcolatrice o di un algoritmo bastano a dare una risposta per lui accettabile, senza che serva ragionarvi, e si limiterà a trascriverla senza chiedersi se sia in accordo con la richiesta del problema.

2.3.4 Un ultimo esempio: "La spesa di Giovanna e Paola"

Quest'ultimo esempio è tratto da uno studio di D'amore e Sandri del 1998 [14] e aiuta nuovamente a capire come si possano leggere i comportamenti, le attese e gli schemi degli alunni alla luce del contratto didattico e non della matematica di per sé. Il testo del problema, proposto in terza primaria, è il seguente:

"Giovanna e Paola vanno a fare la spesa: Giovanna spende 10.000 lire e Paola 20.000 lire. Alla fine chi ha più soldi nel borsellino, Giovanna o Paola?" [14]

Come nel problema dell'età del capitano, qui allo studente non vengono forniti dati sufficienti affinché possa trovare una risposta numerica, e quindi una "risposta normale" secondo il contratto didattico. Lo studente, che resta fedele al contratto, ritiene però che se l'insegnante gli affida un problema, allora questo deve essere risolvibile. Può essere quindi indotto a pensare che *Giovanna e Paola partano con la stessa quantità di soldi nei rispettivi borselli*, anche se questo non è scritto nel problema, credendo che sia implicito. La risposta "*Giovanna*" è quindi stata data dal 58,4% degli studenti, che si sentivano giustificati dal fatto che "*Giovanna spende meno di Paola*".

Un esempio è la risposta di Stefania (riportata testualmente da [14]):

"Nel borsellino rimane più soldi Giovanna $3010 = 2010 \times 10 = 100$ "

Si può notare come, per giustificarsi, Stefania abbia inserito dei calcoli senza spiegare altro del suo ragionamento. I calcoli hanno sostituito il suo ragionamento e il suo controllo semantico sul problema: è un altro caso in cui è intervenuta la "**clausola di delega formale**".

In studi successivi [12] fatti su allievi delle scuole medie, la risposta "*Giovanna*" scende al 24,4% e solo il 63,5% degli allievi di seconda media si accorge che mancano dei dati e quindi è impossibile darvi risposta.

Un'altra risposta da prendere in considerazione è quella fornita da Silvia (studentessa di seconda media, riportata in [14]):

"Secondo me, chi ha più soldi nel borsellino è Giovanna [poi corretto in Paola] perché: Giovanna spende 10.000 mentre Paola spende

20.000,

10.000	20.00
<i>Giovanna</i>	<i>Paola</i>

20.000 – 10.000 = 10.000 (*soldi di Giovanna*) 10.000 + 10.000 =
20.000 (*soldi di Paola*)"

In questo caso Silvia, che era partita dall'ipotesi iniziale "*i soldi nel borsellino, all'inizio, sono gli stessi per Giovanna e per Paola*" rispondendo "*Giovanna*", decide poi di cambiare la sua risposta a seguito del suo bisogno di giustificarla formalmente.

Questa reazione deriva da quella che viene chiamata (nello studio) "**clausola di esigenza di giustificazione formale**": *lo studente*, di fronte ad un problema del genere, *seppure fornisca una risposta* (qui Giovanna o Paola), *si sente in obbligo di dover inserire dei calcoli perché "l'insegnante se li aspetta di certo"*.

Si osservi come protocolli di Stefania e Silvia si assomiglino. In quello di Silvia tuttavia si trova un impegno maggiore nell'uso della logica e di un linguaggio formale:

- inizia, come Stefania, scrivendo solo che per lei la risposta al problema è "*Giovanna*";
- in seguito anche lei ritiene di "*dover produrre calcoli*", ottenendo un risultato diverso, quindi cambia la risposta e scrive "*Paola*" cambiando quella precedente.

Silvia probabilmente capisce che le operazioni che ha fatto non sono in linea con la logica del problema, ma nonostante ciò le accetta come plausibili andando a contrastare l'idea iniziale (ottenuta in modo intuitivo). *Il contratto didattico ha prevalso.*

2.3.5 Ancora qualche considerazione sulle clausole

Le clausole principali del contratto, come scritto prima sono dunque:

1. **Clausola di delega formale:** lo studente non ha compreso il significato matematico del problema, perciò decide di fare calcoli per riempire un vuoto.
2. **Clausola di giustificazione formale:** lo studente ha compreso il significato, ma ha necessità di giustificare ciò che ha fatto. Perciò aggiunge calcoli o riscrive con un diverso registro simbolico la sua risposta, perché questo gli fornisce maggior sicurezza rispetto a quello che ha scritto prima (che per lui vale più di quel che ha capito).

Si possono trovare altre clausole, qui ne vengono riportate due (prese da [10]):

- **Clausola delle attese:** lo studente può pensare: “*L’insegnante si aspetta decisamente una risposta, perciò devo fornirgliela senza preoccuparmi del senso del testo del problema*”.
- **Clausola della costanza:** lo studente crede di aver colto un’abitudine nei modi di fare dell’insegnante. Quest’ultimo (ad esempio) fornisce sempre problemi a cui, tramite i dati forniti e attraverso opportune operazioni, è sempre possibile trovare una soluzione. Perciò lo studente, quando l’insegnante propone un nuovo problema, si aspetta che “*dovrà essere così anche questa volta*”.

2.4 Gli effetti del contratto didattico

All’interno del contratto didattico si possono riscontrare principalmente tre tipi di “**effetti**” (riguardanti il comportamento dell’insegnante), che sono qui presentati.

2.4.1 Effetto Dienes

Il primo è detto “**effetto Dienes**”, il cui nome deriva dal matematico ungherese **Z. P. Dienes** conosciuto per la creazione di alcuni strumenti didattici (quali i “*blocchi di Dienes*”, detti anche “*blocchi multibase*”, usati per insegnare il sistema decimale e le operazioni nelle scuole primarie) e per i suoi studi sull’apprendimento.

Secondo Dienes, l’insegnamento dei concetti matematici deve avvenire, specie all’inizio del percorso scolastico, attraverso un maggiore uso del gioco e di materiali manipolabili. Sperimentò alcuni materiali strutturati e postulò quattro principi [23]:

1. **Principio di variabilità matematica** (“*Mathematical variability principle*”): il rinforzo e la generalizzazione di un concetto matematico avvengono percependolo sotto diverse condizioni quando *le variabili correlate* (al concetto) *sono mantenute costanti e quelle scorrelate sono cambiate sistematicamente*. Si cerca quindi di far fare esperienza del maggior numero di variabili legate a quel concetto.
2. **Principio di variabilità percettiva** (“*perceptual variability principle*”): le variabili hanno grande influenza nello sviluppo del concetto cui sono legate e permettono all’alunno di *capire l’astrazione attraverso varie percezioni della stessa struttura*.
3. **Principio di costruttività** (“*constructivity principle*”): *i bambini imparano a partire dalla propria esperienza nell’uso di certi materiali*, cosa che influenza anche la loro attitudine e interesse verso la matematica.
4. **Principio dinamico** (“*dynamic principle*”): tutte le astrazioni, e quindi la matematica, derivano dall’esperienza e lo sviluppo dei concetti è legato a un processo psicodinamico. La comprensione di un concetto avviene

tramite cicli consecutivi secondo la seguente idea: *se le attività vengono svolte nel giusto tempo, i concetti matematici saranno costruiti in modo graduale.*

Tale modello si basava quindi sulla ripetizione di problemi simili a uno dato, mediante “**giochi strutturati**”, di modo da indurre una schematizzazione di quanto sta accadendo e portando alla produzione di una risposta standard.

Per **Brousseau** [20] tale modalità ha il *difetto di far convergere l'intera responsabilità dell'apprendimento verso lo studente*, in quanto si fonda su processi a lui interni, privandone invece l'insegnante. Quest'ultimo si limita alla scelta dei materiali strutturati, a organizzare e fornire esercizi di cui potrà nel caso fornire spiegazioni (o risposte) per poter passare alla scheda successiva. *L'uso di tali materiali deriva da una proposta didattica di esperti, che permette di diminuire la difficoltà sia di insegnare, per il docente, sia di imparare, per l'allievo.*

Con “**effetto Dienes**” Brousseau vuole quindi riassumere un atteggiamento che l'insegnante assume verso il rapporto tra “*Sapere*” e “*sapere da insegnare*”:

“Più il professore confiderà nella riuscita grazie a degli effetti indipendenti dal suo investimento personale, più fallirà” [20].

L'insegnante si limita a replicare quanto gli è stato trasmesso dagli esperti, aspettandosi i risultati promessi (la generalizzazione o una buona formalizzazione). Il triangolo della didattica viene così destabilizzato: l'insegnante non è legato all'evoluzione del comportamento cognitivo dello studente, in quanto questi deve essere autosufficiente, e una didattica di questo genere non dipende dal contenuto ma diventa un modo di presentare la conoscenza che ne favorisce la memorizzazione.

Il problema per Brousseau, nell'utilizzo di quelli che chiama “*giochi di Dienes*”, risiede nel fatto che le stesse regole che vengono proposte allo studente per giocare sono anche le medesime che deve apprendere. *Siccome lo studente non può usare una regola che non conosce, l'insegnante cerca di fargliela indovinare rendendola però una “attività non teorizzata del processo matematico”.*

Alternativamente si potrebbe pensare di insegnare prima la regola, ma il gioco diverrebbe solo un esercizio.

2.4.2 Effetto Topaze

Il secondo effetto trae ispirazione da “**Topaze**”, opera teatrale in quattro atti di **Marcel Pagnol** (che è stato regista di cinema e teatro, nonché insegnante delle elementari e poi di inglese al liceo), messa in scena la prima volta nel 1928 a Parigi per poi essere riproposta in versione cinematografica più volte. “**Topaze**” è la storia di un insegnante di una scuola privata che si rifiuta di promuovere, e anzi boccia, il figlio di una baronessa, la quale rappresenta uno dei maggiori sostegni economici dell'istituto.

Tale commedia divenne celebre negli anni '60 grazie alle osservazioni di Brousseau in merito ad alcuni comportamenti degli insegnanti che riassunse proprio

in “**effetto Topaze**”. Per capire meglio di cosa si tratti, è utile citare l’atto primo, scena prima dell’opera (il testo è preso da [9]):

“Quando il sipario si alza, M. Topaze fa fare un dettato ad un allievo. [...] L’allievo è un piccolo ragazzo di dodici anni. Volta le spalle al pubblico. [...] Topaze detta e, di tanto in tanto, si tende sulla spalla del piccolo ragazzo per leggere quel che ha scritto. Topaze, detta sporgendosi. «Des moutons [delle pecore]... Des moutons... erano in un recinto... in un parco; in un parco. (Si sporge sulla spalla dell’Allievo e riprende). Des moutons... moutonss... (L’Allievo lo guarda, sgomento). Vediamo, ragazzo mio, fate uno sforzo. Io dico moutonsse. Étaient [Erano] (riprende con finezza) étai-eunnt. Questo vuol dire che non c’era solo un moutonne. C’erano più moutonsse». L’Allievo lo guarda perso. “

Risulta evidente come Topaze cerchi di porre l’attenzione su alcune parole, ripetendole o sottolineandone particolari lettere nella pronuncia. L’**effetto Topaze** ha luogo quando *all’insegnante non interessa l’apprendimento effettivo dell’allievo, quanto più che scriva nel modo corretto (per l’insegnante) ciò che viene dettato*. È il caso tipico in cui “il fine giustifica i mezzi”, perciò *non gli importa in che modo ottiene il risultato dallo studente*: sia che debba negoziare leggermente le condizioni o le difficoltà del problema, sia che debba esplicitare la regola ripetendola diverse volte, il docente sarà soddisfatto. Non gli interessa se lo studente trova la risposta senza una reale comprensione.

Si osservi come, a differenza dell’effetto Dienes, sia quindi l’insegnante a prendersi tutta la responsabilità dell’apprendimento, che avrà avuto successo solo nel momento in cui l’allievo scriverà quello che lui aveva in mente. Ciò che avviene in classe è un segreto del docente, il quale propone all’alunno un gioco con certe regole:

- se lo studente vince da solo vuol dire che non c’era bisogno del gioco, in quanto era già padrone delle regole;
- altrimenti sta all’insegnante creare le condizioni per il “successo” (anche attraverso domande sempre più semplici).

D’altra parte, *allo studente non interessa capire, quanto più aspettare che sia l’insegnante a dargli i suggerimenti che lo porteranno alla risposta attesa*. Ciò che gli importa è ottenere consenso e gratificazione.

Ci si trova quindi in un caso di *contratto didattico* in cui il “*successo in aula*” avviene solo se le due attese sono soddisfatte: *l’insegnante ha ottenuto dallo studente la risposta voluta e lo studente ha soddisfatto le aspettative dell’insegnante*. Per alcuni esempi si invita a guardare [9].

2.4.3 Effetto Jourdain

Infine il terzo effetto, che viene qui descritto, deriva dal protagonista, **Jourdain**, di “**Borghese gentiluomo**”, opera teatrale in 5 atti di **Molière**. Il personaggio

viene presentato come un rozzo, sebbene ricco, mercante che brama un titolo nobiliare. Per poter raggiungere il suo obiettivo decide di apprendere le “belle maniere” e per farlo assume vari maestri (di danza, scherma, ecc). Di particolare interesse è un episodio della scena quarta, atto secondo, qui riportato (il testo è preso da [2]) dove per semplicità vengono indicati “*Monsieur Jourdain*” con MJ e “*Maestro di filosofia*” con MF :

MJ: *Inoltre devo farvi una confidenza. Sono innamorato di una dama dell'aristocrazia, e... desidererei che mi aiutaste a scriverle qualcosa in un bigliettino che le lascerò cadere ai piedi.*

MF: *Benissimo.*

MJ: *Qualcosa di galante, naturalmente.*

MF: *Certo. Volete scriverle qualche verso?*

MJ: *No, no; niente versi.*

MF: *Soltanto prosa?*

MJ: *No, non voglio né prosa né versi.*

MF: *Bisogna pur che sia in uno dei due modi.*

MJ: *Perché?*

MF: *Per il motivo, signore, che per esprimerci possediamo soltanto la prosa o i versi.*

MJ: *Soltanto la prosa e i versi?*

MF: *Proprio così: tutto ciò che non è in prosa è in versi; e tutto ciò che non è in versi è in prosa.*

MJ: *E quando si parla, che cosa è?*

MF: *Prosa.*

MJ: *Come? Quando dico: “Nicoletta, portami le pantofole, e dammi il berretto da notte”, è prosa?*

MF: *Sì, signore.*

MJ: *Per tutti i diavoli! Sono più di quarant'anni che parlo in prosa. Vi sono molto grato di avermi informato.*

Ciò che viene chiamato “**effetto Jourdain**” è, in un contesto matematico, quello che avviene quando l'insegnante, per evitare il possibile fallimento, ricerca tracce di “conoscenza scientifica” nella risposta o nel comportamento dell'allievo. Vi trova un'attività concettuale elaborata la cui esistenza non è però dimostrabile.

Si osservi come le attese delle controparti che stipulano il contratto siano le stesse riscontrate nell'effetto Topaze: l'insegnante vuole ottenere, con ogni mezzo, la risposta e lo studente si aspetta di ricevere l'algoritmo per ottenerla. Questo è frutto anche di attese esterne, relative alla noosfera, nei confronti dell'insegnante che sente su di sé l'intera responsabilità dell'apprendimento dei suoi studenti, temendo le critiche della società nel caso di un fallimento.

La situazione caratteristica è quella dell'uso dell'**analogia**:

1. lo studente fallisce nel risolvere il problema che gli è stato proposto;
2. successivamente l'insegnante decide di risolvere ed esplicitare i passaggi su un problema identico;
3. infine lo studente usa tali informazioni per risolvere il problema rimasto irrisolto.

Se si verifica tale dinamica, entrambe le parti si ritengono soddisfatte:

- il docente ha ottenuto la risposta ambita;
- l'allievo ha ricevuto il suo consenso e crede di aver compreso la questione matematica in gioco.

Il caso ricorrente in cui l'analogia viene utilizzata è nell'ambito algebrico in merito alla risoluzione di un'equazione, in cui, se lo studente non riesce a risolverla, la si divide in blocchetti che vengono riproposti e risolti in esercizi simili in cui viene mostrato l'algoritmo.

Tale “abuso” dell'analogia non garantisce l'interiorizzazione di concetti matematici, ma rischia invece di fermarsi al riconoscimento di una somiglianza. *L'insegnante non si cura dell'apprendimento e lo studente si limita a riprodurre una soluzione fatta da qualcun altro senza capirne davvero la logica.*

Questo non implica che l'utilizzo in classe dell'analogia sia una pratica da proibire, anzi alcuni autori la ritengono un importante strumento didattico. Lo stesso Brousseau ha affermato che:

“Il docente deve dunque dissimulare le sue intenzioni con un artificio didattico: scegliere domande le cui risposte possono essere costruite dall'allievo, ricorrere ad analogie, suggerire metodi ecc.” [24]

Ciò che conduce all'effetto Jourdain non è dunque l'analogia in sé, quanto un suo abuso.

2.5 Alcuni paradossi del contratto didattico

Secondo Brousseau, la conoscenza può essere costruita dall'allievo solo se si interessa personalmente del problema, propostogli nella situazione, e della sua risoluzione. Non è però sufficiente comunicare un problema affinché sia lo studente a prendersene carico.

*“Utilizziamo il termine “**devoluzione**” per descrivere l'attività mediante la quale l'insegnante cerca di ottenere questi due risultati. [...] è l'atto mediante il quale l'insegnante fa sì che lo studente accetti la responsabilità di una situazione di apprendimento (adidattica) o di un problema, e accetta le conseguenze di questo trasferimento di tale responsabilità.” [6]*

Se si accetta di pensare all'*insegnamento come a una devoluzione della costruzione della conoscenza allo studente*, bisogna tener conto di alcuni **paradossi** che ne derivano.

Si prenda in esempio (tratto da [7]) il caso di Lebesgue. Lui preferiva “fare matematica” davanti ai suoi studenti, quindi non arrivare in aula con una dimostrazione pronta e fatta, ma preferendo piuttosto trovarla sul momento e perdersi nei calcoli. Rifiutava persino di seguire un dottorando, perché:

- da una parte, se lo studente gli avesse posto domande a cui lui stesso (Lebesgue) poteva rispondere, allora l'allievo non ne avrebbe ricevuto alcun merito;
- dall'altra ricevere domande a cui non avrebbe potuto rispondere sarebbe stato un “*regalo avvelenato*”.

Gli ostacoli alla devoluzione possono perciò essere di vario genere, come ad esempio l'eccessiva difficoltà di una situazione. *Lo studente, se si trova in una situazione che non può risolvere, difficilmente può accettare la “responsabilità” del successo o del fallimento.*

L'insegnante vuole che il problema proposto sia risolto dallo studente, in tal modo entrambe le parti potranno valutare il loro operato. *Se tuttavia l'allievo riceve le risposte senza averle costruite, senza alcuno sforzo, allora sembra che abbia imparato, perché sa risolvere il problema, ma non ha creato conoscenza, solo una sua parvenza.*

Sebbene quindi il compito dell'insegnante sia di far sì che l'allievo apprenda tutto il necessario riguardo a una conoscenza, allo stesso tempo vuole anche ottenere da lui la risposta corretta e deve comunicarglielo, senza tuttavia svelarla. Spetta allo studente, se fallisce nel risolvere il problema, dirlo all'insegnante e chiedere aiuto.

Quanto scritto sopra si riassume nel “**paradosso della devoluzione**”:

“Se l'insegnante dice ciò che vuole, non potrà più ottenerlo. Ma anche lo studente si trova di fronte a un'ingiunzione paradossale: se accetta che, secondo contratto, l'insegnante gli insegni il risultato, non lo stabilisce. Se, d'altro canto, rifiuta ogni informazione dall'insegnante, allora il rapporto didattico si rompe. L'apprendimento implica, per lui (lo studente), che accetti il rapporto didattico ma che lo consideri temporaneo e faccia del suo meglio per rifiutarlo.”
(Brousseau [6])

Secondo la TSD, *l'apprendimento si consegue accettando perciò la relazione didattica come temporanea cercando di superarla*. In altri termini:

“Quanto più l'insegnante cede alle sue richieste e rivela ciò che lo studente desidera, e quanto più gli dice esattamente cosa deve fare, tanto più rischia di perdere la possibilità di ottenere l'apprendimento a cui in realtà mira.” (Brousseau [6])

Sotto un altro sguardo, lo si può interpretare come “**paradosso della credenza**”:

“Credetemi, ma non credete, imparate a sapere che cos’è sapere (...) abbiate fiducia in me per non dover più avere fiducia in me, ma nella vostra ragione.” (Clanché [1])

L’insegnante deve adoperarsi per far avvenire la devoluzione in una situazione che non si riveli troppo chiusa (rispetto al contratto), di modo da permettere gli **adattamenti** necessari all’apprendimento. Se si accetta che lo studente costruisce e acquisisce un pezzo di conoscenza adattandosi a certe situazioni (a lui “devolute”) organizzate per attribuirvi un significato specifico, allora tali **situazioni fondamentali** consentiranno all’allievo di creare una concezione corretta della conoscenza e riutilizzarla per produrne di nuova.

Si supponga tuttavia che per una parte di conoscenza non si riesca a creare situazioni sufficientemente accessibili e in numero abbastanza piccolo da far sì che lo studente possa adattarvisi (verso la produzione della conoscenza corretta). Si potrebbe allora procedere per esempio in due modi:

- Un primo approccio consiste nel favorire *una prima fase di adattamento* per la creazione di conoscenza che sarà utile alla fase successiva, ma anche *temporanea e in parte falsa o inadeguata*;
- La seconda alternativa è di rinunciare a insegnare per adattamento preferendo invece insegnare la conoscenza direttamente, perdendo però l’occasione di darvi significato.

In sostanza il docente si può ridurre a insegnare una conoscenza formale, ma insignificante, oppure una più o meno falsa, che dovrà poi essere corretta, o ancora a fare *scelte intermedie che rischiano di portare ulteriori complicazioni*. Scrive Brousseau:

“Qui, ancora, lo studente si trova di fronte a un’ingiunzione paradossale; deve capire e imparare; ma per poter imparare deve in un certo modo rinunciare a capire e, per capire, deve prendersi il rischio di non imparare.” [6]

Come rimedio si potrebbe optare per un **disadattamento**: *portarlo a una comprensione temporaneamente erranea, mediante problemi introduttivi, per poi riesaminare la conoscenza in questione e correggerla o modificarla*. Questo procedimento risulta però complesso: lo studente ha già trovato delle relazioni tra le sue conoscenze e i problemi affrontati, perciò avrà difficoltà a, sotto un certo aspetto, rinunciarvi. Il motivo può essere ad esempio di natura psicologica: è difficile cambiare un’opinione o un’abitudine. Questo vale per noi stessi, ma è ancora più difficile far cambiare idea agli altri.

L’insegnante si trova quindi di fronte ad un altro **paradosso**:

“Che scelga l’insegnamento formale o l’insegnamento per adattamento, più insiste sull’apprendimento di conoscenze intermedie, più rischia di ostacolare l’ulteriore insegnamento. Al contrario, se abbandona l’istituzione, l’istituzionalizzazione di ciò che è acquisito, anche parzialmente, lo studente non troverà alcun supporto per i passaggi successivi.” [6]

Si evidenzia che la TSD nasce per spiegare e dare una soluzione ai fenomeni fin qui elencati.

2.6 Ultime osservazioni sul contratto didattico

Uno strumento fortemente usato in aula è quello dell'**algoritmo**: un mezzo esplicito per rimuovere un blocco che ha l'alunno, per risolvere conflitti didattici. Concede infatti di recuperare una divisione delle responsabilità:

- L'insegnante vorrebbe che lo studente riuscisse a trovare le soluzioni, perciò gli fornisce l'algoritmo e chiarisce che fornisce la soluzione per una serie di situazioni differenti.
- Lo studente si aspetta di ricevere l'algoritmo, riconoscendolo già come conoscenza e se, non riesce ad applicarlo, si esercita fino ad annullare ogni sua incertezza.

L'insegnante tenta, man mano che fornisce gli algoritmi, di classificarli, spiegare la loro efficienza scegliendo dei problemi che siano ottimi esempi per la loro applicazione. Tuttavia se si limita a problemi risolvibili per la sola applicazione automatica dell'algoritmo, senza che lo studente ricerchi tra le risorse che ha già (tra teorie e teoremi che già possiede), allora solleva l'allievo dalla responsabilità dell'apprendimento facendolo fallire (il più delle volte) nell'attività. *Occorre trovare quindi il giusto equilibrio tra le "informazioni fornite" e il "non fornirle affatto".*

Lo stesso Brousseau in [6] riconosce che non si può parlare di “contratto” nel vero senso del termine, in quanto *questo gioco di obblighi non può mai davvero esser reso esplicito per intero*. D'altra parte non esistono nemmeno metodi sicuri che portino alla costruzione di nuove conoscenze da parte dello studente. Ma è molto probabile che se il contratto si basasse solo su regole di una delle due parti (che sia il docente o l'allievo) allora cercare di rispettarlo in modo puntiglioso porterebbe al fallimento della relazione didattica. Perciò forse sarebbe opportuno parlare di **"con-tratto"**.

2.7 La teoria degli ostacoli

All'interno della TSD si definisce **“ostacolo”** qualsiasi cosa che sia di intralcio alla costruzione del sapere (auspicato dall'insegnante) da parte dello studente. Se ne possono individuare principalmente tre tipologie:

- **Ostacoli epistemologici:** sono legati alla natura stessa e alla storia dello sviluppo della matematica.
- **Ostacoli ontogenetici:** hanno origine nell'allievo e sono legati alla sua "maturità" (secondo vari punti di vista).
- **Ostacoli didattici:** derivano dalle scelte metodologiche e didattiche dell'insegnante.

Qui di seguito vengono trattati più nel dettaglio.

Ad ogni argomento di ambito matematico è legato uno *statuto epistemologico* (una sua validità) *che dipende sia dalla sua storia evolutiva all'interno della matematica, sia dalla sua accettazione critica che dal linguaggio usato per esprimerlo*. Quando in questa storia si riscontrano discontinuità o cambiamenti profondi della concezione, allora è probabile che il concetto sia vittima di "**ostacoli epistemologici**". Questo si manifesta, ad esempio, in errori che fanno gli studenti e che si ripetono in diverse classi e in diversi anni. Per esempio il passaggio dalle frazioni ai numeri con la virgola non è garantito: infatti storicamente ha avuto bisogno di 4500 anni. Già all'epoca dei sumeri esisteva un sistema posizionale, ma solo nel quindicesimo secolo si è raggiunto un uso consapevole dei numeri decimali [11] (per un altro esempio, nel passaggio da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ si veda [10]).

La preparazione storica (in merito alla matematica) ed epistemologica dell'insegnante assume quindi un ruolo chiave nella trasformazione del sapere in conoscenza dell'allievo. L'insieme di credenze su ciò che serve fare per insegnare, apprendere e comprendere i saperi in gioco costituisce un'epistemologia pratica, sia per l'allievo che per l'insegnante, che viene trasmessa per generazioni ed è caratteristica dell'umanità.

Gli "**ostacoli ontogenetici**" invece fanno *riferimento all'età mentale dell'alunno* (non necessariamente corrispondente all'età cronologica) la quale porta con sé certi livelli di conoscenze e capacità che possono risultare insufficienti per un progetto didattico organizzato dall'insegnante. Per esempio [11], se in una scuola primaria si tentasse di far costruire (cognitivamente) il numero razionale come classe di equivalenza di coppie di numeri naturali (col secondo numero diverso da zero), sarebbe un esperimento fallimentare. Per arrivare a costruire tale concetto sarebbe necessario avere infatti la "forza cognitiva" di considerare tale classe come un singolo oggetto, astraendone le componenti, cosa non garantita a quel livello scolastico.

Per quanto riguarda invece gli "**ostacoli didattici**", bisogna ricercarne *la causa nel modo in cui il docente interpreta e organizza la trasposizione didattica del sapere* (da "adulto" a "da insegnare"). Utilizzerà una strategia che ritiene efficace basandosi sulle proprie convinzioni didattiche e scientifiche credendo che possa funzionare per la sua classe. Tuttavia la realtà è che ciò che può funzionare per gli uni non è detto che funzioni per gli altri, portando all'ostacolo

didattico. Un esempio (similmente a quanto riportato in [11]) è l'introduzione di registri semiotici. Senza un percorso o un'attività apposita, tale scelta può portare uno studente a dire che se il successivo di 6 è 7 (cosa valida per i numeri naturali) allora potrà estendere l'idea a tutti gli insiemi numerici affermando che il successivo di $\frac{6}{8}$ è $\frac{7}{8}$ e quello di 0,6 è 0,7 (quando invece per i razionali tale concetto non è definito).

Sarebbe dunque necessario ripensare alla funzione dell'errore:

“L'errore, dunque non è necessariamente solo frutto di ignoranza, ma potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successo, che ha prodotto risultati positivi, ma che non tiene alla prova di fatti più contingenti o più generali.” (D'amore [11])

2.8 La situazione a-didattica

All'interno della TSD è la **situazione a-didattica** quella che si presta meglio alla costruzione della conoscenza, seppure non dia spiegazioni su come avvenga l'apprendimento (non essendo questo il suo scopo primario).

Prima di trattarla si vedano altri due tipi di situazione.

Nella **situazione non-didattica** i tre vertici del triangolo della didattica non hanno tra loro un'interazione significativa:

- insegnante e studente sono coinvolti in una *situazione non strutturata in cui non hanno un rapporto (consapevole) con il sapere*;
- *il milieu non è stato organizzato* dall'insegnante affinché lo studente apprenda nozioni specifiche del sapere da insegnare;

Un esempio possono essere degli studenti che giocano a carte durante l'intervallo: le strategie che usano per vincere presentano l'impronta di strumenti “matematici”, sebbene in quel momento non siano espliciti o legati a specifici obiettivi scolastici. Non è detto che, in questo caso, non vi sia apprendimento, tuttavia questo non deriva da un adattamento ad un milieu precedentemente preparato.

La **situazione didattica**, invece, è un *tentativo esplicito di insegnare* mediante stimoli concreti (attività come possono essere la risoluzione di problemi):

- L'insegnante, consapevole del suo ruolo, interviene direttamente nel processo di apprendimento, organizzando l'ambiente, esplicitando cosa si vuole ottenere e come ottenerlo: *“I docenti spiegano, poi spiegano le spiegazioni, le illustrano e poi spiegano le illustrazioni...”* [1].
- Lo studente sa che ciò che si sviluppa nell'attività porterà a nozioni e competenze che fanno parte del sapere atteso dalla scuola e dalla società.

In questo caso si è in pieno *contratto didattico*: l'insegnante si sta quasi sostituendo allo studente che, più che imparare la matematica, si limita a imparare ciò che l'insegnante vuole da lui (in modo implicito e esplicito) senza porsi domande sul contenuto.

Può essere ora concesso parlare di uno dei cardini della TSD, la **situazione a-didattica** nella quale:

“L’allievo apprende adattandosi ad un ambiente che è fattore di contraddizioni, di difficoltà, di disequilibri, un po’ come la società umana. Questo sapere, frutto dell’adattamento dell’allievo, si manifesta con delle nuove risposte che sono la prova dell’apprendimento (...). [L’allievo sa che] (...) il problema è stato scelto per fargli acquisire una nuova conoscenza ma deve sapere anche che questa conoscenza è interamente giustificata dalla logica interna della situazione e che può costruirla senza far appello a delle ragioni didattiche.”
(Brousseau [1])

In altre parole:

- Il rapporto con la conoscenza (obiettivo della lezione) non è derivante da un desiderio esplicito dell'insegnante, ma dall'aver organizzato il **milieu** in modo che lo studente, adattandovisi, possa “scoprire”, vi trovi difficoltà, contraddizioni, e possa modificare tale rapporto. *La conoscenza diventa perciò la risposta “ottimale” a una data situazione problematica.*
- Lo studente sa che il problema proposto dall'insegnante lo porterà all'acquisizione di una *nuova conoscenza* (ma non sa ancora quale) *che sarà validata dalla situazione in sé, dalla sua logica interna, e non da clausole di contratto.* Tale conoscenza sarà costruita senza che sia legata a un ragionamento didattico, e l'avrà veramente acquisita solo se saprà applicarla in situazioni al di fuori del contesto didattico e senza indicazioni altrui (come quelle dell'insegnante). Prova (da solo o in gruppo) una strada che coinvolge le conoscenze preacquisite, vede se è valida e se non lo è prova nuovamente andando a modificare, completare o eventualmente rifiutare tali conoscenze, per formare nuovi concetti, sempre interagendo con le componenti dell'ambiente. *L'allievo diviene esso stesso responsabile dell'apprendimento del sapere*, non attende le conoscenze dell'insegnante. La sua risposta non deve essere motivata da clausole del contratto didattico.
- *L'insegnante non dice quale parte di conoscenza vuole che emerga dalla situazione problematica che ha proposto, non agisce in modo diretto, ma da regista che osserva e dirige la discussione, lasciando che siano gli allievi a gestirla.* Quando poi la classe sarà giunta a una conoscenza condivisa, sarà suo compito riprendere il suo vecchio ruolo per istituzionalizzare tale sapere, dandogli lo status e il nome condiviso dalla società.

“L'insegnante deve sempre aiutare lo studente a spogliare la situazione di tutti i suoi artifici didattici il più rapidamente possibile in modo da lasciarlo con una conoscenza personale e oggettiva.” [6]

Siccome l'insegnante non dichiara, in modo esplicito, l'obiettivo dell'attività, ma al contrario "devolve" la costruzione della conoscenza ai suoi studenti, a differenza degli altri tipi di situazione, il contratto didattico in questo caso non ha un ruolo dominante. Si può quindi fare un confronto, dicendo che:

- Nella **situazione didattica** lo studente riproduce ciò che dice l'insegnante per soddisfare le sue aspettative, non la propria sete di conoscenza. Qui prevale l'utilizzo degli esercizi come sola applicazione di regole, algoritmi già appresi (o in via di sviluppo);
- Nella **situazione a-didattica** è l'allievo a prendersi carico di una situazione di apprendimento (forse) più lenta, ma più significativa dal punto di vista concettuale. In questo caso sono i processi risolutivi "nuovi", creati dallo studente nell'affrontare un problema, che portano all'apprendimento.

Si osservi come la situazione didattica resti la favorita nell'ambiente scolastico, in quanto richiede meno tempo e impegno da parte dell'insegnante.

Tornando prettamente alla situazione a-didattica, si possono trovare **quattro condizioni** principali per la sua creazione [11]:

1. La situazione deve essere ripetibile;
2. Lo studente deve sentirsi incerto sulle sue decisioni (almeno all'inizio) e la prima risposta che fornisce non è quella che si vuole raggiungere;
3. Tale "strategia di base" deve risultare insufficiente e aver bisogno di accomodamenti al sistema di conoscenze dello studente, altrimenti la conoscerebbe già e non sarebbe una situazione in cui apprende;
4. L'ambiente a-didattico è organizzato in modo che lo studente possa verificare la validità (o falsità) della risposta che ha trovato: potrà accettare, rifiutare, scegliere le soluzioni proposte dai compagni e perciò, eventualmente, correggere la propria.

In particolare, in una conferenza del 2004 [7], Brousseau elenca alcune delle condizioni (possono esservene altre oltre a quelle sotto elencate) sotto le quali l'allievo, nell'interazione con l'ambiente, possa avere una certa "*autonomia*". Tali condizioni vengono qui di seguito riportate (come in [7]):

- a. *"Soltanto la conoscenza matematica mirata deve essere il mezzo adatto a risolvere correttamente il problema.*
- b. *La consegna non deve richiamare nessuna delle conoscenze che si vuole far apparire. Essa determina le decisioni permesse e le situazioni iniziali e finali che stabiliranno il guadagno o la perdita.*
- c. *Gli allievi possono cominciare ad agire con «competenze di base» inadatte.*
- d. *Possono constatare da soli la riuscita o il fallimento del proprio tentativo.*

- e. *Senza prefigurare la soluzione, queste considerazioni sono suggestive (favorendo certe ipotesi, fornendo informazioni appropriate, né troppo chiuse né troppo aperte).*
- f. *Gli allievi possono eseguire rapidamente parecchi tentativi, ma l'anticipazione deve essere favorita.*
- g. *Fra tutte le soluzioni empiricamente accettabili una sola può rispondere a tutte le obiezioni.*
- h. *La soluzione può essere trovata e provata da qualche allievo in tempi ragionevoli in una classe normale e può essere velocemente messa in comune e verificata dai compagni.*
- i. *Essa si presta a tentativi di riutilizzazione e sollecita domande che rilanciano il processo."*

L'allievo può costruire la conoscenza solo attraverso un coinvolgimento personale con il problema proposto e in questo la devoluzione da parte dell'allievo diventa fondamentale. Brousseau parla spesso, in questo senso, dell'utilizzo del **"gioco"** per introdurre a una situazione a-didattica in cui :

"La conoscenza del soggetto si manifesta solamente per delle decisioni, per delle azioni regolari ed efficaci sull'ambiente." [11]

Il sapere, o una sua prima forma, diventa quindi la strategia per vincere. Il sistema di conoscenze dello studente viene quindi trasformato a seguito degli adattamenti, delle scelte, che fa nelle varie strategie. Si tiene conto perciò delle condizioni stesse del gioco che, tramite un particolare insieme di situazioni (e di valori pertinenti), determinano le scelte e le strategie che gli studenti preservano o scartano, ossia quali siano valide.

In quello che si può vedere come *"gioco dell'insegnante"* invece, è il contratto didattico a stabilire le strategie di base e le regole, che verranno riadattate in base ai cambiamenti nel gioco dello studente. Ad ogni porzione di conoscenza, obiettivo dell'insegnamento, corrispondono sia delle situazioni particolari (dei problemi) sia dei contratti didattici, la differenza con il "gioco" classico è che qui evolve tutto, gioco e giocatori, senza che vigano delle regole fisse. Contratto e conoscenza sono così continuamente in discussione.

Il gioco è utile perché offre un modello di "situazione reale". Brousseau sottolinea come solleciti lo stesso genere di possibilità di azione, di scelta, per il giocatore (come anche di emozioni e motivazioni), ma anche di come si discosti dalla "vita". Nel gioco infatti la maggior parte delle condizioni che per il giocatore sono vincolanti, o che gli sfuggono, vengono superate, mentre la "realtà" è molto più complessa.

Un'altra opzione è l'utilizzo di situazioni problematiche prese dalla realtà, oltre le mura scolastiche, che gli studenti possano sentire vicine a loro e possano coinvolgerli meglio, sollecitandoli a usare ciò che già possiedono e investigare le

conoscenze insufficienti, perché in caso contrario il processo potrebbe fallire. In questo modo si aiuta ad allontanarli dall'idea che ciò che apprendono sia solo relegato alla valutazione scolastica.

Il tipico esempio di situazione, in forma di gioco, offerto da Brousseau è quello della "*Corsa al 20*" (per approfondimenti su questa attività e sull'idea del gioco si legga [6]).

2.8.1 Le sei fasi di una situazione a-didattica

Brousseau articola le situazioni a-didattiche in sei fasi [1]:

1. **devoluzione;**
2. **implicazione;**
3. **costruzione della conoscenza personale;**
4. **validazione;**
5. **socializzazione;**
6. **istituzionalizzazione.**

2.8.2 Fase 1: devoluzione

La **devoluzione** è:

“L’atto con cui l’insegnante fa accettare all’allievo la responsabilità di una situazione (a-didattica) di apprendimento o di un problema, e accetta le conseguenze del trasferimento di questa responsabilità.”
(Brousseau [1])

Non è più il “*problema dato dall’insegnante*”, ma il “*problema dell’allievo*” il quale si assume personalmente la responsabilità di risolverlo, accettandone le conseguenze e le incertezze che si creeranno nella situazione.

Pur non ripetendo quanto scritto prima sul paradosso della devoluzione, si tenga conto tuttavia dell'importanza di questa fase. La situazione a-didattica poggia le sue fondamenta sull'immagine dell'apprendimento come implicazione diretta dell'allievo il quale si impegna direttamente, corre rischi portando alla rottura del contratto didattico. L'insegnante non organizza perciò come viene comunicata la conoscenza, ma la devoluzione di un buon problema, la quale (se avviene) porta all'apprendimento.

2.8.3 Fase 2: implicazione

Nella **fase di implicazione** *l'allievo accetta di occuparsi in prima persona dell'attività proposta dall'insegnante*, senza che questi lo guidi direttamente nella sua risoluzione.

2.8.4 Fase 3: costruzione della conoscenza personale

In questa fase lo studente crea una conoscenza interna propria che successivamente, per diventare un modello esterno e essere comunicata ad altri, dovrà essere riorganizzata.

2.8.5 Fase 4: validazione

Lo studente, dopo aver fornito una risposta/costruzione al problema, entra in una situazione comunicativa coi compagni ai quali, *sotto invito dell'insegnante, deve giustificare la conoscenza personale creatasi nella fase precedente*. In questo modo trasforma il suo sapere in qualcosa che possa essere validato e comunicato. Tale **fase di validazione** è fondamentale, e senza di essa non avviene l'apprendimento matematico, in quanto serve allo studente per raggiungere la convinzione che quanto ha costruito risponda ai requisiti richiesti.

2.8.6 Fase 5: socializzazione

Tramite uno “**scambio sociale**” ciascun studente presenta il proprio sapere personale validato e costruito nelle fasi precedenti, di modo che la classe intera possa discuterne insieme arrivando, patteggiando, a qualcosa di condivisibile da inserire nel “*patrimonio comune*”.

2.8.7 Fase 6: istituzionalizzazione

Quando la classe è giunta a questa conoscenza, socialmente condivisa, si rivolge *all'insegnante che da regista torna al suo ruolo istituzionale* (riconosciuto dallo studente), di modo da poter darvi il suo “timbro di riconoscimento” e collegarla, esplicitamente, alle conoscenze accettate dall'istituzione scolastica. Questo momento, pressoché complementare alla devoluzione, è fondamentale per lo studente, il quale fa più fatica ad accettare una propria costruzione rispetto a una giunta tramite l'insegnante.

2.8.8 Le situazioni che favoriscono le sei fasi

Per Brousseau nella situazione a-didattica le fasi, prima descritte, si distribuiscono su **quattro tipi di situazioni**:

1. **Situazione di azione:** agisce sul milieu e aiuta gli studenti nella formazione di teorie implicite sotto forma di modelli protomatematici. *L'insegnante ha organizzato l'ambiente, ha formulato il problema, ma poi si pone in secondo piano* rispetto al lavoro che verrà fatto “devolvendolo” agli studenti. Questi possiedono tutti gli strumenti per giungere, senza l'aiuto dell'insegnante, alla soluzione scegliendo una procedura tra quelle che possiedono nel loro sistema di conoscenze o costruendone una nuova. *La conoscenza, in tale contesto, diventa la risorsa per risolvere il problema* (o una classe di problemi).

2. **Situazione di formulazione:** aiuta nella formazione di linguaggi e modelli espliciti. In particolare, se assumono un'esplicita valenza sociale (a livello di dialogo tra gli studenti), si può parlare di "**situazioni di comunicazione**". È una situazione, postuma all'attività, in cui *gli studenti si confrontano* per rendere più rigoroso il linguaggio che utilizzano e per riformulare le proprie osservazioni condividendo i significati che hanno trovato. *L'insegnante qui ha il compito di dirigere gli scambi* (tra studenti o gruppi), per evitare che si crei confusione, evidenziando alcune importanti osservazioni o formulazioni degli studenti che possono talvolta passare inosservate. *La conoscenza deriva da un'esperienza personale, che deve essere decontestualizzata e depersonalizzata affinché possa essere comunicata ad altri e questi possano comprenderla.*
3. **Situazione di validazione:** *gli allievi sono qui tenuti a esplicitare i loro processi dimostrativi, provarli, validarli e darvi una spiegazione.* Lo studente si sente immerso in un milieu che ricorda un dibattito accademico che viene orchestrato dall'insegnante. Quest'ultimo assume la maschera di studioso che ne valuta altri (i suoi allievi) che cercano di verificare una congettura o di spiegare un certo fenomeno. Sta a lui, come nella situazione precedente, intervenire per far emergere possibili incongruenze, mantenere ordine nel dibattito e incoraggiare gli studenti a essere più rigorosi nell'uso dei concetti. *La conoscenza assume ora i tratti di una teoria in fase di costruzione, non ancora istituzionalizzata o ultimata.*
4. **Situazione di istituzionalizzazione:** *serve a fornire alle conoscenze, emerse durante l'attività, un "timbro di ufficialità" di modo che possano poi essere utilizzabili per attività future.* Per lo studente l'ambiente ora assume caratteristiche istituzionali chiare. L'insegnante impersonifica il curriculum matematico ufficiale, riconosciuto dall'istituzione scolastica, illustrando agli allievi i termini, le notazioni, le definizioni (ecc...) ufficialmente accettate e che sono legate a quanto hanno trovato nel loro percorso. *La conoscenza diventa ora legge assoluta che è validata da un'autorità e non più dalla consistenza della logica interna legata alla risoluzione di un problema.*

Si osservi come nella pratica scolastica, la situazione più frequente sia quella di istituzionalizzazione [2] che presa da sola può ricordare la "situazione didattica" prima introdotta. Se dovessero emergere, gli altri tipi di situazione è probabile che si presentino in una loro versione "**degenere**", per esempio:

- una situazione di azione in cui il docente fornisce un problema, ma anche i suggerimenti su come risolverlo (metodi ecc...);
- una di formulazione in cui però il docente fornisce un suo giudizio su quali teoremi, definizioni (ecc...) trovati dagli studenti siano corretti e quali no, impedendo loro di verificarne la validità autonomamente;
- una situazione di validazione in cui l'insegnante fornisce l'enunciato del teorema già formulato in un determinato modo e chiede agli studenti di

dimostrarlo, senza che quindi sia frutto di un lavoro su una congettura trovata da loro e con uno stile di argomentazione prefissato (e non raggiunto da loro personalmente). Per esempio: “*dimostra che se un triangolo isoscele allora la bisettrice dell’angolo al vertice è mediana e altezza relativa alla base*”.

2.9 Conclusioni riguardo la TSD

Secondo quanto si è visto nel capitolo, tra gli aspetti positivi della TSD si possono perciò elencare:

- un cambiamento nella figura dell’errore che non è più solamente un fallimento, ma un punto di partenza da cui lo studente può ripartire per riadattare le proprie strategie;
- viene favorita l’autonomia dello studente che, senza la guida diretta dell’insegnante, può agire, formulare ipotesi e validarle;
- le nozioni non vengono più trasmesse “passivamente” allo studente, ma questi le fa sue, le costruisce interagendo personalmente con il milieu portando a una comprensione più profonda dei concetti.

La TSD presenta anche dei difetti:

- Siccome si basa molto sulla scoperta (nel senso di azione attiva e autonoma) dello studente, potrebbe non adattarsi bene per alcuni allievi, specie quelli che hanno bisogno di più guida (come chi presenta DSA);
- Implementarla è complicato per l’insegnante, in quanto richiede un gran coinvolgimento da parte sua nonché una pianificazione complessa del milieu che consideri tutti gli aspetti del contratto didattico (clausole, effetti, paradossi, ecc);
- Cercare di coprire tutto il programma scolastico diventa complicato in termini di tempo. La TSD deve dare il tempo agli studenti di sperimentare e fare ipotesi, sbagliare, favorire la discussione di idee e costruire la conoscenza mediante l’adattamento al milieu. Rimanere nelle tempistiche dell’anno scolastico, per completare il programma, diventa quindi più complesso rispetto ad una didattica tradizionale in cui la trasmissione “diretta” della conoscenza dall’insegnante allo studente richiede tempi minori.

Sembrerebbe che la TSD sia di stampo costruttivista, in quanto in essa l’apprendimento si fonda sulla risoluzione di problemi. Nonostante ciò, lo stesso Brousseau critica il costruttivismo, che ritiene la costruzione di conoscenza come atto spontaneo e puramente individuale, ritenendola impossibile.

Capitolo 3

Thinking Classroom

In questo capitolo viene introdotto l'approccio utilizzato per progettare il laboratorio descritto più avanti: la "**Thinking Classroom**" (che per semplicità qui verrà abbreviata **TC**), un approccio sviluppato da **Peter Liljedahl**. Qui in particolare viene fatto affidamento ai risultati contenuti in [18].

Si prenda innanzitutto in considerazione quella che è possibile definire "*classe normativa*", che descrive un determinato ambiente di apprendimento, un determinato modo di "fare lezione", fondato su norme considerate "tradizionali" quali (per esempio):

- l'insegnante scrive alla lavagna le istruzioni, le regole, che servono per risolvere un compito;
- l'alunno copia tali informazioni sul quaderno, seduto al proprio banco, senza ragionarci sopra, bensì affidandosi alla conoscenza dell'insegnante;
- sovente il lavoro dello studente è individuale;
- la formazione dei gruppi, quando ci sono, si basa su un "*raggruppamento per abilità*" degli studenti (questo argomento viene trattato più avanti nel capitolo).

L'obiettivo di costruire una *Thinking Classroom* ("aula pensante") nasce dalla consapevolezza che (come riportato in [19]) circa il 20% degli studenti "pensa" (nel senso di partecipare, ragionare, mettere in atto processi di pensiero significativi) durante le lezioni di matematica e solo per il 20% del tempo. Nel resto del tempo infatti, nella "*classe normativa*" le pratiche di routine costringono gli studenti in uno "*stato di non pensiero*", in cui si limitano a ricopiare, si distraggono o fingono di ascoltare l'insegnante.

Negli ultimi decenni, in gran parte del mondo, alcune cose sono cambiate, ad esempio dal punto di vista delle tecnologie utilizzate a scuola, ma le dinamiche delle "classi normative" restano radicate. Se si vuole favorire processi di "pensiero" significativi, bisogna allora apportare delle modifiche alla situazione in classe.

In questo senso, **Peter Liljedahl** propone **14 pratiche** che si sono dimostrate utili (in esperimenti con oltre 400 insegnanti [19]) nello stimolare gli studenti [22]:

1. **Come, dove e quando affidare un compito:** è preferibile che il primo compito venga affidato entro i primi cinque minuti e che *gli studenti stiano in piedi* in quel tratto di tempo, *in una parte libera dell'aula intorno all'insegnante*;
2. **Sistemazione dell'aula:** bisogna evitare il tradizionale sistema frontale "cattedra-banchi", spostandosi in una *configurazione casuale* (l'aspetto fondamentale è che i banchi siano lontani dai muri) e *l'insegnante deve poter parlare da differenti punti della stanza durante il corso della lezione*;
3. **Come rispondere alle domande degli studenti:** gli studenti, generalmente, fanno **tre tipi principali di domande**, alle quali è bene rispondere in modo diverso:
 - **"Domande di prossimità"** (*"proximity questions"*) che lo studente pone all'insegnante, mentre gli passa vicino, per fargli credere (col minimo sforzo) che stia partecipando: *"Dove lo scrivo?"*, *"Dobbiamo finire tutto entro oggi?"*;
 - **"Domande per smettere di pensare"** (*"stop thinking questions"*), cioè poste per ridurre ogni sforzo cognitivo: *"È giusto?"*, *"Sarà in verifica?"*;
 - Infine le domande che interessano all'insegnante, nonché *le uniche a cui è meglio che risponda*: le **"domande per continuare a pensare"** (*"keep thinking questions"*), fatte dagli studenti per continuare a lavorare, provare, pensare: *"Per essere chiari, i punti devono stare sulla stessa retta?"*. L'insegnante può rispondere a tali domande offrendo agli studenti suggerimenti ed estensioni del problema (nei termini riportati di seguito).

Per evitare che gli studenti dipendano da lui, l'insegnante deve evitare di rispondere alle prime due tipologie di domande qui proposte. Per sfavorire l'emergere di tali domande, deve rimanere il minor tempo possibile vicino ai gruppi. Nel caso in cui tali domande gli venissero poste dovrebbe invitare gli studenti a confrontarsi con un altro gruppo (*"Guardate cosa stanno facendo loro"*) che possa aiutarli. Infine, l'insegnante potrebbe rispondere solo nel caso in cui non riuscisse a trovare un gruppo che li aiuti in tal senso.

4. **Come formare i gruppi:** all'inizio di ogni lezione i gruppi, preferibilmente *di tre studenti ciascuno, devono essere formati in modo visibilmente casuale*;
5. **Autonomia:** gli studenti devono essere incoraggiati, anche per mezzo di interventi dell'insegnante, nell'*interazione e collaborazione con gli altri gruppi*, specie nei momenti di blocco;

6. **Spazio di lavoro:** gli studenti dovrebbero lavorare in piedi scrivendo su “**superfici verticali non-permanenti**” (“*vertical non-permanent surfaces*” che qui verrà abbreviato **VNPS**), *vale a dire facilmente cancellabili*, in modo che il lavoro sia visibile al contempo dall’insegnante, da tutti i membri del gruppo e dagli altri gruppi;
7. Il tipo di **compito** (“*task*”) usato: è meglio iniziare la lezione proponendo un problema suddiviso in step gradualmente di difficoltà crescente;
8. **Suggerimenti e estensioni:** l’insegnante non può fare il lavoro al posto degli studenti, quindi deve cercare di mantenere il loro coinvolgimento nell’attività. Se uno dei gruppi non riesce a proseguire, l’insegnante può: suggerire di andare da un altro gruppo per vedere cosa sta facendo ed eventualmente provare a spiegare il proprio problema ai compagni; far loro domande che li stimolino verso riflessioni più profonde (“*Vale sempre?*”, “*Ci sono casi in cui non funziona?*”, ecc). Se invece l’insegnante nota che uno dei gruppi è poco stimolato dall’attività, può aumentare la “*sfida*” fornendo “*estensioni*” del compito, ovvero chiedendo loro di: provare a vedere sotto quali condizioni ciò che hanno trovato non funziona; se ci sono casi particolari; creare la propria versione del problema da far risolvere ai compagni;
9. **Consolidamento:** quando ogni gruppo avrà superato una soglia minima, l’insegnante dovrà riunire gli studenti per una discussione, sul lavoro svolto, in cui tutti possono intervenire;
10. **Appunti significativi** (“*meaningful notes*”): gli appunti presi dallo studente devono essere “appunti pensati” da lui e per lui. Decide quali sono le informazioni più importanti relative al concetto appreso (e su cui ha riflettuto durante la lezione) e le scrive sul suo quaderno in modo tale che siano da lui comprensibili anche a distanza di tempo dall’attività;
11. **Domande CYU** (“**Check-Your-Understanding**”): è meglio fornire tra le quattro e le sei domande, da svolgere in classe, in modo che gli studenti possano verificare la loro comprensione (senza alcuna valutazione), invece di assegnare dei compiti a casa;
12. **Valutazione formativa:** focalizzata a informare gli studenti sul punto in cui si trovano nel “percorso” dell’apprendimento;
13. **Valutazione sommativa:** si focalizza più sui processi di apprendimento (tipici di una TC) che sui prodotti e includono sia quella dei gruppi sia quella dei singoli studenti;
14. **Segnalazione** (“*reporting out*”) **delle prestazioni degli studenti:** l’insegnante analizza i dati relativi al lavoro svolto dallo studente e lo fa in modo differenziato in base al percorso di apprendimento che questi ha dimostrato. L’analisi di questi dati si basa quindi non su un calcolo di medie e punteggi ottenuti (in quanto rischiano di mascherare la reale comprensione dello studente), ma sul processo di apprendimento.

Queste pratiche, che in questo capitolo vengono descritte più nel dettaglio, si svolgono all'interno di una TC, dove la lezione può essere suddivisa in tre fasi principali: **lancio** ("*launch*"), **corpo** ("*body*") e **chiusura** ("*closing*").

3.1 Il lancio

Il **lancio** corrisponde all'inizio della lezione. La sua preparazione non si limita alla scelta del **compito** ("*task*"), ma anche all'**organizzazione dell'aula**: *i banchi*, infatti, non vengono sistemati nel modo frontale tradizionale (banchi rivolti verso la cattedra), ma *in modo casuale, non attaccati ai muri*, permettendo così all'insegnante di girare liberamente per l'aula e di non essere vincolato a parlare da un singolo punto della stanza (solitamente nel tratto cattedra-lavagna). In tale fase *l'insegnante chiama attorno a sé gli studenti fornendo loro, entro i primi cinque minuti della lezione*, il compito che dovranno svolgere. Se necessario, vengono inoltre richiamati argomenti passati e date istruzioni particolari.

3.1.1 La scelta dei gruppi

Ogni persona ha uno sviluppo che segue ritmi differenti in base ai propri interessi e punti di forza. In tal senso la scuola deve fornire lo stimolo opportuno ai suoi studenti tramite insegnanti che sappiano riconoscerne e coltivarne il potenziale. La formazione dei **gruppi** all'interno della classe ha, in particolare, grandi influenze, buone o cattive che siano, sugli studenti.

Secondo **Jo Boaler** [3] una scelta che presenta notevoli rischi per la formazione di gruppi di studenti, per un'attività, è quella che segue il "**raggruppamento per abilità**". Risulta infatti un metodo deleterio per gli studenti sia che li si associ a gruppi di "*basso livello*", perchè così gli studenti (così "etichettati") avranno su loro stessi e sul loro operato aspettative basse, sia a quelli di "*alto livello*", per la pressione che proveranno nel dover essere all'altezza delle aspettative dell'insegnante. Nel primo caso, in particolare, è probabile che lo studente percepisca, da parte dell'insegnante, di stare ottenendo risultati inferiori rispetto agli altri compagni e che si veda perciò relegato con i suoi "simili", precludendo così contatti con altri coetanei con i quali l'interazione potrebbe invece fornire stimoli importanti. Inoltre crederà così che gli verranno assegnati compiti meno interessanti ma "alla sua portata".

La diffusione della scelta del raggruppamento per abilità dipende spesso dal paese: Boaler [3] scrive, ad esempio, che nei primi anni 2000 in Inghilterra era incoraggiato, in Svezia non si poteva fare e che in Giappone si ritenesse che tutti avessero pari potenziale.

Dipende inoltre soprattutto da motivazioni pratiche: spesso per l'insegnante è complicato gestire una *gamma di studenti tanto diversi tra loro*, quindi tale raggruppamento sembra più facile, anche in vista della *convinzione che ciò che conta sia la rapidità con la quale si danno le risposte corrette*. Ciò però conduce alla creazione di una gerarchia interna in cui primeggia *chi ha buoni voti*,

mentre gli altri vengono relegati nei livelli più bassi. In questo caso si predilige quindi un solo criterio di successo portando a quelle che sono dette "**classi unidimensionali**".

A queste si oppongono le "**classi multidimensionali**" in cui si favorisce la promozione di "**abilità multiple**" che si basa sul fatto che l'idea di successo (o di fallimento) si possa ritrattare considerando un più largo insieme di attività che valorizzino le diverse abilità, passando il messaggio che *nessuno è "bravo" in tutto e che ogni studente sarà "bravo" in almeno una di queste.*

Nel suo studio al "Railside" (pseudonimo per una scuola superiore della California) Boaler [4] ha potuto constatare come un diverso approccio basato sull'**equità relazionale** ("*relational equity*") e sulla "**multidimensionalità**" sviluppi negli studenti un approccio aperto alla collaborazione per la risoluzione collettiva di problemi. Tali problemi erano svolti in gruppo, aperti e ammettevano diverse rappresentazioni e percorsi verso la soluzione. In tal modo si è favorito un passaggio da "*Per andare bene devo concentrarmi e prestare attenzione*" a "*Devo fare buone domande, riformulare problemi, spiegare bene, giustificare...*". Tali aspetti vengono valutati, gli studenti ne sono consapevoli e si sentono realizzati nel poter eccellere in almeno una di queste abilità.

Nella suddivisione in **gruppi eterogenei** *a ognuno viene assegnato un ruolo* (dal capitano al facilitatore), che viene sottolineato più volte dall'insegnante. Tale ruolo viene *cambiato alla fine di ogni unità di lavoro*, permettendo agli studenti d'imparare l'importanza di fare affidamento sugli altri e che quello che fanno è importante. L'insegnante interviene valorizzando le idee degli studenti con meno autostima (che ritengono che le loro idee abbiano poco valore) permettendo un maggior coinvolgimento.

Un metodo di valutazione, usato da Boaler, prevedeva per esempio di fornire *test di gruppo o valutare le conversazioni che questi avevano*. Se inoltre anche solo uno studente del gruppo non era in grado di rispondere ad una domanda, l'insegnante lasciava tempo al gruppo per un'ulteriore discussione per poi andare a chiedere di nuovo all'interessato. Ciò serviva a rafforzare la responsabilità verso gli altri elementi del gruppo.

Un altro elemento che contraddistingue questo approccio è quello per cui l'insegnante si impegna a *fornire problemi stimolanti* per gli studenti. Se i gruppi non riuscivano ad arrivare alla soluzione non forniva loro domande minori che li guidassero, ma lasciava che i gruppi lavorassero sulla comprensione. Ciò, come si vedrà di seguito, è molto in accordo con l'approccio TC.

Dweck [5] propone una distinzione tra "**fixed mindset**" e "**growth mindset**":

- Nel primo caso *lo studente è convinto* di essere (o meno) "intelligente" e *che la sua situazione non possa cambiare in alcun modo*. Tale visione viene favorita se in classe gli studenti lavorano solo su domande brevi e chiuse che prevedano solo risposte giuste o sbagliate. Nel caso in cui lo studente ottenga quella sbagliata sarà per lui difficile sostenere un apprendimento basato sull'impegno. Tale mentalità è diffusa tra gli studenti di ogni livel-

lo che magari vengono elogiati fin da piccoli per la loro "intelligenza", ma che al primo fallimento, proprio per tale visione, finiscono per ritenersi non all'altezza e per loro ogni errore sarà un'etichetta della propria scarsa capacità. *Questo è caratteristico delle classi dove avviene il raggruppamento per abilità*, dove si limitano le opportunità di successo insegnando contenuti "alti" solo a determinati studenti "scoraggiando" invece gli altri, a cui viene comunicato così che non ne sono "degni".

- Nel caso del **"growth mindset"** invece si ritiene che *l'intelligenza possa essere appresa e che cresca con l'esercizio*. In questo caso, lo studente lavora su **problemi aperti** e apprende in modo più efficace, spinto dal suo *"ardente desiderio di sfida"* resistendo all'eventuale fallimento. Il punto chiave del growth mindset sta nel credere che sia l'**impegno** a modificare il cervello formando nuove connessioni che lo studente può controllare. *Ogni errore che commetterà non sarà una "ferita da guarire", ma un'opportunità di crescita. Lo studente deve impegnarsi in lavori stimolanti che comportino errori*: questi devono essere valutati in quanto rappresentano un'opportunità per lo sviluppo del cervello e dell'apprendimento.

Nel passaggio dalla prima alla seconda mentalità, Boaler constatò un immediato miglioramento nei risultati degli studenti statunitensi con cui aveva svolto la ricerca [3]. In particolare osservò una scuola "tradizionale" dove si effettuava il raggruppamento per abilità e una, invece, più progressista per poi andare, tempo dopo, a intervistare nuovamente gli stessi studenti (ormai giovani adulti). Nel primo caso gli ex-studenti hanno riconosciuto i risultati del raggruppamento: si vedevano rinchiusi in una *"prigione psicologica"* che li limitava non solo nel rendimento scolastico, ma anche in quello della vita, seppur consapevoli di poter fare molto di più. Nel secondo ha invece osservato risultati migliori derivanti da un diverso approccio alla matematica più aperto e che ha sviluppato maggior interesse. In quella scuola tutti erano considerati studenti "di alto livello" promuovendo il potenziale di ciascuno.

Quanto osservato da Boaler è riportabile nella **TC** dove la ricerca di collaborazione tra gli studenti ha un ruolo importante ed è influenzato anche dal modo in cui i gruppi di lavoro vengono formati. La scelta della TC è di creare **gruppi visibilmente casuali**: in tal modo [19] *tutti gli studenti si convincono sia di dover pensare sia di poter attivamente contribuire*. Questo aiuta anche ad abbattere eventuali barriere sociali all'interno della classe, diminuire lo stress e aumentare l'interesse per la matematica. Al contrario, se i gruppi venissero scelti dall'insegnante o se fossero formati liberamente dagli studenti, questi inizierebbero l'attività con la convinzione di non dover pensare.

Invece è proprio l'**autonomia dello studente** che si vuole sviluppare nella TC, in questo modo si otterrà la *"mobilitazione della conoscenza"* tra tutti i membri della classe, che in caso contrario rimarrebbe ancorata all'insegnante (se fosse lui l'unica fonte di conoscenza e aiuto per lo studente in classe). Per questo è importante, nella TC, la **suddivisione in gruppi, scelti casualmente, di tre studenti**. La scelta di questo numero è dettata dal fatto che: se sono in due

c'è il rischio della prevalenza dell'uno sull'altro; se sono più di tre è possibile che si formino dei sottogruppi o che qualcuno venga messo in disparte. Affinché gli studenti diventino "*knowledge keepers*" è quindi necessario che siano *incentivati a cercare la "conoscenza" anche dai compagni*.

Se un gruppo dovesse bloccarsi, è meglio che l'insegnante non intervenga e che li indirizzi verso un altro gruppo di studenti che potrebbe aiutarli a proseguire. Nel caso in cui il gruppo avesse finito il compito, invece di dargli la domanda successiva direttamente, è meglio che vadano a prenderla da un altro gruppo. In questo tornano utili i **banner** che aiutano gli studenti a muoversi tra le progressive difficoltà dei compiti. Ci sono in particolare **tre tipi di banner**:

1. Il primo è il "**banner orizzontale**" che viene usato per un compito che è troppo grande per esser messo sulle VNPS, come ad esempio una serie di problemi o un compito di geometria. In questi casi l'insegnante fornisce il primo compito su fogli di carta, a caratteri piccoli (coi dovuti accorgimenti nel caso di DSA) e col minimo spazio bianco (di modo che gli studenti non siano incentivati a scrivervi sopra), che raccoglie in una pila lasciandola su un tavolo al centro della stanza in modo che un rappresentante della classe possa andare a prenderlo. Quando uno dei gruppi avrà finito quel compito, l'insegnante aggiunge la pila relativa al compito successivo sopra lo stesso tavolo, di modo che possano andare a prenderlo e andare avanti con l'attività;
2. Il secondo è il "**banner verticale distribuito**" e consiste nel dare il compito successivo ad un solo gruppo, il primo pronto ad andare avanti, che lo scriverà sul banner della propria lavagna bianca (sulla parte superiore, occupando 15-20cm). Quando un gruppo finisce il compito dovrà allora andare a vedere dagli altri se ce n'è uno che non ha ancora svolto e "rubarlo" trascrivendolo nel proprio banner. Nel banner è inoltre importante che sia presente solo il compito corrente: se anche il gruppo decidesse di comporne uno suo, questo non dovrà esservi inserito per non intaccare la sequenza organizzata dall'insegnante;
3. Il terzo è il "**banner verticale comune**" che tiene l'insegnante su una sua personale lavagna bianca, o su di una di quelle più grandi dell'aula, in modo che possa aggiungervi il compito successivo per un gruppo. In questa modalità, i gruppi mantengono ancora un proprio banner, che andranno ad aggiornare (una volta pronti) col compito successivo prendendolo dagli altri o dall'insegnante.

Si tenga in considerazione, infine, che per mantenere la mobilitazione della conoscenza, se il compito si estende su due giorni, al secondo, può tornare utile ricreare i gruppi (sempre in modo casuale).

3.1.2 Superfici verticali non permanenti ("Vertical non-permanent surfaces" (VNPS))

Nella classe "*tradizionale*" generalmente l'insegnante tende a: scrivere la consegna alla lavagna; consegnare qualche scheda proveniente da un libro di testo;

spiegare o mostrare come risolvere il compito. Questi e altri comportamenti portano lo studente a vedere il compito come "*mimicking task*" ovvero qualcosa che potrà svolgere solo quando gli verrà mostrato alla lavagna e che si limiterà a copiare senza pensare. Diventa quindi vantaggioso cambiare prospettiva.

Un primo modo, per l'insegnante, è chiedere agli studenti di riunirsi liberamente intorno a lui, dopo aver sistemato i banchi in modo casuale (come descritto prima), e *fornire il compito oralmente*, limitando al minimo i dettagli scritti sulla lavagna. Ciò implica non usare supporti quali tabelle, schemi o riscrivere i dati alla lavagna. Può anche darsi che per alcuni degli studenti ciò risulti più difficile, ma se anche solo uno di loro riuscirà a comprenderlo, il resto sarà risolto dal senso di collaborazione che si sarà formato a seguito dell'adeguata creazione dei gruppi. Questo metodo [16] viene definito **"firefighter approach"** e consiste nell'*accendere il "fuoco" della sfida verbalmente e poi lasciare che siano gli studenti a "spegnere l'incendio", senza che sia l'insegnante a prevenirlo*.

Per la preparazione dell'aula ci sono alcuni strumenti che possono risultare vantaggiosi.

Come prima accennato, la situazione tradizionale che vede lo studente seduto al banco (visto qui come "*superficie orizzontale*") che riporta sul quaderno quanto scrive l'insegnante alla lavagna, lo porta a sentirsi più anonimo, invisibile, e ciò si accentuerà col passare della lezione. Questo accade anche nel caso di un lavoro di gruppo in cui gli studenti sono disposti attorno al banco: in questo caso ognuno di loro ha una visione diversa del compito, alcuni privilegiata altri svantaggiata (per esempio nel caso in cui lo studente vedesse il foglio al contrario). *Più allora lo studente si sentirà "anonimo e invisibile", meno si impegnerà.*

In una TC l'utilizzo di lavagne bianche, finestre o qualunque **"superficie verticale non permanente"**, nel senso di *facilmente cancellabile*, invece impedisce che vi siano punti di vista "privilegiati" sul compito. *Rimanendo in piedi gli studenti sono ispirati a impegnarsi, si distraggono meno facilmente e sono incentivati a una maggiore assunzione di rischi.* Come conseguenza, lo studente sarà anche portato a non pensare solo al voto, ma all'attività in sé.

Nella ricerca, Liljedahl [18] ha visto come nel caso di studenti seduti solo il 50% si sentisse coinvolto nella lezione, mentre con l'uso delle VNPS si passasse al 90% con anche una migliore connessione con l'insegnante.

Per concludere, si osservi che, dopo che la routine della TC è stata stabilita, qualora l'insegnante sentisse il bisogno di preparare gli studenti ai compiti scritti (in vista di qualche prova), allora servirà probabilmente fornire loro il compito in forma scritta, ma sarà consigliabile farlo su un piccolo pezzo di carta lasciando il minimo spazio bianco (similmente a quanto scritto prima parlando dei banner). Ciò preclude allo studente la tentazione di svolgere il compito sul foglio e anzi lo porterà a trascrivere il contenuto sulle VNPS.

3.1.3 La scelta delle consegne

L'insegnante spesso è portato a credere che lo studente non possa capire e fare connessioni da solo, portando alla scelta di iniziare la lezione con una parte prettamente teorica e dimostrativa (solo da parte del docente). Questa pratica non è ideale, secondo la TC, per almeno due motivi:

- In primo luogo, se si cerca di preparare gli studenti a ogni singola possibile variazione del compito che verrà loro assegnato, si perde troppo tempo rispetto invece alla scelta di prepararli in modo opportuno a quello iniziale, che poi (come si vedrà nei prossimi paragrafi) porterà a una sequenza di richieste sempre più stimolanti e difficili, ma che gli studenti saranno in grado di risolvere sulla base di quelli appena svolti. L'insegnante potrà in questo caso, nel prosieguo della lezione, fornire consigli, ma sotto forma di "*indizi*".
- Inoltre secondo Liljedahl [18] sarebbe meglio che gli studenti inizino a pensare *entro i primi cinque minuti della lezione* e che si pongano come "*creatori attivi*" di conoscenza, piuttosto che meri "*ricevitori passivi*". Questo passaggio può avvenire solo se l'insegnante riconosce loro tale possibilità. Ciò però non implica che lo studente possa trovare tutto da solo, potrebbero servire delle istruzioni preliminari: in tal caso è meglio, ad ogni modo, limitarsi ai primi cinque minuti.

Se l'obiettivo principale è di "far pensare" lo studente, allora è fondamentale progettare un compito adatto allo scopo, un "**buon compito**" ("*good task*") che è condizione necessaria, ma non sufficiente, alla costruzione di una TC. Di seguito vengono descritte le sue caratteristiche primarie [18].

Come accennato in merito alla creazione dei gruppi, diventa importante l'equità, che in questo caso si traduce in un "**low floor**" ("*pavimento basso*"), una *base di conoscenze da cui ogni studente può partire*, per creare un maggiore accesso al compito a tutti gli studenti. Senza di ciò si rischierebbe inequità, rendendo inaccessibile per alcuni studenti la matematica.

Siccome "pensare" è ciò che si fa quando si affronta qualcosa che non si sa fare, il buon compito dovrà essere una **novità per lo studente**, di modo che *questo sia meno incentivato a ridursi a "copiare" ("mimic") e anzi si blocchi nello svolgimento*. Questo **blocco** è fondamentale in quanto, per sbloccarsi dalla situazione, lo studente sarà costretto a pensare, entrerà in uno "**sforzo produttivo**" ("*productive struggle*") dettato dalla sua volontà a persistere nella sfida. Solo in questo modo, infatti, *proverà, forse sbaglierà e in quel caso proverà di nuovo, fino a sbloccarsi* e quindi arrivando a imparare, non solo qualcosa in merito alla matematica, ma anche riguardo a sé stesso, a come pensare e al fatto che bloccarsi, sbagliare, è il modo più efficace per migliorare.

Oltre che tramite il senso di novità, sarà utile, anche per quando in seguito si tratterà del mantenimento del flow, stabilire un "**high ceiling**" ("*tetto alto*"): lo studente dovrà incontrare, come scritto prima, una **sfida** ("*challenge*") che

lo blocchi e lo costringa a pensare fino a sbloccarsi. A tempo debito, studente, nel corso dell'attività, deve incontrare tale sfida, il quando dipende dalle sue conoscenze pregresse e dalla sua esperienza.

La scelta, per il buon compito, di low floor e high ceiling, diventa fondamentale:

- se lo studente incontra la sfida, in particolare il blocco, sulla scia del successo (partendo quindi da una base adeguata) sarà portato allo sforzo produttivo stabilito dalla novità e dall'high ceiling;
- se invece lo studente incontra una sfida più grande di quella che sta già affrontando, e che non è ancora riuscito a superare, è probabile che si arrenderà.

È opportuno sottolineare che queste tre componenti (novità, low floor e high ceiling) non devono necessariamente essere inserite in un problema unico, ma anche in una serie di quesiti via via sempre più stimolanti. Tale progressione potrà portare alla novità, anche partendo da qualcosa di familiare per lo studente.

3.2 Il corpo

Al lancio segue il **corpo della lezione**, una fase in cui l'insegnante cercherà di mantenere quello che viene chiamato **flow** ("*flusso*") e che favorirà l'autonomia dello studente nella mobilitazione della conoscenza.

3.2.1 Il flow

Negli anni '70 lo psicologo **Mihály Csíkszentmihályi** si interessò a un particolare tipo di coinvolgimento che chiamò "**esperienza ottimale**", che riteneva fosse propria di artisti, scienziati e matematici, definendola come [19]:

“Uno stato in cui le persone sono così coinvolte in un'attività che nient'altro sembra avere importanza; l'esperienza è così piacevole che le persone continueranno a farla anche a caro prezzo, per il puro gusto di farla.”

Ad essa associa **nove caratteristiche**:

1. **Azione e consapevolezza si fondono**: l'impegno e la concentrazione sono massimi, tanto da farla apparire come azione naturale;
2. **Tutta la concentrazione è diretta sul compito**: le distrazioni sono escluse dalla coscienza (quindi è difficile distrarsi), la persona si dimentica di passato e futuro focalizzandosi sul presente;
3. **Non c'è la paura o la preoccupazione del fallimento**, in quanto si ha la percezione di avere tutto sotto controllo;
4. **L'autocoscienza scompare**: il soggetto è talmente immerso nell'attività da non preoccuparsi di sé;

5. **Il senso del tempo diventa distorto:** il soggetto non si rende conto che mentre svolge l'attività il tempo continua a scorrere;
6. Svolgere l'attività diventa un **piacere intrinseco gratificante**;
7. **Obiettivi chiari** in ogni parte del percorso;
8. Il **feedback**, sulle proprie azioni, deve essere chiaro e immediato: non serve che gli vengano fornite le soluzioni, in quanto queste appariranno come tali direttamente;
9. **Equilibrio tra la capacità di chi lo esegue e la sfida del compito:** l'attività non deve essere né troppo difficile né troppo facile per il soggetto.

Le prime sei caratteristiche sono **interne** e proprie del soggetto che sperimenta l'esperienza ottimale, mentre le ultime tre sono **esterne** e riferite all'ambiente in cui si svolge.

L'ultima caratteristica, ovvero l'**equilibrio tra la sfida ("challenge") del compito che viene svolto e l'abilità ("ability") di chi lo svolge**, è quella che crea lo stato che Csíkszentmihályi chiama **flow** ("flusso") *in cui si sperimenta il coinvolgimento tipico dell'esperienza ottimale*, che si accompagna a un senso di realizzazione.

Il problema principale consiste nel *mantenere il flow evitando il "disequilibrio" ("imbalance")*, il quale si presenta:

- *se l'abilità è troppo superiore alla sfida*, ciò porta il soggetto a provare **noia** ("boredom");
- *se la sfida è troppo elevata rispetto all'abilità*, in questo caso il soggetto può provare **frustrazione** ("frustration").

Se si vuole che gli studenti "pensino" (nel senso descritto prima), serve allora il **mantenimento del flow**, che è uno stato dinamico e non naturale, perciò ha bisogno di esser mantenuto: *all'aumentare delle abilità dello studente, a seguito dello svolgimento dei compiti, deve esser accompagnato un aumento nella sfida*.

Nel caso si esca dallo stato di flow, è possibile rientrarvi a seconda di quale dei due disequilibri abbia "imprigionato" il soggetto. L'insegnante deve intervenire nel modo e nel momento opportuno in base alle sue osservazioni. In questo sono di aiuto: la divisione in gruppi, in quanto è più facile osservare dei gruppi invece che ogni singolo studente; le VNPS, coi quali l'insegnante può vedere direttamente quando il gruppo è pronto alla sfida successiva; lo studente stesso, in base alla sua autonomia.

Se l'insegnante dovesse aumentare la sfida prima che si sia sviluppata l'abilità necessaria ad affrontarla, lo studente sarà portato alla **frustrazione**. In questo caso, torna utile fornire allo studente un **suggerimento** che può avere due scopi [19]:

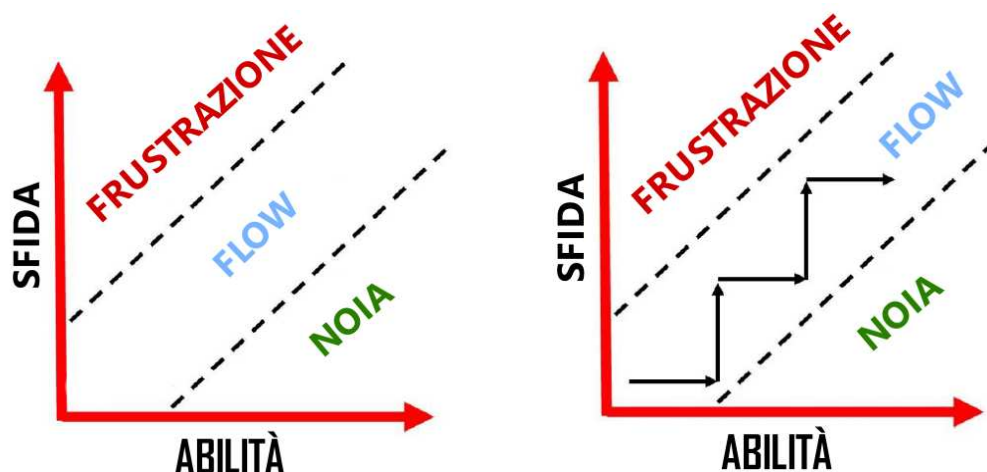


Figura 3.1: I grafici rappresentano la zona di equilibrio (il flow) e le due di disequilibrio (frustrazione e noia). In particolare quello di destra mostra come, per rimanere nel flow, all'aumentare della sfida serva un aumento dell'abilità.

1. **Aumentare l'abilità dello studente:** richiede più tempo ma perdura (nei compiti successivi) e consiste nel ricordare o fornire una strategia;
2. **Diminuire la sfida:** è il metodo più rapido e si può ottenere fornendo una risposta parziale o indirizzando a un compito più semplice.

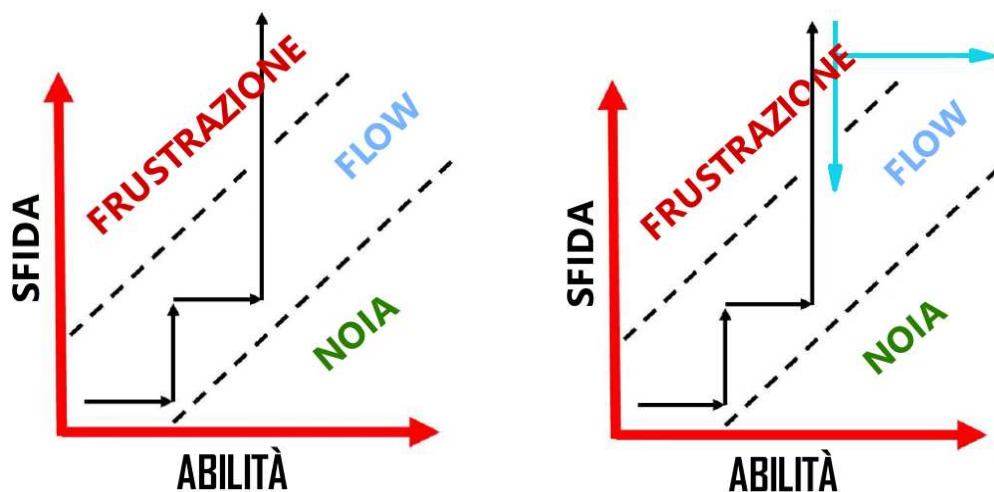


Figura 3.2: I grafici rappresentano il rientro nel flow dal disequilibrio di frustrazione.

Se invece lo studente dovesse entrare nel “disequilibrio della **noia**” è possibile:

- **Cambiare il tipo di coinvolgimento con il compito:** chiedere allo studente di giustificare la soluzione che ha trovato, di spiegarla o insegnarla ai suoi compagni, o di creare egli stesso il compito successivo;

- **Aumentare la difficoltà:** ad esempio fornendo un compito più difficile, o passando a quello successivo della sequenza. Questo tipo di intervento però può risultare inefficace quando la noia provata dal soggetto è troppo profonda.

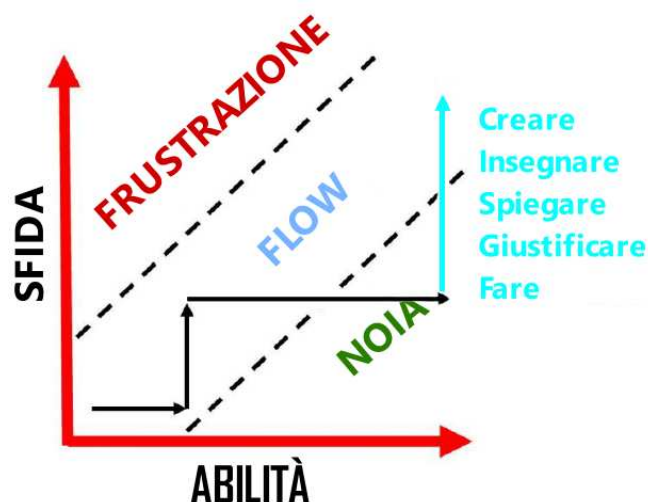


Figura 3.3: I grafici rappresentano il rientro nel flow dal disequilibrio della noia.

Nelle ricerche in merito alla TC [19] si è notato come a volte il mantenimento del flow non sia dovuto all'intervento dell'insegnante, ma agli stessi gruppi che ad esempio decidono loro stessi di creare un compito o di "rubarlo" ad altri, in quanto non riescono ad attendere il compito successivo.

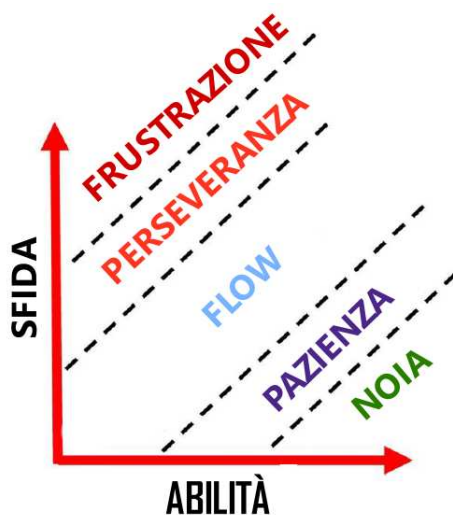


Figura 3.4: Variazione del grafico considerando la perseveranza e la pazienza dei gruppi.

Questi gruppi si contraddistinguono per due fattori principalmente:

1. **Perseveranza** ("*perseverance*"): ovvero la volontà di continuare a lavorare su una sfida, benché questa vada oltre le loro abilità;
2. **Pazienza** ("*patience*"): fondamentale se invece il compito è inferiore alle capacità possedute.

3.2.2 Thin-slicing e mantenimento del flow

Nel mantenimento del flow si è visto come occorra creare sfide, per lo studente, che crescano in rapporto proporzionale all'abilità da lui raggiunta. La pratica di *creazione di esercizi di difficoltà crescente in modo graduale* è detta "**thin-slicing**" e *permette di mantenere l'equilibrio (tra sfida e abilità) attraverso piccoli* (e occasionalmente "significativi", come si vede di seguito nell'esempio) *incrementi della difficoltà della sfida*.

Si propone qui un esempio (sulla scomposizione di polinomi di secondo grado) tratto da [18]:

1.	$x^2 + 6x + 5$	6.	$x^2 + 11x + 24$
2.	$x^2 + 8x + 7$	7.	$x^2 + 15x + 36$
3.	$x^2 + 5x + 6$	8.	$x^2 + 19x + 48$
4.	$x^2 + 6x + 8$	9.	$x^2 + 25x + 100$
5.	$x^2 + 8x + 12$	10.	$x^2 + 51x + 144$

Ogni domanda della sequenza proposta, partendo dalla numero 1, diventa *sempre più impegnativa rispetto alla precedente*, fino ad arrivare alla decima che risulta, per lo studente, molto più impegnativa rispetto alla prima. Infatti sono tutte domande dello stesso tipo, ma proseguendo (nell'esempio considerato) si può notare come l'ultimo termine presenti sempre più fattori e quindi più possibilità da esaminare per scomporre l'equazione quadratica con la combinazione corretta. Tuttavia al momento *i coefficienti sono tutti positivi*, quindi non è necessario considerare fattori negativi.

Tale incremento di difficoltà non può continuare all'infinito, bisognerà introdurre, per esempio, *i coefficienti negativi*.

11.	$x^2 + 4x - 5$	16.	$x^2 - 10x - 24$
12.	$x^2 + 6x - 7$	17.	$x^2 - 5x - 36$
13.	$x^2 + 5x - 6$	18.	$x^2 - 8x - 48$
14.	$x^2 + 2x - 8$	19.	$x^2 - 29x + 100$
15.	$x^2 - x - 12$	20.	$x^2 - 40x + 144$

Questo richiede agli studenti di considerare più fattori possibili (positivi e negativi) per effettuare la scomposizione.

Il passaggio dalla sequenza 1-10 alla 11-20 non è incrementale per livello di difficoltà, in quanto aumenta significativamente nel passaggio dalla domanda 10 alla 11 (dove viene introdotto per la prima volta almeno un coefficiente negativo). Diventa perciò necessario, per gli studenti, fare un “salto cognitivo”. Per renderli consapevoli di tale salto si costruiscono tali sequenze mediante la “teoria delle variazioni” (“*variation theory*”) secondo cui:

- la variazione è osservabile solo sullo sfondo di cose invarianti;
- deve essere variato un solo fattore per volta.

Secondo tale teoria sono quindi le differenze ad essere notate prima delle uguaglianze.

Similmente a quanto scrivono **Marton e colleghi** (si veda [21] per approfondimenti), si pensi ai seguenti esempi:

- Si immagini di voler spiegare il significato della parola “chitarra” ad un bambino. Un modo potrebbe essere quello di portarlo da un liutaio, mostrargli una serie di oggetti e specificare per ognuno “Questa è una chitarra”. In questo modo ci si aspetta che capisca il significato della parola e che si aggrappi a un aspetto comune tra quegli oggetti. È possibile che abbia già notato delle differenze tra chitarra e violino e che perciò possa dire “È una chitarra perché è diversa da un violino” permettendogli di associare la parola al significato. Ma se non avesse invece trovato tali differenze, non gli sarebbe stato possibile arrivare al significato basandosi solo sull’osservazione delle diverse chitarre che hanno quella caratteristica che le accomuna. Se anche i significati fossero innati, non sarebbe capace di separare il significato di “chitarra” da quello di “strumento” se non ne avesse mai visti altri, anzi, non avrebbe acquisito nessuno dei due;
- Se il mondo fosse tutto giallo, potremmo forse distinguerne la “tonalità giallastra”?

Tornando all’esempio delle equazioni quadratiche, nella prima sequenza il fatto che tutti i coefficienti siano positivi è un’**invarianza**. Quando gli studenti arrivano successivamente alla domanda 11 trovano che qualcosa ora è variato rispetto alla domanda 10 (è presente almeno un coefficiente negativo) e tutta la loro attenzione si focalizza sulla “**varianza su uno sfondo di invarianza**”. In questo modo capiscono di dover pensare in modo differente rispetto a quanto fatto nella sequenza 1-10.

Se in seguito si aggiunge una *sequenza in cui sono presenti anche coefficienti diversi da 1 nel monomio di secondo grado*, avviene la stessa cosa: sullo sfondo invariante (presente nelle domande 1-20), tutti i coefficienti dei termini di secondo grado sono 1, viene notata la nuova variazione:

- | | |
|-----|------------------|
| 21. | $2x^2 + 11x + 5$ |
| 22. | $3x^2 + 7x + 2$ |
| 23. | ... |

Possiamo riassumere le tre sequenze in tre tipi di fattorizzazione delle equazioni quadratiche:

1. **Tipo 1:** il coefficiente del monomio di secondo grado è 1 e tutti i coefficienti sono positivi (sequenza 1-10);
2. **Tipo 2:** il coefficiente del monomio di secondo grado è 1 e almeno un coefficiente è negativo (sequenza 11-20);
3. **Tipo 3:** il coefficiente del monomio di secondo grado non è 1 (sequenza 21-...).

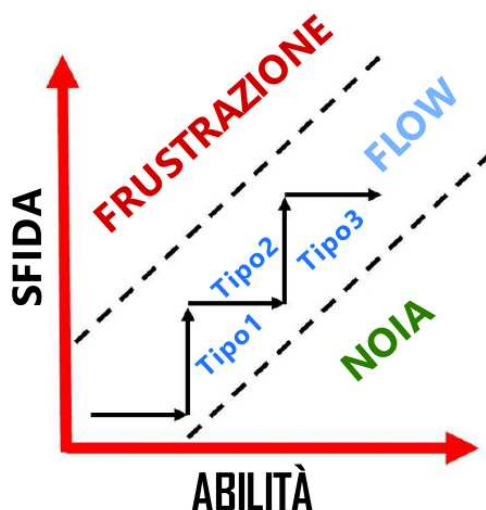


Figura 3.5: Il grafico rappresenta come la pratica thin-slicing favorisca il mantenimento del flow.

Risulta quindi utile affidare a queste domande le etichette di “*tipo 1*”, “*tipo 2*” e “*tipo 3*” per distinguerle, in quanto ciascun tipo conterrà un diverso genere di invariante che varia passando al successivo.

3.3 La chiusura

Il “lancio” e il “corpo” occupano i due terzi della lezione, tuttavia la loro durata complessiva può cambiare in base alla situazione in aula (specie se gli studenti dovessero entrare in uno degli stati di disequilibrio). Una volta consolidata la conclusione del corpo della lezione, per esempio chiedendo ai gruppi un’autovalutazione sulle competenze acquisite, si passa alla **chiusura**.

Se non si utilizza il giusto tempo per chiudere la lezione assicurandosi che le idee emerse dai gruppi funzionino come qualcosa di **formale, organizzato e strutturato** si rischia che quanto accaduto durante la lezione sia stato poco produttivo e che il “*collective thinking*” (la collaborazione e la condivisione di significati) non si sia tramutato in un “*individual learning*” (cioè nello sviluppo di competenze personali dello studente) [18].

In questa fase conviene considerare una, se non tutte (si decide in base alla situazione), tra: **consolidamento** (“*consolidation*”), **appunti significativi** (“*meaningful notes*”) e **domande CYU** (“**C**heck **Y**our **U**nderstanding”).

3.3.1 I tre tipi di consolidamento

Nello stato di flow lo studente prova e raffina congetture, trova schemi e crea significati, la cui formalizzazione, organizzazione e strutturazione può essere attivata dall’insegnante tramite il “**consolidamento**”, che può essere di tre tipologie.

La prima di queste è il **dialogo** (“*conversation*”), che è il metodo migliore quando si trattano grandi idee e strategie generali che emergono dall’attività. In esso *l’insegnante si limita a iniziare una discussione, senza che scriva nulla alla lavagna*, sui compiti e sulle soluzioni trovate dai gruppi.

Il secondo metodo è quello dell’**insegnante-scriba** (“teacher-scribes”) in cui questo *inizia la discussione dei compiti e delle soluzioni mentre, a differenza del primo metodo, scrive alla lavagna ciò che viene discusso*. Tale metodo risulta vantaggioso quando sono richiesti maggiori dettagli su quanto è stato visto, specie con l’utilizzo di “*thin-sliced tasks*” improntando la discussione su specifici compiti e in un certo ordine.

Il metodo insegnante-scriba è utile inoltre per il consolidamento dei “**compiti convergenti**” (“*convergent tasks*”), che portano i gruppi a pensare circa allo stesso modo. Questo “pensiero comune” non è scritto sulle VNPS, dove invece appare solo la soluzione del compito, ma vive invece nelle discussioni interne ai gruppi. Le “*thin-sliced tasks*” sono spesso compiti convergenti.

Si inizia chiedendo allo studente di *ordinare 3 esempi* (messi in un ordine iniziale scelto dall’insegnante) *secondo i tipi visti nella “thin-sliced task”* e discuterli in modo esplicito, per poi passare alla loro risoluzione (si veda [16] per un esempio di dialogo). L’insegnante può dare inizio alla discussione con “*C’è qualcosa che posso fare senza pensarci troppo?*” o ancora “*Posso farlo per tutti?*” per aiutare lo studente a capire su quali passaggi deve focalizzarsi e a fargli capire quali aspetti non sono invarianti per i tre esempi. Questo tipo di consolidamento si basa quindi sull’**osservazione e denominazione della variazione** (“*noticing and naming variation*”) che aiuta gli studenti a dare un nome a particolari caratteristiche, rimaste inosservate durante l’attività, che rendono i quesiti l’uno diverso dall’altro, in modo che possano affrontarli nel modo appropriato.

Si noti come in entrambi i primi due metodi (dialogo e insegnante-scriba), l’insegnante non parli per la maggior parte del tempo. Vi è più una discussione

basata su domande mirate da lui offerte, che stimoleranno la creazione di idee degli studenti le quali saranno poi riformulate dall'insegnante in modo più concreto e formale.

Il terzo genere di consolidamento riguarda invece la **visita guidata alla galleria** (*"guided gallery walk"*), in cui l'insegnante inizia la discussione, basandosi sui lavori presenti sulle VNPS dei gruppi per lavorare con loro sui diversi "stratti" della soluzione e per dimostrare alcuni dettagli. La sua preparazione prevede tre fasi: **selezione** (*"selecting"*), **semina** (*"seeding"*) e **sequenziamento** (*"sequencing"*). Queste avvengono nella parte della lezione prima definita "corpo", in cui gli studenti lavorano nei gruppi davanti alle loro VNPS.

Nella "**selezione**" vengono osservate le diverse strategie (e i diversi modi di pensare) emerse dai gruppi, che sono visualizzabili sulle VNPS, per poi essere fissate in un riquadro tramite l'uso di un pennarello. Con tale azione che, viene definita di "**boxing**", si chiede anche agli studenti di non cancellare il contenuto del ri-quadro, di modo che le idee in esso contenute possano eventualmente essere incluse nella "galleria". Se ciò che si vuole inquadrare richiede troppo spazio, si passa invece a "**riempire il ri-quadro**" (*"fill-the-box"*), ovvero si disegna il riquadro in un angolo della VNPS e si chiede al gruppo di riscrivere un lavoro specifico al suo interno, di modo da poterlo tenere per le attività successive senza occupare troppo spazio.

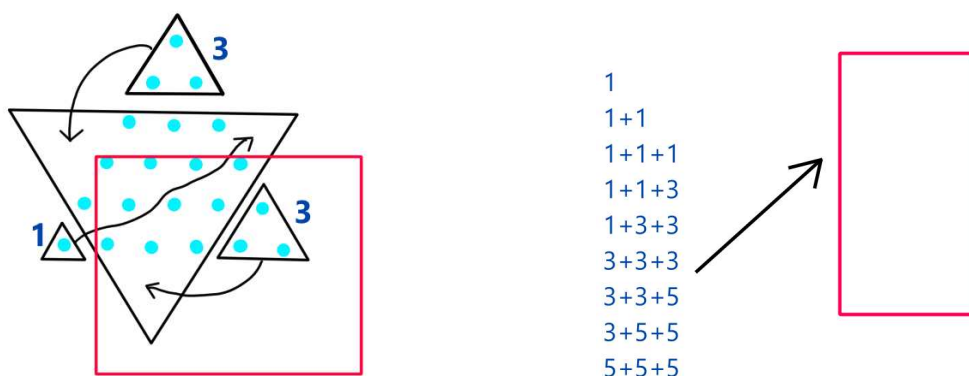


Figura 3.6: Rappresentazione di "boxing" a sinistra e di "fill-the-box" a destra

Nella fase di "**semina**", se è presente qualcosa che l'insegnante vuole condividere nella galleria, ma che non è ancora apparso tra i lavori dei gruppi, sarà lui a "*piantare il seme*" perché ciò avvenga. Col termine "**seme**" allora si indica ciò che *aiuta la classe intera* a proseguire verso il livello successivo di pensiero, mentre con "**indizio**" (*"hint"*) si intende quello che *aiuta il gruppo singolo*. Questo diventa necessario, per esempio, se l'insegnante desidera una soluzione, del compito, che comprenda un grafico che però il gruppo non si appresta a disegnare.

Una volta che tale seme ha "*messo radici*" si può procedere nuovamente con la fase di selezione, di modo che venga aggiunto alla galleria.

L'ultima fase prima del consolidamento effettivo è quella di “**sequenziamento**”, in cui l'insegnante, a seguito della preparazione della galleria, decide in che ordine e quali “*quadri*”, che rappresentano i diversi modi di pensare, considerare. L'ordine in cui vengono presentati agli studenti, deve andare *dal concreto all'astratto, da un livello di pensiero più semplice al più complesso*.

Questo tipo di consolidamento è molto utile per contrastare quella che in psicologia è definita “**fissità funzionale**” ovvero, in questo contesto, il fatto che *è difficile, sia per lo studente che per l'insegnante, abbandonare un modo di pensare per vagliare altre possibilità*. In questo senso intervengono quelli che vengono definiti “**compiti divergenti**” (“*divergent tasks*”) che portano a pensieri differenti riportati nelle varie VNPS e che poi possono essere esplorati nella galleria.

È necessario sottolineare che il consolidamento non è una pratica obbligatoria, l'insegnante è libero di usarlo o meno in base al feedback dei gruppi. Nel caso in cui abbiano già raggiunto un pensiero organizzato e strutturato, potrebbe non essere necessario.

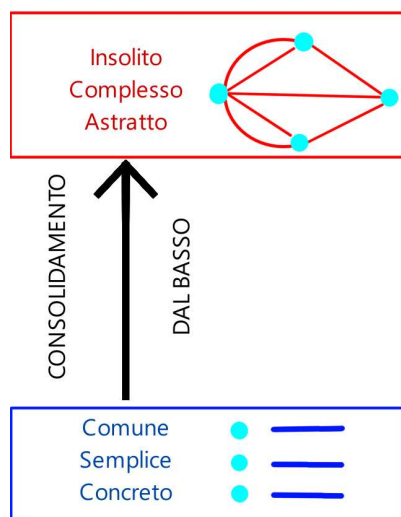


Figura 3.7: Consolidamento dal basso

Quanto è stato descritto qui è definibile come “**consolidamento dal basso**” (“*consolidation from the bottom*”), ovvero quello che permette a ogni studente di intervenire (al livello in cui è arrivato nel lavoro sulle VNPS) e *che guida, attraverso una specifica sequenza, i modi di pensare: dai più concreti ai più astratti, da quelli semplici a quelli complessi, dai comuni agli insoliti*.

3.3.2 Appunti significativi

Un difetto nell'uso delle VNPS sta nel fatto che il loro contenuto non è permanente (fisicamente), di conseguenza la presa di appunti da parte dello studente è importante. Questo sembra riportare alla pratica tradizionale, ma in realtà

ciò che deve esser cambiato è il modo in cui gli studenti prendono appunti e come li utilizzano.

Tradizionalmente (come riscontrato in [18]) gli appunti vengono presi: o per permettere agli studenti di avere qualcosa a cui aggrapparsi nella preparazione di un test, o come sistema atto ad aumentare la comprensione di ciò che si scrive e della memoria. Il primo caso subentra soprattutto dalle scuole medie ed è accettato dai genitori, che così possono aiutare i figli a casa, e dagli insegnanti che vogliono che quello che hanno spiegato possa essere accessibile allo studente anche dopo la fine della lezione. Nelle ricerche menzionate in realtà si è visto quanto questo genere di appunti sia poco utilizzato dagli studenti (fino alla fine della scuola secondaria), quindi viene consigliato [18], in alternativa, di caricare online gli appunti dell'insegnante.

La realtà della dinamica “*l'insegnante scrive alla lavagna, lo studente ricopia sul quaderno*” è che questa pratica non aiuta né la comprensione né la memoria degli studenti, i quali spesso neppure leggono ciò che scrivono. Uno degli obiettivi della TC è anche questo: *fare in modo che gli studenti siano cognitivamente presenti quando prendono appunti*, un passaggio (con le parole di Liljedahl [4]) da “*note-taking*” (ovvero si limitano a copiare dalla lavagna) a “**note-making**” (riflettono su ciò che scrivono).

Dalle ricerche di Liljedahl [18] è anche emerso un particolare modello utile allo scopo e divisibile in **quattro quadranti** come mostrato in figura.

Prima di esporlo, si consideri che l'importanza di questo metodo risiede nel fatto che è un lavoro che lo studente fa in collaborazione col suo gruppo. Ciò che viene scritto viene poi fotografato dai gruppi e conservato in una cartella ordinata, oppure l'insegnante può scegliere di fotografare due o tre VNPS e postarle online in modo che siano consultabili in futuro.

Dopo il consolidamento ogni gruppo divide il proprio VNPS in quattro quadranti (le lettere ad essi attribuiti servono qui per semplificare la spiegazione) usandoli come segue.

Nel **quadrante A** si trattano appunti del genere “**riempi gli spazi vuoti**” (“*fill in the box*”). L'insegnante prepara un esempio parzialmente completato (solitamente, per come definito prima, di **tipo 1**), in cui gli spazi vuoti da riempire assicurano che gli studenti, nei loro appunti, abbiano una rappresentazione formale, organizzata e strutturata delle idee presenti nel consolidamento nel caso che queste fossero rimaste ancora informali, disorganizzate e non strutturate durante l'attività di thin-slicing. Tale struttura può essere quindi riutilizzata anche nei quadranti B e C.

Nel **quadrante B** viene trattata dal gruppo, in modo autonomo, una domanda di **tipo 2** che presenta una struttura presa dal quadrante A. Questo esempio elaborato permette agli studenti di conservare e ottenere informazioni che li indirizzino anche al giusto formalismo, organizzazione e struttura.

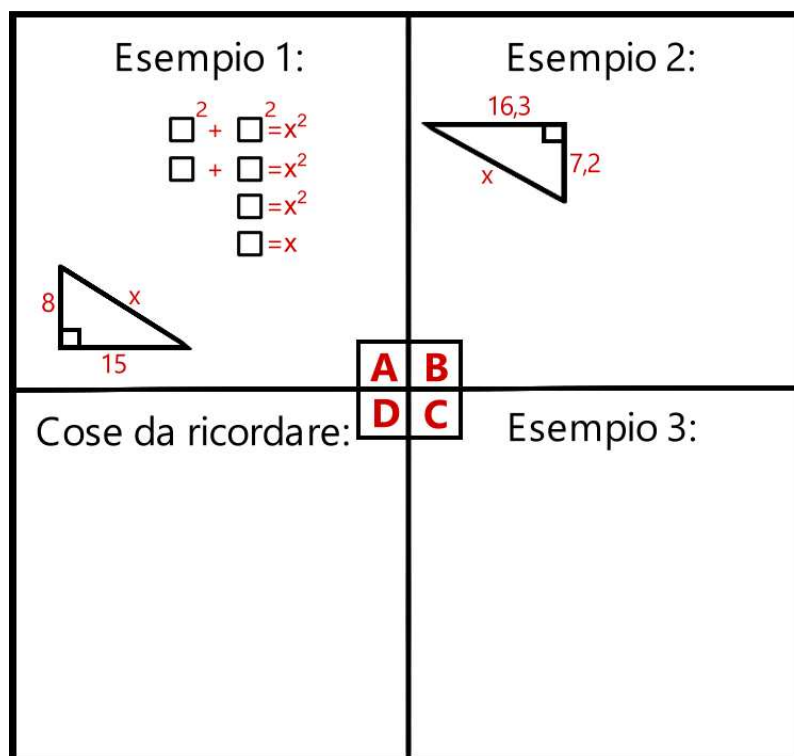


Figura 3.8: Il metodo dei quattro quadranti

Si osservi come sia necessario assicurarsi che gli studenti non li vedano come dei “*compiti a casa*”, non come esercizio o pratica, ma come modo di mostrare ciò che hanno imparato, altrimenti si corre il rischio che si limitino a copiare senza arrivare al “*note making*”.

Nel **quadrante C** è ogni gruppo a scegliere il proprio compito, un esempio elaborato traendo ispirazione, si confida, da quelli di tipo 1 e 2 (che già gli studenti possiedono) per includerne uno diverso di **tipo 3**. Si fornisce quindi agli allievi l'opportunità di prendere appunti nonché di selezionare e mettere in sequenza le informazioni, di modo che, anche quando in seguito li rileggeranno, potranno darvi significato. *L'importante è che ciò che hanno selezionato per essere inserito all'interno del quadrante C sia qualcosa che si sentano in grado di completare.* Perciò se non si trovano a loro agio, per esempio, con domande di tipo 3, allora è meglio che si limitino agli altri due tipi. Ciò non vuol dire che in seguito non saprebbero rispondere a domande di tipo 3, altri motivi si nascondono dietro tale scelta. Si parla in questo senso di “**appunti significativi**” proprio perché riflettono i significati dati dagli studenti, non dall'insegnante.

Nel **quadrante D** il gruppo può esprimere a parole le informazioni che ha ritenuto importanti nello svolgere i compiti, qualcosa che necessitano di ricordare o qualcosa per cui hanno avuto difficoltà. *Qui subentra il supporto dell'insegnante.* Per prima cosa occorre assicurarsi che gli studenti in questo quadrante

scrivano frasi complete e non approssimative come “*per l’area moltiplico*”, perché probabilmente hanno senso per loro nel momento in cui scrivono, reduci dell’attività, ma trascorso un certo periodo lo perderanno. Può essere utile, inoltre, far sì che i gruppi si guardino a vicenda tale “**quadrante delle cose da ricordare**”, di modo che se fosse loro sfuggito qualcosa possano scriverlo.

L’utilizzo del metodo dei “*quattro quadranti*” può essere impiegato in una sola fase in cui lo studente prende gli appunti in gruppo sulle VNPS insieme al suo gruppo, oppure con l’aggiunta di una seconda in cui li prende individualmente. In quest’ultima può scegliere se copiare e basta la lavagna del suo gruppo, oppure, prendere qualcosa che ritiene significativo da quelle degli altri gruppi. Sia che ci si limiti alla prima fase, sia che si arrivi alla seconda, tale metodo risulta un’ottima opportunità per gli studenti per prendere appunti significativi, nonché un’attività stimolante dal punto di vista metacognitivo e dell’apprendimento in cui tutti possono partecipare e contribuire.

L’insegnante deve essere consapevole che lo studente potrebbe non voler aderire alla seconda fase e in questo senso deve comunque evitare di preparare schede prestampate (o simili) per i quadranti, in quanto bisogna limitarsi e affidarsi all’apprendimento acquisito dagli studenti durante la lezione.

3.3.3 Check-Your-Understanding (CYU)

Uno degli usi più comuni a scuola è quello di assegnare compiti a casa agli studenti, ciò diventa un importante strumento se affiancato alle motivazioni opportune. Se gli unici motivi per l’assegnazione dei compiti da parte dell’insegnante sono ad esempio “*Li vogliono i genitori*”, “*Posso valutare quelli e far fare meno test agli studenti*”, “*Quando ero studente si faceva così*” o se lo studente crede che servano solo per soddisfare i genitori, il professore o solo per i voti allora, inevitabilmente, perderanno significato. Nelle ricerche di Liljedahl [18] si è notato infatti come in questo modo vi sia un basso coinvolgimento da parte degli studenti.

Se invece si passa a una visione in cui i compiti servono come occasione di **verifica per la comprensione** di quello che hanno fatto nei gruppi o come **zona neutra** in cui possano commettere errori, il quadro cambia. Qui intervengono le **domande CYU** (“**Check Your Understanding**”) con cui è possibile fornire agli studenti un’opportunità in questo senso, in cui possano prendere decisioni, senza che vi sia il vincolo del fatto che tali domande siano assegnate o che servano a valutarli.

Un primo fattore a cui è necessario prestare attenzione è il **linguaggio** usato: se ad esempio si chiede allo studente “**Quali esercizi sceglierai?**” può esser tentato di fare solo quelli e fermarsi, mentre se gli si chiede “**Hai deciso da quale comincerai?**” può essere stimolato a continuare. “*Quali*” infatti lo induce a un numero finito, “*da quale*” invece indica solo un inizio, una direzione ma non una fine. È in questo secondo caso, in cui continuano a “muoversi”, in cui si vuole che si inseriscano.

Un secondo fattore è quello della **valutazione**, non come numero da mettere sul registro, ma come "*localizzazione GPS del loro percorso*", una visione tipica dello studente con il "**growth mindset**". L'importante sta quindi nell'evitare che lo studente resti nel "*fixed mindset*" e che l'attività porti all'autovalutazione di modo che possa sapere a che punto si trova.

Nelle CYU le intestazioni servono per descrivere il compito, non lo studente (come può avvenire invece in una "*scala di valutazione*" che fornisce loro i titoli di "*principiante*", "*esperto*".) con termini colloquiali, come ad esempio "**leggero**", "**medio**" e "**piccante**" [18], che riflettano preferenze, non giudizi. Questi tre termini portano ciascuno a uno dei tre tipi di compito descritti in precedenza.

Viene qui riportato un altro esempio tratto da [18]:

LEGGERO	MEDIO	PICCANTE
$x^2 + 7x + 12$	$x^2 + 5x - 24$	$3x^2 + 16x + 5$
$x^2 + 15x + 14$	$x^2 - 2x - 15$	$5x^2 + 2x - 3$
$x^2 + 16x + 26$	$x^2 - 8x + 12$	$8x^2 - 10x - 3$

L'insegnante li scrive alla lavagna e dice agli studenti [18]:

"Queste sono le vostre domande CYU. Tutti ne farete alcune di queste. Ma, ci sono delle cose che dovete tenere in mente. Primo, fatele da soli. Secondo, scegliete voi da dove iniziare. Terzo, controllate il vostro lavoro con quello degli studenti attorno a voi, e se avete bisogno di aiuto, ottenetelo. E se qualcun altro ha bisogno di aiuto, dateglielo."

Gli studenti vorranno passare dal "*leggero*" al "*piccante*" proprio perché, seguendo il giusto flow, possono affrontare nuove sfide, con un adatto livello di abilità e esser stimolati ad andare avanti per ottenere un successo maggiore corrispondente a una sfida più impegnativa. Si osservi tuttavia che queste domande non è garantito che siano sufficienti a far entrare lo studente in tale stato. Alcuni dei casi principali sono i seguenti:

- Può accadere che lo studente non abbia dato abbastanza significato al lavoro eseguito sulla VNPS nel gruppo, con la conseguenza che una domanda "*leggera*" sembrasse "*piccante*". In questo caso è importante aiutarli a sentire il "successo", offrendo loro alcune domande CYU che possano affrontare e superare alimentando il loro desiderio di mettersi in gioco.
- All'opposto se lo studente sceglie direttamente le domande "*piccanti*" vi è il rischio che non si consolidi la comprensione delle domande di livello più basso. Affrontandole potrebbe quindi fallire e affliggersi per il mancato successo, ostacolando lo sforzo produttivo.

- Lo studente, data l'ampia scelta a disposizione, non sa da quale iniziare: in questo caso è preferibile indirizzarlo verso una, non “*da fare*”, ma “***da cui iniziare***”. In questo modo avrà almeno un punto di partenza da cui proseguire.

Liljedahl consiglia di non creare una quarta categoria di domande: se uno studente fosse in difficoltà con quelle di livello inferiore, troverebbe quella nuova categoria come impossibile da risolvere. Nel caso che gli studenti arrivino al “piccante” e vogliano qualcosa di ancora più difficile quindi si aggiungeranno domande più difficili rimanendo in quella categoria riuscendo a soddisfarli e a spronarli.

In conclusione, le domande CYU possono di certo offrire, durante l'orario scolastico (in particolare sulla fine della lezione), *un'occasione in cui lo studente possa assumersi sia la responsabilità del proprio lavoro, sia il “diritto” di poter commettere errori, in quanto consapevole che, se in difficoltà, potrà contare anche sull'aiuto dei compagni di classe*. Si parla anche di “**working on their own together**” in cui si favorisce sia il lavoro individuale che quello collaborativo per cui non è necessario copiarsi a vicenda (in quanto non incentivati dalla pressione di essere poi valutati) quanto piuttosto *si sente il bisogno di rispondere alle domande*, incentivando l'apprendimento.

L'utilizzo delle CYU è utile inoltre all'insegnante per *capire laddove lo studente necessiti di stimoli necessari al completamento dell'apprendimento cui era legata la lezione*. Anche per questo Liljedahl consiglia di farle svolgere sul finire della lezione, in modo da aver raccolto abbastanza informazioni in merito e poter eventualmente intervenire, possibilità che verrebbe esclusa qualora li facessero a casa.

Si osservi infine come l'utilizzo delle CYU insieme al consolidamento dal basso permetta allo studente di riorganizzare la sua conoscenza, e le attività svolte in gruppo sulle VNPS durante la lezione, in comprensione individuale e apprendimento consolidabile. Lo studio [16] ha tuttavia rivelato che il 20-40% degli studenti preferisce rinunciare a fare le CYU e non coglie tale opportunità (probabilmente gli stessi che fanno i compiti a casa solo per il voto). Ciò non esonera l'insegnante dal cercare metodi alternativi, in quanto, scrive Liljedahl, è quasi d'obbligo per il bambino/adolescente poter prendere scelte errate, contro il proprio interesse personale. Compito della costruzione della TC è proprio allora fornire loro occasioni per prendere la scelta corretta per loro verso un pensiero e un apprendimento più significativi.

3.4 Alcune osservazioni finali sulla TC

L'esperienza della TC porta gli studenti a cambiare le loro visioni, atteggiamenti, convinzioni e le loro emozioni verso la matematica favorendo in loro una crescita nel senso di: **collaborazione** con gli altri, **perseveranza** e di **correre rischi**. Queste ultime tre cose sono quelle che devono essere valutate e rafforzate in una TC.

Nella valutazione bisogna tenere conto che: da una parte l'insegnante valuta lo studente e in base a cosa sceglie di valutare dichiara anche cosa apprezza; dall'altra anche lo studente valuta l'insegnante, prestando maggiore attenzione alle sue azioni che alle sue parole. Liljedahl [18] consiglia una **rubrica** riassuntiva (riportata in figura) con la quale poter valutare l'evoluzione in una TC.



- Non accoglie le idee degli altri - Non rispetta gli altri - Attivamente esclusivo - Trattiene il pennarello - Scoraggiante	- Aperto alle idee degli altri - Rispetta gli altri - Attivamente inclusivo - Condivide il pennarello - Incoraggiante
--	---

Figura 3.9: Rubrica per la valutazione in una TC

La ricerca di Liljedahl ha dimostrato che gli studenti accoglievano meglio questo tipo di rubrica rispetto a una più elaborata (un esempio è riportato [18]) e provocava in loro un cambio di comportamento a livello di collaborazione in classe. Il risultato migliore inoltre veniva raggiunto **co-struendo** tale rubrica insieme agli studenti per poi tenerla e utilizzarla anche nelle lezioni a seguire. *Si raccolgono opinioni su quali siano le caratteristiche di una buona e di una cattiva collaborazione, mettendole a confronto in modo che l'insegnante possa successivamente produrre la rubrica e renderla a disposizione degli studenti su di un foglio stampato affisso accanto a ogni VNPS.*

L'insegnante all'inizio della lezione annuncia quali gruppi valuterà basandosi su tali criteri condivisi. Alla fine della lezione passerà in seguito dai gruppi e, fornendo loro degli evidenziatori (o simili), potranno **autovalutarsi** mentre nel contempo l'insegnante condivide coi gruppi scelti la sua valutazione del loro comportamento.



- Non accoglie le idee degli altri - Non rispetta gli altri - Attivamente esclusivo - Trattiene il pennarello - Scoraggiante	- Aperto alle idee degli altri - Rispetta gli altri - Attivamente inclusivo - Condivide il pennarello - Incoraggiante
--	---

Figura 3.10: Esempio di autovalutazione in analogia a [18]

Può essere utile fornire due evidenziatori (di colore diverso) per gruppo, affinché possano autovalutarsi sia a metà lezione, di modo da poter vedere quali comportamenti correggere, sia alla fine per vedere se vi è stato un cambiamento in corso d'opera. L'insegnante, durante la lezione, può intervenire attirando la loro attenzione su un aspetto della rubrica, ad esempio nel riscontro di un comportamento da correggere.

Tali criteri diventeranno quindi la norma con cui i gruppi si autovaluteranno alla fine di ogni lezione, mentre l'insegnante potrà smettere di valutarli in questo senso già dalla seconda/terza volta, perchè ormai avrà mostrato loro quali sono i fattori a cui si dà valore e potranno percepirlo autonomamente.

Si tenga presente che se la stessa rubrica viene utilizzata per un numero eccessivo di lezioni consecutive si corre il rischio che l'effetto sul comportamento degli studenti inizi a svanire, quindi può essere utile [18]:

- non presentarla per alcuni giorni;
- usarla solo occasionalmente per mantenere il comportamento corretto;
- cambiarne la presentazione (ad esempio scegliere fogli di colori differenti);
- se la rubrica era focalizzata sulla collaborazione, la si può sostituire per temporaneamente con una sulla perseveranza o sull'assunzione di rischi (su fogli di colore differente).

Oltre alle tre competenze elencate possono essercene altre quali l'individuazione di schemi, l'organizzazione, ecc. In ogni caso ogni compito è un contesto per lavorare su tali competenze.

Per concludere la presentazione dell'approccio TC, si tenga presente che ci possono essere delle variazioni sulla divisione della lezione in lancio, corpo e chiusura. Queste tre parti devono essere sempre presenti, ma possono variare nella loro durata: per esempio al secondo giorno la chiusura può richiedere più tempo: in tal caso il lancio è preferibile mantenerlo della stessa durata del primo giorno accorciando piuttosto il tempo dedicato al corpo.

Capitolo 4

Relazioni tra gli elementi del quadro teorico

Prima di procedere con la presentazione del progetto di ricerca, è bene capire perché sono state presentate in questa tesi sia la TSD che la TC.

La TSD e l'approccio TC presentano alcune differenze, ma anche molti elementi di coerenza, che vengono qui evidenziate per completare il quadro teorico. Questo sarà utile per formulare le domande di ricerca, alle quali si cercherà di rispondere nei successivi capitoli di questa tesi.

4.1 Elementi di coerenza

4.1.1 Obiettivi

Entrambi aspirano a offrire **un'alternativa alla didattica “tradizionale”**, promuovendo invece la figura dello studente come protagonista attivo dell'apprendimento. Lo studente stesso costruisce le sue conoscenze attraverso l'adattamento ad un ambiente (a-didattico secondo la TSD), appositamente preparato dall'insegnante, affrontando particolari problemi.

Se inoltre la **TSD** ambisce al **superamento del contratto didattico** (come insieme di clausole, attese, ecc che detta implicitamente le relazioni tra studente, insegnante e Sapere), invece la **TC** cerca di **ridurre al minimo i “momenti di non pensiero”** (in cui gli studenti si limitano a ricopiare dalla lavagna, si distraggono o fingono di ascoltare l'insegnante).

4.1.2 Cosa significa apprendere?

Si possono riscontrare in entrambi dei caratteri di stampo **socio-costruttivista** come ad esempio:

- La **conoscenza** non è una merce di scambio universale e oggettiva che viene trasmessa da insegnante a studente (visto come vaso vuoto da riempire), ma frutto di una *costruzione attiva e soggettiva* di quest'ultimo;
- Il **contesto socio-culturale e l'interazione con gli altri** influiscono su come la conoscenza viene costruita;

- L'apprendimento è un fenomeno di **adattamento** *dell'individuo agli stimoli dell'ambiente* e la risposta che ne deriva nasce da una necessità.

In particolare, tale adattamento secondo la TSD (seguendo le idee di **Piaget**) si basa su processi di:

1. **Assimilazione**: è l'inclusione di un oggetto, un nuovo evento (un nuovo dato di esperienza), all'interno di uno "*schema mentale*" (comportamentale o cognitivo), che lo studente possiede già, senza che questo schema venga modificato.
2. **Accomodamento**: è un processo, complementare all'assimilazione, in cui lo schema posseduto viene modificato, adattato, per includere nuovi oggetti o eventi prima sconosciuti.

Si basa inoltre sul superamento di "**conflitti cognitivi**" (secondo lo schema nuovamente qui sotto riportato) *che possono scaturire dall'interazione con il milieu*.



Figura 4.1: Schema riassuntivo del processo di equilibrizzazione

Nella **TC**, come mostrato nel capitolo precedente, si definiscono dettagliatamente **14 pratiche** *che possono stimolare la partecipazione attiva dello studente nel processo di apprendimento* (sono già state elencate nel capitolo sulla TC, quindi qui vengono solo riassunte):

1. **Come, dove e quando affidare un compito**: nei primi 5 minuti, a studenti in piedi e raccolti intorno all'insegnante;
2. **Sistemazione dell'aula**: si vuole superare il sistema frontale "cattedra-banchi" con una sistemazione casuale dei banchi (mettendoli lontano dalle pareti) in modo da permettere anche che l'insegnante possa parlare da qualsiasi punto dell'aula durante la lezione;

3. **Domande dello studente:** le uniche domande a cui l'insegnante può rispondere sono le "*domande per continuare a pensare*", fatte dagli studenti per continuare a lavorare, provare, pensare ("*Per essere chiari, i punti devono stare sulla stessa retta?*");
4. **Gruppi:** devono essere formati in modo visibilmente casuale e composti solo di tre studenti ciascuno;
5. **Autonomia:** gli studenti devono essere incoraggiati ad interagire e collaborare con gli altri gruppi, specie nei momenti di blocco;
6. **Spazio di lavoro:** gli studenti dovrebbero lavorare in piedi scrivendo su "**superfici verticali non permanenti**" (VNPS), cioè facilmente cancellabili, così che il lavoro sia visibile a tutti;
7. **Compito:** meglio iniziare la lezione con un problema diviso in step graduali di difficoltà crescente;
8. **Suggerimenti ed estensioni:** l'insegnante cerca di mantenere il coinvolgimento degli studenti fornendo loro suggerimenti (se non riescono a proseguire nel compito) o estensioni (del compito, di modo da aumentare la "sfida" e stimolare gli studenti al suo completamento);
9. **Consolidamento:** quando ogni gruppo avrà superato una soglia minima, l'insegnante dovrà riunire gli studenti per una discussione, sul lavoro svolto, in cui tutti possono intervenire;
10. **Appunti significativi:** lo studente sceglie quali sono le informazioni più importanti del concetto appreso e le trascrive di modo che gli restino comprensibili anche a distanza di tempo dall'attività;
11. **Domande CYU ("Check-Your-Understanding"):** è meglio fornire tra le quattro e le sei domande, da svolgere in classe, in modo che gli studenti possano verificare la loro comprensione (senza alcuna valutazione), invece di assegnare dei compiti a casa;
12. **Valutazione formativa:** focalizzata a informare gli studenti sul punto in cui si trovano nel "percorso" dell'apprendimento;
13. **Valutazione sommativa:** si focalizza più sui processi di apprendimento che sui prodotti e includono sia quella dei gruppi sia quella dei singoli studenti;
14. **Segnalazione delle prestazioni degli studenti:** l'insegnante analizza il lavoro svolto dallo studente e lo fa in modo differenziato in base al percorso di apprendimento che questi ha dimostrato (non si basa quindi sui voti, ma sul processo di apprendimento).

Per quanto riguarda gli **ostacoli all'apprendimento**:

- nella **TC** questi sono legati al mantenimento del **flow** (non è facile per l'insegnante mantenerlo) e quindi agli *stati di disequilibrio* (frustrazione e noia);
- nella **TSD** invece Brousseau (oltre alle difficoltà legate al contratto didattico) indica **tre tipi di ostacoli**:
 1. **Ostacoli epistemologici**: sono legati alla natura stessa e alla storia dello sviluppo della matematica;
 2. **Ostacoli ontogenetici**: hanno origine nell'allievo e sono legati alla sua "maturità" (secondo vari punti di vista);
 3. **Ostacoli didattici**: derivano dalle scelte metodologiche e didattiche dell'insegnante.

4.1.3 Autonomia dello studente

Come precedentemente scritto, si intende (in entrambi i casi) **sviluppare e favorire l'autonomia dello studente** ottenendo la mobilitazione della conoscenza tra i vari membri della classe.

Nella TSD si definiscono in particolare *due fasi iniziali della situazione a-didattica* in questo senso:

- **Fase di devoluzione**: l'insegnante fa accettare all'allievo la responsabilità di una situazione di apprendimento o di un problema, accettando le conseguenze e incertezze che si creeranno nella situazione.
- **Fase di implicazione**: l'allievo accetta di occuparsi in prima persona dell'attività proposta dall'insegnante, senza che questi lo guidi direttamente nella sua risoluzione.

L'allievo sarà successivamente stimolato dall'insegnante a formalizzare e validare la propria strategia (soluzione) del problema per poi presentarla ai compagni.

Nella **TC** non si tratta di "*devoluzione*", quanto più di "**firefighter approach**": l'insegnante accende il "*fuoco*" della sfida per lasciare che siano gli studenti a spegnere "*l'incendio*" senza che sia l'insegnante a prevenirlo. Durante l'attività inoltre l'insegnante lascia che siano gli studenti stessi a redigere delle "**rubriche di autovalutazione**" con la quale possono essi stessi valutare il loro lavoro nei gruppi. Lo studente può inoltre verificare il proprio apprendimento tramite le **domande CYU** (fornite dall'insegnante) di cui sceglie quali fare da solo, per poi andare a confrontarsi coi compagni.

4.1.4 Il triangolo della didattica

I tre vertici del "**triangolo della didattica**" *studente, insegnante e Sapere* sono continuamente in relazione (e nessuno prevale sull'altro) durante il processo di insegnamento-apprendimento (che nella TSD è influenzato dal **contratto didattico**, per esempio con quello che precedentemente è stato definito come

“paradosso della devoluzione”).

L'insegnante:

- organizza l'ambiente, sceglie attentamente i compiti/problemi che gli studenti dovranno risolvere;
- si occupa, secondo la **TC**, del **mantenimento del flow** rispondendo solo a certe domande (quelle prima chiamate “*domande per continuare a pensare*”) degli studenti e intervenendo tramite **suggerimenti e estensioni**;
- può risentire, per la **TSD**, degli “**effetti del contratto didattico**” (**Dienes, Topaze, Jourdain**).

È un *regista* che monitora il pensiero collettivo formatosi in classe, senza intervenire direttamente se non quando sarà per lui il momento di riformulare tali idee in modo più concreto e formale:

- durante la parte di “**consolidamento**” nella **TC**;
- nella “**fase di istituzionalizzazione**”, secondo la **TSD**.

Lo **Studente** diventa il protagonista, il responsabile, del proprio apprendimento.

Nella **TSD** il passaggio, durante la lezione, di tale responsabilità e delineato precisamente nelle **fasi di devoluzione e implicazione**, e l'apprendimento è influenzato dalle **clausole** (del contratto didattico) di **delega formale** e di **esigenza di giustificazione formale**.

Nella **TC** invece si delineano più le modalità con cui lo studente viene incoraggiato a essere autonomo e ad avere un maggior dialogo con gli altri (ad esempio lavorando in gruppo su una VNPS).

Il **Sapere** non è qualcosa che lo studente assorbe “*passivamente*” perché trasmesso dall'insegnante “*che sa*”, ma è invece scoperto e costruito dallo studente. Rappresenta l'oggetto culturale, i concetti e le competenze che devono essere appresi dallo studente.

L'insegnante, secondo la **TSD**, fa uso dell'ingegneria didattica per favorire la **trasposizione didattica** del sapere da **Sapere** (colto, rigoroso, universitario) a “**Sapere insegnato**”. Secondo tale teoria inoltre la conoscenza è la risposta ottimale a una situazione problematica.

Nella **TC** la lezione non è basata su formule e spiegazioni date dall'insegnante, ma su un compito (da lui preparato) da risolvere e che sia coinvolgente per gli studenti.

4.1.5 Suddivisione della lezione

Viene qui proposta una tabella riassuntiva della suddivisione della lezione per TC e TSD.

Tabella 4.1: Suddivisione della lezione nell'approccio TC e nella TSD

TC	TSD
Lancio, corpo e chiusura della lezione.	Sei fasi: devoluzione, implicazione, costruzione della conoscenza personale, validazione, socializzazione e istituzionalizzazione. Sviluppate su quattro tipi di situazioni: di azione, di formulazione, di validazione e di istituzionalizzazione.
Lancio della lezione: organizzazione dell'aula, divisione dei gruppi, banner, VNPS e presentazione del compito.	Fasi di devoluzione e implicazione
Corpo della lezione: svolgimento del compito nei gruppi.	Fasi di costruzione della conoscenza personale e di validazione (nella TC avviene inizialmente nei gruppi)
Chiusura della lezione: • Consolidamento(dialogo, insegnante-scriba, gallery walk); • Nella gallery walk gli studenti non difendono la loro strategia contro quella degli altri. Invece si confrontano e interpretano le strategie degli altri; • Appunti significativi (note-making) e metodo dei 4 quadranti; • Domande CYU e rubriche di autovalutazione.	Inizialmente una fase di validazione in cui i gruppi devono argomentare e difendere la loro strategia contro quella degli altri. Successivamente le fasi di socializzazione e istituzionalizzazione

4.2 Differenze significative

4.2.1 Appunti

Nella **TSD** non vengono date particolari indicazioni per la presa di appunti da parte degli studenti.

L'approccio **TC** invece prevede che, rispetto alla didattica “*tradizionale*”, si debba cambiare il modo in cui lo studente prende appunti: un passaggio da “*note-taking*” (cioè si limitano a copiare dalla lavagna) a “**note-making**” (riflettono su ciò che scrivono). Il metodo che viene consigliato è quello dei **quat-**

tro quadranti (qui viene riportata nuovamente l'immagine, per la spiegazione si rimanda al capitolo precedente).

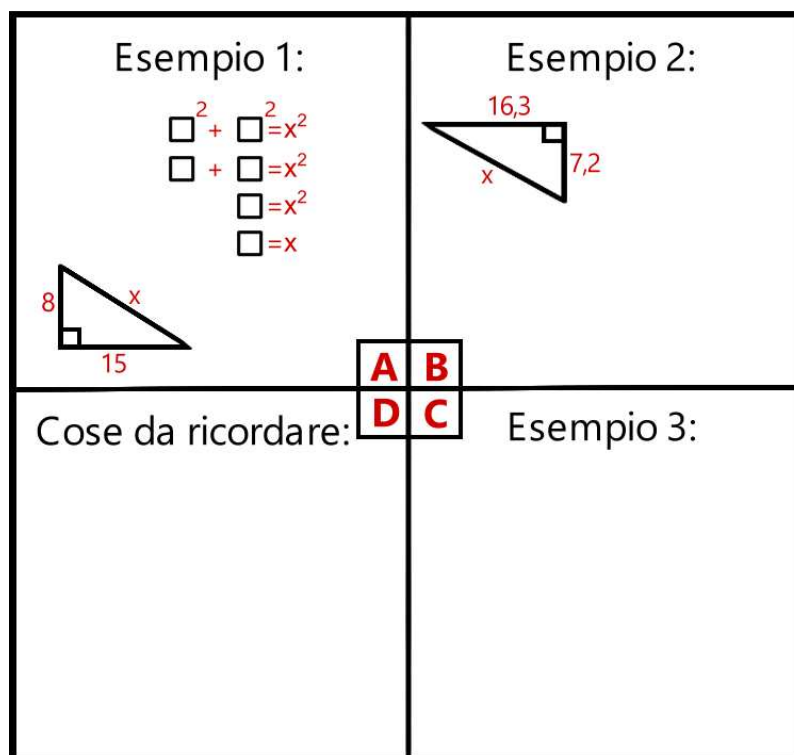


Figura 4.2: Il metodo dei quattro quadranti.

4.2.2 L'uso del “gioco”

Brousseau usa frequentemente la metafora del **gioco**, *vedendo come “conoscenza” la strategia vincente. Gli studenti (o i gruppi) vengono messi così in competizione*, di modo che possano cercare una propria strategia vincente per poi formalizzarla, validarla e confrontarla con quelle degli altri cercando di farla prevalere. Il gioco (per Brousseau) è utile perché offre un buon modello di “situazione reale”: sollecita lo stesso genere di possibilità di azione, di scelta, per il giocatore (come anche di emozioni e motivazioni), ma anche si discosta dalla “vita”. Nel gioco infatti la maggior parte delle condizioni che per il giocatore sono vincolanti, o che gli sfuggono, vengono superate, mentre la “realtà” è molto più complessa.

Liljedahl nella TC non propone sfide o gare per far competere i gruppi, invece questi sono spinti alla collaborazione e all'interazione tra loro. Questo è evidente ad esempio nella **gallery walk**, dove gli studenti non difendono la loro strategia contro quella degli altri, ma, girando tra le VNPS, si confrontano e interpretano le strategie degli altri gruppi.

4.2.3 La scelta del “compito”

Nella **TSD**:

- l’insegnante organizza la **situazione a-didattica**, tenendo conto delle possibili risposte e misconcezioni degli studenti;
- il compito deve essere presentato in modo che ne sia favorita la **devoluzione** allo studente.

Considerazioni simili valgono anche nella **TC**, dove tuttavia (per la scelta e creazione di un “buon compito”) vengono date indicazioni più precise quali:

- **Low floor**: una base di conoscenze da cui ogni studente può partire, per favorire l’accesso al compito a tutti gli studenti.
- **High ceiling**: lo studente dovrà incontrare, come scritto prima, una sfida che lo blocchi e lo costringa a pensare fino a sbloccarsi.
- Il compito deve essere una **novità** per lo studente, di modo che questo sia meno propenso a ridursi a “copiare” e invece si blocchi nello svolgimento. Questo **blocco** è fondamentale in quanto, per sbloccarsi dalla situazione, lo studente sarà costretto a pensare, entrerà in uno “**sforzo produttivo**” dettato dalla sua volontà a persistere nella sfida.
- **Thin-slicing**: la pratica di creazione di esercizi di difficoltà crescente in modo graduale.

4.3 Milieu

Per concludere il quadro teorico, ai fini delle domande di ricerca che vengono discusse in questa tesi, è bene riassumere come l’ambiente in aula sia organizzato rispetto alla TSD e alla TC.

Secondo **Brousseau** il **milieu** rappresenta il mezzo di comunicazione (tramite diversi registri, non solo orale) che l’insegnante ha con lo studente ed è costituito non solo da oggetti fisici, ma anche sociali, culturali, umani, con cui interagisce in una “*situazione*”. *È fatto di contraddizioni, difficoltà, disequilibri a cui lo studente si adatta mediante processi di assimilazione e accomodamento, portando a nuove risposte che sono la prova dell’apprendimento.*

Quello ottimale è il **milieu a-didattico** in cui vi è la rottura del contratto:

- Il rapporto dello studente con la conoscenza non è derivante da un desiderio esplicito dell’insegnante, ma è giustificato dalla logica interna della situazione.
- Lo studente sa che il problema proposto dall’insegnante lo porterà all’acquisizione di nuova conoscenza, che sarà validata dalla situazione in sé e non da clausole del contratto didattico.

- Tale conoscenza sarà stata acquisita solo se saprà applicarla in situazioni al di fuori del contesto didattico e senza indicazioni altrui (come quelle dell'insegnante).
- L'allievo diventa responsabile dell'apprendimento: prova (da solo o in gruppo) una strada che coinvolge le conoscenze preacquisite, vede se è valida e se non lo è riprova andando a modificare, completare o eventualmente rifiutare tali conoscenze, per formare nuovi concetti, sempre interagendo con il milieu.
- L'insegnante non agisce in modo diretto, ma da regista che osserva e dirige la discussione lasciando che siano gli allievi a gestirla. Solo alla fine interverrà per istituzionalizzare il sapere condiviso, dandogli lo status e il nome condiviso dalla società.

Nel capitolo dedicato alla TSD sono state elencate alcune **condizioni che favoriscono un milieu a-didattico**, che vengono di seguito brevemente riassunte:

- La situazione deve essere ripetibile e la soluzione può essere trovata e provata da qualche allievo in tempi ragionevoli in una classe normale e può essere velocemente messa in comune e verificata dai compagni.
- Deve avvenire la devoluzione della situazione allo studente che è protagonista attivo dell'apprendimento. L'allievo deve essere incerto nelle sue decisioni (almeno all'inizio) e perciò la sua strategia di base non sarà quella definitiva, ma necessiterà di accomodamenti al suo sistema di conoscenze. Solo la conoscenza matematica obiettivo sarà quella che gli permetterà di risolvere il problema.
- Il milieu a-didattico deve poter fornire un feedback diretto sull'operato dello studente, di modo che questi possa verificare la validità (o falsità) della risposta che ha trovato: potrà accettare, rifiutare, scegliere le soluzioni proposte dai compagni e quindi, eventualmente, correggere la propria.

Liljedahl invece pensa alla preparazione dell'ambiente da parte dell'insegnante in termini più "operativi" andando ad elencare le **14 pratiche** che permettono di creare una Thinking Classroom: come sistemare l'aula, l'uso delle VNPS, particolari criteri per la divisione in gruppi degli studenti, criteri per un "buon compito", come può intervenire l'insegnante (tramite suggerimenti e estensioni), ecc.

Come nella TSD, anche nella TC il rapporto che lo studente ha con la conoscenza non è dettato direttamente dall'insegnante, ma sarà egli stesso, affrontando il problema che gli è stato proposto, a costruirla aiutato dal confronto con il proprio gruppo e con il resto della classe. Allo stesso modo, l'insegnante si limita a fare da regista che interviene in particolare nel momento di consolidamento della conoscenza (per esempio con l'organizzazione della gallery walk).

Se da una parte Brousseau si è concentrato su come la situazione a-didattica possa superare il contratto didattico, invece Liljedahl si è focalizzato più sul mantenimento del flow, del coinvolgimento degli studenti, seguendo le **nove caratteristiche dell'esperienza ottimale** (secondo Csíkszentmihályi e qui riassunte) dello studente:

1. impegno e concentrazione massimi;
2. tutta la concentrazione è sul compito;
3. non ha paura di fallire;
4. l'autocoscienza scompare;
5. non si rende conto del tempo che passa;
6. piacere intrinseco nello svolgere l'attività;
7. obiettivi chiari;
8. feedback chiaro e immediato;
9. equilibrio tra sfida del compito e capacità dello studente.

Sembrerebbe dunque che per molti aspetti la TSD e la TC siano compatibili, sebbene seguano strade diverse a livello di organizzazione della lezione.

4.4 Uno scambio equo tra TSD e TC

In questo capitolo sono stati evidenziati vari elementi di coerenza tra la TSD e l'approccio TC, a partire dall'obiettivo comune di rendere lo studente il protagonista attivo dell'apprendimento. Si è quindi sottolineato come sia lo studente stesso a costruire le sue conoscenze attraverso processi di adattamento ad un ambiente, appositamente organizzato dall'insegnante, tramite la risoluzione di problemi. In particolare (come sottolineato nella sezione precedente) si riscontrano affinità tra le caratteristiche che, per Brousseau, deve avere un milieu a-didattico e quelle che, per Liljedahl, deve avere una "classe pensante". In entrambi i casi è lo studente a prendersi la responsabilità dell'apprendimento, a costruire la conoscenza aiutato dalla collaborazione e dal confronto coi suoi compagni, mentre l'insegnante diventa un regista che interviene nei momenti di discussione del problema o quando serve istituzionalizzare il sapere.

Dal confronto fatto nelle precedenti sezioni si può osservare come la **TSD** sia più di stampo teorico, occupandosi di **cosa** influenza il processo di apprendimento, mentre la **TC** è di carattere più "operativo" occupandosi invece del **come** favorire tale processo.

Nella **TSD** vengono approfonditi i processi cognitivi che guidano l'apprendimento, quindi quelli di assimilazione e accomodamento in rapporto alla risoluzione dei conflitti cognitivi scaturiti dall'interazione dello studente col milieu.

Tale teoria si occupa di analizzare più nel dettaglio le relazioni tra i tre vertici del **triangolo della didattica**, in particolare osservando:

- il **contratto didattico** (*effetti, clausole e paradossi*) e come questo possa essere di ostacolo all'apprendimento;
- i **tre tipi di ostacoli** (*epistemologici, ontogenetici e didattici*) che principalmente possono influenzare l'apprendimento dello studente;
- la **trasposizione didattica** dal Sapere (colto, rigoroso, universitario) al Sapere insegnato.

Tutti questi fattori che possono influenzare l'apprendimento non vengono approfonditi esplicitamente nella TC, che preferisce concentrarsi sul mantenimento del flow e della partecipazione attiva dello studente durante l'attività.

La TSD predilige inoltre la creazione di **situazioni a-didattiche** (quindi di un milieu a-didattico), in quanto ritenute le uniche capaci di rompere il contratto didattico. Articola tali situazioni in **sei fasi** (*devoluzione, implicazione, costruzione della conoscenza personale, validazione, socializzazione e istituzionalizzazione*) precise in cui la conoscenza viene costruita dallo studente che prima accetta il problema e la responsabilità della sua risoluzione, poi cerca una strategia che dovrà formalizzare, validare e confrontare con quelle dei compagni e infine accetta gli accorgimenti dell'insegnante per istituzionalizzare tale conoscenza. La TSD non fornisce tuttavia indicazioni precise per l'insegnante su quali siano i modi migliori per strutturare un milieu a-didattico, quanto più consiglia le **quattro situazioni** (*di azione, formulazione, validazione e istituzionalizzazione*) che possono favorire le sei fasi.

Spesso nella TSD le situazioni a-didattiche seguono la dinamica del **gioco**, in cui la conoscenza diventa la strategia vincente, favorendo una competizione tra i gruppi (fattore che invece non viene considerato nell'approccio TC che preferisce il confronto non competitivo di idee tra gli studenti).

L'approccio **TC** invece si concentra sul *fornire all'insegnante delle indicazioni più pratiche e precise su come organizzare l'ambiente* in cui lo studente costruisce la conoscenza:

- una precisa **sistemazione dell'aula** (i banchi sono disposti in modo casuale), degli studenti (in piedi davanti alla **VNPS** del proprio gruppo) e dell'insegnante (non più fisso dietro la cattedra ma libero di muoversi per l'aula);
- criteri precisi per quando presentare un **compito** (deve essere fornito entro i primi cinque minuti della lezione), per come presentarlo (ad esempio l'uso dei banner) e per la sua formulazione (*thin-slicing, low floor, high ceiling, novità per lo studente*);
- criteri per la scelta dei **gruppi** (casuali di tre studenti);

- metodi per mantenere la partecipazione degli studenti, dal mantenimento del **flow** (che determina, in termini di TSD, la devoluzione del problema e l'implicazione dello studente) allo spazio di lavoro (le VNPS);
- metodi per far prendere **appunti** agli studenti (*il metodo dei quattro quadranti*), argomento non trattato esplicitamente nella TSD;
- **tre tipi di consolidamento** (*dialogo, insegnante-scriba, gallery walk*) delle conoscenze acquisite durante l'attività;
- metodi per l'**autovalutazione** degli studenti, dalle domande CYU alle rubriche di autovalutazione dei gruppi.

È da queste osservazioni sugli elementi di coerenza tra un milieu a-didattico e una "classe pensante", così come la complementarità tra gli aspetti teorici della TSD e quelli operativi della TC, che nascono le domande di ricerca che guidano questa tesi e che verranno presentate nel capitolo seguente.

Capitolo 5

Metodologia

Viene ora presentato il progetto di ricerca universitario svoltosi in due classi terze di un liceo scientifico della Lombardia durante l'anno scolastico 2025-2026 a cui io e un altro tesista abbiamo avuto occasione di partecipare.

Tutto ha avuto origine da un progetto, a cui le due classi hanno aderito nell'anno scolastico precedente, che aveva come obiettivo di accantonare l'insegnamento "tradizionale" (nel senso visto nei capitoli precedenti) per *provare l'approccio TC*. Infatti i due insegnanti di matematica, delle rispettive classi, hanno visto (l'anno precedente) un risvolto positivo negli studenti (a livello di apprendimento e partecipazione) e hanno deciso di ripetere l'esperienza.

Come nel precedente progetto, l'obiettivo non era di seguire alla lettera ogni principio della TC, ma di proporre *un suo riadattamento in base al contesto e alle considerazioni dei due insegnanti* (basandosi anche sull'esperienza dell'anno precedente). Per esempio, nella TC uno degli obiettivi è il problem solving, quindi l'utilizzo di attività stimolanti, ma che non sempre portano alla costruzione di una teoria. Nella TC non si parla di impianto teorico, quindi non si pensa ad esempio alla creazione di un "quaderno di classe" come è accaduto in una delle due classi. Invece, nelle due classi, l'obiettivo era vedere come l'approccio TC potesse *aiutare gli studenti ad arrivare alla definizione di certi concetti matematici, alla formulazione di congetture, teoremi e dimostrazioni, nell'ambito della **trigonometria**, partendo da "problemi aperti"*.

In base a quanto visto nel quadro teorico, i due docenti non hanno dovuto riadattare solamente il loro modo di fare lezione, ma anche il proprio ruolo, rinunciando al controllo che avrebbero avuto con una lezione "tradizionale" in cui si sarebbero limitati a comunicare i concetti agli allievi direttamente. Hanno preferito infatti favorire invece una partecipazione attiva degli studenti (lo sviluppo di uno spirito costruttivo e critico da parte loro) assumendo la "maschera" di progettisti di problemi che potessero coinvolgere tutti gli studenti (facendo in modo che fossero per loro accessibili, un "*low floor*" secondo la TC) e promuovendo il formarsi di una **comunità-classe** che apprende tramite sia il lavoro in gruppi che con la condivisione e il confronto di idee con gli altri. Il principale obiettivo della ricerca è stato quindi vedere come ciascuno dei due

docenti, come si vede di seguito, ha scelto di riadattare, secondo i propri criteri, l'approccio della TC per venire incontro alla rispettiva classe. Su questo fattore di "riadattamento della TC" infatti non sono stati imposti obblighi o restrizioni da parte dei ricercatori, che invece hanno collaborato nella preparazione delle attività e dei materiali.

5.1 Domande di ricerca

Nel quadro teorico non è stato presentato solamente l'approccio TC, ma anche la TSD. Nel capitolo precedente si è visto come, seppur con qualche differenza, vi siano diverse similitudini tra i due metodi sia per le relazioni tra studente, insegnante e sapere sia per obiettivi e preparazione dell'ambiente con cui lo studente deve interagire. Da qui nascono le seguenti domande, fulcro di questa tesi:

L'approccio Thinking Classroom può configurarsi come un milieu a-didattico? In tal caso, un milieu così costruito può contribuire a rompere il contratto didattico?

Per rispondere a queste domande, l'analisi dei dati raccolti durante il progetto di ricerca sarà rivolta a vedere quanto e se l'approccio TC possa essere interpretabile come milieu a-didattico, ricercando gli episodi che più rassomigliano (sebbene non esplicitamente) allo svolgimento di una situazione a-didattica. In questo si cercherà anche di osservare se la TC offre dei vantaggi in più per la TSD e se effettivamente può contribuire al superamento del contratto. Per far ciò, si terrà conto che quella che è stata applicata dai due docenti non era la TC così com'è stata definita nel quadro teorico. Ciascuno dei due ha riformulato la TC ad una versione riadattata per la propria classe, scegliendo cosa tenere e cosa tralasciare. L'obiettivo sarà dunque osservare se e quali vantaggi le due alternative possono offrire per l'apprendimento dello studente.

5.2 Descrizione, progettazione e svolgimento del progetto

In questa sezione viene fornito un resoconto dettagliato di come il progetto è stato svolto, illustrando come sono stati raccolti i dati, progettati i problemi e come si sono svolte le lezioni nelle due classi facendone un confronto.

Come già illustrato, il progetto si è svolto in due classi terze di un liceo scientifico aventi ciascuna un suo diverso insegnante di matematica. Il vivo delle attività si è svolto in alcune lezioni tra i mesi di marzo e aprile dell'anno scolastico 2025-2026, ma la progettazione dei problemi da proporre agli studenti era iniziata già dal mese di gennaio. In questo sono stati molto d'aiuto, per la loro disponibilità, i due insegnanti di matematica delle rispettive classi.

Al fine di mantenere la privacy, di seguito verranno utilizzate le seguenti **notezioni**:

- **Classe1** per indicare la prima classe, *composta da 27 studenti*, e **Docente1 (D1)** per indicarne l'insegnante di matematica;
- allo stesso modo **Classe2** e **Docente2 (D2)** per indicare la seconda classe, *composta invece da 23 studenti*, e la seconda docente.

Quattro studenti sembrano non essere una grande differenza, tuttavia a livello di organizzazione e di spazi risulta (come spiegato di seguito) un fattore non trascurabile.

5.2.1 Dati raccolti

Questa ricerca si è basata su un approccio di tipo qualitativo, quindi che ha cercato di interpretare, tramite osservazione diretta, il processo di insegnamento-apprendimento analizzando:

- come le attività siano state orchestrate dagli insegnanti;
- come questi abbiano interagito coi loro studenti;
- come gli studenti abbiano interagito tra loro.

Con tale approccio si sono volute esplorare le dinamiche di classe, i significati e le dinamiche emergenti nel contesto in cui la ricerca si è svolta. I ricercatori e noi tesisti ci siamo posti come **osservatori partecipanti** documentando tutte le varie parti delle lezioni e cercando di selezionare gli episodi più significativamente in linea con gli obiettivi di ricerca.

Per la raccolta dei dati sono stati utilizzati principalmente due metodi.

In primis, per registrare i momenti salienti delle attività, è stato fatto uso di **due videocamere** di cui:

1. La prima è stata utilizzata, per lo più, per seguire gli insegnanti nei loro interventi all'interno dei gruppi. In questo modo è stato possibile osservare attentamente come interagissero con gli studenti, i loro interventi per il mantenimento del flow e come hanno orchestrato il momento di discussione tra i gruppi sui risultati ottenuti;
2. La seconda veniva usata per focalizzarsi più sui singoli gruppi, quando l'insegnante non era presente, in modo da osservare le dinamiche di scambi di opinioni tra gli studenti e l'evoluzione dei loro ragionamenti durante le attività.

In secondo luogo, per raccogliere idee e pareri su come si fosse svolta la lezione nella mattinata, si è deciso di optare per i **“commenti a caldo”**: insegnanti, ricercatori e tesisti si sono scambiati, dopo ogni lezione, degli audio in cui esprimevano le loro opinioni, i loro appunti e cosa li aveva impressionati durante le attività. In questo modo si è potuto documentare il punto di vista dei due insegnanti, favorendo anche uno scambio di idee tra questi.

Tramite questi dati si è potuto osservare come, nonostante i punti di partenza (per obiettivi teorici e di progettazione di problemi) comuni, vi siano state diverse direzioni di ragionamento degli studenti nelle due classi, nonché diverse scelte di organizzazione e di adattamento della TC dei due docenti.

Sebbene qui non venga analizzato nel dettaglio, è doveroso annotare infine che la Classe2 ha deciso di optare per la redazione di un “**quaderno di classe**” in cui gli studenti, a turno, trascrivevano le nozioni imparate e condivise alla fine delle attività. Questo è stato uno strumento didattico che li ha aiutati a prendersi la responsabilità di ciò che hanno appreso, scrivendolo e condividendolo tra loro per poterlo consultare in futuro.

5.2.2 Progettazione dei problemi

Il progetto ha previsto una parte iniziale in cui i ricercatori, i due tesisti e i due insegnanti si sono confrontati nella creazione delle attività da proporre agli studenti. *L’obiettivo principale era utilizzare la TC per far costruire in prima persona agli studenti definizioni, teoremi e dimostrazioni della trigonometria, tramite particolari problemi (opportunamente progettati in base alla conoscenza obiettivo di ogni lezione), evitando che invece li “ricevessero passivamente” dall’insegnante. In questo modo si voleva anche che sviluppassero un maggior senso di collaborazione, nonché di competenze in argomentazione, dimostrazione e problem-solving.*

Gli studenti avevano già qualche conoscenza in merito alla trigonometria derivante dal suo utilizzo in fisica. Si è osservato ad esempio in alcune attività come alcuni degli studenti partissero dal piano inclinato e dalle componenti della forza peso (tramite l’uso di seno e coseno) per studiare un triangolo rettangolo. L’obiettivo tuttavia, nel progetto, diventava andare oltre e formalizzare tali nozioni a livello matematico.

Vengono di seguito presentati i **teoremi-obiettivo**, a cui poi gli studenti sono giunti a seguito delle attività:

1. **Primo teorema dei triangoli rettangoli:**

In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è la misura dell’ipotenusa per il seno dell’angolo opposto o il coseno dell’angolo adiacente.

2. **Secondo teorema dei triangoli rettangoli:**

In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è la misura dell’altro cateto per la tangente dell’angolo opposto o la cotangente dell’angolo adiacente.

3. **Teorema della corda:**

La lunghezza di una corda in una circonferenza è uguale al prodotto del diametro per il seno di un qualsiasi angolo alla circonferenza che insiste su quella corda.

4. **Teorema dei seni:**

In ogni triangolo, il rapporto tra la lunghezza di un lato e il seno dell'angolo opposto è costante e uguale al diametro della circonferenza circoscritta $2r$.

5. **Teorema di Carnot:**

In un qualsiasi triangolo il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno il doppio prodotto di questi ultimi due lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

6. **Teorema dell'area del triangolo:**

L'area di un triangolo si calcola come il semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso.

Insegnanti e ricercatori si sono dunque impegnati nella creazione di problemi aperti appositi che, attraverso la loro risoluzione, permettessero agli studenti di costruire i teoremi sopra elencati.

I criteri per la formulazione dei problemi hanno seguito i principi del “**buon compito**” della TC:

- **Low floor:** fare in modo che gli studenti avessero una base di conoscenze comune che fosse sufficiente ad affrontare il problema.
- **High ceiling:** doveva essere una sfida che permettesse allo studente di incontrare difficoltà, di bloccarsi, nel suo svolgimento, di modo che fosse costretto a pensare fino a sbloccarsi.
- Il compito doveva presentarsi come una **novità** per lo studente, di modo che fosse favorita la sua partecipazione. In questo senso si è cercato di fornire (per alcuni problemi) un contesto di “*realtà*”, di modo che gli studenti fossero più coinvolti.
- Per la maggior parte dei casi si è cercato di seguire il metodo **thin-slicing** fornendo domande che guidassero gli studenti nel percorso e che presentassero una difficoltà crescente (di modo che il flow fosse mantenuto).
- Per la formulazione venivano chiariti gli **obiettivi** che si volevano raggiungere.

Si consideri ad esempio il “**primo teorema dei triangoli rettangoli**” (che verrà poi trattato nell'analisi). Sono state elaborate le seguenti **domande**:

1. *Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di lunghezza i e gli angoli acuti hanno ampiezza pari a 45° . Quanto misurano i cateti in funzione di i ?*
2. *Se il triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di lunghezza i e ha un angolo acuto di ampiezza 30° . Quanto misurano i cateti in funzione di i ?*
3. *Se ora il triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di lunghezza i e ha un angolo acuto di ampiezza 50° . Quanto misurano i cateti in funzione di i ?*

La difficoltà è crescente, in quanto:

- per la prima domanda gli studenti potevano collegarsi a quanto sapevano sulla diagonale di un quadrato e al teorema di Pitagora;
- la seconda domanda era più complessa, in quanto richiedeva di formulare una costruzione particolare (ad esempio specchiando il triangolo e ottenendo un triangolo equilatero), per poi usare di nuovo il teorema di Pitagora;
- infine, nella terza domanda, gli studenti non potevano calcolare (a differenza degli altri due casi) i valori di seno e coseno effettivi, quindi si sono ricondotti a ciò che sapevano (ma non avevano mai definito rigorosamente) dalla fisica su seno e coseno, andando così a reinterpretare anche le risposte precedenti.

Gli **obiettivi** che si volevano raggiungere erano: seno, coseno e le relazioni tra ipotenusa e cateti (definiti come rapporto).

Un esempio, invece, di problema in cui si è fornito un contesto “realistico” è quello legato al “**secondo teorema dei triangoli rettangoli**”:

Il condominio Rossi-Bianchi ha deciso di abbattere le barriere architettoniche del suo stabile installando una rampa. Al momento all'ingresso c'è un ampio giardino. Secondo la normativa vigente in materia di abbattimento delle barriere architettoniche, a un dislivello $\leq 15\text{cm}$, la pendenza della pedana non può superare il 12%.

- *Quanto sporge nel giardino al minimo la pedana?*
- *Se si può occupare in lunghezza al più 3,75m, e sull'etichetta della pedana è consigliata per pendenze dell'8%, qual è il massimo dislivello abbattibile?*

Nella sperimentazione, per fare anche sorridere gli studenti, il condominio prendeva il nome dei due insegnanti che hanno aderito al progetto (non sono i cognomi qui riportati, per questioni di privacy).

Come continuazione, per il secondo teorema, è stata aggiunta la richiesta per i ragazzi di “*misurare l'altezza della stanza*”. Sono stati loro forniti quindi degli strumenti adeguati, sebbene differenti per le due classi:

- nella Classe1 righelli e goniometri;
- nella Classe2 squadre con angoli di 30° e 60° , un paio di metri a nastro e qualche goniometro.

In questo modo è stata creata per loro una situazione problematica più aperta e che fornisse loro la totale libertà nella risoluzione, con gli strumenti che avevano. Sono emersi così i metodi più disparati (non tutti efficaci): dal cercare

di fornire una misura diretta (salendo su una sedia e provando a misurare), a darne una approssimativa (per esempio prendendo come unità la misura dello studente più alto nella classe), fino alla costruzione di appositi strumenti (come un tubo di carta attaccato alla squadra per vedere meglio da dove osservare con l'angolo giusto lo spigolo superiore della parete).

La prima dinamica (la formulazione dei problemi tramite thin-slicing) è stata seguita per i teoremi (nell'ordine presentato sopra) 1, 4 e 6, mentre invece la seconda (in cui si è aggiunto un contesto di "realtà") per i teoremi 2 e 3.

Per quanto riguarda il teorema 5, il “**teorema di Carnot**”, non è stato progettato un compito che seguisse lo thin-slicing, bensì si è solo considerato l'enunciato, lasciando la libertà ai docenti di gestire l'attività legata al teorema. L'unico suggerimento indicato dai docenti sul file condiviso tra loro e i ricercatori per la progettazione è stato: “... *da Pitagora a Carnot*”. In questo modo si sono presentate due diverse dinamiche:

- nella Classe1 il Docente1 ha scelto di presentare il teorema di Pitagora e come consegna ha chiesto agli studenti di trovare una sua generalizzazione (che valesse per qualsiasi triangolo, anche non rettangolo);
- nella Classe2 invece la Docente2 ha scelto di fornire l'enunciato agli studenti, chiedendo loro espressamente di dimostrarlo.

Per concludere, si considerino le seguenti osservazioni.

Come accennato prima, agli insegnanti è stato lasciato un certo margine di libertà per l'applicazione dei principi TC, tant'è che hanno preso strade diverse su alcuni punti (come viene spiegato di seguito).

Per la scelta delle ore in cui svolgere le attività si è preferito utilizzare le mattinate in cui i docenti avevano due ore (a volte ne sono state usate 3 nella Classe2) nelle rispettive classi. Questo ha permesso di evitare che i lavori rimanessero lasciati in sospeso, evitando la dispersione di idee degli studenti da una lezione all'altra. Per quanto riguarda la durata delle attività si è quindi deciso di dare in media due ore ciascuna. All'occorrenza, tuttavia, le tempistiche sono state leggermente modificate in base alla velocità del loro svolgimento da parte degli studenti.

5.2.3 Preparazione della classe e presentazione del problema

Come presentato in precedenza, nella TC diventa fondamentale il modo in cui vengono sistemate l'aula e la classe.

Innanzitutto, per la **sistemazione dei banchi**, all'inizio di ogni lezione veniva chiesto di spostare i banchi dalla loro formazione usuale:

- Nel caso della Classe1 i banchi sono stati sistemati “**a isole**”, ovvero in punti diversi della stanza (non troppo vicino alle pareti) e a gruppi di tre, di modo che poi (nel momento di discussione con la classe) i gruppi di studenti potessero radunarsi ognuno su un'isola. Questa soluzione è stata

una scelta del Docente1 che voleva che nel momento di presa di appunti gli studenti potessero essere ancora riuniti nei gruppi per confrontarsi su cosa e come scrivevano. Questo inoltre gli ha facilitato il passaggio da un gruppo all'altro, dato l'elevato numero di studenti e di banchi presenti in aula.

- Nella Classe2 invece la Docente2 similmente chiedeva agli alunni di spostare i banchi raggruppandoli abbastanza lontano dalle pareti, in modo che loro non vi si sedessero durante l'attività e permettendo il suo passaggio tra i gruppi. La loro sistemazione veniva poi cambiata ogni lezione nel momento in cui iniziava la discussione di classe. Per questi momenti infatti la Docente2 chiedeva agli studenti di spostare i banchi verso le pareti, mentre loro si dovevano sistemare al centro dell'aula seduti sulle sedie disposte **“a ferro di cavallo”**. Questo ha permesso, durante la discussione, che gli studenti non si appoggiassero ai banchi (rischiando la perdita di attenzione). D'altronde, dal momento che al termine di ogni discussione veniva compilato un **“quaderno di classe”**, non era necessario che gli studenti scrivessero in quei momenti. Inoltre, il fatto che gli studenti fossero disposti in tal modo permetteva sia di vedere cosa l'insegnante scriveva alla lavagna, sia di vedere in volto i compagni nel momento in cui si discuteva sui risultati trovati, favorendo la comunicazione.

Questa scelta ha permesso che durante lo svolgimento dell'attività gli studenti rimanessero in piedi per la maggior parte del tempo stimolandoli a rimanere attivi, coinvolti e a non distrarsi. Ha permesso anche che *in ogni gruppo, in qualsiasi momento, tutti i membri potessero avere piena visione della VNPS* (cosa che non sarebbe stata possibile se fossero stati seduti intorno ai banchi a svolgere il compito) *e potessero avvicinarvisi per intervenire nel ragionamento di gruppo*. Questo è stato fondamentale per il coinvolgimento degli studenti, siccome (per la maggior parte delle ore):

- le attività si svolgevano nella Classe1 durante le ultime due ore della mattinata, perciò gli studenti erano stanchi per le ore precedenti;
- nella Classe2 si svolgevano quasi sempre nelle prime due ore della mattinata, perciò gli studenti potevano sentirsi ancora stanchi (per non aver dormito a sufficienza) o distrarsi pensando a interrogazioni e verifiche che avrebbero avuto nelle ore successive.

Venivano in seguito formati i vari **gruppi** (diversi ogni lezione) con i seguenti criteri: *3 componenti (4 se fosse rimasto qualcuno)* per gruppo scelti in modo visibilmente casuale. Questo è stato in linea con la TC e ha permesso (nella maggior parte dei casi) che nessuno degli studenti venisse messo in disparte durante lo svolgimento dell'attività o che si sentisse etichettato dal suo *“livello di abilità”* (e quindi scoraggiato, se si crede di basso livello, o sotto pressione, se si crede di livello alto). Tale scelta ha inoltre favorito lo scambio di idee e la negoziazione dei significati tra i membri di ogni gruppo.

Il metodo di scelta utilizzato è stato quello del **“mazzo di carte”**. Per spiegarlo si prenda ad esempio la Classe1: 27 studenti, quindi 9 gruppi da 3. Per dividerli

basta prendere un mazzo di carte, prendere le carte dall'asso al numero di gruppi che si vuole formare (in questo caso 9) e farlo per 3 semi (per esempio cuori, picche e fiori). In questo modo il numero della carta pescata indica allo studente a quale VNPS (su ognuna era segnato il numero del gruppo che vi si sarebbe sistemato) dovrà andare (quindi di quale gruppo farà parte) mentre il seme della carta serve a mantenere 3 componenti per gruppo. Nell'eventualità in cui si dovessero formare uno o più gruppi da 4 (magari per qualche studente assente) si aggiunge il giusto numero di carte col quarto seme (in questo esempio, quadri). Quindi per esempio lo studente che pesca il 6 di picche andrà nel gruppo 6 e così via. Questo metodo permette di scegliere i componenti dei gruppi in modo totalmente casuale (evitando quindi il "raggruppamento per abilità") in linea con la TC.

Il Docente¹ in alcune lezioni ha preferito optare (per velocizzare i tempi) per una divisione in gruppi tramite il "**metodo excel**", ovvero: creare sulla LIM ("*Lavagna Interattiva Multimediale*") un foglio excel in cui in una prima colonna ha inserito cognome e nome di ciascun studente, mentre nella seconda ha fornito per ciascuno un numero casuale (nel caso di 27 studenti) da uno a 9, facendo sì che ciascun numero non si ripetesse più di 3 volte nella colonna. In questo modo gli studenti erano indirizzati direttamente ai VNPS corrispondente al numero di fianco al loro nome.

Per quanto riguarda i **materiali** usati per svolgere le attività, ogni gruppo di studenti era fornito di:

- *un proprio foglio di cellophane attaccato al muro*, sulla quale poter scrivere (nella Classe¹ a volte la VNPS di un gruppo era la lavagna multimediale, per questione di spazi);
- *un pennarello per gruppo* (tranne qualche eccezione) con cui scrivere sulla propria VNPS, in modo che fosse incentivato il dialogo per decidere come procedere nella soluzione del problema e su cosa lasciare scritto sulla VNPS. Se fossero stati dati più pennarelli si sarebbe rischiesta la divisione interna nei gruppi, in cui ognuno seguiva il proprio ragionamento senza dividerlo con gli altri;
- *un cancellino*.

In entrambe le classi, durante lo svolgimento delle attività, uno dei gruppi usava la lavagna d'ardesia della classe per ottimizzare gli spazi nell'aula.

Non sono stati posti limiti sull'utilizzo di quaderni o tablet, nonostante ciò i lavori sono stati svolti principalmente sulle VNPS. Vi sono stati solamente alcuni casi in cui degli studenti (in entrambe le classi) hanno sentito il bisogno di portare il problema, che stavano affrontando col gruppo, sul proprio quaderno o tablet per poterci ragionare meglio. *L'uso della calcolatrice non è stato limitato se non in casi specifici in cui gli si chiedeva di non utilizzarla.*

Una volta sistemata l'aula e la divisione dei gruppi, seguiva il momento della **presentazione del problema**. L'insegnante in entrambi i casi sceglieva

un punto dell'aula (al di fuori di quello tradizionale dietro alla cattedra) per presentare oralmente il problema alla classe. Anche in questo caso, tale scelta ha favorito la creazione di un ambiente di apprendimento condiviso, in cui non esisteva una gerarchia. Ogni persona all'interno dell'aula aveva il diritto di esprimersi, avere e condividere le proprie idee e lavorava con gli altri, “*da pari*”.

In ultima istanza, si consideri che nella maggior parte dei casi il problema non era composto di una sola domanda, ma, seguendo lo *thin-slicing*, era composto da diverse domande di difficoltà crescente. *La prima domanda era presentata a tutta la classe. La seconda (come le successive) veniva assegnata al primo (o ai primi) gruppo che finiva. Stava poi ai gruppi, una volta che avevano finito, “scoprire” la domanda successiva dagli altri.*

5.2.4 Lavoro nei gruppi

Una volta che il problema era stato proposto, iniziava il momento di “esplorazione” da parte dei gruppi. *Gli insegnanti inizialmente si sono limitati a girare per l'aula osservando le VNPS lasciando che i gruppi pensassero e si confrontassero in modo che scaturissero le prime idee.* Ogni membro del gruppo collaborava alla creazione di una strategia risolutiva comune per il problema e verso la creazione di un quadro teorico partendo da una riflessione sugli strumenti teorici che già possedevano.

Successivamente, *qualora il gruppo si fosse bloccato nello svolgimento, gli insegnanti ripercorrevano con loro le idee che erano scaturite e che erano rappresentate sulla VNPS cercando di non fornire una risposta al posto loro.* Tale intervento diventava importante:

- *Se l'insegnante osservava che un membro del gruppo era poco partecipe, oppure indietro col ragionamento rispetto agli altri membri, lo faceva notare chiedendogli (davanti agli altri) se avesse capito, o anche di provare a spiegarlo lui stesso. Qualora non fosse riuscito, la parola passava ad un altro membro del gruppo. In questo modo si è favorita la collaborazione dei membri, facendo sì che nessuno rimanesse indietro.*
- *Se l'insegnante notava che in un gruppo potevano ancora fare qualche passo verso la corretta formulazione o verso anche la dimostrazione di quanto avevano trovato glielo chiedeva indirettamente sottolineando qualche passaggio rappresentato sulla VNPS.*
- *Se passando l'insegnante notava sulla VNPS di un gruppo un passaggio che non gli sembrava molto corretto chiedeva al gruppo di spiegarlo. In questo modo sono emerse alcune misconcezioni che si sono potute risolvere per tempo;*
- *Se il mantenimento dello stato di flow era compromesso, poteva intervenire. Qualora un gruppo non fosse riuscito a proseguire nella risoluzione del problema, poteva fornire dei suggerimenti per evitare il “**disequilibrio di frustrazione**” (senza dire “dovete fare così”): ripercorrendo con loro*

il ragionamento fatto, ricordando concetti passati che potessero tornare utili o ancora fornendo un esempio simile ma lasciando che fossero loro a spiegarlo. Se invece un gruppo avesse finito troppo velocemente, *per evitare* che entrasse nel “**disequilibrio di noia**” *poteva fornirgli il compito successivo o estendere la domanda* (ad esempio chiedendogli di vedere cosa succedeva in un caso particolare).

Il compito degli insegnanti era quindi molto delicato: far notare senza intervenire direttamente, rispondere alle domande degli studenti senza rispondere al loro posto, scegliere se e come rispondere in base alle difficoltà riscontrate dal gruppo. Tutte queste difficoltà però avevano uno scopo: indirizzare gli studenti verso la strategia corretta facendo in modo che continuassero a pensare.

Gli studenti sono quindi stati stimolati a argomentare i loro ragionamenti, a formulare l'enunciato e a dimostrarlo in modo rigoroso (poi eventualmente completato durante la discussione di classe). Siccome tali risultati nascevano da loro e non venivano imposti dall'insegnante, l'idea che la dimostrazione fosse solo qualcosa di difficile da sapere a memoria è stata da loro (almeno in parte) accantonata lasciando il posto a qualcosa di più naturale, frutto di un percorso logico e personale. Ciò è stato favorito tramite la valorizzazione delle loro idee e dalla continuità (aiutata anche dall'insegnante nelle modalità prima descritte) dei loro ragionamenti.

Anche nella stesura delle “**rubriche di autovalutazione**” dei gruppi (così come consigliato dall'approccio TC) non sono state date indicazioni particolari. La Docente2 non ne ha mai fatto uso. Il Docente1 invece in una lezione ha scelto di utilizzarle con un paio di gruppi utilizzando come paramentri:

- **Volume:** lavoro-rumore;
- **Forza di volontà:** alta-bassa;
- **Collaborazione:** alta-bassa.

Tali rubriche sono state create solo durante l'attività dei gruppi e non all'inizio della lezione, in vista dei comportamenti che l'insegnante riscontrava. Per esempio, nel primo dei due gruppi ha usato tutti e tre i parametri, nel secondo invece solo il terzo parametro (perché era quello, secondo lui, in cui presentavano maggiori difficoltà). Ha quindi fornito lui una prima valutazione, in modo che gli studenti si accorgessero di dover modificare il loro atteggiamento, mentre poi nel resto della lezione ha lasciato che fossero loro a segnare dove ciascuno di loro si posizionava nella rubrica.

5.2.5 Confronto dei lavori dei gruppi

Per quanto riguarda il confronto tra i lavori dei vari gruppi (nella parte di lezione prima della discussione) si sono riscontrate delle dinamiche differenti nelle due classi.

Prima del momento di discussione collettiva, *il Docente1 ha deciso di invitare i vari gruppi della Classe1 a osservare il lavoro degli altri* (un esempio di invito fatto da lui è il seguente):

D1: *(diretto alla classe) Ok, ci prendiamo 2 minuti per vedere se notate qualcosa di interessante altrove, di diverso dal vostro. Dopodichè ci possiamo sedere.*

L'insegnante *ha anche chiesto ai gruppi di non cancellare il loro lavoro*, di modo che potessero consultarlo sia loro durante la discussione (qualora volessero controllare qualcosa) sia gli altri gruppi girando tra le VNPS. In questo modo gli studenti potevano girare liberamente tra i VNPS dei gruppi, esplorando strategie diverse dalle proprie. È stato dunque un metodo efficace per mantenere l'interesse prima e durante la discussione.

Si osservi come non sia stata seguita l'idea di "gallery walk" nei minimi termini (con le fasi di selezione, semina e sequenziamento). Per esempio non è stato l'insegnante a selezionare (e far posizionare in riquadri appositi delle VNPS) le strategie dei gruppi né ha scelto lui l'ordine in cui far vedere le VNPS. L'insegnante ha deciso di lasciar loro la totale libertà di passare dall'una all'altra facendo in modo che fosse un'azione autonoma e spontanea.

Si tenga presente che non è stato rivolto questo invito ad ogni lezione. In alcune lezioni, infatti, il docente ha notato che indicativamente tutti i gruppi avevano raggiunto le stesse considerazioni, nello stesso modo, perciò ha ritenuto che non fosse necessario proporre una "gallery walk". Il rischio infatti sarebbe stato di creare un "*disequilibrio di noia*" (nel senso descritto prima) e di far uscire gli studenti dallo stato di flow (in quanto avrebbero rivisto risultati a cui erano già pervenuti durante la lezione).

Per quanto riguarda la Classe2, *la Docente2 ha deciso di non utilizzare la "gallery walk"*, reduce dall'esperienza del progetto dell'anno precedente. Infatti aveva constatato che si manifestava come una ridondanza di informazioni: gli studenti dovevano girare per l'aula solo per rivedere strategie che avevano già esplorato loro stessi. In questo modo si rischiava un calo dell'attenzione, con ripercussioni sulla successiva discussione. L'insegnante ha perciò deciso che fossero loro liberamente a scegliere se girare per le VNPS o meno. Nonostante ciò, durante la discussione, quando risultava vantaggioso, indicava loro alcune VNPS se vi trovava delle considerazioni particolari.

Il confronto di idee tra i gruppi (in entrambe le classi) *non è stato relegato al solo momento di discussione* (o di "gallery walk riadattata" nella Classe1). Durante tutta l'attività è stata lasciata la possibilità che i gruppi interagissero tra loro:

- se un gruppo trovava interessante un passaggio nel ragionamento di un altro, poteva chiedere spiegazioni;
- se un gruppo aveva finito il compito, poteva "rubare" il successivo da un altro;

- se due gruppi si trovavano bloccati nella stessa situazione potevano collaborare momentaneamente.

Anche questa è stata una strategia valida per favorire l'autonomia degli studenti. Gli insegnanti sono intervenuti solo in caso di eccessivo chiasso nelle aule, o se uno di questi scambi rischiava di diventare un "momento di pausa" per gli studenti, evitando che si distraessero.

5.2.6 Discussione con tutta la classe e consolidamento

In seguito al confronto libero tra i gruppi, si è successivamente passati alla fase di discussione di classe. In entrambi i casi, il metodo per condurre la discussione è stato quello dell' "**insegnante-scriba**" definito nell'approccio TC: l'insegnante inizia la discussione del compito e delle soluzioni scrivendo gradualmente, sulla lavagna i risultati discussi e poi condivisi dalla classe.

Come prima accennato la sistemazione degli studenti per questa parte della lezione è stata differente nelle due classi.

Nella **Classe1**, per scelta del Docente1, i gruppi si sono seduti attorno a quella che era l' "**isola di banchi**" più vicina. In questo modo i membri del gruppo potevano confrontarsi tra loro anche durante la discussione e, qualora l'insegnante decidesse di affidare un'altra domanda, potevano discuterla.

Il Docente1 ha scelto di scrivere (in piedi) alla **LIM** durante la discussione. Tale scelta è stata da lui contemplata perché, *a differenza della lavagna nera "tradizionale" a gesso, permette di mantenere un unico file in cui poter scorrere la pagina:*

- tornando indietro nel caso fosse tornato utile rivedere un passaggio precedente;
- andando avanti (invece di cancellare) per poter scrivere altro.

Ciò invece non è possibile con la lavagna tradizionale, la quale esaurisce lo spazio su cui scrivere, costringendo a cancellarne una parte per scrivere altro e non permettendo successivamente la visione di ciò che è stato cancellato. In questo modo è riuscito a mantenere una maggiore continuità del ragionamento creatosi con i compiti che seguivano lo thin-slicing.

Nella **Classe2** invece, i banchi sono stati sistemati ai lati per permettere agli studenti di sedersi "**a ferro di cavallo**" senza che vi fosse alcunché in mezzo. In questo modo durante la discussione potevano vedersi in volto e la Docente2 (che ha preferito usare la lavagna tradizionale), sebbene in piedi, faceva così parte del cerchio. Tale sistemazione è stata scelta per favorire lo scambio tra studenti che si sentivano in questo modo protagonisti e non semplici destinatari del contributo teorico.

L'insegnante se fosse dovuto intervenire, lo avrebbe fatto non dall'alto di una "gerarchia", ma come regista della discussione, consulente e archivista di idee nonché facilitatore che garantiva che:

- tutti potessero dare un contributo, lasciando che parlassero liberamente e qualora qualcuno non fosse intervenuto lo interpellava;
- si mantenesse un certo rigore, una certa logica nel ragionamento collettivo emerso e una certa chiarezza nell'esposizione dei risultati che sarebbero stati riportati sulla lavagna.

Per lo scambio di opinioni non sono stati usati dei metodi particolari per far intervenire gli studenti nelle due classi. L'insegnante ripeteva la consegna del problema e lasciava che fossero gli studenti a intervenire e qualora vi fosse stato un momento di "blocco" in cui nessuno andava avanti nell'esposizione, allora sceglieva se interpellare personalmente uno studente (possibilmente uno che non avesse ancora parlato) o se fornire un suggerimento (per andare avanti col ragionamento o per renderlo più formale e rigoroso).

Il *Docente1* si è posto come obiettivo finale di ottenere con loro i teoremi come ipotesi, tesi e dimostrazione seguendo i vari passaggi logici, invece la *Docente2* ha preferito soffermarsi anche sulla corretta stesura dell'enunciato "a parole" come se dovesse essere scritto in un libro di testo. Questa seconda scelta è stata presa per aiutare gli studenti a ottenere un linguaggio più rigoroso e formale.

Al termine della discussione di ogni domanda, il docente poteva intervenire anche dal punto di vista "istituzionale": se ad esempio si era arrivati ad un teorema che non aveva un nome, allora lui riferiva quello ufficiale (della comunità matematica) ed eventualmente riferiva anche particolari termini che sarebbero stati utili in futuro (per esempio, il *Docente1* ha scritto "trigonometria" alla lavagna, per sottolineare in che ambito della matematica stessero lavorando).

5.2.7 Appunti degli studenti

Nelle due classi gli insegnanti non hanno imposto agli studenti di prendere appunti, in questo modo si sono riscontrate due diverse modalità.

Nella **Classe1**, durante la discussione di classe, *sono stati gli alunni di loro spontanea iniziativa a prendere i propri quaderni o tablet per segnarsi i risultati* che insieme erano stati discussi e che erano stati accettati come condivisi. L'insegnante non si è spostato per l'aula a controllare come li stessero scrivendo, ma si è invece fidato del lavoro svolto insieme durante la discussione e della collaborazione tra i membri dei gruppi. Per aiutarli, teneva aperta la parte del file (alla LIM) riguardante la domanda che stavano discutendo, di modo che potessero basarsi sia su quello che sulla propria VNPS. Una volta che avevano finito di scrivere, si poteva passare alla domanda successiva ripetendo le medesime modalità.

Nella **Classe2** invece, nel corso e al termine della discussione, gli studenti non prendevano quaderni o tablet. Questo, come già accennato, deriva dalla scelta (previamente comunicata dall'insegnante) di fare redigere un “**quaderno di classe**” nel seguente modo:

- dopo aver discusso la domanda corrente con la classe, veniva lasciato il risultato, condiviso da tutti, alla lavagna;
- uno studente era quindi addetto a fotografare il risultato ottenuto;
- un altro, a turno in base alla giornata (seguivano un ordine alfabetico per scegliere chi fosse di turno), avrebbe poi trascritto sul quaderno di classe quanto riportato nella foto.

Questo quaderno è rimasto condivisibile per tutta la classe, anche durante le lezioni, qualora i gruppi avessero dovuto consultarlo.

Si consideri come in entrambi i casi si sia trattato di aiutare gli studenti a prendersi la responsabilità di ciò che hanno imparato durante la lezione e di non ridurlo a un momento passeggero, ma di mettere tutto per iscritto di modo da poterlo consultare in futuro all'occorrenza.

5.3 Metodologia di analisi dei dati

In questa sezione viene descritto come è stata fatta l'analisi qualitativa dei dati, spiegando come siano state scelte le fonti (tra tutti i dati disponibili sopra elencati) e come queste siano d'aiuto ai fini delle domande di ricerca.

Siccome l'obiettivo principale è il confronto tra TSD e TC, in particolare cercando di vedere se una Thinking Classroom sia interpretabile come milieu a-didattico (nei termini descritti da Brousseau), le fonti che verranno qui analizzate sono state scelte come segue.

Per l'analisi sono state scelte le videoregistrazioni delle prime due lezioni (una per classe) svoltesi il primo giorno “sul campo”, ovvero quelle legate all'attività riguardo il “**primo teorema dei triangoli rettangoli**”, secondo i seguenti criteri:

- Queste due lezioni generalizzano il modo in cui si sono svolte le attività nelle due classi (secondo le parti descritte brevemente sopra) durante tutto il progetto e quindi permettono di fare un confronto più generale anche con le fasi distintive di una situazione a-didattica.
- Per poter confrontare i due riadattamenti della TC optati dai due docenti, si è scelto di prendere le 2 lezioni di modo che fossero collegate alla stessa attività. In tal modo è stato possibile evidenziare meglio i vantaggi e gli svantaggi di ciascuna variazione.
- Essendo le prime lezioni, rappresentavano per gli studenti delle “mezzenovità” (“mezze” perché avevano già fatto esperienza di qualcosa di analogo l'anno precedente) e quindi le loro reazioni (a questo modo differente di fare lezione, rispetto al solito) apparivano più evidenti.

- Si sono scelti dei momenti particolari in cui fosse evidente il percorso di costruzione della conoscenza obiettivo della lezione.
- Infine si è cercato di osservare se vi fossero tracce esplicite del contratto didattico o se vi fossero momenti di “rottura” esaminando con attenzione le interazioni che gli studenti avevano tra loro e con l’insegnante per vedere come queste influenzassero la costruzione della conoscenza. Si è inoltre tenuto conto dei “*commenti a caldo*” degli insegnanti contenuti nei file audio da loro forniti.

L’attività che verrà descritta è quella relativa al primo teorema dei triangoli rettangoli, cioè una di quelle per cui *non si è inserito un contesto di “realtà”*. In questo modo la situazione analizzata è la più neutra possibile (non è detto che per ogni conoscenza si riesca a formulare un problema che sia collegabile ad un contesto reale).

Nel prossimo capitolo verrà presentato inizialmente lo svolgimento, con alcuni episodi particolari, della lezione nella Classe1 descrivendo le variazioni apportate dal Docente1 ai principi della TC e successivamente quanto osservato nella Classe2. L’obiettivo sarà evidenziare i momenti in cui le relazioni tra studente, insegnante e sapere diventano più evidenti, sia nella costruzione della conoscenza, sia riguardo al contratto didattico. In seguito poi si cercherà di fornire un’interpretazione della TC come milieu a-didattico, basandosi anche sulle due lezioni per poi vedere se può portare dei vantaggi per la creazione di una situazione a-didattica e per il superamento del contratto didattico.

Capitolo 6

Analisi dei dati

In questo capitolo, verranno analizzati alcuni episodi provenienti dalla prima giornata di registrazione, comprendente quindi la prima lezione in entrambe le classi che hanno aderito al progetto. Le domande a cui si cercherà di rispondere sono:

L'approccio Thinking Classroom può configurarsi come un milieu a-didattico? In tal caso, un milieu così costruito può contribuire a rompere il contratto didattico?

Per poterlo fare, verrà presentata inizialmente la lezione nella Classe1, nelle sue dinamiche e nelle variazioni all'approccio TC apportate dal Docente1, e successivamente, allo stesso modo, la Classe2. Verrà quindi data un'interpretazione delle due lezioni in termini di **situazione a-didattiche** per rispondere alle domande.

Prima di presentare quanto accaduto nella Classe1 è bene ricordare gli obiettivi prefissati (in fase di progettazione) e le consegne dell'attività proposta. Gli **obiettivi** che si volevano raggiungere erano le definizioni di seno e coseno, le relazioni tra l'ipotenusa e i cateti di un triangolo rettangolo e il seguente:

1. Primo teorema dei triangoli rettangoli:

In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è la misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o il coseno dell'angolo adiacente.

Le domande che sono state progettate per raggiungere tali obiettivi erano:

1. *Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di lunghezza i e gli angoli acuti hanno ampiezza pari a 45° . Quanto misurano i cateti in funzione di i ?*
2. *Se il triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di lunghezza i e ha un angolo acuto di ampiezza 30° . Quanto misurano i cateti in funzione di i ?*
3. *Se ora il triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di lunghezza i e ha un angolo acuto di ampiezza 50° . Quanto misurano i cateti in funzione di i ?*

Si tenga conto anche delle due *differenze “organizzative”* che distinguevano le due classi (a prescindere dal volere di docenti e ricercatori).

Al fine di avere sempre almeno due ore consecutive per svolgere ciascuna attività, le ore della mattinata scolastica in cui si sono svolte sono state: per la Classe1 le ultime due ore, mentre per la Classe2 le prime due. Entrambi gli orari avevano i propri vantaggi e svantaggi.

Nella **Classe1** il docente doveva prestare attenzione:

- al mantenimento del flow conscio della stanchezza accumulata dagli studenti nel corso della mattinata, che avrebbe potuto portare ad una diminuzione del loro coinvolgimento;
- a cercare di completare le attività con un certo margine di anticipo rispetto al suono dell’ultima campanella, in quanto alcuni studenti, per tornare a casa, dovevano prendere i mezzi pubblici e quindi uscire anticipatamente. Il rischio era quindi che si perdessero una parte della discussione finale.

Nella **Classe2** allo stesso modo la docente doveva prestare attenzione:

- al mantenimento del flow, conscia che alla prima ora alcuni studenti non sono ancora molto attivi;
- al fatto che l’attenzione degli studenti potrebbe essere deviata verso interrogazioni o verifiche che dovranno svolgere nelle altre ore della mattinata.

La seconda differenza era (come già accennato) nel numero degli studenti: 27 nella Classe1 e 23 nella Classe2. Il Docente1 quindi si è dovuto impegnare per cercare di seguire due gruppi aggiuntivi (nella maggior parte delle lezioni) rispetto all’altra classe.

Per semplicità, i “numeri dei gruppi” qui non rappresentano quelli che effettivamente erano scritti per dividere le VNPS. Inoltre per facilitare la lettura dei dialoghi verrà indicato il **Docente1** con **D1**, **Docente2** con **D2** e verrà usato **S1**, **S2**, ecc per indicare gli studenti di ciascun gruppo.

6.1 Classe1

6.1.1 Il lancio della lezione

Il **lancio** della lezione è durato meno di 5 minuti e si è svolto nel modo seguente. Innanzitutto il docente ha presentato i due tesisti, che si sarebbero prestati alla registrazione della lezione, sia per cortesia, sia per allentare la tensione degli studenti davanti alle videocamere. Successivamente ha chiesto di sistemare tutti i banchi “**a isole**”: così come in seguito ha diviso gli studenti in gruppi di 3, così ha chiesto di fare coi banchi, affinché nel momento di discussione collettiva (cui avrebbe partecipato tutta la classe) i vari gruppi potessero scegliersi un’isola (la più vicina alla proprio VNPS) dalla quale intervenire e prendere appunti.

Sono stati successivamente formati i vari **gruppi** con i seguenti criteri: *3 componenti (4 se rimanevano degli studenti) per gruppo scelti in modo casuale*. Il metodo di scelta utilizzato è stato quello del “**mazzo di carte**” già presentato nel capitolo dedicato alla metodologia. Questo metodo ha permesso di scegliere i componenti dei gruppi in modo totalmente casuale (evitando quindi il “raggruppamento per abilità”) in linea con la TC. Si è così favorito un clima in cui gli studenti potevano parlare da “*pari*”.

Una volta che gli studenti si erano sistemati in piedi davanti ai cellophane, vi è stato il momento della presentazione della **prima domanda**:

D1 *La prima domanda è questa (rivolto alla classe), ascoltate bene. Proviamo come al solito a dirlo solo in forma orale. Abbiamo un triangolo rettangolo con angoli acuti di 45° . L'ipotenusa chiamatela “i”, cioè “i” è il valore dell'ipotenusa, ok? Ci siete? La domanda è, attenzione: quali sono le misure dei cateti in funzione di “i”, cioè dell'ipotenusa? Ok? Quali sono le misure dei cateti in funzione dell'ipotenusa? Chiaro? Proviamo.*



Figura 6.1: Immagine degli studenti della Classe1 in piedi davanti alle loro VNPS

Guardando alla TSD, si può notare come le fasi di **devoluzione** e **implicazione** si fossero già svolte. L'allievo ha accettato di occuparsi del compito nel momento stesso in cui ha pescato la carta dal mazzo e la devoluzione del problema è stata favorita da come è stato organizzato il milieu. Il fatto di aver dato ai gruppi un apposito luogo di lavoro, un pennarello e un cancellino (simboli del loro controllo su quel che avrebbero fatto) ha reso più semplice per loro prendersi la responsabilità della risoluzione del problema. Erano loro a decidere cosa scrivere sulla propria “lavagna”, a decidere cosa andasse bene e cosa cancellare.

In seguito i gruppi si sono messi al lavoro, dando inizio al “**corpo**” della lezione.

Si può osservare come questo momento coincidesse con l'inizio di quella che Brousseau ha chiamato “**fase di costruzione della conoscenza personale**” in cui gli studenti, lavorando in gruppo provavano a trovare una risposta al problema.

6.1.2 Gruppo1 prima domanda

Il **Gruppo1** ha iniziato disegnando un triangolo rettangolo (come riportato nell'immagine) riconoscendo che “se un angolo acuto è di 45° allora deve esserlo anche l'altro”. Sono quindi arrivati alla conclusione che tale triangolo rappresentasse la metà di un quadrato in cui la diagonale era coincidente con l'ipotenusa inizialmente considerata.

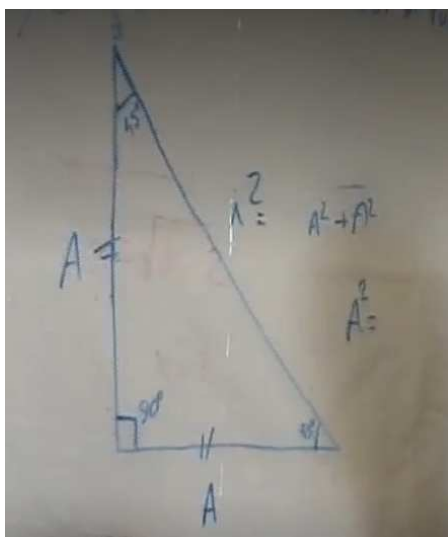


Figura 6.2: Il triangolo disegnato dal Gruppo1 per la prima domanda.

Hanno quindi deciso di chiamare “**A**” entrambi i cateti e di assegnare il valore “**i**” per l'ipotenusa (dato del problema). Utilizzando il teorema di Pitagora hanno quindi scritto $i^2 = A^2 + A^2$.

S1: Fai (*S2 scrive $i^2 = 2A^2$*) esatto (*S2 scrive $A^2 = \frac{i^2}{2}$*).

S1 prende il pennarello e scrive $A = \frac{\sqrt{1}}{2}$.

S1: No, questo qua non è 1 (*corregge e scrive “i” al posto di 1*).

S2: Tutto sotto radice (*prende il pennarello e corregge mettendo la radice per tutta la frazione ottenendo $A = \sqrt{\frac{i^2}{2}}$*). Che, sotto radice...

S1: Ipotenusa per radice di 2.

S2: No, ipotenusa fratto radice di 2.

S1 riflette e scrive i seguenti passaggi in colonna:

$$\rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}i^2}$$

$$i\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

S1: Va razionalizzato. (*modifica e scrive $i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ e infine $A = i\frac{\sqrt{2}}{2}$*)

Il fatto che nel gruppo avessero un solo pennarello ha permesso che questo facesse da “microfono” per favorire uno scambio di voci tra gli elementi del gruppo. Il continuo scambio del pennarello tra S1 e S2 conferma come questo tipo di attività favorisca la collaborazione degli studenti nella costruzione della conoscenza.

L'insegnante nota che S3 non sembra molto partecipe, quindi decide di intervenire:

D1: **A te torna?** (*rivolto a S3*)

S3: Hem, no..?

D1: **Lei non è convinta.**

S1 cerca dunque di spiegare a D1 il ragionamento che hanno seguito

D1: Ah, teorema di Pitagora. (*assenso di S2 e S3*) Ah, allora siete d'accordo. **Cos'è che non ti convince?**

S2: No ha senso... è un po' strana.

S1: Non sappiamo se è questa la razionalizzazione (*riferito a $i\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$*) su questo siamo sicuri, ma sulla razionalizzazione alla fine..

Si osservi come gli studenti, pur inconsapevoli di essere giunti al risultato corretto, non siano sicuri del proprio lavoro. In questo, come scritto nel capitolo riguardo alla TSD, le **situazioni di istituzionalizzazione** diventano fondamentali per lo studente che non riesce ad accettare quanto ha prodotto. Tuttavia, siccome l'obiettivo era che fossero gli studenti ad arrivare alla costruzione della conoscenza da soli, *l'insegnante non ha fornito una risposta diretta*, ma ha agito come segue.

D1: (*copre con la mano $\frac{\sqrt{2}}{2}$*) Quindi se fosse questo pezzo qua (*rimane $i\frac{1}{\sqrt{2}}$*)?

S1: È uguale a questa (*indica $i\sqrt{\frac{1}{2}}$*) con quello che si può portare fuori.

D1: **Giusto?** quindi 1 su radice di due. Già così si potrebbe lasciare in realtà. Poi razionalizzare è utile quando devo fare un calcolo esplicito [...] però va bene siete andati a razionalizzare. **Siete convinti di questo?** (*indica $\frac{\sqrt{2}}{2}$*)

S1: Non siamo convinti se si poteva fare. Che si razionalizzi in questo modo siamo convinti.

D1: Cioè se è lecito scrivere questo $(i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$ e scrivere questo $(i \frac{\sqrt{2}}{2})$? (*assenso di S1*) ok.

S1: Anche perché, c'è il dubbio... Razionalizzare vuol dire moltiplicare da tutte e due le parti, ma qua non c'è l'altra parte. Cioè sarebbe uguale a zero (*scrive* $0 = \text{accanto a } i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$), non esiste proprio (*e lo cancella*).

D1: Ok, **proviamo a chiarirci questo passaggio**.

Si osservi come l'insegnante abbia cercato di aiutarli sottolineando i loro passaggi: "*giusto?*", "*siete convinti di questo?*", "*proviamo a chiarirci questo passaggio*". Ha deciso perciò di dar loro la possibilità di superare quel dubbio, senza risolverlo al posto loro.

Si noti come S1 abbia cercato di applicare il primo principio di equivalenza (per le equazioni) per spiegare il modo in cui hanno razionalizzato. Questa scelta può essere interpretabile come conseguenza di una **clausola di esigenza di giustificazione formale**: S1 ha trovato una risposta insieme ai compagni, ma non lo convinceva appieno, quindi ha pensato di dover cercare motivazioni più profonde. Questo lo ha portato a considerare i principi di equivalenza (scrivendo $0 = i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$) e ad accorgersi che non erano applicabili in quanto mancava un "primo membro" per l'equazione. *La manifestazione di questo aspetto del contratto didattico è stata resa possibile dall'aver creato un clima in cui gli studenti potessero parlare "alla pari" con l'insegnante.* A contribuire è stato anche il fatto che il lavoro del gruppo fosse esposto a tutti sulla VNPS, compreso all'insegnante che è così potuto intervenire (sarebbe stato più complesso per lui notare tale dinamica se avessero lavorato ai banchi).

In seguito l'insegnante, vedendo che alla VNPS non erano stati aggiunti elementi, ha deciso di intervenire per evitare che gli studenti potessero rinunciare a dare una risposta (uscendo dallo stato di flow).

D1: Prendiamo un numero (*scrive*) $\frac{2}{3}$, se vi dico $\frac{4}{6}$ cosa mi dite?

S2: Sono la stessa cosa.

D1: **Posso scriverlo uguale?** (*cenni di assenso*) Non cambia nulla, **perché non cambia nulla?**

S2: Sono equivalenti... Questo e questo (indica $i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ e $i \frac{\sqrt{2}}{2}$) sono equivalenti perché abbiamo moltiplicato per..

S1: Questo e questo si semplificano (*indica* $i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ *in particolare la radice al numeratore e una di quelle al denominatore*)

D1: **Siete d'accordo?** (*S3 annuisce*) stiamo moltiplicando per qualcosa, è vero, ma quanto vale questa frazione (*cerchia* $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$)?

S2: 1.

D1: 1! Quindi se moltiplico per 1 non cambia nulla. Ok, vi lascio al passo successivo.

L'insegnante ha deciso di fornire agli studenti un suggerimento sotto forma di **analogia**. Descrivendo la TSD si è visto come l'uso dell'analogia da parte dell'insegnante comporti per lui il rischio di ricadere (in particolare) nell'**effetto Jourdain**. Il rischio che la responsabilità dell'apprendimento ricadesse nuovamente sul docente, dando la risposta al posto degli studenti, è tuttavia stato evitato. Ha fornito un esempio di frazione semplificabile in analogia a quanto avviene per la razionalizzazione, ma non ha spiegato agli studenti perché i due casi fossero collegati. Sono stati gli studenti autonomamente ad utilizzare l'esempio per comprendere in cosa stessero sbagliando nel loro ragionamento, mantenendo la loro autonomia nella costruzione della conoscenza. In termini Piagetiani, *il conflitto cognitivo è stato superato*.

6.1.3 Gruppo2 prima domanda

Il **Gruppo2** ha fatto ragionamenti simili al Gruppo1, senza tuttavia razionalizzare lasciando invece come risultato $c = \frac{i}{\sqrt{2}}$ (dove "c" rappresenta il valore di uno dei due cateti congruenti e "i" è la lunghezza dell'ipotenusa).

Il docente, vedendo il risultato, ha voluto constatare se i loro ragionamenti fossero corretti.

D1: **È così per principio primo?**

S4: È equilatero.. (*ride distogliendo lo sguardo dalla telecamera*).

D1: (*rivolto agli altri due studenti*) È equilatero?

S6: Sì.

S5: È equilatero e l'ipotenusa è il cateto per la radice.

D1: **Equilatero quindi ha i tre lati congruenti?**

S4: No, nono. (*indica il triangolo*) I due angoli sono uguali.

D1: Non è equilatero.

S4: No, però è la metà di un quadrato, quindi... l'ipotenusa è "c" per radice di 2.

D1: Ma **perché? Questa da dove viene?**

S4: Questo qua in teoria è un quadrato (*completa, con un pennarello di colore diverso, il triangolo ad un quadrato con una linea tratteggiata, assegnando anche un nome ai vertici*).

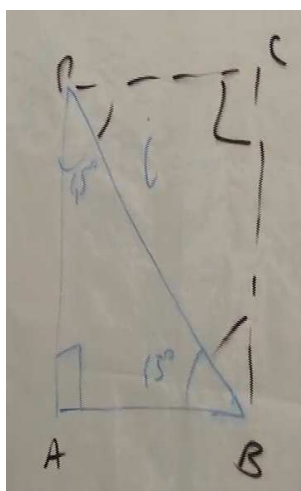


Figura 6.3: Viene riportato il disegno del Gruppo2 relativo alla prima domanda

S4: Cioè ha gli stessi angoli (*indica quelli segnati in nero*).

D1: Quindi dici che questi due sono congruenti? (*indicando AB e AD*)

S4: Sì.

D1: Quindi non è equilatero, è...?

S4: Isoscele.

Anche in questa circostanza, *il fatto che l'insegnante potesse girare liberamente per i gruppi per sentire i ragionamenti ha permesso che emergesse un'errore*. Qualora non fosse passato dal gruppo a farsi spiegare come avessero trovato la formula per trovare il cateto, gli studenti sarebbero stati soddisfatti in quanto avevano raggiunto il risultato, ma sarebbe stato per motivi sbagliati, o poco fondati. Invece, in tal modo, è stato possibile fare emergere dubbi, ad esempio sul triangolo isoscele, e passaggi non immediati ("da dove viene") o non esplicitati, quali l'uso del teorema di Pitagora per trovare la diagonale di un quadrato. Anche in questo caso, l'insegnante ha cercato di suggerire la strada giusta, ma è stato S4 a rispondere e capire l'errore.

L'intervento dell'insegnante è stato efficace anche affinché gli studenti si spingessero oltre, validando il loro ragionamento (riguardante il valore della diagonale di un quadrato).

D1: E da questo (*indica il quadrato*) **come si fa a dimostrare questa relazione qua?**

S5: La radice di due è la diagonale del quadrato.

D1: Eh, ma questa affermazione, da dove..

S5: Teorema di Pitagora.

D1: **Provate a vedere, mettetevi d'accordo su questo.**

L'insegnante si è assicurato che arrivassero autonomamente a dare una dimostrazione del perché il loro ragionamento funzionasse facendo sì che fossero più convinti del loro lavoro.

Si consideri come questo momento possa essere interpretabile come l'inizio di una “**fase di validazione**” interna al gruppo e riguardante la singola prima domanda.

Vale la pena sottolineare, infine, che una delle ragazze del gruppo, S4, specie alla prima lezione, davanti alla videocamera scoppiasse a ridere senza ragione. Probabilmente si sentiva imbarazzata davanti all'obiettivo della videocamera. Forse in questo senso (nella raccolta dei dati) può essere utile usare una videocamera fissata con treppiede sul gruppo, in quanto: se la videocamera è mobile, allora c'è un operatore che la dirige, questo rende più consapevole lo studente del fatto che è, e sarà, osservato nei video; se invece è un oggetto fermo, forse inizialmente produrrà lo stesso effetto, ma nel proseguio della lezione si può supporre che vi si abituerà e nella lezione successiva non avrà più tale “*timidezza*” (quantomeno parzialmente). Tale timidezza infatti potrebbe ostacolare il lavoro dello studente rendendo vana la preparazione dell'ambiente.

6.1.4 Presentazione della seconda e terza domanda

Per quanto riguarda la **seconda e terza domanda**, *il docente non le ha presentate esplicitamente a tutta la classe simultaneamente*, in quanto ogni gruppo ha avuto i propri tempi di risoluzione delle domande e quindi alcuni precedevano gli altri nello svolgimento dell'attività. Si osservi come il fatto che gli studenti potessero seguire i propri tempi di risoluzione significa che ha potuto favorire una costruzione più personale della conoscenza. Se invece l'insegnante avesse accelerato i tempi, sarebbe stato di ostacolo in tal senso e avrebbe riassunto l'intera responsabilità dell'apprendimento.

Il docente ha quindi deciso di dire il compito successivo ad un paio di gruppi per poi lasciare che ciascun gruppo, una volta finito il compito precedente, andasse a “*rubare*” la domanda successiva ad un altro.

Al primo gruppo che aveva concluso la prima domanda ha presentato la seconda nel modo seguente:

D1: Se invece avessi un triangolo, sempre rettangolo, ma con un angolo di 30° , come cambierebbe?

Quando successivamente si è diffusa anche la terza domanda (riguardante l'angolo da 50°) l'insegnante ha deciso di scrivere brevemente le domande alla lavagna multimediale (che è servita da “**banner verticale comune**”, come spiegato nel capitolo riguardo la TC) in modo che tutti potessero consultarle al momento opportuno. Si è limitato a scrivere (testualmente):

angolo 45°
 // 30°
 // 50°

6.1.5 Gruppo3 seconda domanda

Anche il Gruppo3 per la prima domanda aveva costruito un quadrato di cui il triangolo rettangolo (con angolo da 45°) era una metà. Inizialmente, per la **seconda domanda**, hanno pensato di rifare la costruzione precedente, ma gli studenti si sono accorti che nel contesto corrente i cateti non erano congruenti. Hanno deciso quindi di chiamare “a” e “b” i cateti e dare il valore “i” alla lunghezza dell’ipotenusa.

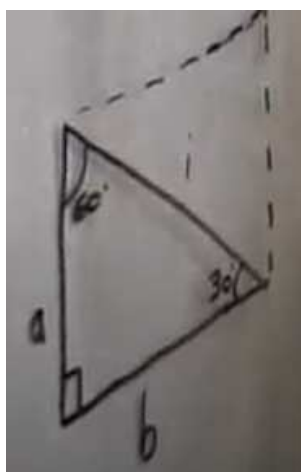


Figura 6.4: Il disegno iniziale del Gruppo3 per la seconda domanda

S8 ha ricordato un precedente teorema che a suo parere poteva essere utile, ma che non riusciva a spiegare come potesse esserlo.

S8: (*prende il pennarello e disegna un triangolo rettangolo*) Supponi che questo sia di 90° . Tu devi proiettare questo.



Figura 6.5: Il disegno di S8

S7: *(cancella ciò che ha disegnato prima)* Ah ho capito.

S8: Qua c'era un quadrato *(indicando uno dei cateti, tratteggia i due quadrati)*... quindi questo *(indica il rettangolo)* è la somma delle due aree *(indica i due quadrati)*.



Figura 6.6: Nell'immagine è presentata la modifica apportata al disegno precedente da S8.

S8 suggerisce di riproporre quel disegno nella loro situazione.

S7: Boh va bene... **io cancellerei proprio.**

S8: **No lascialo, per ricordarci.** "Il cateto di un triangolo rettangolo è equivalente al..."

S8 scrive "I euclide" (inteso come il primo teorema di Euclide). S7 e S9 però non sono d'accordo su quella strada e quindi convincono S8 a cercare insieme un'altra strada.

L'autonomia degli studenti rispetto all'intervento dell'insegnante qui è evidente. Hanno scelto una strada percorribile e di comune accordo, osservando che non li portava nella giusta direzione, hanno deciso di ritornare sui propri passi e provarne un'altra. Hanno deciso quindi di optare per la seguente strategia:

S7: Proviamo a trovare una relazione con coseno e seno.

S8: Esatto.

S7: Col coseno.

S8: **Eh ma quello è più fisica.**

S9: *(mentre S7 alza le spalle)* Comunque lo puoi usare. [...] se hai gli angoli lo puoi fare comunque.

S7: *(prende il pennarello)* Il seno di 30.. il coseno di 30.. quelle cose sono 0,5.. il seno di 30 è 0,5 e il coseno di 60 è 0,5.

S8: Hai detto il seno di 30 e il coseno di 60?

S7: Sì è uguale.

In seguito hanno scritto:

$$a = i \cdot \sin 30$$

$$b = i \cdot \cos 30$$

Il seno e il coseno non sono apparsi all'improvviso. Gli studenti (come già specificato) hanno incontrato in parte i concetti studiando le componenti della forza peso nel contesto del piano inclinato. Si sono quindi ricondotti alle formule e ai valori che si ricordavano. Si noti inoltre il commento di S8: *“eh ma quello è più fisica”*. Quella reazione si può interpretare come un sintomo del **contratto didattico**: S8 si aspettava che quanto imparato durante le ore di fisica non servisse per matematica (aveva la convinzione, probabilmente, che sia la matematica a servire per la fisica e non viceversa). Tale convinzione è sparita grazie all'intervento dei compagni. Ancora una volta l'organizzazione dell'ambiente, la scelta di farli lavorare in gruppo, ha contribuito al superamento del contratto senza l'intervento dell'insegnante.

Successivamente hanno deciso di controllare i valori numerici sulla calcolatrice e il docente, notandolo, ha deciso di avvicinarsi e intervenire:

D1: **Se voi non avete la calcolatrice cosa fate?** Prima l'avete trovato. Voi avete trovato che il seno è 0,5, **riuscite a dimostrarlo?**

Ancora una volta, l'intervento dell'insegnante ha fatto sì che gli studenti provassero a dimostrare il loro ragionamento iniziando una **fase di validazione** per il problema, internamente al gruppo.

L'insegnante ha lasciato lavorare in modo indipendente il Gruppo3, tornando a girare per la classe. Il gruppo ha quindi ripensato a quanto fatto fino ad allora. S7 ha poi proposto il seguente ragionamento agli altri membri del gruppo (qui riassunto):

- ad angolo maggiore corrisponde lato opposto maggiore, come per esempio l'angolo retto e l'ipotenusa;
- il secondo angolo maggiore è quello di 60° , quindi “b” è il secondo lato maggiore (per lunghezza);
- quindi “a” è il più piccolo dei tre lati;
- 60 è il doppio di 30;
- ci deve essere una relazione tra angoli e lati, per questo $b = 2a$.

S8: Troviamo l'area... scrive $A = 2a \cdot a$.

S9: **Perché?**

S8: Che ne so.

S7: Così (*ridono*), si sa mai.

S9: [...] cancelliamo l'area.

S8: Perché magari è giusto?

S9: **Il tuo ragionamento su cosa è basato?**

S8: Lato per lato... In questo caso...

S8, grazie ai commenti dei compagni decide di abbandonare la sua idea. Ancora una volta la dinamica di gruppo è stata decisiva.

S8: Perché non il seno e il coseno, cos'hanno di sbagliato?

S7: Non è che sono sbagliati **però lui vuole così** (*disegna una linea tratteggiata dal vertice dell'angolo retto*).

S7 è consapevole che ciò che hanno fatto prima non era del tutto sbagliato, ma che il docente ha solamente chiesto di dimostrarlo. In questo caso è stato evitato il **paradosso della devoluzione**: l'insegnante non ha detto loro come calcolare i valori, soltanto che poteva esserci un modo; S7 dal canto suo ha accettato ciò che ha detto l'insegnante non come ultimatum, quanto più come consiglio.

Un altro commento è degno di nota:

S8: **Fai un cerchio, sicuramente è quello.**

Anche in questo caso si può trovare una traccia del contratto didattico, una “**clausola delle attese**” che tuttavia è stata rapidamente superata tramite il confronto coi compagni che hanno contribuito con la seguente costruzione.

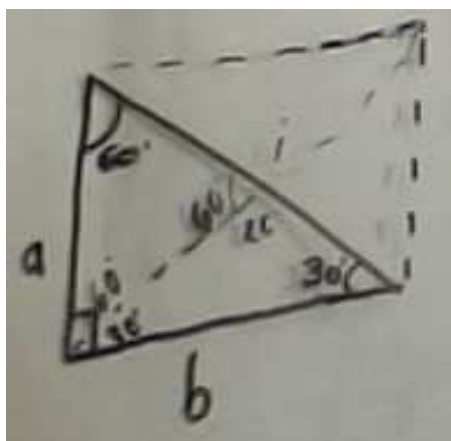


Figura 6.7: Il disegno del Gruppo3

Hanno dedotto che $a = \frac{1}{2}i$ usando il fatto che avevano un triangolo equilatero (quello avente tre angoli di 60°) e uno isoscele (quello avente due angoli da 30°).

S7: Quindi “b” è uguale all’ipotenusa (*osserva la relazione scritta in precedenza, $b = 2a$ e sostituisce $a = \frac{1}{2}i$ ottenendo $b = 2\frac{i}{2}$*).

S8: No, è impossibile.

S7: Questa relazione qua (*indica $b = 2a$*) è sbagliata (*cancellano $b = 2a$ e $b = 2\frac{i}{2}$*).

Gli studenti sono riusciti, esplorando da soli varie strategie, a superare un errore che non avevano considerato: non è detto che vi sia una proporzionalità diretta tra un angolo e il lato ad esso opposto. Questo sarà ancora più chiaro per loro quando costruiranno (in una lezione successiva) il “teorema dei seni”, provando invece la proporzionalità diretta tra le lunghezze dei lati di un triangolo e i seni dei rispettivi angoli opposti.

S8: Allora... dobbiamo trovare “b”. (*si sofferma sulla relazione $a = \sqrt{i^2 - b^2}$ scritta in precedenza*).

S8: Una volta che sai “a”...

S7: Sì, so “a” e “i”... uso il teorema di Pitagora.

Hanno scritto allora:

$$b = \sqrt{i^2 - \left(\frac{i}{2}\right)^2} = \sqrt{i^2 - \frac{i^2}{4}} = \sqrt{i^2\left(\frac{3}{4}\right)} = i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Riassumendo infine quindi che:

$$b = i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{i}{2}$$

Il processo di costruzione della conoscenza è stato pieno di ostacoli, ma composto di diversi adattamenti. Gli studenti sono riusciti ad esplorare varie possibilità andando incontro a differenti “conflitti cognitivi” che hanno superato modificando di volta in volta il loro sistema di conoscenze.

Per concludere, in merito alla seconda domanda, si sottolinea che la costruzione più diffusa negli altri gruppi è stata quella che prevedeva di specchiare il triangolo rettangolo (da 30° e 60°) di modo da ottenere un triangolo con tre angoli di 60°, quindi equilatero. In questo modo, ragionando sui lati congruenti, sono giunti alla soluzione.

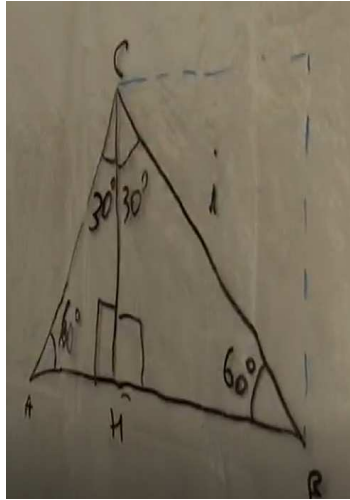


Figura 6.8: Costruzione alternativa per la seconda domanda

6.1.6 Gruppo5 terza domanda

In merito alla **terza domanda** (angolo da 50°), sono state significative le considerazioni del **Gruppo5**. Sono riusciti a ottenere le relazioni (“a” è il cateto opposto all’angolo da 50° e “b” quello adiacente) qui testualmente riportate:

$$\begin{aligned} a &= i \cdot \sin 50^\circ \quad \backslash \quad i \cdot \cos 40^\circ \\ b &= i \cdot \cos 50^\circ \quad \backslash \quad i \cdot \sin 40^\circ \end{aligned}$$

Hanno in seguito scritto le relazioni:

$$\begin{aligned} \sin 50^\circ &= \cos 40^\circ \\ \cos 50^\circ &= \sin 40^\circ \end{aligned}$$

D1 notando che cercavano di calcolarne i valori effettivi, ha deciso di consentir loro l’uso della calcolatrice. In questo modo sono riusciti inoltre ad arrivare alla conclusione che tali uguaglianze valgono per angoli complementari.

È necessario evidenziare che l’insegnante, nonostante questo approccio all’insegnamento permetta una certa libertà agli studenti, ogni momento deve fare delle scelte che influenzeranno il milieu e l’apprendimento dello studente. Un esempio è proprio la scelta di permettere agli studenti l’utilizzo della calcolatrice: da una parte, nelle prime due domande, il suo utilizzo avrebbe potuto impedir loro di fare ragionamenti ulteriori, dall’altra, nella terza, ha permesso loro di fare delle considerazioni aggiuntive.

6.1.7 Chiusura della lezione

All'inizio della chiusura della lezione, prima del momento di discussione collettiva, il docente ha deciso di invitare i vari gruppi a osservare il lavoro degli altri:

D1: (*alla classe*) Ok, ci prendiamo due minuti per vedere se notate qualcosa di interessante **altrove**, di diverso dal vostro. Dopodichè ci possiamo sedere.

Questo invito non è stato fatto ad ogni lezione. In alcune lezioni infatti il docente ha notato che indicativamente tutti i gruppi avevano raggiunto le stesse considerazioni, nello stesso modo, perciò *ha ritenuto che non fosse necessario proporre una "gallery walk"*. Il rischio infatti sarebbe stato di creare un **"disequilibrio di noia"** (nel senso descritto prima) e di far uscire gli studenti dallo stato di flow (in quanto avrebbero rivisto risultati a cui erano già pervenuti durante la lezione). In questo caso tuttavia, viste le differenti strategie (che i gruppi non avevano cancellato dalle loro VNPS), è stato un espediente per mantenere l'interesse prima e durante la discussione. Si osservi come *non sia stata seguita l'idea di "gallery walk" nei minimi termini* (con le fasi di selezione, semina e sequenziamento). Per esempio non è stato l'insegnante a selezionare (e far mettere in riquadri appositi delle VNPS) le strategie dei gruppi né ha scelto lui l'ordine in cui far vedere le VNPS lasciando loro la libertà di passare dall'una all'altra.

In seguito il docente ha chiesto ai gruppi di sedersi ciascuno nella propria **"isola di banchi"**, mentre lui si è disposto davanti alla LIM.

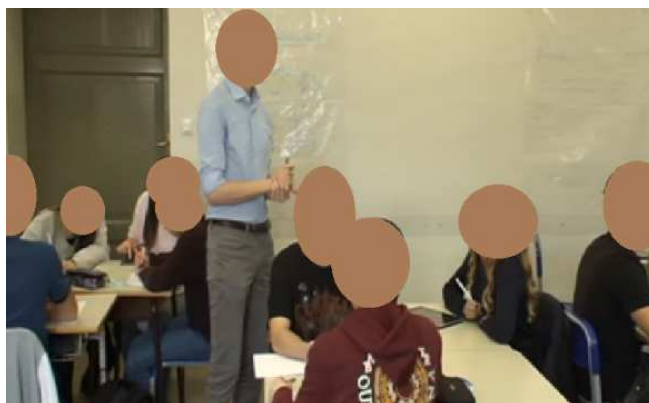


Figura 6.9: Il momento di discussione durante la quale i gruppi sono seduti nelle "isole"

È necessario evidenziare che *tutti gli studenti hanno preso spontaneamente quaderni e tablet per prendere appunti, senza che fosse l'insegnante a richiederlo*. Alcuni degli studenti, in base alla disposizione delle sedie intorno alle isole sono rimasti con le spalle alla LIM, girandosi solamente quando il docente scriveva,

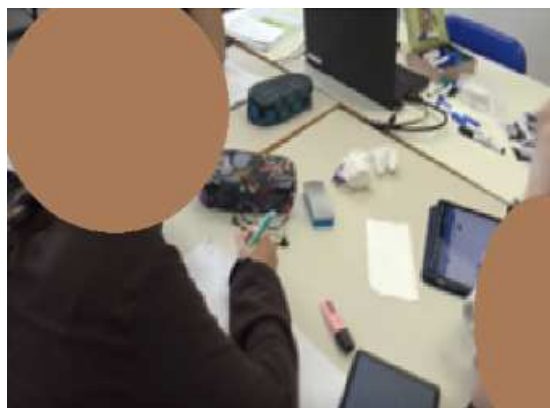


Figura 6.10: Studenti che prendono appunti durante il momento di discussione di classe

aumentando il rischio di distrazione. Solo con le lezioni successive alcuni gruppi decidevano di sistemarsi frontalmente alla LIM (risistemando la propria isola). Il docente ha fatto quindi iniziare la **discussione tra i gruppi** scrivendo alla LIM “**trigonometria**”:

D1: Ci siete? Ok, diciamo che io vi ho scritto questo parolone della quale ci stiamo occupando. Intanto non è latino, ma è greco. Non preoccupatevi, non possiamo sapere il greco, però un’idea ce la possiamo avere. Trigonometria, cosa vorrà dire?

S15: Tre.

D1: Tre qualcosa? Tre angoli. “Trigonon”, quindi triangolo e metria, quindi misura. La misura dei triangoli. State esplorando i triangoli. Ci stiamo occupando di **triangoli rettangoli** (*scrive “triangoli rettangoli”*).

Questa è una **situazione di istituzionalizzazione**: l’insegnante sta fornendo agli studenti il nome ufficiale che racchiude ciò di cui hanno trattato durante la lezione.

Successivamente è iniziato il momento di “**discussione collettiva**” in cui l’insegnante-scriba trascriveva alla lavagna ciò che gli studenti gli dicevano.

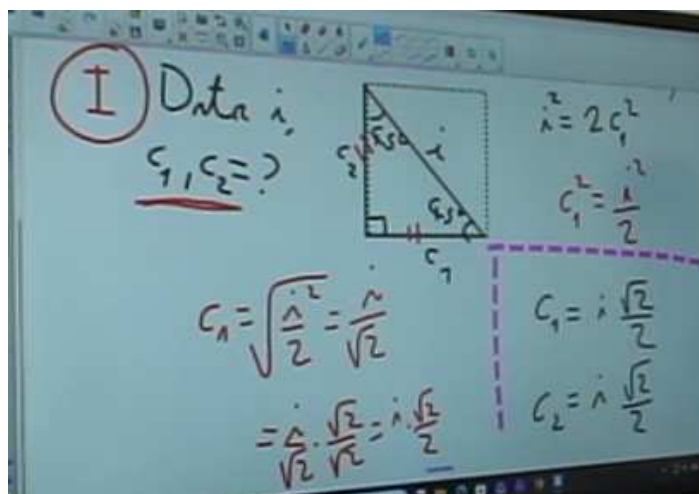


Figura 6.11: Risultati ottenuti a seguito della discussione sulla prima domanda

Riguardo, ad esempio, la **seconda domanda**, l'insegnante ha deciso di porre l'attenzione su una delle VNPS chiedendo a uno degli studenti (non appartenente al gruppo di cui si osservava il lavoro) di interpretare quanto scritto da altri.

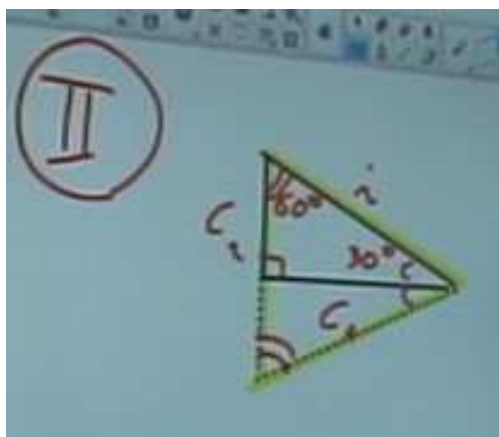


Figura 6.12: Il disegno preso da una VNPS e riproposto dall'insegnante

S4: Hanno ribaltato.

D1: Hanno ribaltato, quindi dici: hanno tracciato un triangolo che è identico simmetrico rispetto al primo, **giusto? Perché lo hanno fatto? Cosa viene fuori?** (S4 mormora "triangolo equilatero") Un triangolo equilatero, **come facciamo a sapere che questo triangolo è equilatero?**

S4: Perché tutti gli angoli sono di 60.

D1: Sono di 60, quindi 3 angoli congruenti quindi anche i 3 lati sono congruenti... **Dice bene?** (rivolto alla classe) Quindi se prendo il simmetrico ottengo un triangolo equilatero. Siamo

tutti d'accordo che questo è equilatero? (*come angoli ha scritto solo quelli del triangolo iniziale che ha disegnato alla LIM*). Questo diceva è di 60 (*indicato con doppio arco*), e questo è la somma di due da 30 (*indica la figura*) quindi è 60, 60, 60. (*momento di silenzio e di presa di appunti*) Prego S15 vuoi andare avanti? Ah no, sei di quel gruppo lì... S10? abbiamo visto che questo qui è un triangolo equilatero, **come ci aiuta?**

S15: Hem...

S10: (*mormora qualcosa, la gamba destra si muove su e giù nervosa*) Sono... congruenti.

D1: Dici "sono congruenti"... **quindi?**

S10: Quindi...

D1: Mi interessa la misura di C_2

S10: Sarà la metà di...

D1: Ok, è la metà di tutto il lato. Tutti d'accordo? Guardate che abbiamo già una risposta pronta: il cateto2 è la metà dell'ipotenusa. **Giusto?** Perché... (*scrive $C_2 = \frac{i}{2}$*) **Tutti d'accordo?** Quindi il cateto2 è facile. Invece (*scrive C_1 e riceve un suggerimento*) ok è l'altezza del triangolo equilatero. **Come facciamo?**

S15: Possiamo usare il teorema di Pitagora e al posto di cateto2 possiamo mettere (*dice la formula appena trovata*).

D1: Ok, usiamo Pitagora. **D'accordo? Guidatemi** (*S15 detta e D1 scrive $C_1 = \sqrt{i^2 - (\frac{i}{2})^2}$*) **Poi come vado avanti?**

S5 gli detta i passaggi successivi:

$$= \sqrt{i^2 - \frac{i^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}i^2}$$

D1: Chiedo a... S12: riusciamo a semplificare il risultato? Si può semplificare quella radice?

S12: Ho un quadrato al denominatore (*detta il resto e D1 scrive $C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$*) **Tutti d'accordo?** Ci siamo, abbiamo trovato anche nel caso di un angolo di 30° .

Leggendo questo estratto del dialogo si possono fare diverse considerazioni. Si osservi come il Docente1 si sia sforzato in ogni modo di avere la partecipazione degli studenti nella conversazione. Prima ha chiesto in generale alla classe se vi fosse qualcuno che volesse intervenire, poi (qualora avesse notato poco riscontro) ha provato interpellando i singoli. Gli studenti riuscivano a esporre le idee trovate nei gruppi, ma l'insegnante si è visto il più delle volte costretto a completare quello che dicevano. In questo modo era lui a parlare per la maggior parte del tempo.

L'insegnante, visto il poco feedback degli studenti durante il momento di discussione, è stato spesso costretto a cogliere i più piccoli suggerimenti o sussurri provenienti da ogni parte dell'aula, finendo per completare alle volte egli stesso le risposte alle domande che aveva posto agli studenti. Questo tuttavia *non rappresenta un caso di effetto Topaze* (secondo la TSD): lui ha completato le risposte, cercandole in quelle approssimative dei suoi studenti, sapendo che vi erano arrivati durante l'attività perché se ne era accertato girando per i gruppi.

Le cause per il loro poco coinvolgimento in questa parte (in confronto a quello dimostrato nel resto della lezione) possono essere:

- Il fatto che si stessero avviando verso la fine dell'ultima ora della mattinata scolastica (con quindi un accumulo di stanchezza sulle spalle).
- Lo stesso docente (come verrà riportato in seguito) ha espresso in uno dei suoi “**commenti a caldo**” (condivisi coi ricercatori e l'altro docente) la sua preoccupazione. Ha notato infatti come gli studenti partecipassero con poco interesse durante questa singola fase della lezione. Secondo lui la causa stava nel fatto che il più della discussione si era già svolto nei gruppi, così anche come gran parte del momento di “istituzionalizzazione”, perciò il momento di discussione collettiva, per la sua ridondanza, provocava una perdita di attenzione non indifferente (e quindi un'uscita dallo stato di flow).
- Un'altra motivazione potrebbe essere la sistemazione degli studenti durante la discussione. Il fatto che fossero, per questa parte di lezione, seduti ai banchi ha permesso loro di prendere appunti (facendosi aiutare anche dai compagni che “sostavano nella stessa isola”), ma ha anche ricreato in un certo modo la dinamica “tradizionale”. Questo è testimoniato ad esempio dal comportamento (inconscio) di S10 che era tanto nervoso da agitare perennemente la gamba mentre doveva rispondere. L'insegnante, infatti, era alla LIM e parlava mentre gli studenti erano seduti ai banchi a prendere appunti su quanto diceva. Durante la discussione guardavano il loro lavoro alle VNPS e spesso lo usavano per completare meglio i loro appunti, ma il più lo prendevano da ciò che era stato condiviso dalla classe e ufficialmente scritto dal docente.
- Forse è intervenuto il contratto didattico: l'insegnante che cerca più volte di coinvolgere gli studenti in una fase in cui questi ultimi si aspettano che debba intervenire solo l'insegnante. Una fase in cui “lo studente prende appunti su quel che l'insegnante spiega”.

Sarebbe quindi utile pensare, in casi come questi, a modi alternativi per far sì che gli studenti intervengano di loro iniziativa.

Per quanto riguarda **l'ultima domanda**, sono giunti (dopo un breve scambio) alla definizione di seno e coseno (così come mostrato nell'immagine).

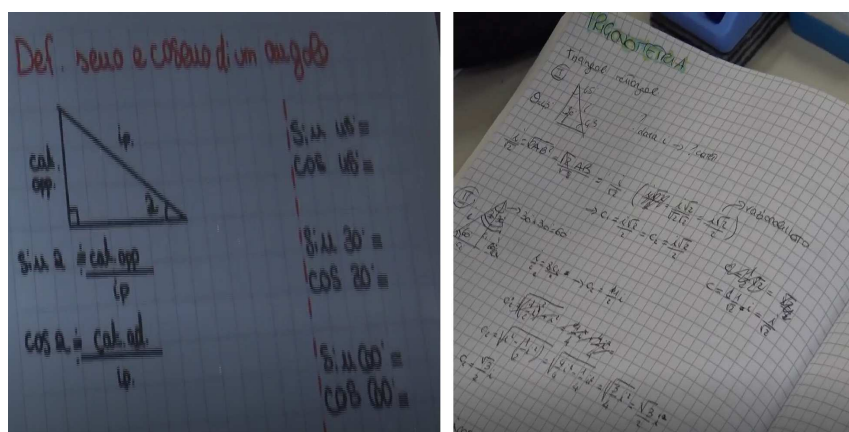


Figura 6.13: Esempi di appunti presi dagli studenti durante il momento di discussione di classe

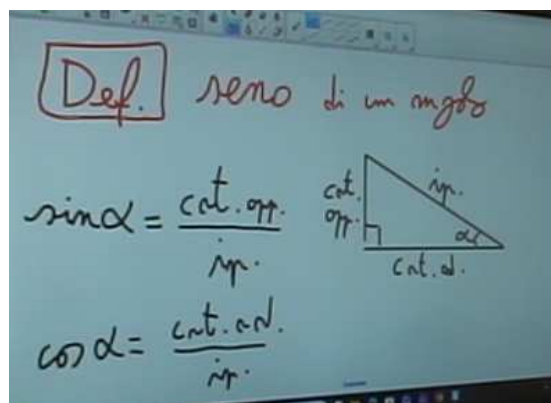


Figura 6.14: Definizioni di seno e coseno concordate con la classe

In seguito l'insegnante ha chiesto loro:

D1: Se siete d'accordo, adesso vi chiedo, alla luce di quello che avete trovato voi: trovate questi valori (*scrive* $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$) all'interno del gruppo.

Gli studenti quindi si sono confrontati nei gruppi rimanendo ai banchi, consultando anche quanto avevano scritto sulle loro VNPS. In questo modo l'insegnante voleva che formalizzassero (sullo stile di quanto avevano scritto alla LIM) i loro risultati e qualora qualche gruppo non avesse scritto i valori durante l'attività, poteva ragionarvi. Si è poi svolta un'ultima discussione di classe in merito, seguendo le stesse modalità di prima.

Oltre ai valori cercati hanno anche raggiunto (aiutati dalla VNPS del Gruppo5) la conclusione che se α e β sono complementari allora:

$$\sin \beta = \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \sin \alpha$$

Si osservi che sono stati definiti seno e coseno (implicitamente) solo per angoli acuti. Nelle lezioni successive è emerso anche per gli angoli ottusi.

Si tenga presente che alla fine della discussione, rimanevano ancora quindici minuti al suono della campanella, perciò il Docente1 ha deciso di iniziare il problema legato al teorema successivo. Consapevole che tuttavia alcuni dovevano uscire perché pendolari, lo hanno ricominciato la volta successiva.

La Docente2 invece, in un paio di occasioni in cui ha concluso prima del suono della campanella, ha deciso di non iniziare un problema che gli studenti avrebbero lasciato incompleto. Occupava il tempo in modo differente, come ad esempio riconsegnando delle verifiche (corrette) agli studenti.

6.1.8 Alcune osservazioni

Dal punto di vista della **TSD** si può osservare che le **sei fasi** della situazione a-didattica non sono distribuite in modo uniforme e ordinato. Le due fasi di **devoluzione** e **implicazione** si sono pressoché svolte nel lancio della lezione. Benché infatti l'insegnante abbia devoluto tre differenti problemi agli studenti, è stata l'accettazione della responsabilità della risoluzione della prima domanda a fare la differenza. L'accettazione delle altre due domande invece è stata resa possibile dal mantenimento del flow.

La **fase di costruzione di conoscenza personale** veniva vissuta da ciascun gruppo dal momento in cui ricevevano la domanda (iniziando quindi una "situazione di azione" in cui cercavano una risposta) fino al momento in cui l'insegnante, passando dal gruppo, chiedeva di formalizzare o giustificare il loro ragionamento.

Per quanto riguarda invece la **fase di validazione**, questa si è completata all'interno dei lavori di gruppo alle VNPS, con l'aiuto dei vari interventi dell'insegnante per far loro esplicitare e giustificare i ragionamenti.

Si può invece osservare come le fasi di **socializzazione** e **istituzionalizzazione** non siano state prettamente separate bensì fuse in una tramite il continuo scambio insegnante-studenti. Qualche traccia di istituzionalizzazione ciononostante rimane evidente, sia nel "completamento" che l'insegnante ha dato a seguito degli interventi degli studenti (nella discussione) sia dall'aver scritto inizialmente "trigonometria", donando al lavoro fatto un "*timbro di ufficialità*".

Per quanto riguarda i **quattro tipi di situazioni** che caratterizzano una situazione a-didattica, invece, si può osservare queste si siano ripetute per ogni domanda col seguente schema:

- una "**situazione di azione**" in cui ogni gruppo lavorava da solo sul problema corrente;
- "**situazioni di formulazione e validazione**" che si alternavano all'interno dei gruppi (favoriti spesso dagli interventi dell'insegnante).

La “**situazione di istituzionalizzazione**” invece è stata più frequente durante la discussione collettiva diretta dall’insegnante.

La costruzione della conoscenza, per come è stato organizzato l’ambiente dall’insegnante, è stata il risultato di un percorso personale e condiviso all’interno dei gruppi. Questo è stato evidente nella parte antecedente alla discussione: gli studenti ricevevano la domanda, provavano diverse strategie, quanto una non funzionava si creava il “*conflitto cognitivo*” che veniva risolto tramite processi di accomodamento, tramite la collaborazione tra gli studenti nel gruppo o tramite un suggerimento dell’insegnante (che li stimolasse).

In conclusione si osservi nuovamente che il Docente1 non ha seguito nei minimi particolari tutte le indicazioni per creare una TC, ma ha proposto un suo riadattamento che ne ha portato in luce i vantaggi e che ha portato al raggiungimento degli obiettivi.

Si è osservato inoltre come *vi siano molti aspetti in comune con lo svolgimento di una situazione a-didattica* e di come anche la TC possa contribuire al superamento del contratto didattico, che non sparisce totalmente, ma riesce a manifestarsi e a risolversi (nella maggior parte dei casi) per merito sia della collaborazione tra gli studenti sia per l’intervento tempestivo dell’insegnante. Questi aspetti verranno evidenziati meglio in seguito in una sezione a parte.

6.2 Classe2

Per quanto riguarda la **Classe2**, siccome vi sono molti punti in comune rispetto a come si è svolta la lezione nella Classe1, in questa sezione vengono presentati solo gli episodi che presentano delle differenze (rispetto a quanto fatto dal Docente1) nell’adattamento della TC apportato dalla Docente2. Non sono state riscontrate particolari tracce di contratto didattico, tuttavia tale sezione offre elementi ulteriori sulla possibilità di considerare l’ambiente organizzato in una TC come un milieu a-didattico.

6.2.1 Il lancio della lezione

Per iniziare la lezione, la Docente2 ha chiesto agli studenti di *sistemare i banchi*, in modo simile alla Classe1, disponendoli “**a isole**” casualmente per l’aula, per favorire il proprio passaggio tra i gruppi durante l’attività. Questa sistemazione è stata momentanea e ridistribuita (come poi viene scritto di seguito) al momento della discussione di classe.

Successivamente *sono stati formati i gruppi, con il **metodo del mazzo carte*** (questo è stato l’unico metodo utilizzato nella Classe2 per la creazione dei gruppi durante il progetto), che si sono sistemati o alla lavagna d’ardesia, o ai vari cellophane (*in nessuna delle lezioni né insegnante né studenti hanno utilizzato la LIM*). L’insegnante ha poi presentato la prima domanda nel modo seguente:

D2: Lavoriamo su un triangolo rettangolo di ipotenusa nota e un angolo acuto di 45° . Vi chiedo di calcolarmi in funzione dell'ipotenusa la misura dei cateti.



Figura 6.15: Due gruppi di fronte alle proprie VNPS

6.2.2 Gruppo2 prima domanda

Un primo momento di interazione, durante lo svolgimento della prima domanda, tra il **Gruppo2** e la docente è stato il seguente:

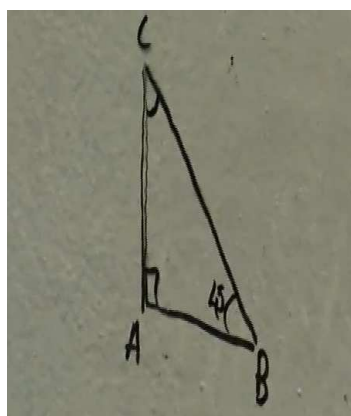


Figura 6.16: Il triangolo disegnato dal Gruppo2 per la prima domanda

S4: Abbiamo ragionato sia con quello che sapevamo già magari da fisica che il $\cos 45$ e il $\sin 45$... e poi abbiamo ragionato, siamo andati a ragionare sul fatto che è metà quadrato quindi AB e BC (*si corregge*) AC sarebbero i lati del quadrato, BC sarebbe la diagonale. Quindi la diagonale sappiamo che è il lato per $\sqrt{2}$ e essendo nota BC, per trovare il lato dobbiamo fare la diagonale fratto $\sqrt{2}$ e **quindi viene la diagonale per $\frac{\sqrt{2}}{2}$** .

D2: Va bene. Vi chiedo: **perchè** la diagonale è il lato per $\sqrt{2}$?

S5: Per... **il teorema della diagonale del quadrato...**

D2: Cioè? c'è un teorema proprio espresso che si chiama "il teorema della diagonale"?

S5: No, però, eh... (sorridendo) sarebbe.. il lato (*scrive "l" su uno dei cateti*) facciamo il teorema di Pitagora e troviamo la diagonale.

D2: Ok, quindi conosciamo questo lato per $\sqrt{2}$ per il teorema di Pitagora.

Si osservi come il fatto che l'aula sia stata sistemata di modo che l'insegnante potesse girare liberamente per i gruppi in questo caso ha permesso di sistemare un dettaglio teorico non indifferente. Come scritto in precedenza, l'obiettivo era di aiutarli a costruire una teoria, quindi di farlo con un certo formalismo e una certo rigore nei ragionamenti. L'insegnante è intervenuta non direttamente, ma chiedendo solo da dove venisse il ragionamento, in questo modo è stato poi lo studente a giustificare il lavoro del gruppo. Tale **“esigenza di giustificazione formale”** indotta dall'insegnante *non risulta come una clausola del contratto didattico, ma è giustificato dalla situazione e dall'obiettivo delle attività*: ottenere risultati teorici con un certo formalismo e rigore adatti a classi di un liceo scientifico. La figura della docente non era importante quindi solo alla fine della discussione di classe, per quanto riguardava la *“istituzionalizzazione”* delle conoscenze che si stavano costruendo, ma anche durante l'attività.

6.2.3 Gruppo3 prima domanda

Il Gruppo3 ha deciso inizialmente di seguire *quanto avevano imparato in fisica*, disegnando un corpo appoggiato ad un piano inclinato di 45° e di risolvere il problema utilizzando le formule (che implicavano l'uso di seno e coseno) per trovare le componenti della forza peso (rappresentati dai cateti del triangolo rettangolo del problema).

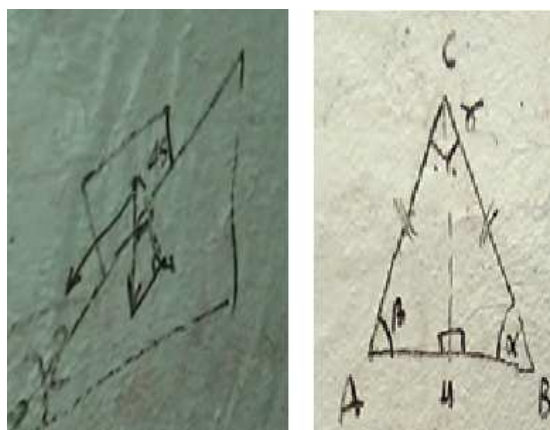


Figura 6.17: Il “piano inclinato” e il triangolo rettangolo disegnati inizialmente dal Gruppo3

L'insegnante (*essendosi assicurata che la VNPS fosse ben esposta*) ha osservato il loro ragionamento e ha considerato come abbiano notato che entrambi gli angoli acuti fossero di 45° e abbiano concluso che i cateti fossero congruenti.

D2: Va bene, far ricorso alla fisica ci piace, però, in una situazione di questo tipo che è triangolo rettangolo isoscele perchè avete angoli che sono congruenti a 45° , l'avete detto voi, e sappiamo che AB è noto. Questi due lati (*indica AC e BC*) avete segnato voi che sono uguali, non riesco a trovarli usando un teorema senza tracciare questa perpendicolare che in qualche modo ci crea qualche problema? [...] Proviamo a fare un triangolo rettangolo con l'angolo di 90 magari sulla nostra base AB, scusa base AC. (*una delle ragazze abbozza un disegno confuso*) no facciamolo qua l'angolo retto. **Vi diventa più semplice pensarlo?** Per esempio, questo è noto (*indica l'ipotenusa*) e questi due li devo trovare (*i cateti*) e qua ho l'angolo da 45 (*indica l'angolo al vertice in alto*). Su questo triangolo rettangolo **cos'è che potrei applicare?** (*momento di silenzio*) potete usare anche l'incognita no anche?



Figura 6.18: Il triangolo disegnato dal Gruppo3. Nell'attività in seguito hanno cambiato, sotto consiglio dell'insegnante, la notazione scegliendo come incognita "x" uno dei cateti (in quanto l'ipotenusa era un dato del problema).

L'insegnante ha fornito loro un suggerimento in merito alla realizzazione del disegno, permettendo che andassero avanti col problema e si mantenesse lo stato di flow.

In seguito S8 e S9 hanno proposto di utilizzare il teorema di Pitagora.

D2: Possiamo?

S8: Ah beh sì, l'altezza c'è.

D2: Possiamo.

S8: Che stupida. Sì (*assenso di S7*).

D2: (*con tono ironico*) Vi sta agitando il cameraman secondo me (*ridono*). Voi siete andate subito su l'ambito fisico, però magari in questo caso...

La Docente2 ha deciso di restare ad osservare fino a quando non avessero trovato la risposta. Dopo varie difficoltà e errori di calcolo (come $x^2 + x^2 = (2x)^2$) sono giunti alla soluzione. L'insegnante ha tuttavia commentato:

D2: **Ok, però svegliamoci per favore perchè sembriamo intorpiditi da qualcosa che non va.**

S8: Eh siamo un po' addormentati.

In questo caso *l'intervento dell'insegnante è stato troppo lungo e troppo incisivo, rispetto alla libertà e all'autonomia che si sarebbe dovuta concedere agli studenti*. Questa scelta probabilmente è stata dettata da vari fattori come: quanto conosce gli studenti; quanto tempo impiegavano a dare le risposte alle sue domande; il “*fattore tempo*”, essendo stata solamente la prima domanda temeva che ne impiegassero troppo e non riuscissero a finire tutta l'attività. La risposta è stata comunque trovata direttamente dagli studenti e l'insegnante è intervenuta solo dando loro un **suggerimento** iniziale (in merito al disegno) e poi aiutandoli nel fare i giusti calcoli. Il commento “*eh siamo un po' addormentati*” della studentessa è la *conseguenza di aver iniziato l'attività alla prima ora scolastica*.

6.2.4 Terza domanda

Per quanto riguarda la presentazione della seconda domanda (così come in seguito per la terza) la Docente2 ha deciso di comunicarla solamente ai primi gruppi che avevano risposto a quella precedente. *Non ha utilizzato un banner verticale comune, ma ha preferito che fossero i gruppi a passarsi la domanda alimentando così il senso di collaborazione tra gli studenti.*

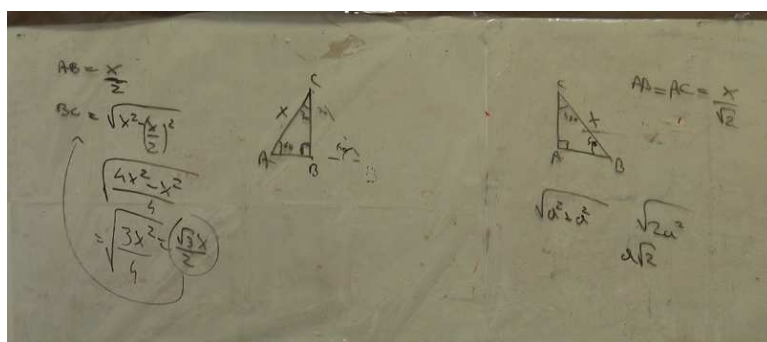


Figura 6.19: Visuale della VNPS di uno dei gruppi durante lo svolgimento della seconda domanda

Per esempio, gli studenti del **Gruppo4** hanno iniziato la **terza domanda** dopo averla sentita da altri gruppi che ne stavano discutendo.

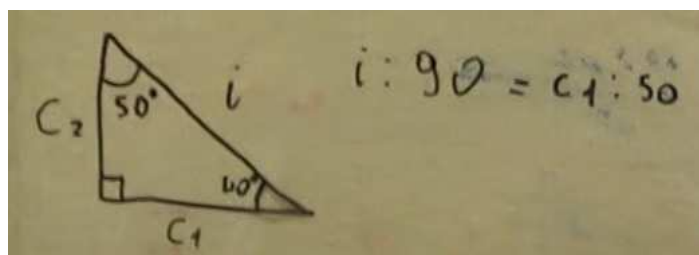


Figura 6.20: Primo tentativo di risoluzione della terza domanda del Gruppo4

Dopo alcuni minuti, in cui hanno provato a dare una risposta cercando una relazione di proporzionalità tra un angolo e il cateto ad esso opposto, è intervenuta l'insegnante:

D2: Esiste una proporzione che ci lega...?

S10: Ci proviamo.

D2: Ci provi, ma ce l'avevamo?

S10: No.

D2: Ok, cos'è che vi blocca.

S10: Qua sapevamo che è isoscele (*il triangolo del primo quesito*), qua sapevamo vabeh che è la metà di un triangolo equilatero (*il secondo quesito*). Qua non sappiamo più...

D2: Niente... ma portati a **doverlo risolvere perchè altrimenti prendo un brutto voto... Lo devo risolvere... Oppure devo costruire qualcosa a casa e lo devo risolvere**, con tutti gli strumenti che anche mi porto dietro che non per forza arrivano da una matematica pura. [...] Io qua vedo che in qualche modo li avete già recuperati, anche se qua...

S10: Possiamo risolverlo con seno e coseno.

D2: (assenso) Eh.

S10: **Ah, possiamo farlo?**

D2: Cosa possiamo scrivere?

S10: Sappiamo che $C_1 = i \cdot \sin 50^\circ$, o $i \cdot \cos 40^\circ$

D2: Ok, C_1 e C_2 ?

S10: $C_2 = i \cdot \cos 50^\circ$, o $i \cdot \sin 40^\circ$, quindi in questo caso sono la stessa cosa.

D2: Sì... quindi nel momento in cui fossi costretta [...] alternative non ne avevi.

S10: No.

D2: Ok, ci fermiamo, va bene.

Gli studenti si erano resi conto che cercare una proporzione non era la strada migliore, ma è stato *l'intervento dell'insegnante che ha permesso loro di*

esplorare altre opzioni. Inizialmente si erano bloccati riflettendo su come fossero riusciti a trovare delle costruzioni per rispondere alle altre due domande, cercando di trovarne una che fosse adeguata anche per la terza. Questo ragionamento è in linea con il modo in cui sono state progettate le domande (con lo *thin-slicing*), perciò se le prime due domande avevano una propria costruzione per risolverle, per loro doveva esserne una anche per la terza. Proprio per l'intervento dell'insegnante tuttavia riescono a scegliere una strada alternativa, che non pensavano di poter prendere in considerazione (*“ah, possiamo farlo?”*): usare seno e coseno così come avevano studiato in fisica. Il motivo per cui non hanno pensato al loro utilizzo è probabilmente il medesimo incontrato in uno dei gruppi della Classe1, quindi non viene qui ripetuto. Questo episodio però permette di vedere come, nonostante i due riadattamenti della TC scelti dai due docenti, in entrambe le classi si presentino episodi simili.

Come seconda osservazione, si tenga presente che potrebbe essere una forzatura considerare come una prova concreta del contratto didattico la frase dell'insegnante *“doverlo risolvere perché altrimenti prendo un brutto voto”*.

Nel **Gruppo2** vi è stata infatti una dinamica simile, in cui gli studenti avevano trovato le formule per trovare i cateti tramite il seno e il coseno degli angoli acuti (della terza domanda). Nonostante le formule trovate, non si ritenevano soddisfatti in quanto per le prime due domande erano riusciti a trovare dei valori effettivi mentre invece non riuscivano a trovare dei valori per il seno e coseno di 40° e 50° . L'insegnante ha quindi deciso di intervenire come segue:

D2: Ok, invece qua ci fermiamo perché questi due valori.. Però, sarebbero noti? Cioè se dovessi costruirlo.. **devo costruirlo perché qualcuno viene a ritirarmi il lavoro e mi deve pagare.**

S4: Ah be certo in questo caso sappiamo darglieli.

D2: Glieli saprei dare? cioè (*indicando $\cos 50$ e $\sin 40$*) questi valori qua come faccio a trovarli? Il $\cos 50$ e il $\sin 40$ come farei a trovarli? Qua (*indicando ciò che hanno fatto nel secondo quesito*) in qualche modo ve li siete ricavati i valori del seno e del coseno, invece qua (tornando al quesito corrente), potrei farlo solo... con quale strumento? Fossi in fisica cosa useresti.

S4eD2: La calcolatrice.

In questo caso si trattava per il Gruppo2 di sentirsi autorizzati all'uso della calcolatrice, ma la dinamica è simile a quella col Gruppo4. La frase utilizzata in questo caso dall'insegnante è stata: *“devo costruirlo perché qualcuno viene a ritirarmi il lavoro e mi deve pagare”*. Non vengono nominati brutti voti o altro, ma è solo un modo per l'insegnante di incentivare gli studenti a trovare la risposta. Di conseguenza, essendo la stessa insegnante con la stessa classe, nominare un *“brutto voto”* non è sintomo del contratto didattico, di un rapporto risposta-valutazione (dello studente), ma di un tentativo dell'insegnante di aiutare i suoi studenti.

6.2.5 Discussione di classe

La Docente2 ha deciso di non organizzare una gallery walk perché nel progetto dell'anno precedente aveva constatato come fosse ridondante per gli studenti e che favorisse la perdita di attenzione della classe.

Dopo essersi accertata che più o meno tutti i gruppi avessero completato anche la terza domanda, ha deciso di iniziare una **fase di discussione di classe**. *A differenza del Docente1, ha scelto di modificare ancora una volta la disposizione dei banchi facendoli posizionare ai lati della stanza e chiedendo alla classe di posizionarsi nella parte interna seduti a ferro di cavallo.* In questo modo non sarebbero stati tentati dall'appoggiarsi ai banchi, rischiando una diminuzione dell'attenzione, e si sarebbe favorita la comunicazione tra gli studenti, che potevano vedersi in volto in ogni momento, e l'insegnante, che entrava così a far parte del cerchio. La modalità scelta dalla Docente2 per consolidare i risultati è stata (come nel caso della Classe1) quella dell'**insegnante-scriba**. Alla lavagna d'ardesia, precedentemente usata dal Gruppo1 (che aveva precedentemente fotografato il proprio operato), l'insegnante ha perciò riportato quanto gli studenti le dettavano.



Figura 6.21: Gli studenti della Classe2 posizionati a ferro di cavallo all'inizio della discussione di classe

A differenza del Docente1, la Docente2 ha deciso di iniziare riassumendo a voce i risultati ottenuti dai gruppi: nella prima domanda vedendo il triangolo come la metà di un quadrato e nella seconda usando ciò che sapevano sui triangoli equilateri. Questa parte aveva occupato la maggior parte della discussione nella Classe1 ed era stata scritta espressamente alla LIM dal Docente1 sotto la guida degli studenti. Nella Classe2 invece ha svolto un ruolo marginale, in quanto per la Docente2 non era necessario rivedere tutti i passaggi nei dettagli.

Ciò su cui invece ha deciso di soffermarsi per iniziare la parte di scambio attivo della discussione è stato l'utilizzo del seno e del coseno nella terza domanda da parte dei gruppi. L'insegnante ha quindi trovato conferma che avevano già visto in parte i concetti in fisica con un altro insegnante negli anni precedenti.

S10: Abbiamo visto qualcosa l'anno scorso (*agita le mani in aria per indicare "grossomodo", seguito da una risata dei compagni*) [...] abbiamo fatto un discorso molto generale.

S4: Ci aveva fatto vedere in un triangolo rettangolo come si calcola il cateto rispetto all'ipotenusa, quindi usando il coseno di un angolo o piuttosto il seno dell'altro.

D2: Ma la definizione...?

S4: No, di per sé la definizione non ce l'ha data.

D2: Ok, va bene. Vi rendo la palla, come l'anno scorso e vi dico: ok, con quello che avete fatto, come potremmo definire il seno e il coseno dell'angolo? [...] Pensate anche in quale contesto dovette creare... il contesto nel quale stiamo lavorando.

Uno degli studenti è intervenuto proponendo che i valori di seno e coseno di un angolo sono inversamente proporzionali perché “*se uno cresce l'altro decresce*”. L'insegnante ha fatto cionostante notare che, guardando i valori che avevano trovato per il seno e coseno nelle prime due domande, tale affermazione era poco fondata in quanto il seno e il coseno moltiplicati tra loro non avevano un valore costante.

Nel momento in cui successivamente l'insegnante ha riproposto l'obiettivo da raggiungere (le definizioni di seno e coseno) gli studenti hanno avuto difficoltà a rispondere lasciando circa 20 secondi di silenzio poi interrotto dalla docente:

D2: Vedo degli occhietti che si muovono velocemente. Un'idea? Partiamo da un'idea, perché altrimenti non ci muoviamo. (*Sente un sussurro*) Dimmi.

S16: In una circonferenza.

D2: In una circonferenza, ok. Perché la circonferenza? Rispetto al contesto in cui stiamo lavorando. Qualcuno ve ne ha già parlato?

S16: Sì.

D2: Chi?

S16: Eh no magari, **quando si impara una cosa spesso mi capita che me lo spiegano facendo l'esempio del seno e coseno messi in una circonferenza.**

D2: Ok.

S16: Però non saprei dire perché.

D2: Ok. **E voi lo accettate?** Di andare a prenderli in una circonferenza senza sapere perché ve l'hanno spiegato? [...] Dobbiamo dire cose che sappiamo motivare. Intanto, rispetto a dove avete lavorato stamattina. (*nota dei bisbigli e dice*) in un triangolo rettangolo, ok. Il contesto è un triangolo rettangolo. Quindi, la frase iniziale come potrebbe essere? Come l'anno scorso.. (*viene interrotta*)

S4: Dato un triangolo rettangolo...

Si noti come si ripresenti in questo caso la stessa “attesa” sull’uso del cerchio per spiegare risultati in matematica riscontrata anche all’interno della Classe1 da S8. Sono così giunti a scrivere una prima definizione:

“Dato un triangolo rettangolo, l’ipotenusa e un angolo, moltiplicando l’ipotenusa per il seno dell’angolo trovo la misura del cateto opposto all’angolo mentre moltiplicando l’ipotenusa per il coseno dell’angolo trovo la misura del cateto adiacente”

Dopo averla trascritta alla lavagna, l’insegnante ha voluto proporre agli studenti di fornire anche un disegno che è stato raggiunto alla fine di uno scambio di idee ed è riportato di seguito.

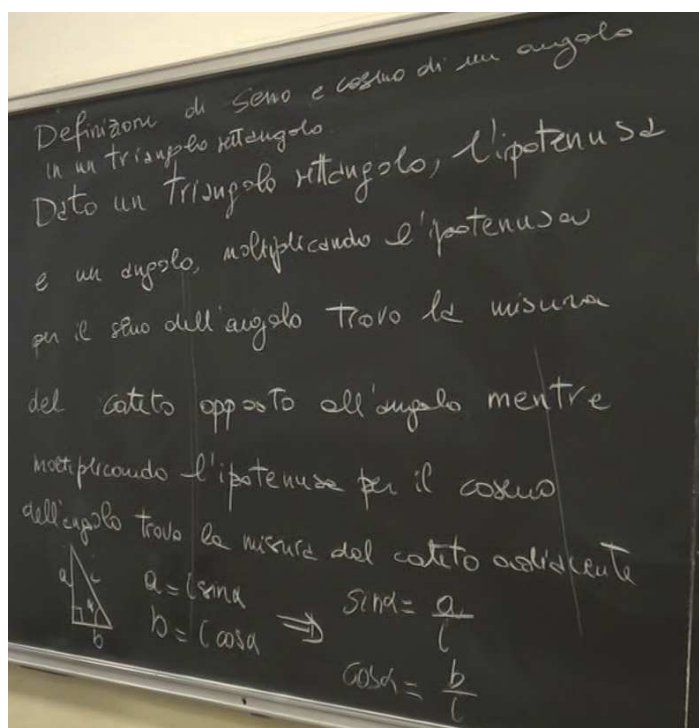


Figura 6.22: Foto della lavagna durante la discussione di classe

D2: S19 ha detto un'altra frase prima. [...] Lo stiamo facendo in quale contesto? (lo ripete insieme ad alcuni di loro) in un triangolo rettangolo. [...] Proviamo a pensare, **se lo trovassi in un libro**, questo mi piacerebbe? In alto dice: “definizione di seno e coseno di un angolo in un triangolo rettangolo”, il titolo del paragrafetto.

S19: Potremmo semplificare.

S14: Possiamo cambiare la definizione scritta perché in questo caso stiamo trovando la misura dei cateti, cioè si capisce lo stesso, ma non stiamo trovando il seno e coseno.

D12: **Quindi come vogliamo rielaborarla?**

La frase “*se lo trovassi in un libro, questo mi piacerebbe?*” è legata al fatto che quanto era stato scritto alla lavagna avrebbe dovuto in seguito esser trascritto nel “**quaderno di classe**” da uno degli studenti (così come spiegato nel capitolo riguardante la metodologia). Occorreva quindi raggiungere una definizione il più formale e rigorosa possibile.

È seguito così un momento di discussione in cui, *a differenza della Classe1 dove gli scambi erano quasi sempre tra l'insegnante e uno degli studenti, vi erano molti scambi di idee anche tra gli studenti.*

S14: In un triangolo rettangolo, data l'ipotenusa.

D2: Sto riscrivendo uguale?

S14: Beh all'inizio sì.. in un triangolo rettangolo, data la misura dell'ipotenusa e dell'angolo.

D2: Data la misura dell'ipotenusa e di un angolo?

S19: Però l'angolo...

S10: No, noti l'ipotenusa o...

S19: In un triangolo rettangolo, noti i suoi lati.

S2: Ma non per forza...

S10: Ah no sì è vero beh... noti i suoi lati.

S8: Se dobbiamo trovare il seno...

S19: Gli angoli non ti servono...

D2: Io posso scrivere anche qual è la relazione, non è che devo per forza avere dei valori.

S19: Sì è vero perché poi abbiamo visto anche prima.

S4: Beh esatto, suppongo il lato x .

S10: In un triangolo rettangolo.

S19: In un triangolo rettangolo c'è.

D2: Vale questo? (*indica le formule e riceve consenso*) Possiamo scrivere “definiamo” (*scrive “definiamo il seno di un angolo”*) facciamolo pure a parole.

S10: Come...

D2: Quale angolo, ce ne sono tre di angoli. Il seno di un angolo **acuto**.

S19: Come il rapporto tra il lato opposto ad esso...

D2: Lascio lato o cateto?

S4: Va bene anche lato.

Durante la discussione (che qui è riportata solo in parte) l'insegnante si è assicurata di chiedere sempre alla classe se quello che scriveva andasse bene o meno, favorendo il controllo degli studenti sulle definizioni che stavano costruendo.

Si noti come l'insegnante abbia specificato "*Il seno di un angolo **acuto***". Non sono stati trattati angoli ottusi se non nella parte finale della lezione parlando di circonferenza goniometrica.

Il fatto che l'insegnante specificasse "acuto" ha avuto un riscontro nel seguito della discussione, quando uno degli studenti ha esposto dubbi sulla definizione del seno e del coseno di 90° :

S4: Mettendo angolo acuto generalizziamo solo per α e β , mentre invece se togliamo "acuto" includiamo anche l'angolo retto e quindi praticamente verrebbe che il lato opposto all'angolo retto sarebbe l'ipotenusa e quindi il suo seno sarebbe ipotenusa fratto ipotenusa e quindi 1.

D2: E sul coseno funzionerebbe?

S4: Sarebbe zero.

D2: **Perché tu diresti..?**

S4: Praticamente l'angolo è compreso tra l'ipotenusa e l'altro lato. Cioè se tu guardi come adiacente, "b" ad esempio è il coseno di α , quindi l'angolo compreso tra i due lati. Invece col coseno, non c'è un lato che aiuti l'ipotenusa a comprendere l'angolo retto e quindi verrebbe zero fratto ipotenusa.

Sulla parte inutilizzata della lavagna l'insegnante, insieme agli studenti, ha provato a scrivere una versione alternativa della definizione che non prevedesse l'angolo acuto ma potesse essere invece generalizzata. Siccome però il ragionamento non era chiaro per il $\cos 90$, allora lo studente ha in seguito proposto di modificare la definizione nel modo seguente:

S4: Avrei cambiato "adiacente" e avrei messo "il rapporto tra il lato che con l'ipotenusa comprende l'angolo".

Siccome tale ragionamento stava creando più dubbi di quanti ne stesse risolvendo, l'insegnante ha deciso di concludere limitandosi alla definizione nel caso di angoli acuti.

D2: Sì, potrebbe essere interessante, ma potrebbe anche portarci a dire cose che invece di aiutarci ci complicano. Direi che però qua siamo tutti d'accordo. [...] Intanto vi chiedo, in questo senso posso sicuramente dire che **il seno e il coseno di un angolo acuto è tra quali valori?**

S4: Tra zero e uno.

D2: Ok, perché comunque abbiamo il cateto fratto l'ipotenusa che è sempre il lato maggiore, quindi questa frazione ci porta a dire sempre che, per gli angoli acuti, saremo sempre con valori del seno e coseno compresi tra 0 e 1.

Il modo in cui erano disposti durante la discussione ha favorito uno scambio di idee più attivo rispetto alla Classe1, perciò il ruolo dell'insegnante-regista diventava fondamentale se vi erano aspetti non ancora evidenziati o se il flusso di idee stava conducendo la classe fuori strada. In ogni caso, tale libertà di parola ha permesso che *la costruzione della definizione fosse il frutto di un lavoro collettivo, non imposto dall'insegnante.*

La definizione raggiunta alla fine della conclusione è trascritta sul “**quaderno di classe**” è riportata nell'immagine seguente.

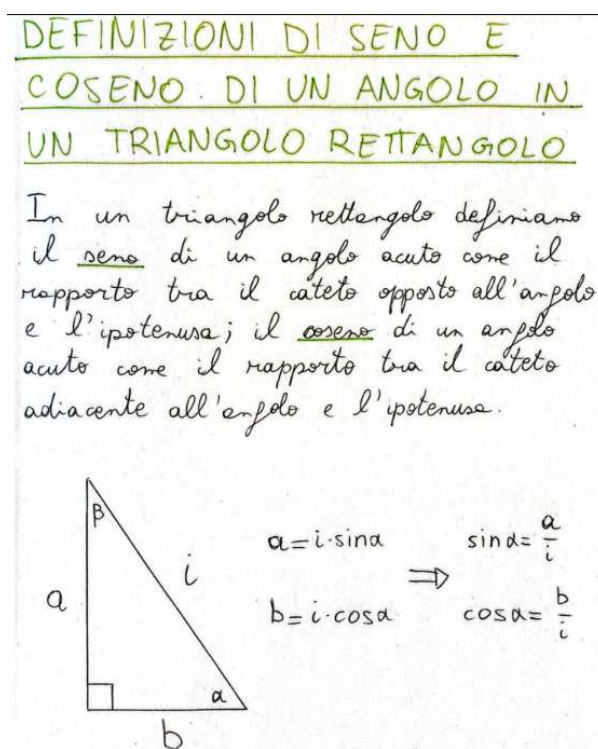


Figura 6.23: Pagina tratta dal “quaderno di classe” della Classe2

Con il consolidamento “*insegnante-scriba*” la docente ha potuto dirigere e favorire lo scambio, come anche la creazione, di idee attraverso domande che li facessero soffermare su particolari aspetti della conoscenza che stavano costruendo. Si è creata quindi quella che la TSD definisce come **situazione di formulazione**, che ha permesso la decontestualizzazione e depersonalizzazione della conoscenza derivante dall'esperienza personale degli studenti durante l'attività.

6.2.6 La circonferenza goniometrica

Sebbene durante la fase di progettazione siano stati formulati particolari problemi, che sono stati poi proposti in entrambe le classi, è capitato che entrambi i docenti occasionalmente decidessero di fare delle aggiunte. Un esempio di ciò è stato riscontrato proprio nella lezione qui analizzata.

La Docente2 ha invitato gli studenti a estendere la definizione, siccome si era trattato l'argomento durante la discussione.

D2: All'interno del mio triangolo posso anche avere angoli che superano i 90° per esempio. Proviamo a pensare quello? Allora vi do questo compito: torniamo ai cellophane. Vi chiedo di provare a immaginare tutto quello che avete fatto fino adesso, con triangoli sempre rettangoli da 30, 45, 50. Vi chiedo di rappresentarmeli tutti con ipotenusa unitaria.

I gruppi sono quindi tornati alle loro VNPS e hanno lavorato sul nuovo problema. Per la risoluzione di questo problema le dinamiche sono simili a quelle della prima parte della lezione e non sono state riscontrate particolari tracce del contratto didattico. Siccome le strategie seguite dai gruppi hanno seguito circa la stessa direzione, qui vengono riassunte prendendo in esempio il Gruppo2.

Il **Gruppo2** ha iniziato disegnando due assi cartesiani e una circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine per successivamente disegnare un triangolo acutangolo, nel primo quadrante, che avesse un vertice sulla circonferenza. In seguito hanno ruotato l'ipotenusa fino a portarla nel secondo quadrante ottenendo un angolo ottuso che hanno provato a ricondurre ad un angolo esterno ad un secondo triangolo rettangolo (come mostrato in figura).

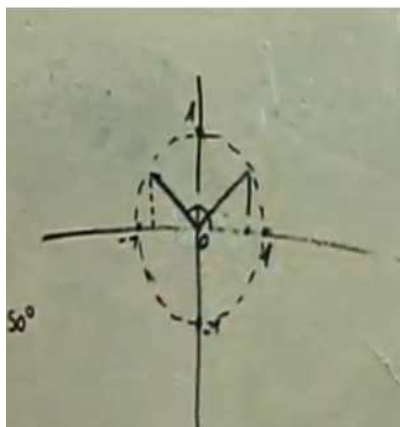


Figura 6.24: Il disegno del Gruppo2

Sono quindi riusciti a osservare che i cateti del primo triangolo rettangolo rappresentavano il coseno (il cateto orizzontale) e il seno (il cateto verticale) dell'angolo con vertice nell'origine e hanno ipotizzato che lo stesso potesse valere per l'altro triangolo, ma ottenendo dei valori negativi.

S4: Essenzialmente... troveremo i valori negativi per i 2 cateti.

D2: È possibile che un triangolo abbia i cateti negativi?

S4eS5: Il seno e il coseno.

D2: Ah, il coseno e il seno potrebbero diventarvi negativi in qualche modo?

L'intervento dell'insegnante ha permesso loro di notare un dettaglio (l'impossibilità di valori negativi per i cateti) che avrebbe potuto trarli in inganno. Dopo aver constatato quindi che la definizione di seno e coseno rimaneva inapplicabile per il triangolo ottuso per la questione legata ai valori negativi, l'insegnante li ha riportati a considerare i loro ragionamenti. In particolare, facendoli soffermare sul fatto che i cateti rappresentassero in quel contesto il coseno e il seno dell'angolo considerato, ha fatto in modo che arrivassero a considerarli come **coordinate** ($\cos\alpha$; $\sin\alpha$) del punto P (uno dei vertici del triangolo) appartenente alla circonferenza. In questo modo hanno potuto giustificare la possibilità di avere valori negativi per il seno e il coseno ed estendere la definizione ad angoli non acuti.

Successivamente sono anche giunti a ricavare l'**identità fondamentale della trigonometria** $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Un caso particolare è stato quello del **Gruppo5** che ha scelto di iniziare il problema disegnando un triangolo ottusangolo.

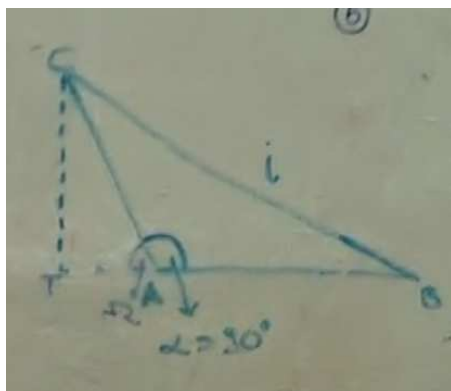


Figura 6.25: Il primo disegno del Gruppo5 per l'ultimo problema

L'insegnante, osservando che stavano dedicando troppo tempo a quel disegno, è dovuta intervenire:

D2: Va bene quello che state ragionando. Però dicevo, la richiesta è: immaginate di avere ipotenuse lunghe 1 e provate a trovare una possibile rappresentazione che vada a contenermi tutti i triangoli che abbiamo visto. Con un'ipotenusa che è costantemente uguale a 1.

S15: Facciamo una bella circonferenza.

Cancellano il disegno e ne fanno un altro (mostrato in figura), portando l'insegnante a scegliere di intervenire in modo più diretto.



Figura 6.26: Secondo disegno del Gruppo5 per l'ultimo problema

D2: Non mi dispiace questo, però forse può avere un senso rispetto a quello che voglio farvi fare, il pensare sempre a una circonferenza, però dove sia il raggio che diventa la mia ipotenusa. Ok? provate a pensarla così.

Sono così riusciti ad ottenere un disegno che ha permesso di fare, in modo simile, gli stessi ragionamenti del Gruppo2.

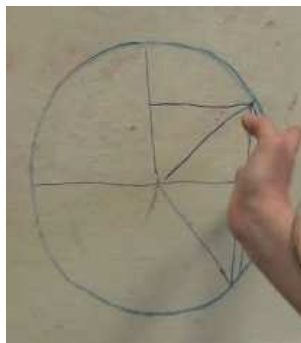


Figura 6.27: Il disegno del Gruppo5 dopo l'intervento della docente

Siccome gli obiettivi teorici che l'insegnante voleva raggiungere con questo ultimo problema erano più specifici e dovevano essere formulati in modo formale e rigoroso, è dovuta intervenire nei vari gruppi: sia per il disegno iniziale, sia per far considerare loro le coordinate del punto, ma anche per assicurarsi che trovasse l'identità $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (in quanto non era richiesta esplicitamente dal problema). Questi momenti in cui l'insegnante è intervenuta, pur lasciando che fossero gli studenti a trovare le soluzioni finali, sono considerabili come **situazioni di istituzionalizzazione**: l'insegnante ha cercato di farli arrivare ad una rappresentazione condivisa dalla comunità matematica.

La lezione si è quindi conclusa con **un secondo breve momento di discussione di classe** in cui l'insegnante ha ripercorso i lavori dei gruppi.

La modalità di scambio è stata simile a quella della prima discussione, l'unica differenza sta nel fatto che, siccome mancavano pochi minuti alla fine della lezione, l'insegnante ha preferito non risistemare a ferro di cavallo gli studenti ma di lasciarli suddivisi in gruppi. La maggior parte di loro è rimasta in piedi durante quel momento, tranne un paio appoggiati o al banco o seduti.



Figura 6.28: La Classe2 durante l'ultima discussione di classe

Viene di seguito riportata la pagina del “**quaderno di classe**” risultato della discussione finale.

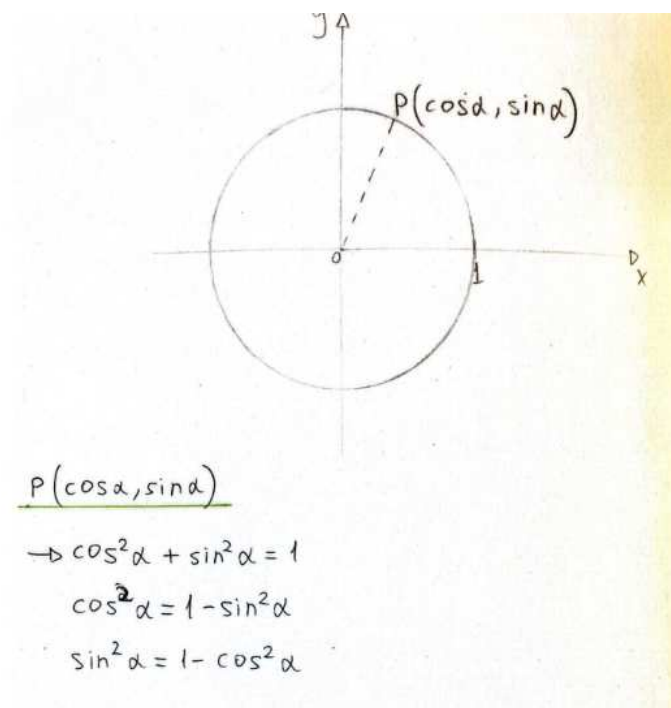


Figura 6.29: Pagina del “quaderno di classe” relativa alla circonferenza goniometrica

6.2.7 Osservazioni finali

Le osservazioni riguardo alle fasi di una situazione a-didattica in questo contesto sono le medesime evidenziate per la Classe1. Anche in questo caso l'ambiente organizzato con l'approccio TC ha presentato **tanti elementi di coerenza con ciò che rende un milieu “a-didattico” e ha presentato tracce trascurabili del contratto didattico.**

Un carattere che va nuovamente evidenziato è *la partecipazione degli studenti della Classe2 alla discussione di classe.*

Come si è già osservato, nella Classe1 si trattava più di un dialogo che aveva da una parte il Docente1 e dall'altra uno degli studenti che decideva di parlare o che veniva interpellato. Nella Classe2 invece si è percepita una dinamica più libera dove non era un dialogo tra due persone per volta, ma uno scambio attivo di idee tra tutta la classe dove ognuno poteva contribuire alla costruzione della conoscenza. Questo scambio è stato probabilmente favorito da vari fattori:

- In primis *gli studenti*, in quanto non è assicurato che tutti vogliano esporsi allo stesso modo (durante la discussione nella Classe2 alcuni, per esempio, non sono intervenuti direttamente ma si sono confrontati sottovoce coi compagni).
- *La differente disposizione degli studenti* durante la discussione, che come già osservato ha favorito un clima di “uguaglianza” in cui ognuno poteva esprimersi liberamente.
- Infine, a differenza della Classe1, *gli studenti non pensavano di dover prendere appunti* sul momento, quindi erano più concentrati e partecipi nel condividere le proprie idee. Sapevano infatti che l'obiettivo sarebbe stato quello di arrivare ad una conoscenza condivisa, che sarebbe stata esposta alla lavagna (grazie alla trascrizione dell'insegnante) e che sarebbe poi stata riportata sul **“quaderno di classe” dallo studente di turno.** In questo modo tutta la loro attenzione era diretta alla discussione.

Rispetto alla Classe1, il fatto che la Docente2 non si sia limitata a riprendere le strategie osservate dai gruppi durante l'attività, ma che abbia preferito costruire direttamente con loro le definizioni di seno e coseno, ha permesso un migliore mantenimento del flow. Nella Classe1 infatti gli studenti avevano risentito invece di una ridondanza di informazioni, che avevano già affrontato nei gruppi, portando la maggior parte di loro ad una minor partecipazione nella discussione di classe.

Si osservi infine come il lancio, il corpo e la chiusura della lezione vi siano stati prima per le tre domande che erano state formulate coi ricercatori, in seguito nuovamente (sebbene con tempistiche più ristrette) per la domanda scelta dall'insegnante in merito alla circonferenza goniometrica.

6.3 Confronto con la TC dei due adattamenti

In questa sezione viene presentato un breve confronto tra i due adattamenti dell'approccio TC, scelti dai due docenti per le rispettive classi, mettendo in luce gli elementi che più li hanno contraddistinti ed evidenziandone i vantaggi o i punti critici.

La prima scelta da mettere in luce è quella della **disposizione dei banchi**. Nel quadro teorico di questa tesi si è mostrato come la TC preveda una disposizione casuale dei banchi, in modo che siano anche lontani dai muri e quindi dalle VNPS dei gruppi. Così si favorisce il passaggio dell'insegnante all'interno dell'aula affinché possa osservare il lavoro di ciascun gruppo, ma si cerca anche di evitare che gli studenti si seggano invitandoli invece a rimanere in piedi alla VNPS del proprio gruppo. Come si è osservato infatti anche nelle due classi, *il fatto che gli studenti fossero in piedi insieme ai compagni del proprio gruppo davanti alla VNPS ha permesso che rimanessero partecipi durante la maggior parte del tempo*. Entrambi gli insegnanti hanno seguito tale indicazione al lancio di ogni lezione, decidendo di sistemare i banchi “a isole” di modo che si creassero dei corridoi in cui potesse passare l'insegnante, ma anche uno qualsiasi degli studenti che avesse voluto confrontarsi con un altro gruppo.

Nel caso della Classe1, dove vi erano 27 studenti e quindi un numero maggiore di banchi rispetto alla Classe2 (composta da 23 studenti), i limiti di spazio dell'aula hanno fatto sì che i banchi e le sedie rimanessero abbastanza vicini alle VNPS. In più di una lezione questo ha portato il Docente1 a intervenire chiedendo ad alcuni studenti, che si erano seduti, di rialzarsi per partecipare attivamente al lavoro di gruppo.

La differenza sostanziale della sistemazione dei banchi è stata nei momenti di discussione di classe in cui entrambi gli insegnanti hanno scelto il metodo di consolidamento “**insegnante-scriba**” (già presentato nel quadro teorico).

Nel caso della **Classe1** all'inizio della discussione ogni gruppo si sedeva intorno alla “*isola di banchi*” più vicina alla propria VNPS. Questo, specie nelle prime lezioni, ha portato alcuni studenti a sedersi dando le spalle alla LIM per la maggior parte della discussione sfavorendo la loro partecipazione. In seguito (durante il progetto) sono stati gli studenti stessi a decidere di modificare la disposizione all'inizio della discussione, affinché potessero ancora rimanere nei gruppi, ma avessero anche una visione frontale con l'insegnante e la LIM che permettesse loro di osservare meglio ciò che la classe decideva dovesse esser scritto. Questa **disposizione “semi-frontale”** *ha tuttavia favorito* un certo tipo di discussione in cui gli studenti potevano intervenire liberamente per spiegare ciò che avevano fatto nei gruppi, ma in *un dialogo col docente, non con la classe*. Spesso in questi momenti gli studenti della Classe1 erano poco partecipi, tanto che l'insegnante doveva spesso interpellarli personalmente, e vi erano (specie nelle prime lezioni) pochi scambi di idee tra gli studenti. Questo può esser stato favorito sia dalla disposizione semi-frontale dei banchi, sia dalla ridondanza delle informazioni per gli studenti che quindi perdevano interesse.

Nella **Classe2**, invece, la Docente2 ha deciso di iniziare i momenti di discussione spostando i banchi verso i muri e chiedendo agli studenti di posizionarsi seduti

“a ferro di cavallo”. In questo modo si favoriva un clima in cui ognuno poteva intervenire, vedere gli altri in volto e non sentirsi escluso dalla discussione. Il fatto che i banchi fossero posizionati alle spalle degli studenti ha anche evitato che vi si appoggiassero. L’insegnante stessa, che assumeva il ruolo di regista e di scribe delle idee che gli studenti condividevano, entrava a far parte del cerchio lasciando che fossero gli studenti a costruire insieme il risultato finale, intervenendo nel caso fosse necessario evidenziare dei dettagli o fornire particolari notazioni. Si creava così un dialogo continuo non solo tra uno studente e l’insegnante, come avveniva nella Classe1, ma tra tutta la classe.

In merito ai momenti di passaggio tra il lavoro nei gruppi e la discussione di classe, *entrambi gli insegnanti hanno deciso* (come si già evidenziato) *di non organizzare una gallery walk.* Avevano notato infatti l’anno precedente che creava solo un senso di ridondanza per gli studenti e rischiava di farli uscire dallo stato di flow verso un disequilibrio di noia.

Il **Docente1** *invitava gli studenti*, prima che si sedessero per la discussione, *a girare per le VNPS per vedere se gli altri gruppi avevano scelto strategie diverse dalla loro* e che sarebbero poi state evidenziate. Non era lui a organizzare tale momento, ma lasciava la libertà agli studenti di girare per l’aula a osservare le VNPS.

La **Docente2** invece *ha deciso*, per la maggior parte delle lezioni, *di lasciare che fossero gli studenti a scegliere se andare a osservare le VNPS degli altri.* Questo perché spesso capitava che lo facessero già durante le attività e perché era probabile che il clima che si sarebbe creato durante la discussione (di scambio continuo tra gli studenti) avrebbe fatto emergere le diverse strategie direttamente dagli studenti.

Il fatto che la discussione si svolgesse alla LIM, nella Classe1, o alla lavagna d’ardesia, nella Classe2, non ha portato a differenze significative. I vantaggi nell’uso della **LIM** infatti riguardano più un fattore di “comodità nell’esposizione”. Il Docente1, durante l’attività, teneva aperta una singola pagina che poteva scorrere all’occorrenza, per esempio qualora avesse voluto riprendere una domanda precedente. Inoltre gli strumenti di disegno della LIM permettevano un maggiore controllo e un maggior ordine nella creazione delle figure riguardanti i problemi.

Per quanto riguarda gli **appunti** le due classi hanno seguito due direzioni differenti.

Nella **Classe1** *erano gli studenti a prendere di propria iniziativa gli appunti durante la discussione di classe* e l’insegnante lasciava loro qualche minuto per sistamarli alla fine della discussione di ogni domanda.

Nella **Classe2** gli studenti si sono affidati invece allo “studente di turno” che avrebbe scritto la nuova pagina del “**quaderno di classe**”.

Si osservi come, nonostante non sia stato usato il “metodo dei quattro quadranti”, così come suggerito dall’approccio TC, *entrambi i metodi abbiano presentato i loro vantaggi.*

*Gli studenti della **Classe1** potevano scegliere uno stile più personale per i loro appunti, adattandosi al loro metodo di studio (uso di abbreviazioni, organizzazione della pagina del quaderno, ecc) e permettendo loro di riuscire a consultarli al meglio in futuro (spesso l'insegnante stesso chiedeva loro di scriverli come se dovessero capirli dopo qualche settimana). Siccome ogni studente, in questi momenti, era seduto insieme al proprio gruppo, poteva anche confrontarsi coi compagni nel caso qualcosa non gli fosse stato chiaro.*

Nella **Classe2** non c'è stato questo tipo di personalizzazione degli appunti, ma *il risultato che veniva riportato nel quaderno di classe era qualcosa di costruito collettivamente e condiviso da tutti. Inoltre assicurava all'insegnante che i loro appunti mantenessero un certo linguaggio e un certo rigore, importanti in una classe di un liceo scientifico, così come erano presenti alla lavagna usata nella discussione.*

In merito alla **rubrica di autovalutazione**, *solo il Docente1 se ne è servito in una lezione per un paio di gruppi* (come presentato nel capitolo sulla metodologia). Era lui a decidere quali fossero i parametri da tenere sotto controllo, dando una prima valutazione del gruppo e lasciando che fossero gli studenti a darsi una valutazione alla fine dell'attività. Siccome vi era abbondanza di studenti in un'aula dalle dimensioni limitate, spesso nella Classe1 il volume di voce dei gruppi tendeva ad alzarsi rendendo complicata la comunicazione all'interno dell'aula. La redazione di tali rubriche (in ogni lezione) sarebbe stata una buona risorsa che avrebbe aiutato il mantenimento di un corretto ambiente di lavoro, sia per il volume delle voci, sia nel favorire la collaborazione degli studenti all'interno dei gruppi (per esempio nel caso in cui uno degli studenti fosse rimasto indietro rispetto al ragionamento del proprio gruppo).

Le ultime differenze osservabili rispetto all'approccio TC sono le seguenti:

- entrambi i docenti hanno scelto di non usare domande CYU;
- solo il Docente1 ha utilizzato il banner verticale distribuito o il banner verticale comune in alcune occasioni se lo riteneva necessario, ma mai il banner orizzontale.

Di seguito viene fornita una tabella riassuntiva che ha come obiettivo il confronto tra l'approccio TC e le due variazioni che hanno usato (liberamente) gli insegnanti nelle loro classi durante il progetto. *Nella tabella "Sì" indica che non sono state apportate variazioni.*

Tabella 6.1: Tabella riassuntiva per un confronto tra approccio TC e i due riadattamenti dei docenti.

TC	Classe1	Classe2
Il compito viene affidato nei primi 5 minuti, con studenti in piedi attorno a insegnante.	Sì	Sì
I banchi sono disposti in configurazione casuale (lontano dai muri) e l'insegnante è libero di girare.	Banchi “a isole”, l'insegnante può girare per l'aula, anche se leggermente ostacolato dalla numerosità dei banchi (che essendo 27 occupano molto spazio anche se posizionati).	Banchi posizionati verso i muri, l'insegnante può girare per l'aula liberamente.
L'insegnante risponde solo alle “ domande per continuare a pensare”.	Sì. Se gli studenti fanno invece domande sul loro ragionamento, l'insegnante non risponde in modo diretto, ma ripercorre per loro i passaggi e li fa soffermare su qualcosa che potrebbe condurli oltre.	Sì. Se gli studenti fanno invece domande sul loro ragionamento, l'insegnante non risponde in modo diretto, ma ripercorre per loro i passaggi e li fa soffermare su qualcosa che potrebbe condurli oltre.
I Gruppi sono di 3 studenti scelti in modo visibilmente casuale.	Sì. Vengono composti tramite un mazzo di carte o una tabella excel e ricomposti ad ogni lezione.	Sì. Vengono composti tramite un mazzo di carte e ricomposti ad ogni lezione.
Gli studenti sono incoraggiati all' autonomia e alla collaborazione con altri gruppi.	Sì, gli studenti sono liberi di girare per i gruppi durante l'attività per scambiarsi opinioni (o la domanda successiva). Svolgono l'attività collaborando con gli altri e non per indicazione diretta dell'insegnante.	Sì, gli studenti sono liberi di girare per i gruppi durante l'attività per scambiarsi opinioni (o la domanda successiva). Svolgono l'attività collaborando con gli altri e non per indicazione diretta dell'insegnante.
Gli studenti lavorano in piedi alle VNPS .	Uso di cellophane, lavagna d'ardesia, LIM e in media un pennarello e un cancellino per gruppo.	Uso di cellophane, lavagna nera, LIM e in media un pennarello e un cancellino per gruppo.

Continua nella pagina successiva

TC	Classe1	Classe2
Compito: problem solving, thin-slicing, low floor, high ceiling, novità.	In linea con low floor, high ceiling e novità. Più che il problem solving, l'obiettivo era la costruzione di una teoria. Lo thin-slicing non è stato usato per ogni compito (per le eccezioni si guardi il capitolo riguardante la metodologia). Il Docente1 presenta le domande "a braccio" (scegliendo se oralmente o presentando un disegno).	In linea con low floor, high ceiling e novità. Più che il problem solving, l'obiettivo era la costruzione di una teoria. Lo thin-slicing non è stato usato per ogni compito (per le eccezioni si guardi il capitolo riguardante la metodologia). La Docente2 le comunica in modo preciso e come sono state scritte (in accordo coi ricercatori).
L'insegnante mantiene il flow tramite suggerimenti e estensioni.	Sì, facendosi spiegare dai gruppi il ragionamento, fornendo la domanda successiva o chiedendo di essere più ordinati o rigorosi con quanto hanno scritto.	Sì, facendosi spiegare dai gruppi il ragionamento, fornendo la domanda successiva o chiedendo di essere più ordinati o rigorosi con quanto hanno scritto.
Rispetto delle nove caratteristiche dell'esperienza ottimale :		
1) Azione e consapevolezza si fondono;	L'impegno e la concentrazione sono massimi per la maggior parte del tempo. Essendo le due ultime due ore di lezione della mattinata scolastica il docente deve più volte evitare che gli studenti si siedano durante le attività (per la stanchezza) perché non diminuisca il loro coinvolgimento.	L'impegno e la concentrazione sono massimi per la maggior parte del tempo.

Continua nella pagina successiva

TC	Classe1	Classe2
2) Tutta la concentrazione è diretta sul compito;	Sì, per la maggior parte del tempo.	Sì, per la maggior parte del tempo. Ci sono stati alcuni episodi (breve e che si sono risolti spontaneamente) di ragazzi che parlavano di interrogazioni o verifiche nella mattinata. Ciò può essere conseguenza del fatto che le attività siano state fatte nelle prime due ore delle mattinate scolastiche (avevano altre materie e docenti nelle ore successive).
3) Non c'è paura/preoccupazione del fallimento;	Non c'è preoccupazione, ma anzi volontà di risolvere il problema.	Non c'è preoccupazione, ma anzi volontà di risolvere il problema.
4) L'autocoscienza scomparire;	Sì.	Sì.
5) Il senso del tempo diventa distorto;	Il senso del tempo ritorna nel momento in cui alcuni studenti (pendolari) devono uscire dall'aula per prendere i mezzi. Questo portava all'annuncio implicito: "la lezione sta finendo". Il più delle volte questo ha implicato una perdita di attenzione sul finire della seconda ora delle varie attività.	Gli studenti si meravigliano del suono della campanella.

Continua nella pagina successiva

TC	Classe1	Classe2
6) Svolgere l'attività diventa un piacere intrinseco gratificante;	Se gli studenti non riuscivano a trovare una risposta, per la maggior parte dei casi, non si arrendevano ma riprovavano.	Se gli studenti non riuscivano a trovare una risposta, per la maggior parte dei casi, non si arrendevano ma riprovavano. In particolare, un gruppo che stava cercando di dimostrare il teorema di Carnot, non riuscendo a trovare una risposta, ha provato a vedere il problema in svariati modi senza arrendersi (usando ad esempio vari quaderni su cui scrivere per avere una diversa prospettiva).
7) Obiettivi chiari;	Sì, valutati nella creazione dei problemi.	Sì, valutati nella creazione dei problemi.
8) Feedback chiaro e immediato;	Mediamente sì. L'insegnante passa tra i gruppi e eventualmente provvede a dare un feedback di modo che possano proseguire con l'attività.	Mediamente sì. L'insegnante passa tra i gruppi e eventualmente provvede a dare un feedback di modo che possano proseguire con l'attività.
9) Equilibrio sfida-abilità.	Mantenuto tramite suggerimenti e estensioni forniti dall'insegnante. Ad esempio aggiungendo una domanda o chiedendo di essere più ordinati e rigorosi, o ancora chiedendo "esiste una strada più diretta?".	Mantenuto tramite suggerimenti e estensioni forniti dall'insegnante. Ad esempio aggiungendo una domanda o chiedendo di essere più ordinati e rigorosi, o ancora chiedendo "esiste una strada più diretta?".

Continua nella pagina successiva

TC	Classe1	Classe2
Consolidamento: dialogo, insegnante-scriba, gallery walk.	Per la discussione raduna gli studenti nelle isole e segue il metodo insegnante-scriba. L'insegnante alla LIM dirige gli scambi e, in caso intervengano sempre gli stessi studenti (o in momenti di silenzio), li interpella affinché diano il loro contributo. Interviene solo se gli studenti non partecipano, dando l'input e interpellandoli (di modo che siano loro a trovare il risultato). Utilizza a volte una gallery walk che non sistema lui, chiedendo agli studenti di non cancellare le VNPS e di girare tra quelle degli altri per vedere strategie diverse dalle proprie.	Per la discussione l'insegnante fa sedere gli studenti a ferro di cavallo nella parte interna dell'aula (coi banchi ai lati) in modo da appartenere al cerchio. Usa il metodo insegnante-scriba, in cui lascia la libertà agli studenti di contribuire. Si fa dettare cosa scrivere alla lavagna e eventualmente interviene chiedendo loro come sistemare qualcosa (ad esempio per scrivere il risultato in modo più semplice o rigoroso). Non organizza la gallery walk perché ridondante.
Appunti significativi (4 quadranti)	Non usa il metodo dei 4 quadranti e non chiede espressamente agli studenti di prendere appunti. Sono gli studenti a estrarre spontaneamente quaderni (o tablet) e a prendere appunti su quello che viene scritto alla LIM durante la discussione (confrontando con quello che hanno scritto alla propria VNPS). Più volte l'insegnante ha consigliato agli studenti (quando prendevano appunti) di scriverli affinché li capissero di nuovo dopo qualche settimana.	Non usa il metodo dei 4 quadranti e non chiede espressamente agli studenti di prendere appunti. Non prendono appunti su quaderni o tablet. L'insegnante ha concordato con la classe la redazione di un "quaderno di classe" che a turno gli studenti avrebbero compilato con quanto emerso dalla lezione. Più volte l'insegnante ha consigliato agli studenti, quando formulavano l'enunciato da inserire nel quaderno di classe, di crearlo in modo che lo capissero anche rileggendolo dopo qualche settimana.

Continua nella pagina successiva

TC	Classe1	Classe2
Domande CYU	Non sono state utilizzate.	Non sono state utilizzate.
Valutazioni o segnalazioni	All'inizio di alcune lezioni l'insegnante ha chiesto agli studenti un riassunto delle lezioni precedenti (mentre erano in piedi, con banchi sistemati e gruppi ancora non formati).	All'inizio di alcune lezioni l'insegnante ha chiesto agli studenti un riassunto delle lezioni precedenti (mentre erano in piedi, con banchi sistemati e gruppi ancora non formati).
Utilizzo dei banner (orizzontale, verticale distribuito, verticale comune).	Il banner orizzontale non è stato utilizzato. Il banner verticale distribuito non è stato usato in modo esplicito: l'insegnante comunicava la domanda successiva, il gruppo la trascriveva e stava agli altri gruppi controllare o chiedere la domanda a quel gruppo (qualora non l'avessero ancora svolta). Questo senza che vi fosse un riquadro apposito con la consegna sulla VNPS. Il banner verticale comune è stato usato dall'insegnante solo se osservava che la domanda corrente stava circolando per l'aula ma non giungeva a tutti i gruppi.	Non sono stati utilizzati i banner.

Continua nella pagina successiva

TC	Classe1	Classe2
Rubrica di autovalutazione	Utilizzata solo per due gruppi in un'unica lezione a seguito del loro comportamento riscontrato durante l'attività dall'insegnante. La rubrica è stata creata dall'insegnante, che ha dato un primo giudizio su: volume, forza di volontà, collaborazione. Ha lasciato in seguito che fossero gli studenti a collocarsi nella rubrica durante la lezione, andando a visionare appena prima della discussione.	Non utilizzata.

6.3.1 Considerazioni emerse in merito alla TC

Viene innanzitutto fornita una considerazione tratta da uno dei “**commenti a caldo**” forniti dal Docente1:

“Per quanto riguarda il momento discussione: io ormai li conosco bene e vedo che la discussione finale è tendenzialmente spenta, facilmente stanca e non vedo discreta partecipazione. Mi colpisce che sia molto più spenta rispetto a una lezione non Thinking Classroom in cui i ragazzi invece sono abbastanza accesi e, a parte alcuni, c'è un bel gruppetto che fa domande e dibatte. Io credo però che questo sia dovuto alla ridondanza, cioè loro comunque gruppi che sono arrivati la maggior parte alla soluzione e vedono (nella discussione) che si sta ripetendo tutto e lo trovano ridondante. Stavamo affrontando il primo modo di dimostrare il teorema e c'era già chi si addormentava al secondo metodo (che comunque era più semplice). Comunque coi singoli ragazzi ho discusso tanto durante l'attività spostandomi tra i gruppi, e anche tra loro. Quindi forse bisognerebbe trovare gli aspetti critici che li fanno innescare; mentre nella non-Thinking Classroom sono di fronte a qualcosa di nuovo, nella Thinking Classroom invece ormai lo hanno appurato durante la lezione.”

Per quanto riguarda il momento di scambio (o discussione) di classe bisognerebbe perciò trovare metodi alternativi per coinvolgere gli studenti. Da una parte alcuni studenti non intervengono per svariati motivi, lasciando che siano sempre gli stessi a parlare. Dall'altra, la ridondanza di quello che si sta dicendo rischia di far diminuire la loro attenzione.

Ci sono un altro paio di fattori che andrebbero considerati e che permetterebbero un'estensione della TC.

In merito al momento di discussione, la scelta della Docente2 permette una maggiore comunicazione in quanto i banchi sono ai lati durante la discussione di classe e gli studenti si posizionano a ferro di cavallo in modo da potersi guardare in volto in ogni momento. Inoltre, l'insegnante entra a far parte del "cerchio" abbattendo la barriera che può dividere l'insegnante dagli studenti e che permette loro di esprimersi più liberamente.

Anche la disposizione "a isole" della Classe1 ha dei vantaggi, perché permette agli studenti di confrontarsi anche nella presa di appunti, tuttavia il fatto che durante tutta la presa di appunti siano appoggiati ai banchi va contro l'obiettivo del mantenimento del loro coinvolgimento (si pensi al perché sia vantaggioso che stiano in piedi e lontano dai banchi). Inoltre, specie nelle prime lezioni, alcuni di loro si adeguavano alla posizione del banco, dando per la maggior parte del tempo le spalle alla LIM (su cui l'insegnante trascriveva i loro ragionamenti).

In seconda istanza, può tornare utile considerare il modo in cui si scelgono le ore in cui svolgere le attività. Si è evidenziato in precedenza come sia svolgendole alle prime due ore sia alle ultime due vi siano vantaggi e svantaggi. Bisognerebbe valutare l'organizzazione in base agli studenti: se per esempio nella classe non vi sono pendolari allora le ultime due ore sarebbero adeguate. Tuttavia sembrerebbe che le prime due ore siano le più indicate, perché risentono meno della stanchezza degli studenti.

In conclusione, l'approccio Thinking Classroom offre un'ottima strategia per gli insegnanti alla ricerca di un maggior coinvolgimento (e di una costruzione di conoscenza più profonda) per i loro studenti fornendo una lista di pratiche in questo senso. Il lavoro degli insegnanti è complicato e avere una serie di indicazioni e consigli può aiutare l'insegnamento. Sebbene sia quindi un approccio recente, offre svariate prospettive per il futuro dell'insegnamento della matematica. Gli studenti delle due classi hanno accolto bene la proposta e questo loro coinvolgimento attivo ha fatto sì che ciò che stavano imparando assumesse un carattere più personale, e non fosse qualcosa di "dato per vero".

Capitolo 7

Conclusioni

In questo capitolo vengono presentate le conclusioni, in merito alle domande di ricerca che hanno guidato la stesura di questa tesi:

L'approccio Thinking Classroom può configurarsi come un milieu a-didattico? In tal caso, un milieu così costruito può contribuire a rompere il contratto didattico?

I risultati derivano dal confronto fornito nel quadro teorico e dalle analisi degli episodi proposte nel capitolo precedente.

Nel capitolo dedicato al confronto tra TSD e approccio TC si sono evidenziati i loro vari elementi di coerenza sia negli obiettivi (rendere lo studente protagonista attivo e autonomo del processo di apprendimento) sia su cosa significhi “apprendere”. La conoscenza, per entrambi, è una costruzione personale dello studente derivante da processi di adattamento all’ambiente preparato dall’insegnante in cui il contesto socio-culturale, e quindi l’interazione con gli altri, ha particolare rilevanza. In particolare nella TSD viene favorita la creazione di un **milieu a-didattico**, in quanto (secondo Brousseau) il migliore per arrivare al superamento del contratto didattico.

Arrivati a questo punto della tesi è ora possibile affermare come **un milieu costruito secondo i criteri della TC possa essere definito come a-didattico**. Analizzando gli episodi proposti nello scorso capitolo infatti è stato possibile osservare come in una TC si rispecchino gli elementi principali di una situazione e di un milieu a-didattico.

Il rapporto dello studente con la conoscenza non deriva da un desiderio esplicito dell'insegnante, ma è giustificato dalla logica interna della situazione. La **devoluzione** del problema allo studente e l'**implicazione** di quest'ultimo nel risolverlo, che sono affidate a fasi iniziali precise di una situazione a-didattica nella TSD, nella TC non si limitano a una sola parte della lezione. Anche nella TC il compito viene affidato nella parte iniziale della lezione (nel “lancio”), ma l'implicazione dello studente non è detto che, una volta appurata all'inizio, si mantenga per tutta la durata della lezione. Si pensi ad esempio al caso della Classe1 in cui la stanchezza degli studenti (specie nella seconda ora di ogni lezione, che coincideva sempre con l'ultima della mattinata scolastica) portava

ad un calo della partecipazione da parte di alcuni di loro. In questo, il concetto di mantenimento del flow nella TC porta un elemento in più sia per assicurare l'implicazione dello studente sia per aiutare l'insegnante nel suo ruolo durante la lezione che non è solo di regista (durante le discussioni) o di *“istituzionalizzatore del sapere”*, ma anche di colui che mantiene in equilibrio lo stato di flow dei suoi studenti.

“Lo studente sa che il problema proposto dall'insegnante lo porterà all'acquisizione di nuova conoscenza, che sarà validata dalla situazione in sé e non da clausole del contratto didattico.”

Quest'ultima affermazione, che nel quadro teorico era riferita ad un milieu a-didattico, è associabile anche ad una TC. A seguito del capitolo di analisi dei dati è infatti possibile fare le seguenti osservazioni. **Nelle lezioni tenute dai due docenti durante il progetto sono state riscontrate poche tracce di “contratto didattico”.**

Partendo dalla figura dell'insegnante, le tracce di **“effetti del contratto”** sono state essenzialmente nulle. Nell'analisi dello scorso capitolo (sottosezione 6.1.2) riguardo alla lezione tenutasi nella Classe1, per esempio, quello che poteva rivelarsi un **effetto Jourdain** (in legame all'uso dell'analogia da parte del docente) si è rivelato un *“suggerimento”* in termini di mantenimento del flow. Il Docentel infatti ha fornito una situazione analoga a quella che stava dando difficoltà al gruppo in questione (la razionalizzazione durante lo svolgimento della prima domanda), ma non ha spiegato in cosa consistesse l'analogia, lasciando che fossero gli studenti a ricondurvisi per poter superare l'ostacolo e proseguire nella risoluzione del problema.

Anche rispetto all'**effetto Topaze** non sono state riscontrate particolari tracce. Entrambi gli insegnanti sono passati per i gruppi per controllare il lavoro degli studenti, ma non sono mai intervenuti in modo diretto, non si sono presi la responsabilità della risoluzione del problema (nemmeno nel momento di discussione finale). I loro interventi nei gruppi servivano solo al mantenimento del flow: se notavano che gli studenti erano in difficoltà fornivano loro dei suggerimenti, o ripercorrevano con loro i ragionamenti in modo che fossero loro a notarlo, ma non davano mai la risposta al posto loro. Non vi era l'esigenza nel fatto che la risposta che consideravano “corretta” fosse trovata immediatamente dagli studenti. L'ambiente è stato infatti organizzato in modo tale che fossero gli studenti stessi a riprendersi da momenti di blocco, nella risoluzione, confrontandosi all'interno e tra i gruppi. Questo è stato favorito in primo luogo dalla disposizione nell'aula: gli studenti rimanevano in piedi, potevano in ogni momento avere accesso alla VNPS del proprio gruppo e non sentivano la pressione di dover rispondere “perché lo vuole l'insegnante” in quanto erano loro stessi a volerlo (come conseguenza del mantenimento del flow e quindi della creazione della “esperienza ottimale” così come definita nel quadro teorico). In secondo luogo, la creazione dei gruppi in modo casuale (e non legato ad un *“raggruppamento per abilità”* degli studenti) ha permesso che gli studenti si sentissero “alla pari” coi compagni e quindi liberi di intervenire in ogni momento. In questo modo si sono favoriti anche i processi di assimilazione e accomodamento che

hanno portato al superamento dei “*conflitti cognitivi*” derivanti da tali momenti in cui si sentivano bloccati nella risoluzione dei problemi.

Per quanto concerne invece l’**effetto Dienes**, alla fine del capitolo precedente si è osservato come lo stesso Docente1 abbia constatato le problematiche che possono sorgere nella discussione finale di classe (nel metodo insegnante-scriba), in merito alla ridondanza delle informazioni che quindi portavano ad un minor coinvolgimento degli studenti. Nel suo “commento a caldo” il Docente1 non dava la colpa della mancata partecipazione all’approccio TC, quanto più vi era l’interesse per cercare un adattamento che potesse coinvolgere maggiormente gli studenti in quei momenti fondamentali in cui si doveva concordare una conoscenza condivisa e ufficializzarla. La mancanza di tale effetto del contratto può essere dovuta all’aver lasciato ai due insegnanti una certa libertà nel riadattare l’approccio TC nelle proprie classi permettendo loro di considerarlo non come un libretto di istruzioni, ma come qualcosa da cui attingere.

In merito alle **clausole del contratto** invece si può osservare come:

- *Non vi sono state tracce di **clausola di delega formale**: ciò è stato evitato proprio dal senso di autonomia degli studenti. Tale autonomia deriva dall’aver fornito agli studenti un proprio spazio di lavoro, le VNPS, in cui se si bloccavano nello svolgimento del problema potevano cancellare, senza sentirsi in obbligo ad aggiungere calcoli per cercare di dare un senso ad un ragionamento di cui non erano convinti, e riprovare collaborando coi compagni. Se invece avessero sentito di dover dare la risposta solo per l’insegnante, si sarebbero potuti riscontrare dei casi, ma il modo in cui l’ambiente organizzato con l’approccio TC ha coinvolto gli studenti nelle attività ha fatto in modo che non accadesse.*
- *Si sono riscontrate alcune tracce di **clausola delle attese**, ma non in senso “negativo”. Per esempio in entrambe le classi si è notato come vi fossero più casi di studenti che intervenivano nei gruppi proponendo l’uso della circonferenza perché (con le parole di S16 della Classe2, si veda pagina 125) “quando si impara una cosa spesso mi capita che me lo spiegano facendo l’esempio del seno e coseno messi in una circonferenza”. In questo caso l’osservazione di S16 non era una “attesa”, nel senso di qualcosa che sa che l’insegnante vorrebbe, quanto più una proposta. Non un’idea imposta ma una nuova strada percorribile. Il fatto che si fosse creato un clima di collaborazione e condivisione ha permesso agli studenti di non trattenersi nell’espore le loro idee e ciò li aiutati sia per lo svolgimento delle attività, sia nei momenti di discussione di classe.*
- *Vi sono state tracce di **clausola di esigenza di giustificazione formale**, ma anche in questi casi non con un’accezione “negativa”. Le due classi frequentavano un liceo scientifico, di conseguenza il raggiungimento di un certo formalismo, rigore e livello di validazione delle loro risposte era necessario ottenerlo. Questa esigenza nasceva all’interno dei gruppi: vi sono stati esempi di studenti che chiedevano ad un compagno del proprio gruppo di spiegare in modo più dettagliato il suo ragionamento, ma erano*

anche momenti indotti dagli insegnanti che chiedevano loro di esplicitare meglio i passaggi dei loro ragionamenti. Il fatto che fossero gli studenti stessi a voler formalizzare i propri ragionamenti deriva dal mantenimento del flow da parte dell'insegnante, che quindi ha favorito quella che nel quadro teorico è stata indicata come "*esperienza ottimale*". In questo modo erano loro stessi ad interessarsi alla risoluzione dei problemi, fino al punto di andare oltre le richieste esplicite dell'insegnante. Questo formalismo era essenziale specialmente nei momenti di discussione di classe in quanto ciò che appariva alla lavagna comune sarebbe rimasto negli appunti degli studenti (nel caso della Classe1) o nel "*quaderno di classe*" (per la Classe2).

L'ambiente creato secondo la TC permette inoltre il superamento del "**paradosso della devoluzione**": vi è un certo "equilibrio" anche nel come e quanto l'insegnante debba intervenire durante la lezione. Si pensi alle domande a cui può rispondere (così come dettato dalle *14 pratiche* della TC), ai suoi interventi per il mantenimento del flow o ancora alla parte di consolidamento delle conoscenze. Non è mai un intervento diretto nel processo di costruzione della conoscenza e non è qualcosa di ricercato dagli studenti, ma l'insegnante (facendo da regista degli scambi) si limita a fornire domande mirate che stimolino la creazione di idee da parte degli studenti, le quali saranno poi da lui riformulate in modo più concreto e formale (in termini di TSD, nella **fase di istituzionalizzazione**).

In merito alla **fase di socializzazione**, questa può essere rappresentata dal momento di *consolidamento della conoscenza*, nella "*chiusura della lezione*" dove avviene lo scambio di idee tra i vari gruppi che porta ad una conoscenza condivisa.

Per quanto riguarda invece le **fasi di costruzione della conoscenza personale** e di **validazione**, queste in una TC non occupano un solo momento preciso nella lezione. Siccome infatti nella TC si usa progettare il "*buon compito*" tramite lo thin-slicing, queste due fasi si ripetono con ogni variazione di difficoltà nelle domande. La prima fase inizia con una "*situazione di azione*" (in termini di TSD), che vede gli studenti affrontare la domanda corrente, mentre la seconda si innesca con le stesse modalità definite prima per la clausola di esigenza di giustificazione formale.

Nei capitoli precedenti si è sottolineato quanto la TSD abbia un carattere più "*teorico*" che permetta un'analisi approfondita di **cosa** influisca sull'apprendimento e cosa lo ostacoli, mentre l'approccio TC si concentri, in modo più "*operativo*", su **come** favorirlo. In particolare è bene sottolineare nuovamente alcune differenze.

Nella TSD Brousseau usa spesso la dinamica del **gioco** per organizzare una situazione a-didattica, mentre nella TC Liljedahl non lo prende in considerazione. Nel primo caso quindi si tratta di una competizione che stimola lo studente a trovare e giustificare la propria strategia per superare quelle degli altri e quindi vincere il gioco. Nel secondo caso invece si tratta di estendere un confronto costruttivo di idee, già tenutosi all'interno dei gruppi, a tutta la classe favorendo

ulteriormente il clima di collaborazione tra gli studenti per la creazione della conoscenza. Il gioco può essere una dinamica vantaggiosa per gli studenti di età minore (come per esempio nella scuola primaria) perché è un modo più diretto per raggiungere la loro partecipazione, siccome anche all'esterno dell'aula il "gioco" occupa gran parte delle loro giornate. Invece nelle scuole secondarie dove si vuole raggiungere un certo livello di formalismo, rigore e di collaborazione può essere vantaggioso seguire la TC.

Nella TC vi è poi una maggiore attenzione in merito alla progettazione di un **"buon compito"** da utilizzare nelle attività e ai criteri di **autovalutazione** degli studenti. L'autovalutazione diventa un elemento influente se si vuole favorire una costruzione personale della conoscenza, per esempio con l'utilizzo delle rubriche e delle **domande CYU** (così come sono state presentate nel quadro teorico). Possono risultare anche come conferma ulteriore che quanto hanno appreso durante la lezione sia riconosciuto come conoscenza: tale conferma non viene quindi data solo dall'insegnante in una fase di istituzionalizzazione, ma anche da una stessa valutazione dello studente.

7.0.1 Prospettive per il futuro

In questa tesi si è osservato come l'approccio TC possa aiutare gli insegnanti nell'organizzazione di un milieu a-didattico (nei termini descritti nella TSD) che non faccia emergere tracce di contratto didattico. Come si è visto, per esempio, l'esigenza di giustificazione formale, che in una "situazione didattica" (così come definita nella TSD) risulta una clausola del contratto, può aiutare gli studenti a raggiungere un certo formalismo e rigore nelle conoscenze che hanno costruito. Questa esigenza può nascere dagli studenti stessi o derivare da interventi dell'insegnante nel mantenimento del flow (tramite suggerimenti e estensioni del problema). Un ambiente TC che favorisce la collaborazione, l'autonomia e il coinvolgimento attivo nella costruzione della conoscenza da parte degli studenti riesce a non fare emergere gli effetti, le clausole e i paradossi del contratto didattico.

In merito ai risultati ottenuti dall'analisi dei dati sulle due classi c'è un ultimo fattore che deve essere preso in considerazione. Le due classi avevano già utilizzato l'anno precedente un approccio TC e il fatto che sia stato difficile rintracciare le tracce del contratto potrebbe esserne una conseguenza come anche una conferma del suo superamento. Per studi più approfonditi occorrerebbe fare il medesimo studio in una classe in cui l'approccio TC non sia mai stato sperimentato, osservare se e quali tracce del contratto emergerebbero e come queste vengono superate in un milieu TC.

L'approccio Thinking Classroom è recente ed è ancora possibile una sua evoluzione. Questo si è visto per esempio nei due suoi adattamenti apportati dai docenti durante il progetto:

- Le particolari disposizioni degli studenti durante i momenti di discussione di classe hanno influito sulla loro partecipazione. In particolare quella

“*a ferro di cavallo*” è stata più incisiva per la loro partecipazione (per i motivi già elencati in precedenza) durante il progetto di ricerca.

- L'utilizzo della *LIM* può essere vantaggioso durante il momento di consolidamento “*insegnante-scriba*”. Permette, una volta consolidata la conoscenza relativa ad una domanda, di mantenere quanto scritto, nello stesso file o in uno a parte, di modo che all'occorrenza possa essere ripreso nelle domande successive. Inoltre, mantenere il file a disposizione degli studenti può aiutarli qualora si sentano insicuri dei propri appunti, per poter fare un confronto con quanto condiviso in classe.
- Durante il progetto non è stato usato il metodo dei quattro quadranti per la presa di appunti degli studenti, quindi non è possibile fare un paragone diretto. Tuttavia la scelta della Docente2 di far scrivere un “*quaderno di classe*” può risultare un modo per favorire la collaborazione tra gli studenti anche nel momento di presa di appunti. Inoltre è un ottimo strumento se, come nel caso del progetto di ricerca, l'obiettivo volesse diventare la costruzione di una teoria (col giusto formalismo e rigore).
- È possibile che vi siano altri fattori che possono influenzare una Thinking Classroom e che potrebbero essere ancora esplorati. Uno di questi è legato agli *orari scolastici* in cui viene svolta l'attività. Come osservato nel capitolo di analisi dati, per esempio, svolgerle alle prime due ore o alle ultime due può avere i suoi vantaggi e svantaggi per la partecipazione attiva dello studente.

Per concludere, insieme la Teoria delle Situazioni Didattiche e l'approccio Thinking Classroom possono rappresentare un'ottima risorsa per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica in un'ottica che metta lo studente e la sua partecipazione attiva nella costruzione della conoscenza al primo posto.

Bibliografia

- [1] M. Asenova, B. D'Amore, M. Fandiño Pinilla, M. Iori, G. Santi, et al. La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica= the theory of objectification and the theory of didactical situations: An example of comparison between theories in mathematics education. *La matematica e la sua didattica*, 28(1):7–61, 2020.
- [2] A. E. Baccaglini-Frank, P. Di Martino, R. Natalini, G. Rosolini, et al. *Didattica della matematica*. Mondadori università, 2018.
- [3] J. Boaler. The 'psychological prisons' from which they never escaped: The role of ability grouping in reproducing social class inequalities. In *Forum*, volume 47, pages 135–144. Symposium Journals, 2005.
- [4] J. Boaler. How a detracked mathematics approach promoted respect, responsibility, and high achievement. *Theory into practice*, 45(1):40–46, 2006.
- [5] J. Boaler. Ability and mathematics: The mindset revolution that is reshaping education. Forum, 2013.
- [6] G. Brousseau. *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Springer, 2002.
- [7] G. Brousseau. Una modellizzazione dell'insegnamento della matematica. *Bollettino dei docenti di matematica*, 49:11–32, 2004.
- [8] F. Carugati and A.-N. Perret-Clermont. La prospettiva psico-sociale: intersoggettività e contratto didattico. *Manuale di psicologia dell'educazione, Il Mulino, 1999//41-66*, 1999.
- [9] B. D'Amore, M. I. Fandino, et al. L'effetto topaze. analisi delle radici ed esempi concreti di una idea alla base delle riflessioni sulla didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 23:35–59, 2009.
- [10] B. D'Amore, M. I. Fandiño Pinilla, I. Marazzani, G. Santi, and S. Sbaragli. Il ruolo dell'epistemologia dell'insegnante nelle pratiche d'insegnamento. *Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 32(2):171–192, 2009.
- [11] V. Di Martino et al. Il ruolo della narrazione nell'insegnamento apprendimento delle frazioni con situazioni a-didattiche. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*, 20:1–30, 2010.
- [12] B. D'Amore et al. Epistemologia, didattica della matematica e pratiche d'insegnamento. *La matematica e la sua didattica*, 21(3):347–369, 2007.
- [13] B. D'Amore, A. S. Pedagogica, and S. Locarno. Le basi della didattica della matematica. *Scuola Italiana Moderna*, 116(6):41–45, 2008.

- [14] B. D'Amore, A. Renata, B. Fabio, and C. Maria. La ricerca in didattica della matematica e la sua applicazione concreta in aula. In *3st Conference UMI-CIIM. Salerno, October*, pages 17–19, 2013.
- [15] P. Freire. *La Pedagogia Degli Oppressi*. A. Mondadori, [Milano], 1971.
- [16] J. C. Hortelano and M. Prudente. Effects of the theory of didactical situations' application in mathematics education: A metasynthesis. *Journal of pedagogical research*, 8(3):246–262, 2024.
- [17] R. D. Libby. Piaget and organic chemistry: The equilibrium-kinetic approach for teaching introductory organic chemistry. *Journal of Chemical Education*, 68(8):634, 1991.
- [18] P. Liljedahl. *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin press, 2020.
- [19] P. Liljedahl. Flow and variation theory: powerful allies in creating and maintaining thinking in the classroom. In *Mathematical challenges for all*, pages 539–563. Springer, 2023.
- [20] S. Locatello, G. Meloni, and S. Sbaragli. " soli, muretti, regoli e coppie. . . ". riflessioni sull'uso acritico dei regoli cuisenaire-gattegno: i numeri in colore. *Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 31(5):455–483, 2008.
- [21] F. Marton and M. F. Pang. Meanings are acquired from experiencing differences against a background of sameness, rather than from experiencing sameness against a background of difference: Putting a conjecture to the test by embedding it in a pedagogical tool. *Frontline learning research*, 1(1):24–41, 2013.
- [22] T. Muir. Building a thinking classroom: a case study of implementation and professional growth. *Journal of Mathematics Teacher Education*, pages 1–29, 2025.
- [23] M. Sarı and N. Tertemiz. The effects of using geometry activities based on dienes' principles on 4th graders' success and retention of learning. *Education and Science*, 42(190):1–23, 2017.
- [24] S. Sbaragli. Le competenze nell'ambito della matematica. *Difficoltà in matematica*, 7(2):143–156, 2011.