Università degli studi di Pavia
Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Evoluzione storica del problem solving geometrico nel primo periodo moderno: il problema del quadrato e le sue implicazioni didattiche

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Relatore:
Riccardo Rosso

Tesi di Laurea di:
Beatrice Cicchetti
Matricola 545396

Anno Accademico 2024-2025

Abstract

L'obiettivo di questo lavoro di tesi è quello di presentare le principali evoluzioni nel campo del *problem solving* geometrico avvenute durante il periodo moderno (1590 - 1750 circa), ponendo particolare attenzione a quelli che sono stati gli avvenimenti chiave che hanno portato a questa evoluzione e ai risultati che sono stati raggiunti.
Innanzitutto la nostra attenzione è stata posta sulla discussione che si instaura nel contesto del *problem solving* geometrico sull'esattezza delle costruzioni geometriche e sulla conseguente accettabilità e classificazione dei metodi di risoluzione. Abbiamo poi evidenziato come tale discussione abbia subito una decisiva riorganizzazione in seguito alla pubblicazione della traduzione latina delle *Collezioni* di Pappo nel 1588 ad opera di Federigo Commandino e anche all'introduzione di un nuovo metodo di analisi basato sull'utilizzo dell'algebra, ad opera del matematico francese François Viète. Questi due eventi sono quelli che maggiormente caratterizzano questo periodo storico, le cui conseguenze sono osservabili all'interno di ogni opera dell'età moderna.
Un altro snodo cruciale che abbiamo trattato è la pubblicazione della *Géométrie* di Cartesio nel 1637. Questa opera si pone come collegamento tra il primo e il secondo periodo moderno, segnando una svolta nel campo del *problem solving* geometrico che da tempo era attesa. Quest'ultima ha portato all'unificazione delle varie opinioni matematiche nel dibattito sull'esattezza delle costruzioni, fornendo un approccio condiviso per la risoluzione dei problemi geometrici, che fino ad allora era mancato. Cartesio emerge pertanto come figura chiave di questo periodo storico e la sua opera ricopre un ruolo decisivo nella creazione di un nuovo campo della matematica: la geometria analitica.
Superato questo breve studio del contesto storico, l'obiettivo che ci siamo posti è stato quello di analizzare le principali evoluzioni che hanno contraddistinto il campo delle costruzioni geometriche durante l'età moderna, attraverso l'analisi di un problema ampiamente trattato in letteratura: il problema del quadrato. La scelta di questo problema è stata inoltre dettata dalla presenza di quest'ultimo all'interno delle *Collezioni* di Pappo, che come abbiamo già avuto modo di sottolineare, hanno svolto un ruolo decisivo all'interno di questo contesto storico. Tale problema è stato più volte ripreso da diversi matematici dell'età moderna, tra i quali ricordiamo Marino Ghetaldi, Albert Girard, René Descartes e Isaac Newton. L'analisi delle soluzioni da essi proposte ha guidato la formulazione di alcune osservazioni più specifiche in merito agli sviluppi precedentemente delineati. In particolare ci ha permesso di evidenziare l'evoluzione del complicato rapporto tra algebra e geometria e la progressiva integrazione

di queste due discipline che ha permesso l'emergere della geometria analitica come campo di studi indipendente.
Nella seconda parte di questo lavoro ci siamo concentrati sull'analisi di alcune fonti di carattere didattico all'interno delle quali veniva ripreso il problema del quadrato. Questi testi, la maggior parte dei quali si configuravano come raccolte di esercizi per l'educazione scolastica, ci hanno permesso di evidenziare l'utilità che questo problema ha avuto non solo nello sviluppo storico, ma anche nella pratica didattica. In particolare una prima analisi ci ha condotto ad osservare il legame tra le considerazioni di carattere storico precedentemente delineate e le motivazioni che hanno spinto gli autori all'utilizzo di questo problema all'interno del contesto scolastico, soffermandoci in particolare sulla dualità dei metodi di risoluzione presentati (algebrici e geometrici) e sull'importanza di proporre agli studenti problemi con risoluzioni non banali.
Queste osservazioni di carattere didattico ci hanno portato infine a interrogarci su due aspetti che sono stati più recentemente trattati dalla ricerca in didattica della matematica, ovvero l'integrazione della storia della matematica all'interno della pratica educativa e il valore che viene assegnato all'errore all'interno del contesto scolastico. Alcune riflessioni su questi temi sono state sviluppate a partire da lavori più recenti in questo ambito di ricerca.

Indice

Capitolo 1

Problem solving in geometria nel primo periodo moderno

Sin dall'antichità ci si è posti delle domande sulle costruzioni geometriche, sulla loro legittimità e sulla risoluzione dei problemi in geometria. Le domande principali con cui i matematici si sono confrontati nel corso dei secoli erano le seguenti: Quando si può dire che un'entità matematica è conosciuta? Cosa significa risolvere un problema? Nella geometria greca classica possiamo trovare le risposte a queste due domande: un'entità geometrica era considerata conosciuta se era possibile costruirla a partire da elementi dati, mentre per quanto riguarda i problemi geometrici, questi venivano considerati risolti se era possibile costruire la soluzione geometricamente. Se si accettano queste risposte come valide, tuttavia, una nuova domanda sorge spontanea: Cosa si intende con il termine *costruzione geometrica*? Vale a dire quali metodi di costruzione erano ritenuti sufficientemente esatti, tanto da essere considerati geometrici?
Purtroppo non abbiamo una risposta altrettanto precisa a questa domanda. Sicuramente nella geometria greca classica venivano accettate come geometriche le costruzioni eseguite con riga e compasso, prendendo come riferimento i primi tre postulati di Euclide, quelli riguardanti la definizione di rette e circonferenze[1]; d'altra parte, già i matematici dell'epoca si erano accorti che limitare le costruzioni al solo uso della riga e del compasso comportava che alcuni problemi non potessero essere risolti.
Con il passare dei secoli sono apparse nuove modalità di risoluzione dei problemi basate su costruzioni che andavano oltre quelle realizzabili tramite riga e compasso; tuttavia, fino all'inizio del periodo moderno non c'era un vero interesse nel comprendere se questi nuovi metodi di costruzione potessero essere considerati accettabili in geometria, e pertanto le costruzioni venivano spesso presentate senza dare spiegazioni riguardo alla loro legittimità.
Durante il periodo che va dal 1590 al 1750 circa, quello che generalmente indichiamo con il termine età moderna, ci fu una rinascita dell'interesse verso

[1] Richiamo i postulati di Euclide presi da [Euclide 1926]:
1. Si ammetta di poter tirare da ogni punto ad ogni [altro] punto, una linea retta;
2. e di poter prolungare continuamente per diritto una linea retta terminata;
3. e con ogni centro e con ogni distanza, descrivere un circolo;

il *problem solving* geometrico; questo portò la discussione sull'accettabilità dei vari metodi di costruzione ad occupare una posizione centrale nel dibattito matematico.
Fattori determinanti per la rinascita di questo interesse furono l'introduzione dell'algebra come strumento di supporto alla geometria e la pubblicazione della traduzione latina delle *Collezioni di Pappo*, di cui discuteremo in seguito.
È bene tener presente, durante la lettura dei prossimi paragrafi, la suddivisione storico-matematica tra la prima e la seconda parte del periodo moderno, e ciò che le caratterizza. Il primo periodo moderno, che corrisponde all'arco temporale 1590-1650 circa, è caratterizzato dalla risoluzione di problemi dove è richiesto di costruire un punto o un segmento, e che ammmettono al più un numero finito di soluzioni. Vedremo che questo tipo di problemi, se trasformati in un'equazione algebrica, si riconducono a equazioni in una variabile. La seconda parte del periodo moderno, invece, si colloca negli anni 1635-1750 circa, ed è caratterizzata da problemi le cui soluzioni non sono più solamente punti e segmenti, ma nei quali si ricercano delle curve. I due intervalli temporali, come possiamo vedere, sono parzialmente sovrapposti ed è proprio all'interno di questa sovrapposizione che si colloca una delle figure centrali di questo periodo: René Descartes. Egli infatti fornirà un ponte di collegamento tra primo e secondo periodo moderno attraverso la sua opera principale, la *Géométrie*, nella quale sono contenute risoluzioni di problemi legati al primo periodo moderno, ma anche uno studio iniziale delle curve attraverso la loro equazione algebrica. Il secondo periodo moderno sarà inoltre caratterizzato dall'introduzione dell'analisi infinitesimale, che favorirà la nascita dell'analisi come disciplina indipendente, non più legata al problem solving geometrico come era stata fino ad allora.
Nei prossimi paragrafi focalizzeremo la nostra attenzione maggiormente sugli eventi che hanno segnato il primo periodo moderno, costruendo le basi per poter analizzare in seguito le risoluzioni di problemi che hanno caratterizzato quel periodo.

1.1 Esattezza in matematica e accettabilità delle costruzioni

I matematici vissuti nel primo periodo moderno, come molti prima di loro, erano d'accordo sul fatto che le approssimazioni non fossero uno strumento proprio della matematica. In alcuni casi utilizzare delle procedure approssimate poteva condurre a risultati pratici soddisfacenti, tuttavia, tali procedure non portavano ad una conoscenza matematica certa, precisa e indubitabile. Pertanto, basandoci su questa premessa, possiamo definire esatte le procedure che portavano ad una vera conoscenza matematica, diversa da quella derivante da procedure approssimate e imprecise.
Nonostante questa definizione di esattezza, restava ancora da definire quali fossero i caratteri che distinguevano una procedura esatta da una che non lo era.
Nella geometria greca classica venivano considerate esatte, e quindi geometri-

camente accettabili, le costruzioni eseguite tramite l'utilizzo della riga e del compasso. Tuttavia, come già ricordato, la loro legittimità discendeva da una serie di postulati. Non esisteva pertanto una dimostrazione matematica che provava l'accettabilità di tali costruzioni e questo rendeva difficile conferire ad altri metodi di costruzione lo *status* di metodi geometrici. Il problma della distinzione tra metodi di costruzione accettabili e non, era quindi una questione che esulava dal contesto matematico, ed ognuno era libero di accettare o rifiutare una certa interpretazione.
Tale questione era di fondamentale importanza in un'epoca in cui il *problem solving* geometrico era in pieno sviluppo e suscitava un vasto interesse. Stabilire quali metodi di costruzione potessero essere considerati validi per ottenere una soluzione geometrica doveva, infatti, fornire una guida alla risoluzione dei problemi. Per questo motivo, la discussione sull'accettabilità delle costruzioni fu molto intensa e vide pareri contrastanti durante tutta la durata del primo periodo moderno, senza tuttavia che alcuna delle proposte avanzate riuscisse a risultare convincente a lungo termine.
Alla fine dell'età moderna l'interesse per questo tema era progressivamente diminuito, in parte come conseguenza della separazione dell'analisi dalla geometria, pertanto la discussione fu gradualmente abbandonata.

1.2 Le collezioni di Pappo

Come già abbiamo sottolineato, la pubblicazione della traduzione latina delle Collezioni di Pappo, ad opera di Federigo Commandino, segnò un punto di svolta nella discussione sull'esattezza delle costruzioni geometriche e sull'accettabilità dei vari metodi di costruzione. Prima di allora la discussione era disomogenea, non c'erano testi classici a cui far riferimento e nessuno aveva formulato criteri di distinzione tra metodi di costruzione geometrici e non.
Durante il XVI secolo, tuttavia, i matematici concordavano sull'esattezza delle costruzioni geometriche eseguite per mezzo di riga e compasso. Queste, infatti, si basavano sui primi tre postulati degli *Elementi di Euclide*. Inoltre nel 1533 venne diffuso il *Commento sul primo libro degli Elementi* di Proclo il quale affermava che le linee rette e le circonferenze godevano di uno statuto speciale all'interno della geometria; esse erano infatti le linee più semplici e perfette da cui discendevano tutte le altre ([Bos 2001], p. 25):

> Platone suppone che le due specie più semplici e fondamentali di linee siano la retta e la circolare e considera tutte le altre come combinazioni di queste due: sia quelle dette spirali, tanto le piane quanto quelle avvolte su un solido, sia le linee curve ottenute tramite sezioni di solidi.

Il commento di Proclo fu più volte preso come riferimento dai matematici nel XVI secolo per giustificare l'accettabilità delle costruzioni eseguite con riga e compasso. Ciò avvenne nonostante, all'interno di quest'ultimo, non venga mai formulato un vero e proprio criterio per accettare o rifiutare un determinato metodo di costruzione; inoltre, Proclo non afferma mai che la geometria debba limitarsi all'utilizzo delle linee sopra citate.

Accettare come geometriche le sole costruzioni con riga e compasso comportava l'assenza di una soluzione per molti problemi geometrici; alcuni di questi, infatti, erano noti sin dall'antichità per la loro non risolubilità tramite i metodi di costruzione euclidei. I più celebri tra di essi sono la quadratura del cerchio, la ricerca dei due medi proporzionali tra due segmenti assegnati e la trisezione dell'angolo. È importante sottolineare, tuttavia, che non esisteva una vera dimostrazione della non risolubilità di questi problemi tramite riga e compasso. Quest'ultimo era un fatto comunemente noto, ricavato dall'esperienza dei matematici nel corso dei secoli. La dimostrazione vera e propria fu presentata solamente nel XIX secolo.
L'impossibilità di costruire una soluzione, tuttavia, non negava l'esistenza di essa. Durante i secoli precedenti, l'esistenza di una soluzione e la sua costruttibilità erano considerate come un'unica questione e quasi mai erano prese in esame separatamente. Nel corso del XVI secolo, tuttavia, si inizia a fare una distinzione tra le due tematiche. Per quanto riguarda i problemi classici non risolvibili con riga e compasso, come quelli sopra citati, l'esistenza di una soluzione non viene negata, e in alcuni casi viene dimostrata sfruttando argomenti di continuità delle quantità geometriche[2].
Per concludere possiamo quindi affermare che durante il periodo precedente la pubblicazione delle *Collezioni di Pappo* non furono formulati criteri per l'accettazione delle costruzioni geometriche, anche se l'interesse verso i problemi classici non risolvibili con riga e compasso portò gli autori a confrontarsi con tale questione. La pubblicazione nel 1588 della traduzione, ad opera di Commandino, del testo composto da Pappo nel IV secolo d.C., rivoluzionò completamente la discussione sul tema dell'esattezza. Gli autori iniziarono a formulare criteri espliciti sull'accettabilità dei metodi di costruzione geometrici e il dibattito divenne più chiaro e organizzato, basato su domande ben definite e con un obiettivo comune da perseguire.

1.2.1 La struttura dell'opera

Possiamo riconoscere all'interno delle *Collezioni* due temi che contribuirono in modo decisivo a rendere l'opera un punto di riferimento nella discussione sul problem solving geometrico: la classificazione dei problemi geometrici e il precetto di Pappo.
Il primo di questi aspetti viene trattato nel III e nel IV libro delle *Collezioni*. Pappo propone una classificazione dei problemi basata sui loro metodi di riso-

[2]Nel 1559 Buteo pubblica un libro dal titolo "De quadratura circuli libri duo, ubi multorum quadraturae confutantur, & ab omnium impugnatione defenditur Archimedes" dove critica apertamente tutti i tentativi di risoluzione del problema di quadratura del cerchio, evidenziando gli errori commessi dai vari autori. Nel testo viene considerata anche la quadratura del cerchio di Brisone, che non prevede una costruzione, ma solo un'argomentazione a favore dell'esistenza della soluzione basata sulla continuità; tale trattazione viene accettata da Buteo come prova dell'esistenza della soluzione, ma l'autore afferma che ciò non basta per considerare il problema risolto. Il quadrato, infatti, deve essere costruito tramite metodi geometrici per poter considerare la risoluzione completa. Buteo, tuttavia, non formula alcun criterio che permetta di distinguere quando una costruzione possa essere considerata geometricamente accettabile.

luzione. Secondo l'autore, infatti, tutti i problemi geometrici potevano essere risolti attraverso l'intersezione di curve. La classificazione presentata nel testo distingue tre categorie di problemi: piani, solidi e lineari. I problemi piani erano tutti quelli risolvibili con il metodo euclideo, utilizzando solamente linee rette e circonferenze. I problemi solidi utilizzavano anche un particolare tipo di curve, le coniche. Infine, tutti i problemi risolvibili solamente tramite l'utilizzo di curve che non rientravano nelle categorie precedenti, erano considerati di tipo lineare e prevedevano, ad esempio, l'uso di curve come la cissoide, la concoide o le curve quadratrici.
Da questa classificazione possiamo dedurre come l'autore ritenesse non geometriche le costruzioni eseguite tramite strumenti meccanici o tramite la metodologia di scorrimento dei righelli per arrivare alla configurazione desiderata. Tuttavia Pappo si interesserà ad alcune di queste costruzioni a tal punto da inserirne alcuni esempi all'interno delle *Collezioni*. Tale classificazione avrà importanti conseguenze, non solo sulla discussione riguardante l'accettabilità delle costruzioni, ma anche sugli argomenti di studio del periodo successivo. Nascerà infatti un interessere per lo studio delle curve, che rimarrà un tema centrale anche durante tutta la seconda parte del periodo moderno.
Il secondo aspetto, il precetto di Pappo, viene presentato all'interno del IV libro, art. 36. L'autore, infatti afferma quanto segue (si veda [Bos 2001], p. 49):

> Presso i geometri è in un certo senso considerato un peccato non lieve quando qualcuno risolve un problema piano con coniche o linee, detto in altro modo, quando la soluzione del problema non è appropriata.

La traduzione latina di Commandino usa proprio la parola *peccatum*, peccato per descriverece la risoluzione di un problema geometrico tramite metodi non appartenenti alla classe cui esso appartiene. Questa termine espone in modo chiaro l'idea di Pappo in merito ai metodi di costruzione accettabili per la soluzione di un problema geometrico. Tuttavia, sarà lo stesso autore a infrangere più volte questo precetto, presentando costruzioni che usano metodi diversi da quelli consentiti, portando anche esempi di costruzioni ritenute puramente meccaniche. Pappo, infatti, afferma che pur riconoscendo teoricamente corrette solamente le costruzioni eseguite con l'ausilio delle curve, nella pratica è difficile trovare tali costruzioni, pertanto a volte risulta più semplice costruire le soluzioni appoggiandosi ad altri metodi, come l'uso di strumenti o delle *neusi*.
L'opera di Pappo lascia aperte alcune questioni, soprattutto riguardo all'utilizzo delle curve. Per esempio, all'interno del testo, nonostante si faccia esplicito uso delle curve in varie costruzioni presentate dall'autore, spesso non viene menzionato il metodo di costruzione di quest'ultime. Per quanto riguarda le coniche, Pappo sembra avvalersi della costruzione presentata nelle *Coniche* di Apollonio. In merito a curve più complesse, Pappo non indica in maniera esplicita la loro costruzione, suggerendo che queste vadano costruite per punti o per mezzo di uno strumento. Altre curve, invece, come la spirale o la quadratrice, vengono presentate utilizzando la loro definizione tramite movimento. Tuttavia, l'autore si mostra restio ad accettare come geometrico questo metodo di tracciamento

delle curve.

Infine è importante mettere in evidenza un'altra tematica affrontatata all'interno dell'opera e che sarà fondamentale anche nella discussione successiva. Abbiamo già visto che all'interno delle *Collezioni*, Pappo utilizza vari metodi risolutivi, tra i quali troviamo anche metodi che l'autore non considera puramente geometrici. Un esempio rilevante è l'utilizzo dei problemi di neusis. Tale problema è generalmente formulato come segue:

Problema di Neusis 1.1
Date due linee rette L ed M, un punto O, detto polo della neusi, ed un segmento a, viene richiesto di trovare una linea retta passante per O, che interseca L ed M in due punti A e B, tali che $AB = a$.

Attraverso l'utilizzo di questo problema, molti altri quesiti geometrici potevano essere risolti. Se si considerava risolto quest'ultimo, infatti, era possibile affrontare altri quesiti semplicemente riconducendoli ad una neusi. Pappo non ritiene questo metodo di risoluzione legittimo, tuttavia all'interno dell'opera presenta una propria soluzione di un caso particolare del problema di neusis (quello in cui L e M sono perpendicolari), ottenuta tramite intersezione di coniche, sfruttandola in seguito per risolvere il problema di trisezione dell'angolo.
Possiamo quindi concludere questa breve presentazione delle *Collezioni* affermando che molti dei temi trattati all'interno dell'opera saranno ricorrenti nel dibattito sull'esattezza delle costruzioni durante tutto il primo periodo moderno. In effetti, questo testo rappresenta il punto di partenza di un dibattito più strutturato e oggettivo rispetto a tutte le discussioni avvenute precedentemente. La classificazione dei problemi di Pappo, in particolare, sarà presa come riferimento da numerosi matematici dell'età moderna, e argomenti come i problemi di neusis e le curve verranno approfonditi e ripresi in varie occasioni, rendendo la pubblicazione di questa opera un vero e proprio punto di svolta nella storia del *problem solving* geometrico.

1.3 Le costruzioni geometriche

Nonostante le *Collezioni* di Pappo contenessero una chiara indicazione sul metodo da privilegiare nella risoluzione dei problemi, oltre ad un precetto che doveva fungere da guida nella scelta del metodo di risoluzione da usare, tutto questo non fu sufficiente ad impedire la proliferazione di soluzioni che attingevano ad altri metodi di costruzione, scelti al di fuori di quelli considerati legittimi dall'autore. Pappo stesso porta alcuni esempi di queste costruzioni e, come già esposto, anche tra gli scritti classici troviamo varie costruzioni che non utilizzano l'intersezione tra curve come metodo di risoluzione.
Non c'è quindi da stupirsi che, anche nel primo periodo moderno, le costruzioni presentate utilizzassero numerosi metodi di risoluzione differenti tra loro. Questo fatto ed un'analisi più approfondita di alcune costruzioni dell'epoca ci portano ad evidenziare due questioni rilevanti per il *problem solving* geometrico

in questo periodo: la prima è la mancanza di un'opinione comune sull'accettabilità dei metodi di costruzione. La seconda è la mancanza di un metodo comune di analisi, che porta le soluzioni ad essere spesso esposte in modi completamente diversi tra loro.
Concentrandoci sul primo punto, possiamo osservare come la mancanza di un'opinione predominante portasse ogni matematico a fornire soluzioni geometriche fondate su metodi differenti e a discuterne la relativa legittimità in termini di esattezza della costruzione. In particolare, nell'età moderna, possiamo classificare i metodi di risoluzione proposti racchiudendoli in quattro categorie: le costruzioni eseguite tramite procedure approssimate, quelle eseguite utilizzando l'intersezione tra coniche, quelle che facevano uso di curve speciali e infine quelle che riconducevano il problema ad un altro quesito standard. Questa caratterizzazione si riferisce maggiormente ai metodi di risoluzione impiegati per trattare i problemi solidi. Quelli piani, infatti, erano risolubili tramite il metodo euclideo, già riconosciuto come legittimo da tutti i matematici. La discussione era incentrata pertanto su problemi di natura diversa, dove l'accettazione di una data soluzione richiedeva una giustificazione teorica sulla legittimità del metodo utilizzato.
Le diverse categorie di metodi di risoluzione esposte in precedenza non ottennero un successo uniforme tra i matematici dell'epoca. Alcune tra esse suscitarono un ampio dibattito e furono presentate molte costruzioni appartenenti a tali categorie, oltre alla formulazione di vari argomenti a sostegno della loro legittimità. Per quanto riguarda altre categorie, invece, abbiamo solo pochi esempi di costruzioni, e anche gli argomenti forniti a sostegno della legittimità di quest'ultimi furono quasi subito respinti.
Un'istanza di quest'ultima classe è la categoria dei metodi di costruzione che utilizzano procedure approssimate. Molti dei matematici che ne fecero uso, infatti, erano consapevoli dell'inesattezza di tali metodi e vi ricorrevano solo nel momento in cui tutti i tentativi di utilizzare metodi più conformi ai criteri geometrici si erano rivelati inconcludenti; infatti, per molti di essi, ottenere un risultato approssimato era preferibile a non ottenerne alcuno. Un esponente di questa corrente di pensiero fu Clavio (1538-1612), un matematico, gesuita e astronomo tedesco noto per il suo contributo alla definizione del calendario gregoriano, che tentò di spingersi oltre al solo utilizzo di un metodo approssimato, carcando di legittimare la costruzione delle curve "per punti". Tuttavia, posto di fronte a numerose critiche, finì per abbandonare questa posizione, definendo la costruzione "per punti" non geometrica, pur riconoscendo che, fino ad allora, nessuna costruzione più precisa era stata trovata. Per questo motivo continuò a considerarla uno strumento utile, almeno finché non fosse stata presentata una costruzione pienamente legittima.
Contrariamente alla categoria dei metodi approssimati, altre ebbero un discreto successo e abbiamo numerose risoluzioni nelle quali vengono impiegati tali metodi. Ad esempio, la costruzione tramite curve non appartenenti alla famiglia delle coniche, fu ampiamente praticata nella risoluzione dei problemi non piani. Tale famiglia di costruzioni, come abbiamo già visto, porta a chiedersi come queste curve venissero a loro volta costruite. I metodi impiegati a tale scopo erano vari, spesso tratti da esempi classici, ma il punto cruciale della questione,

che permetteva di considerare le risoluzioni appartenenti a questa classe come legittime, era che la costruzione delle curve non veniva considerata interna al problema. Si presupponeva, infatti, che le curve impiegate nella risoluzione di un problema geometrico, fossero date in partenza, e spesso venivano considerate tracciabili geometricamente, senza bisogno di fornire ulteriori spiegazioni. Per questo motivo il dibattito attorno a tale questione fu limitato e, nonostante i numerosi esempi di costruzioni, solo in poche fonti possiamo trovare argomentazioni a sostegno della legittimità dei metodi di costruzione delle curve.

Andiamo ora ad analizzare il secondo punto messo in evidenza all'inizio del paragrafo, ovvero la mancanza di un metodo comune di analisi da impiegare nella risoluzione dei problemi. Sembra doveroso, quindi, fare una premessa sul significato del termine analisi in questo periodo storico. La risoluzione di un problema geometrico comportava da sempre due fasi: una prima fase, a cui ci riferiamo con il temine analisi, dove il matematico cerca di costruire la soluzione partendo dai dati noti del problema, ed una seconda fase, che chiameremo sintesi, dove il matematico espone la costruzione geometrica della soluzione. Vedremo che queste due parti possono essere legate in diversi modi tra loro.
La mancanza di un metodo di analisi comune a tutti i matematici discendeva in parte dalla mancanza di un punto di riferimento derivato dai classici. Infatti, non esistevano molte fonti classiche che mostravano l'analisi eseguita per arrivare alla soluzione di un problema geometrico, solitamente era presente solo la parte di sintesi che illustrava i passaggi di costruzione della soluzione, e la dimostrazione che ne provava la validità. La motivazione di questa scelta da parte degli antichi può essere ricondotta alla concisione e alla chiarezza espositiva tipica della matematica, che portava ad escludere la parte dell'analisi in quanto meno formalizzata, ma possiamo pensare che ci fosse anche un vero e proprio desidero da parte degli autori di nascondere come si era arrivati ad una certa soluzione.
Pertanto, vista la scarsità di fonti e di metodi classici a cui appellarsi, all'inizio dell'età moderna furono elaborati nuovi metodi di analisi, che possiamo suddividere in due classi principali: i metodi che si ispiravano alle risoluzioni classiche e i metodi algebrici. Quelli della prima classe basavano la risoluzione sugli elementi dati dalle ipotesi del problema, e quindi considerati noti. Si presupponeva inoltre di conoscere le soluzioni, che venivano rappresentate sul disegno; si procedeva poi a costruire gli elementi direttamente derivabili da quelli noti, e passo dopo passo si giungeva ad altri elementi fino ad ottenere la soluzione desiderata. L'analisi in questo caso poteva procedere in due direzioni opposte: sia nello stesso verso della sintesi, dai dati noti a quelli incogniti, sia nella direzione opposta, partendo dall'incognita fino ad arrivare a ciò che era noto inizialmente. L'analisi di tipo algebrico, invece, era basata sulla traduzione del problema geometrico in linguaggio algebrico. Anche in questo caso la soluzione si presupponeva nota inizialmente; veniva poi scelta una quantità incognita, denominata x, che se resa nota avrebbe risolto il problema. Dopo aver scelto x si procedeva quindi a trasformare il problema in un'equazione algebrica di incognita x; da questa si doveva poi ricavare l'espressione algebrica dell'incognita risolvendo l'equazione, dove possibile. La costruzione del problema doveva

poi essere dedotta dal risultato algebrico ottenuto, oppure l'equazione trovata poteva ricondurre lo studio ad un problema già noto. In questo caso i passi eseguiti all'interno dell'analisi non venivano ripercorsi all'interno della sintesi, come invece succedeva con il metodo di analisi classico. Inoltre è importante sottolineare come questo metodo di analisi non suggerisse direttamente la costruzione geometrica da utilizzare per risolvere il problema, quindi non sempre era facile da applicare. Ghetaldi analizzò numerose costruzioni geometriche, che sfruttavano diversi metodi di analisi, all'interno delle sue opere[3] e quest'ultime ci permettono di avere una visione abbastanza completa dei metodi di analisi presenti nel panorama del primo periodo moderno.
Possiamo concludere questa discussione affermando che la mancanza di un canone standard accettato da tutti i matematici dell'epoca per risolvere i problemi geometrici, portò ad avere una varietà di soluzioni anche molto diverse tra loro, sia per metodo di risoluzione che sotto il punto di vista dell'analisi utilizzata. Parallelamente alla nascita di queste diverse costruzioni, troviamo un intenso dibattito sulla loro legittimità, che contraddistinguerà tutto questo periodo. Un altro elemento essenziale che contraddistingue l'età moderna è l'introduzione dell'algebra come strumento di supporto alla geometria; come già accennato in questa sezione, infatti, l'algebra diventerà un mezzo indispensabile per l'analisi dei problemi geometrici. Una trattazione più approfondita di questo argomento verrà presentata nella prossima sezione.

1.4 L'algebra: un nuovo strumento a supporto della geometria

Prima di introdurrre la svolta che avvenne nella storia del *problem solving* geometrico grazie all'introduzione dell'algebra, è necessario far luce sulle vicende che portarono questa particolare disciplina ad una rinascita, durante il periodo precedente l'età moderna. Infatti, tra il XV e il XVI secolo, nel pieno del periodo rinascimentale, anche l'algebra, come molte altre discipline, venne riscoperta e numerosi matematici collaborarono allo sviluppo di essa. Tra questi sicuramente spicca il nome di Luca Pacioli, un frate italiano che scrisse il più importante trattato di algebra del periodo, dal titolo "Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità", pubblicato nel 1494. Quest'ultimo non parlava solo di algebra, ma anche di altre discipline matematiche come la geometria e l'aritmetica. Tuttavia, alcune caratteristiche che lo contraddistinguono come trattato di fondamentale importanza in campo algebrico sono l'utilizzo dell'algebra sincopata[4] e la risoluzione canonica delle equazioni di pri-

[3]Esempi di costruzioni studiate da Marino Ghetaldi, matematico dalmata vissuto durante il primo periodo moderno, e le relative analisi sono riportate all'interno del Capitolo 5 del [Bos 2001]. La figura di Ghetaldi sarà ripresa nel Paragrafo 2.2 in cui verranno analizzate più a fondo alcune delle sue risoluzioni geometriche.

[4]L'algebra sincopata è uno degli stadi evolutivi dell'algebra, in cui lo stile di scrittura simbolico tipico dell'algebra moderna non si era ancora sviluppato, ed era quindi sostituito dall'utilizzo di abbreviazioni. Questo tipo di rappresentazione si colloca a metà tra il linguaggio naturale e l'utilizzo di simboli per la rappresentazione degli operatori e delle incognite. Esempi di abbreviazioni sfruttate nell'algebra sincopata sono il termine *co*, in sostituzione di *cosa*

mo e secondo grado. Un altro elemento che contraddistingue i testi dell'epoca, tra cui anche quello di Luca Pacioli, era la lingua in cui venivano scritti. Infatti, nell'epoca rinascimentale, gli studiosi iniziarono a scrivere i propri trattati in lingua volgare, abbandonando progressivamente il latino che fino ad allora era stata la lingua del sapere. Questo permise la diffusione degli scritti e il progressivo abbandono della concezione che il sapere dovesse essere qualcosa riservato a pochi eletti.
Oltre al trattato di Luca Pacioli, altri avvenimenti furono determinanti per definire questo periodo come un momento di riscoperta dell'algebra. Tra questi occorre sicuramente ricordare la pubblicazione della formula risolutiva per le equazioni di terzo e quarto grado, ad opera del matematico pavese Gerolamo Cardano e di alcuni altri autori. Tale risoluzione venne pubblicata per la prima volta nel 1545 nell' *Ars Magna* di Cardano, tuttavia la parternità dell'idea non è da attribuire totalmente all'autore. Infatti, le formule risolutive per le equazioni cubiche erano state suggerite a Cardano dal matematico bresciano Niccolò Fontana, noto come Tartaglia, e vengono ricordate oggi con il nome di *Formule di Cardano-Tartaglia.* Ma nemmeno Tartaglia fu il primo a scoprirle; il primo ideatore fu difatti il matematico bolognese Scipione dal Ferro. Anche la risoluzione delle equazioni di quarto grado non fu una diretta scoperta di Cardano, ma di un suo allievo, Ludovico Ferrari.
Un altro passo importante nella storia dell'algebra fu compiuto da Rafael Bombelli, che introdusse per la prima volta i numeri complessi e le quattro operazioni tra di essi. Egli pubblicò nel 1572 un'opera intitolata *L'algebra*, dove mostrava il suo studio eseguito sulle radici complesse delle equazioni. Nello stesso periodo Bombelli segnò anche un altro traguardo dello sviluppo dell'algebra, riconoscendo come valide le radici negative delle equazioni e mostrando come i numeri negativi avessero un significato nella vita di tutti i giorni. Tuttavia, per molto tempo le radici negative, e ancor di più quelle complesse, continueranno ad essere oggetto di discussione tra i matematici, che non le riconosceranno come valori completamente accettabili (ad esempio Cartesio chiamerà le radici negative "false", ed attribuirà ai numeri complessi l'appellativo di "immaginari" in senso dispregiativo).

1.4.1 L'algebra e la geometria: il difficile dialogo tra due mondi

Presentiamo ora i principali ostacoli che i matematici dovettero superare per utilizzare con fiducia l'algebra come supporto al *problem solving* geometrico.
L'algebra, prima dell'età moderna, era vista essenzialmente come una disciplina legata all'utilizzo dei numeri. Il primo ostacolo incontrato dai matematici, pertanto, fu proprio quello legato all'introduzione dei numeri nella geometria. Sin dall'antichità i matematici si erano resi conto che i numeri[5] erano insufficienti

(l'incognita), e le lettere p ed m per indicare le operazioni di somma e sottrazione.

[5]Qui ci riferiamo ai numeri naturali e razionali positivi. Infatti, questi erano gli unici unici numeri ad essere accettati come tali. Mentre i numeri irrazionali, seppur conosciuti sin dall'antichità classica (il primo a dimostrare l'irrazionalità di un numero fu Ippaso di Metaponto, un allievo della scuola pitagorica, nel VI secolo a.C.), avevano uno status incerto, e spesso venivano definiti "assurdi" per la mancanza di un rapporto numerico razionale tra questi e l'unità.

per rappresentare adeguatamente le quantità geometriche; quest'ultime erano infatti continue, mentre i numeri disponibili per rappresentarle erano discreti, perciò i numeri non potevano rappresentare in modo preciso (senza approssimazioni) tutte le quantità geometriche. Alcuni studiosi provarono a legittimare l'utilizzo dei numeri in geometria cercando di includere tra i numeri anche quelli irrazionali; altri invece sostennero che l'uso delle approssimazioni fosse legittimo, basandosi sul fatto che usando i numeri razionali si può sempre ottenere un'approssimazione con la precisione desiderata.
Un altro punto cruciale da affrontare per rendere possibile il dialogo tra la geometria e l'algebra era il cambio di dimensione che avveniva all'interno delle operazioni geometriche. La moltiplicazione e la divisione, in algebra, erano operazioni tra numeri, che davano come risultato a loro volta un numero; in geometria, invece, le operazioni di moltiplicazione e divisione tra segmenti generavano rettangoli e rapporti, dunque questo cambio di dimensione non rendeva semplice il confronto tra le operazioni all'interno delle due discipline.
Oltre alle questioni già citate sopra, anche l'esattezza delle soluzioni ottenute tramite argomenti afferenti alle due discipline sembrava non permettere un dialogo tra di esse. Infatti, uno stesso problema risolto sia in maniera algebrica, che in maniera geometrica, può portare ad una soluzione che è esatta in un caso, ed approssimata nell'altro. È utile riportare qui un esempio che metta in risalto tale differenza: supponiamo di avere un triangolo ABC di cui si conoscono i lati a, b e c e del quale dobbiamo ricavare l'altezza. Volendo risolvere il problema in modo geometrico, questo è possibile utilizzando solamente riga e compasso, e pertanto trovando l'altezza esatta del triangolo. Cercando invece di risolvere il problema in modo algebrico, l'operazione per determinare l'altezza del triangolo comporta un'estrazione di radice, che genererebbe un numero irrazionale, considerato non esatto. Inoltre, in generale la difficoltà dei due processi era spesso differente, rendendo difficile il confronto tra i due metodi di risoluzione.
Per questi motivi l'interazione tra i due ambiti poteva apparire complicata agli occhi di molti e fu inaspettata la nascita di un metodo di analisi dei problemi geometrici basato sull'algebra. Questo avvimento fu possibile grazie a Viète e alla sua "nuova algebra", che approfondiremo nella prossima sezione.

1.4.2 La nuova algebra di Viète

Alla fine del XVI secolo Viète aveva elaborato un metodo per introdurre l'algebra come strumento di supporto alla risoluzione dei problemi (sia aritmetici che geometrici), riuscendo ad aggirare l'ostacolo dell'inadeguatezza dei numeri nel contesto geometrico. Il superamento di questo problema fu possibile grazie alla dissociazione dell'algebra dai numeri; infatti, l'algebra elaborata da Viète si riferiva a delle quantità generiche e poteva essere applicata sia ai numeri che alle quantità geometriche, senza distinzioni. Questa disciplina viene definita da Viète "nuova algebra" o *logistica speciosa*, termine che possiamo tradurre in logistica simbolica. Le specie infatti indicavano grandezze in generale, senza precisare ulteriormente se si trattasse di segmenti, superfici, se erano incognite o meno. Quando Viète trattava equazioni con coefficienti numerici egli parlava di *logistica numerosa.* Le potenzialità del metodo basato sulla logistica simbolica sono evidaenziate fin dall'inizio del breve saggio *In Artem analyticem isagoge* (Introduzione all'arte analitica) del 1591, una sorta di manifesto metodologico di Viète nel quale, riferendosi alla *zetesi*, il momento in cui un problema è tradotto in equazione, egli efferma [Viète 2006]

> Il modo di affrontare i problemi della zetesi è caratteristico perché non svolge i suoi ragionamenti solo attraverso numeri, una scorciatoia dei vecchi analisti, ma attraverso una logistica tramite le specie, introdotta da poco e che è molto più efficace e potente per confrontare tra loro le grandezze rispetto alla logistica numerosa.

Alla presentazione articolata della *nuova algebra* Viète dedicò il trattato *Opus restitutae mathematicae analyseos seu algebra nova* di cui L'*Isagoge* era l'introduzione. Quest'opera era pensata come suddivisa in 10 trattati che furono raccolti nella prima edizione delle opere di Viète, curata da Frans van Schooten senza però essere raggruppati con il nome collettivo. Nell'*Isagoge* Viète dichiara lo scopo del metodo di analisi da lui presentato, e lo fa con le seguenti parole:

> Infine l'arte analitica, articolata nelle tre forme della zetetica, della poristica e dell'esegetica, reclama come proprio il più grande di tutti i problemi, cioè *risolvere ogni problema* [Viète 2006]

In quest'ultima citazione possiamo ritrovare anche la struttura del metodo analitico ideato da Viète. L'analisi algebrica, infatti, viene suddivisa da quest'ultimo in tre fasi: zetetica, poristica ed esegetica. La zetetica è la fase in cui il matematico traduce il problema in una o più equazioni algebriche, contenenti una o più incognite. La poristica costituisce invece la fase centrale dell'analisi algebrica. Ciò che Viète afferma in merito a questa seconda fase non è facile da interpretare con assoluta certezza, ma sembra che essa fosse dedicata alle trasformazioni algebriche di equazioni e proporzioni. L'ultima fase, l'esegetica, era quella in cui il matematico doveva derivare dall'equazione la soluzione del problema, fosse esso aritmetico o geometrico. Queste le parole usate da Viète [Viète 2006]:

> È proprio della zetetica di stabilire un'equazione o una proporzione tra un termine che occorre trovare ed i termini dati; della poristica è proprio il verificare la verità di un teorema enunciato grazie ad un'equazione o una proporzione; è proprio dell'esegetica il determinare il termine incognito in un'equazione o in una proporzione. Pertanto l'intera arte analitica, assumendo in sé questa triplice funzione, può essere chiamata la scienza della scoperta corretta in matematica.

Passiamo ora all'analisi delle caratteristiche chiave che permisero a Viète di presentare la sua nuova algebra come uno strumento fondamentale di supporto alla geometria. La prima tra queste è sicuramente l'allontanamento definitivo dell'algebra dai numeri; infatti, Viète fu il primo matematico ad introdurre una notazione simbolica non solo per le incognite, ma anche per le quantità indeterminate. Entrambe venivano rappresentate tramite le lettere dell'alfabeto, differenziando l'uso delle vocali per le incognite e delle consonanti per le quantità indeterminate. Questo gli permise di vedere le manipolazioni algebriche

semplicemente come manipolazioni simboliche riguardanti quantità generiche, a prescindere dalla loro natura (da questo il nome "logistica simbolica", contrapposta alla "logistica numerica" impiegata precedentemente). Nonostante l'idea rivoluzionaria di introdurre simboli per rappresentare in maniera generale tutte le quantità coinvolte, si pensa che Viète non sia riuscito ad apprezzare fino in fondo la generalità derivante dall'uso dell'algebra simbolica. Questo fatto è una diretta conseguenza della notazione che egli utilizzò e che ricorreva ad abbreviazioni, piuttosto che a simboli, per indicare le operazioni algebriche[6]; questo modo di rappresentare le equazioni appesantiva la notazione, nascondendo la chiarezza e la potenza di una notazione totalmente simbolica.
Un altro punto cruciale che Viète ha dovuto affrontare, al fine di rendere compatibili l'algebra e la geometria, riguardava la redefinizione delle operazioni algebriche dal punto di vista dimensionale. Come già osservato infatti, in geometria la motiplicazione e la divisione comportano un cambiamento di dimensione del risultato rispetto ai fattori: ad esempio, il prodotto tra due segmenti genera un rettangolo. Viète si trovò quindi di fronte alla necessità di scegliere se accettare o meno l'aspetto dimensionale delle operazioni. Alla fine, ispirandosi alle operazioni geometriche, decise di conservare l'aspetto dimensionale e di regolamentarlo attraverso la "legge di omogeneità". Prima di affrontare tale questione, Viète introdusse una scala per ogni tipologia di quantità, costituita da elementi con dimensioni differenti. Ciascuna scala partiva da un elemento di base, chiamato radice, seguito da una serie di quantità dello stesso tipo ma con dimensione progressivamente crescente. Un esempio è offerto dalle quantità geometriche organizzate secondo la sequenza: linee (elemento di base), aree e solidi. Nella visione di Viète, però, la scala non si limitava solamente a tre dimensioni, ma ne aveva infinite.
Ora che abbiamo introdotto la concezione di Viète riguardo alle dimensioni delle quantità astratte, possiamo passare alla presentazione della legge di omogeneità. Secondo tale legge, all'interno di una stessa tipologia di grandezze, solamente quantità aventi lo stesso grado[7] possono essere confrontate, sommate o sotratte tra loro. Inoltre, l'autore afferma che due quantità della stessa specie possono sempre essere moltiplicate tra loro e che il loro prodotto avrà grado pari alla somma dei gradi dei due fattori. Analogamente, la divisione può avvenire solamente tra una quantità di grado superiore e una di grado inferiore, e il quoziente avrà grado pari alla sottrazione dei gradi del dividendo e del divisore. Per quanto riguarda, invece, l'operazione di estrazione di radice, Viète sostiene che essa sia possibile solo quando la quantità di partenza possiede un grado appropriato: ad esempio è lecito estrarre la radice cubica da una quantità di terzo grado, ma non da una di secondo. Inoltre, egli sembra assumere che la radice esista sempre, facendo riferimento alla continuità delle quantità coinvolte, ma questo aspetto non viene formulato in modo esplicito nei suoi testi.
Queste sono sicuramente le principali caratteristiche che hanno determinato il successo dell'introduzione dell'algebra come strumento di supporto al *problem*

[6]Riporto da [Bos 2001] un esempio della notazione utilizzata da Viète per indicare l'equazione $3X^2E - E^3 = X^2B$: "“X quadrato per 3 volte E meno E cubo uguaglia X quadrato per B."

[7]Viète utilizza il termine "grado" per riferirsi alla dimensione delle quantità considerate.

solving geometrico. Ora, nonostante il metodo di analisi illustrato da Viète fosse ben strutturato nelle tre fasi viste sopra, potevano sorgere alcuni dubbi sulla fase dell'esegetica. Infatti, in quest'ultima parte, ciò che era stato ricavato algebricamente doveva essere tradotto in modo operativo in una costruzione geometrica che portasse alla risoluzione del problema. Questo passaggio non era affatto scontato o di facile applicazione, per questo Viète dedicò due trattati a tale argomento: il primo, *Effectionum geometricarum canonica recensio*, trattava dei problemi che potevano essere risolti con riga e compasso, spesso riconducibili a equazioni di grado non superiore al secondo.[8] Il secondo, intitolato *Supplementum geometriae*, estendeva l'analisi ai problemi riconducibili a equazioni di terzo e quarto grado; per quest'ultimi Viète dimostra che è possibile ricondursi sempre a due problemi già noti, la trisezione dell'angolo e la ricerca dei due medi proporzionali. Vedremo più nel dettaglio la risoluzione che egli propone di questi problemi in seguito.
Inoltre, è importante fare luce su un altro punto che riguarda il passaggio dall'analisi algebrica alla risoluzione geometrica del problema: l'analisi algebrica non forniva un metodo di costruzione privilegiato da seguire, pertanto la questione della scelta del metodo di risoluzione da utilizzare rimaneva aperta. Inoltre, algebricamente non c'era alcuna distinzione tra i problemi che potevano essere risolti con riga e compasso, e quelli per cui ciò non era possibile, entrambi infatti portavano ad un'equazione che richiedeva di essere trasformata in una costruzione geometrica che fornisse la risoluzione. Pertanto, questo offriva un ulteriore stimolo per la ricerca di metodi legittimi di costruzione che andassero oltre quelli euclidei.
Infine, possiamo concludere sottolineando che la riformulazione dell'algebra proposta da Viète e il suo utilizzo dei simboli sia per le quantità incognite che per quelle indeterminate proponevano una visione molto moderna dell'algebra che si rivelò uno strumento fondamentale per tutti i secoli successivi. Pertanto, possiamo identificare la nuova algebra di Viète come uno dei maggiori progressi avvenuti durante l'età moderna.

1.5 Alcuni autori del primo periodo moderno

Finora abbiamo delineato le principali caratteristiche del contesto riguardante il *problem solving* geometrico all'inizio del primo periodo moderno. In particolare, abbiamo concentrato l'attenzione su due avvenimenti che funsero da motore dell'interesse dei matematici verso la ricerca di nuovi metodi di costruzione e sul successivo dibattito sulla loro esattezza: la pubblicazione della traduzione latina delle Collezioni di Pappo, e la nascita di un metodo di analisi algebrico. Passiamo ora all'analisi di due autori del primo periodo moderno che sostennero posizioni molto diverse nel dibattito sui metodi di costruzioni legittimi da utilizzare nella risoluzione dei problemi non piani. Il primo, il matematico fran-

[8] Sappiamo oggi che un problema risolvibile con riga e compasso è sempre riconducibile a un'equazione di primo o secondo grado. Tuttavia Viète non era solito ad applicare la riduzione del grado delle equazioni, dove possibile, pertanto alcune equazioni di grado superiore al secondo venivano lo stesso associati ad una risoluzione con i metodi euclidei.

cese François Viète, è già stato ampiamente presentato nella sezione precedente per il contributo fondamentale all'introduzione dell'algebra come strumento a servizio della geometria. Esamineremo adesso il suo punto di vista sulle costruzioni geometriche e il suo tentativo di elaborazione di un metodo canonico di risoluzione valido per ogni problema geometrico.
Il secondo autore che andremo a presentare è il matematico francese Pierre de Fermat. Anche nel suo caso andremo a studiare la posizione assunta nel dibattito sull'esattezza dei metodi di costruzione, delineando una linea di pensiero che sarà successivamente ripresa e rielaborata da Cartesio, fino a diventare l'impostazione predominante nel *problem solving* geometrico per l'intera età moderna.

1.5.1 Viète

Come già visto, il metodo di analisi prediletto da Viète era quello algebrico. Nell'ultima fase di questa analisi, l'esegetica, era previsto il passaggio dai risultati algebrici alla costruzione geometrica della soluzione. Abbiamo già sottolineato come questo passaggio non fosse intuitivo e come la scrittura algebrica dell'equazione non fornisse indizi sul metodo di costruzione da adottare. Viète scrisse due trattati in proposito: la *Effectionum Geometricarum Canonica Recensio* ed il *Supplementum Geometriae*.
Prima di parlare del contenuto dei due trattati, è importante sottolineare che il metodo di analisi ideato da Viète introduceva un nuovo strumento di classificazione dei problemi, basato sulle equazioni algebriche ad essi associate. Infatti egli classificò i problemi abbinando al grado dell'equazione associata uno specifico metodo di risoluzione. Questo tipo di classificazione portava con sè l'idea, già espressa da Viète nell'*Isagoge*, che lo scopo finale dello studio geometrico fosse quello di risolvere tutti i problemi, in questo caso trovando un metodo di costruzione delle soluzioni per le equzioni di ogni grado.
Abbiamo già visto che il primo dei due trattati citati sopra, la *Canonica recensio*, tratta dei problemi che possono essere tradotti in equazioni quadratiche, pertanto risolubili tramite i metodi di costruzione euclidei. Il secondo trattato, invece, focalizza la sua attenzione sulla risoluzione dei problemi traducibili in equazioni di terzo e quarto grado. Qui Viète afferma che la geometria necessita di un elemento supplementare, un completamento (come specificato nel titolo); tale elemento era già stato annunciato nel primo trattato, l'*Isagoge* del 1591, ed è la possibilità di costruire tramite neusi[9]. Viète, all'inizio del *Supplementum*, presenta la costruzione di neusis sotto forma di postulato, ripetendo un'affermazione già presente nell'*Isagoge*:

> Per sopperire ad un difetto della geometria, si ammetta che sia possibile tracciare da un punto assegnato una retta che tagli due linee rette qualsiasi in modo che il segmento staccato su di esse possa essere uguale ad un segmento prefissato qualunque.[10]

[9]Si veda p. 11.
[10][Viète 2006], pagina 388

Pertanto, accettando le neusi come postulato, Viète evita di dover fornire spiegazioni sul modo in cui esse debbano essere costruite in maniera legittima. Viète esprime così una preferenza tra i metodi di costruzione utilizzati fino ad allora dai matematici nella risoluzione dei problemi non piani, discostandosi dal precetto presente nelle *Collezioni* di Pappo, secondo cui ogni problema avrebbe dovuto essere risolto tramite l'intersezione di curve. Tuttavia, come già abbiamo evidenziato nella sezione 1.2, lo stesso Pappo espresse un particolare interesse per le risoluzioni del problema di neusis arrivando a presentarne diverse nella sua opera, tra le quali una costruita mediante l'intersezione di coniche. Si potrebbe quindi affermare che i problemi risolti tramite neusi rientrino nella classe dei problemi solidi. Tuttavia Viète non fece alcun riferimento esplicito a tale classificazione.

Lo scopo di Viète nel *Supplementum geometriae* è di mostrare un metodo di risoluzione valido per tutti i problemi traducibili in equazioni di terzo e quarto grado. Tale metodo consisteva nel ricondursi a due problemi standard risolvibili tramite neusi, ovvero la trisezione dell'angolo e la ricerca dei due medi proporzionali. Viète presenta per entrambi i problemi una risoluzione che sfrutta il postulato di neusis[11].

Per quanto riguarda la trattazione algebrica dei problemi, Viète considera tutte le equazioni di terzo grado che è possibile ricavare, e studia la loro risoluzione tramite i due problemi standard sopra citati. Le equazioni considerate da Viète sono le seguenti:

$$\begin{gathered} x^3 + 3a^2x = 2a^2b \\ x^3 - 3a^2x = 2a^2b \text{ con } b > a > 0 \\ x^3 - 3a^2x = 2a^2b \text{ con } a > b > 0 \\ 3a^2x - x^3 = 2a^2b \text{ con } b > a > 0 \\ 3a^2x - x^3 = 2a^2b \text{ con } a > b > 0 \end{gathered}$$ [12]

L'autore afferma che le prime due possono essere facilmente ricondotte all'equazione $x^3 = a^2b$ risolvibile tramite la costruzione dei due medi proporzionali, mentre per le ultime tre mostra esplicitamente la risoluzione attraverso la trisezione dell'angolo.

Notiamo che in tutte le equazioni considerate da Viète manca il termine quadratico. Egli infatti afferma che da una qualsiasi equazione di terzo grado ci si può sempre ricondurre ad una delle equazioni sopra presentate, dove non è presente tale termine.[13]

Per quanto riguarda i problemi riconducibili ad equazioni di quarto grado, invece, Viète spiega solamente che è sempre possibile ricondursi ad un'equazione di terzo grado partendo da una di quarto, attraverso l'utilizzo di un'equazione

[11] Queste costruzioni sono state riportate in Appendice A.

[12] Per semplicità consideriamo le equazioni già riscritte con una notazione contemporanea.

[13] Questo passaggio è mostrato da Viète all'interno della sua opera *The Analytic Art.* Tali trasformazioni si possono ritrovare alle pagine 241-246, dove l'autore propone tre formule per passare da equazioni contenenti solo i termini di terzo e secondo grado (oltre al termine noto) a equazioni contenenti solamente i termini di terzo e di primo grado (oltre al termine noto). Analogamente, vengono propopste sette strategie per compiere tale passaggio nel caso in cui fossero inizialmente presenti entrambi i termini (sia quello di primo che quello di secondo grado).

quadratica.
Viète riesce quindi in modo sorprendente a risolvere ogni problema riconducibile ad un'equazione di grado inferiore a cinque con i metodi euclidei arricchiti dal solo postulato di neusis. Per questo, riferendosi ad una classificazione proposta in [Bos 2001], possiamo affermare che Viète facesse parte di quella classe di studiosi che sostenevano la legittimità di un metodo di costruzione, in questo caso le neusi, per via dei risultati matematici che tale metodo poteva offrire. Infatti, a differenza degli altri metodi proposti, questo permetteva di fondare un sistema di risoluzione ben strutturato su un unico, semplice postulato. Inoltre, Viète critica all'interno delle sue opere le costruzioni meccaniche affermando che quest'ultime possono essere di supporto allo studio della geometria ma non possono essere usate nella risoluzione dei problemi perché non sono davvero geometriche. Per quanto riguarda invece le costruzioni eseguite con il ricorso alle intersezioni di coniche, non le paragona mai esplicitamente al metodo di costruzione da lui proposto.
Possiamo quindi concludere affermando che Viète riesce a risolvere un'intera classe di problemi non piani facendo affidamento al metodo di analisi algebrica da lui introdotto e al postulato di neusis, che espone senza fornire giustificazioni riguardo la sua accettabilità ma che si rivela uno strumento molto potente nella risoluzione dei problemi non piani. Vedremo nel prossimo paragrafo un approccio totalmente differente scelto da un altro matematico francese, Pierre de Fermat, che dimostra come nel periodo pre-cartesiano ci fossero molteplici punti di vista in netto contrasto tra loro rispetto al tema del *problem solving* geometrico.

1.5.2 Fermat

Passiamo ora ad analizzare l'approccio utilizzato dal matematico francese Pierre De Fermat alla questione del problem solving geometrico. È importante precisare che ciò che diremo si riferisce maggiormente al periodo pre cartesiano, in quanto ciò che Fermat scrisse in seguito fu fortemente condizionato dal lavoro di Cartesio e non sarebbe opportuno presentarlo in questa sezione.
Fermat conosceva e sapeva applicare entrambi i metodi di analisi sopra menzionati, sia quello classico sia quello algebrico formulato da Viète. Tuttavia, il suo metodo di costruzione si discosta da quello adottato da Viète, ritornando invece su ciò che veniva enunciato nel precetto di Pappo: la costruzione della soluzione di problemi solidi mediante l'uso delle coniche. L'analisi classica prevedeva che le coniche da utilizzare nella costruzione fossero trovate come luoghi di punti; questo spinse Fermat ad indagare il legame tra le coniche, i luoghi di punti e l'analisi algebrica, portandolo a scoprire la relazione che intercorre tra le curve e le loro equazioni in due variabili. Tale scoperta viene presentata da Fermat nel 1636 nel testo *Ad locos planos et solidos isagoge*[14] dove mostra esplicitamente la corrispondenza tra le equazioni di primo e secondo grado in due variabili e i luoghi di punti piani (rette e circonferenze) e solidi (parabole, iperboli ed ellissi).

[14] Introduzione ai luoghi di punti piani e solidi.

Nell'appendice dell'opera sopra citata, Fermat espone il suo metodo di risoluzione per i problemi solidi, ossia quelli riconducibili a equazioni di terzo e quarto grado in una variabile. A partire dall'equazione rappresentativa del problema, egli mostra come sia possibile ricavare due equazioni di secondo grado in due variabili. Queste vengono poi messe a sistema, il quale rappresenta l'intersezione di due coniche, quelle associate alle due equazioni. Eliminando la variabile y dal sistema, si ottiene nuovamente l'equazione iniziale. Le intersezioni ottenute tra le due coniche rappresentano le soluzioni del problema.
Il metodo di risoluzione proposto da Fermat risulta in generale applicabile a qualsiasi equazione di terzo o quarto grado, sebbene egli non mostri il funzionamento di tale metodo in maniera generale, ma lo presenti solamente tramite alcuni esempi.
Da un certo punto di vista si può affermare che il metodo di Fermat costituisce un passo avanti rispetto a quello di Viète. Entrambi, infatti, hanno presentato un metodo di risoluzione valido per tutti i problemi solidi, tuttavia il metodo di Viète risulta molto più laborioso per quanto riguarda i problemi associati a un'equazione di quarto grado. Egli infatti afferma che è possibile ricondursi ad un'equazione di terzo grado, ma non mostra esplicitamnete le manipolazioni algebriche da applicare. D'altra parte il metodo di Fermat risulta più chiaro e semplice da applicare.
Per quanto riguarda il dibattito sull'esattezza dei metodi di costruzione impiegati nella risoluzione dei problemi solidi, possiamo affermare che Fermat mostri un sostanziale disinteresse verso tale argomento. Egli riprende infatti il precetto di Pappo e ne segue le indicazioni, utilizzando l'intersezione di curve nella risoluzione dei problemi. Tuttavia, non c'è alcun accenno alla giustificazione per il quale lui scelga di utilizzare questo metodo. Tale comportamento è da ricondurre allo scarso interesse di Fermat verso la parte sintetica della risoluzione. Egli infatti dedica maggiormente la sua attenzione all'analisi, che costituisce il fulcro del suo studio, arrivando persino a considerarla una disciplina autonoma. Questo punto di vista risulta particolarmente avanzato per l'epoca, poiché l'analisi verrà riconosciuta come disciplina indipendente solo successivamente, grazie anche all'introduzione dell'analisi infinitesimale.

1.6 Cartesio e la rivoluzione del problem solving geometrico

Ciò che abbiamo descritto fino ad ora illustra lo stato del problem solving geometrico durante il primo periodo moderno, fino all'anno 1635 circa. Alla fine di questo periodo, questo campo della matematica era ancora in attesa di un modello che portasse una svolta decisiva nelle discussioni che erano state condotte fino ad allora. In particolare erano tre i quesiti che necessitavano di una risposta che potesse essere comunemente accettata dai matematici dell'epoca: il primo riguardava l'insieme di metodi di costruzione che erano stati proposti fino ad allora per risolvere i problemi che non potevano essere risolti con riga e compasso. Tali metodi avevano continuato ad aumentare in numero, ma non esisteva ancora nessun criterio che individuasse quali di questi fossero da consi-

derare geometrici o quali fossero i metodi da prediligere. Il secondo quesito che ancora rimaneva senza risposta era quello riguardante il legame tra equazioni, problemi e la loro costruzione. Infine, rimaneva ancora aperta la discussione riguardante l'esattezza delle costruzioni geometriche.
Il periodo pre-cartesiano era quindi caratterizzato dalla mancanza di un metodo comunemente accettato per risolvere i problemi geometrici.
René Descartes si colloca a cavallo tra il primo e il secondo periodo moderno; i temi da lui trattati sono gli stessi affrontati nel primo periodo moderno, come la risoluzione di problemi con un numero finito di soluzioni, ma la sua opera principale su questo tema, *La Géométrie*, continuerà ad essere un punto di riferimento per tutto il periodo successivo, affermandosi così come opinione dominante in questo campo e segnando la svolta che il problem solving geometrico attendeva da tempo.
Il motivo per cui Cartesio è riconosciuto come una figura chiave di questo periodo è appunto racchiuso nell'opera *La Géométrie*, pubblicata nel 1637. Egli in questo testo si pone l'intento di proporre un metodo che risolva ogni problema geometrico, fornendo inoltre una classificazione dei problemi che riprendeva, ed estendeva, quella proposta da Pappo. In aggiunta, Cartesio pone una chiara divisione tra i metodi geometrici, quindi considerati legittimi, e quelli non geometrici, che lui chiama "meccanici".
Il punto di partenza del metodo cartesiano è sempre l'analisi algebrica. Come già visto, il problema viene prima ricondotto ad un'equazione ad esso associata e dalla quale si deriverà poi il metodo di costruzione delle soluzioni. Il metodo di analisi cartesiana tuttavia differisce per alcuni aspetti da quelli precedentemente presentati. In primo luogo, Cartesio definisce le operazioni algebriche diversamente rispetto a quanto fatto da Viète; questo gli permette di evitare i vincoli imposti dalla legge di omogeneità. Inoltre un punto cruciale del metodo cartesiano è l'irriducibilità delle equazioni: egli infatti si rende conto che per trovare il metodo di costruzione più adatto per ogni problema è necessario prima rendere l'equzione associata irriducibile. Da questa osservazione nasce anche la classificazione dei problemi utilizzata Cartesio: egli infatti classifica i problemi in base all'equazione ad essi associata, ma a differenza di Fermat l'equazione che usa Cartesio è sempre quella irriducibile.
Il metodo di costruzione che Cartesio utilizza nella sintesi è lo stesso già scelto in precenza da autori come Fermat: l'intersezione di curve. Tuttavia Cartesio, a differenza dei suoi predecessori, pone limiti chiari su quali curve sia accettabile utilizzare e quali invece non siano ritenute idonee per una costruzione geometrica: le curve che egli accetta come geometriche sono quelle associate ad un'equazione algebrica, mentre le altre vengono considerate "meccaniche". In aggiunta, Cartesio introduce una classificazione delle curve basata sul loro grado, affermando che le curve sono più semplici quando il loro grado è più basso. Poste queste premesse, possiamo infine affermare che il metodo cartesiano si basi sulla costruzione delle soluzioni tramite l'utilizzo di curve geometriche di grado minore possibile. Questi passaggi racchiudono l'essenza del pensiero cartesiano sull'esattezza delle costruzioni geometriche.
Nell'opera *La Géométrie*, Cartesio elabora nuova tecniche di manipolazione algebrica per rendere irriducibili le equazioni associate ai problemi, e per ricon-

durre quest'ultime ad una forma standard, alla quale egli associa un metodo standard di costruzione delle radici. Tale metodo viene illustrato esplicitamente per le equazioni di grado 1-2, 3-4 e 5-6. Cartesio era convinto che il metodo di costruzione da lui utilizzato potesse essere facilmente esteso alle equazioni di un qualsiasi grado, tuttavia non si spinse mai oltre al sesto grado, lasciando questo compito ai posteri.
Un altro aspetto fondamentale dell'opera di Cartesio è lo studio delle curve e l'associazione di quest'ultime alla propria equazione. Egli, infatti, attraverso tale associazione rende possibile lo studio delle proprietà delle curve, mettendo le fondamenta della disciplina che oggi chiamiamo geometria analitica. Per questo motivo *La Géométrie* viene vista come il punto di avvio di questo campo della matematica.
Concludiamo questa sezione su Cartesio sottolineando che il metodo cartesiano esposto fino ad ora, che viene preso come riferimento durante tutto il periodo storico successivo, non fu l'unico elaborato dal matematico francese. Prima di elaborare il contenuto della *Géométrié*, infatti, Cartesio ha affrontato diverse fasi di studio della risoluzione dei problemi geometrici, trovando vari ostacoli sul suo percorso verso un metodo che potesse risolvere ogni problema. In questo percorso, un ruolo fondamentale nello sviluppo del metodo cartesiano è attribuito alla filosofia. Essendo Cartesio un filosofo prima che un matematico, infatti, la filosofia stessa spesso guidava la sua indagine matematica, e viceversa. Gli argomenti filosofici che influenzarono Cartesio durante l'elaborazione della *Géométrie* furono principalmente due: il metodo di pensiero e l'esattezza. Egli infatti pubblica *La Géométrie* non come un'opera a sé stante, ma come appendice ad un altro testo di carattere filosofico, intitolato *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*; questo ci fa capire come il contenuto della *Géométrie* non fosse altro che l'interpretazione della teoria filosofica proposta da Cartesio, applicata al campo della geometria. Proprio perché un punto fondamentale della dottrina filosofica di Cartesio era la ricerca dell'esattezza, egli dedica uno sforzo e una cura maggiore all'interpretazione di tale concetto in geometria rispetto a quelli applicati dai sui contemporanei, arrivando così a ottenere un risultato meglio definito. L'interpretazione cartesiana diventerà quindi l'opinione dominante nel dibattito sull'esattezza delle costruzioni geometriche.

Capitolo 2

Evoluzione storica dei problemi di inclinazione: il problema del quadrato

Nel capitolo precedente abbiamo trattato l'evoluzione delle idee riguardanti i metodi di risoluzione dei problemi geometrici e la loro accettabilità, ripercorrendo le principali innovazioni portate dai matematici del primo periodo moderno.
L'obiettivo che ci poniamo in questo secondo capitolo è quello di studiare la metamorfosi di un problema nel tempo, ponendo particolare attenzione alle costruzioni risalenti al periodo appena analizzato. Il problema scelto per questa analisi è uno dei problemi di inclinazione: il problema del quadrato.
Ripercorriamo innanzitutto la storia dei problemi di inclinazione, noti anche come problemi di *neusis*, dal termine greco $\nu\varepsilon\tilde{\upsilon}\sigma\iota\varsigma$, "inclinazione", "tendenza".
Lo studio di tali problemi inizia nel III secolo a.C. da alcuni matematici greci tra i quali ricordiamo Nicomede, Archimede ed Erastotene. I problemi di inclinazione e le tecniche sviluppate per risolverli aprivano le porte alla possibilità di risolvere problemi geometrici fino ad allora considerati non risolubili con i soli metodi euclidei. Infatti, grazie a questi metodi di risoluzione, era possibile risolvere due dei tre celebri problemi dell'antichità greca non risolubili con riga e compasso: la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo.
Nella Sezione 1.2.1 abbiamo già incontrato una prima formulazione del problema di neusis ma è importante sottolineare che ne esistono diverse versioni in alcune delle quali, ad esempio, alle rette L ed M che intercettano un segmento di lunghezza a possono essere sostituite da circonferenze. In questo capitolo analizzeremo nel dettaglio l'evoluzione della risoluzione del problema del quadrato, un particolare problema di inclinazione la cui prima formulazione risale alle *Collezioni* di Pappo. Proprio perché trattato per la prima volta dal matematico greco, il problema viene spesso ricordato con il nome di *Problema di Pappo*.
Prima di passare all'analisi di quest'ultimo, tuttavia, è necessario illustrare brevemente con quali metodi furono inizialmente trattati i problemi di inclinazione.
Le risoluzioni proposte dai matematici dell'antica Grecia, infatti, utilizzavano strumenti meccanici che andavano oltre la riga ed il compasso. Ricordiamo tra

queste la risoluzione di Archimede di Siracusa (287 - 212 a.C.) del problema di trisezione dell'angolo[1] nella quale il matematico ellenico fa uso di un "righello segnato" che fa scorrere e ruotare lungo un percorso definito fino ad ottenere la configurazione cercata.
Un'altra costruzione meccanica del problema di neusis è quella proposta da Nicomede (276-194 a.C.), che fu possibile grazie all'introduzione di una nuova curva, la concoide[2]. Grazie a quest'ultima, egli riuscì a risolvere i problemi della trisezione dell'angolo e della duplicazione del cubo.
Possiamo quindi affermare che i problemi di neusis funsero da ponte tra la geometria esatta e le costruzioni meccaniche, spingendo i matematici a superare i confini rigidi imposti dai metodi euclidei, cercando altri metodi di risoluzione per problemi non risolvibili con riga e compasso.

2.1 Pappo d'Alessandria e i problemi di *neusis*

Una figura determinante per la diffusione dei problemi di inclinazione e grazie alla quale l'interesse per questi problemi rinacque durante il primo periodo moderno, fu sicuramente Pappo d'Alessandria (290 - 350 d.C.). Attraverso le sue *Collezioni*—in particolare grazie alla traduzione latina realizzata da Federico Commandino nel 1588—furono trasmesse ai matematici dell'età moderna diverse risoluzioni dei problemi di *neusis*, tra le quali quella attribuita a Nicomede. Questa mediazione fu fondamentale per portare la conoscenza matematica ellenistica sino al periodo moderno, contribuendo a riaccendere il dibattito e a stimolare nuovi studi sul tema[3].
Nelle *Collezioni* di Pappo troviamo varie formulazioni del problema di inclinazione, con la rispettiva risoluzione. Iniziamo a presentarle da quella più generale sino ad arrive alla formulazione, e risoluzione, del problema del quadrato.
Prima però è bene inserire la costruzione della concoide che viene utilizzata da Pappo nella costruzione del problema. La costruzione che proponiamo è quella illustrata da Pappo nel libro IV delle *Collezioni*, che precede immediatamente la costruzione del problema di inclinazione.

[1] La risoluzione completa si può consultare in [Archimede 2002], pag. 455. Questo testo contiene una traduzione del testo arabo Ma'kuūdhāt Mansūba ilā Arshmīdis pubblicato da Thābit ibn Qurra, ma attribuito da quest'ultimo ad Archimede.

[2] La risoluzione del problema di *neusis* con la concoide e la costruzione di questa curva sono descritte in [Bos 2001], pp. 30-33

[3] Le *Collezioni* di Pappo non sono l'unico testo che favorì la trasmissione della conoscenza ellenistica al periodo moderno. Tra gli altri ricordiamo in particolare i commentari del matematico bizantino Eutocio (480 circa – 520 circa) che raccolse una lista di 12 risoluzioni del problema dei due medi proporzionali; in questa lista compaiono, tra le altre, le risoluzioni di Nicomede e di Pappo. Tuttavia, a differenza delle *Collezioni*, il commentario di Eutocio non contiene alcun riferimento all'esattezza delle costruzioni presentate, collocandosi in una prospettiva ancora estranea alle preoccupazioni metodologiche tipiche dell'età moderna, dove invece il dibattito sulla legittimità dei metodi geometrici per le costruzioni diventerà centrale nel contesto matematico.

Costruzione della Concoide (Pappo)[4] **2.1**

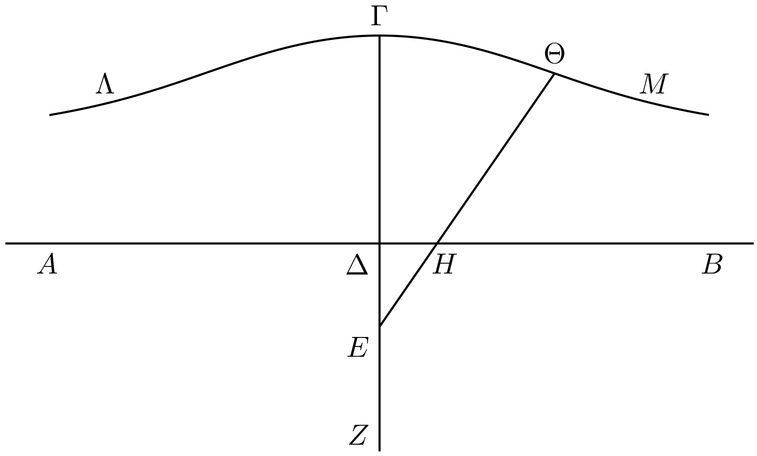


Figura 2.1: Costruzione della concoide presente sulle *Collezioni* di Pappo.

Costruzione:
Consideriamo la retta AB e la retta $\Gamma\Delta Z$, condotta perpendicolare ad essa. Prendiamo un punto E sulla retta $\Gamma\Delta Z$, e tenendo fisso questo punto, tracciamo da esso la retta $\Gamma\Delta EZ$, di modo tale che Δ si muova su AB, senza abbandonare la retta $\Gamma\Delta EZ$. Pertanto, se questo movimento viene eseguito in entrambe le direzioni, è chiaro che il punto Γ descrive una curva $\Lambda\Gamma M$ la cui proprietà è la seguente: quando una retta cade dal punto E su questa curva, la parte che resta tagliata tra la retta AB e la linea $\Lambda\Gamma M$ è uguale al segmento $\Gamma\Delta$. Poichè la retta AB e il punto E restano fissi, quando il punto Δ arriva al punto H, la retta $\Gamma\Delta$ si inserisce nella retta $H\Theta$ e il punto Γ cadrà sul punto Θ; allora il segmento $\Gamma\Delta$ sarà uguale al segmento $H\Theta$. Analogamente, se un'altra retta cade dal punto E sulla linea $\Lambda\Gamma M$, la parte che resta tagliata tra la retta AB e la linea stessa sarà uguale al segmento $\Gamma\Delta$. La retta AB viene chiamata *direttrice*, il punto E viene chiamato *polo* e il segmento $\Gamma\Delta$ *intervallo* poiché le linee proiettate sulla linea $\Lambda\Gamma M$ sono uguali a quest'ultimo. Infine sia la linea $\Lambda\Gamma M$ chiamata *prima concoide* (perché ne esistono una seconda, una terza e una quarta, utili per altri teoremi).

Problema di Neusis (Pappo)[5] **2.2**
Dopo ciò che abbiamo visto, è quindi chiaro che, se si ha un angolo compreso tra le rette HA e AB e un punto Γ situato all'esterno di tale angolo, è possibile condurre una retta ΓH in modo tale che il segmento KH compreso tra le rette HA e AB, sia uguale ad un segmento dato.[6]

[4]Traduzione della costruzione presa da [Pappo 1933], libro IV delle Collezioni Matematiche, pp. 185-186

[5]Traduzione della costruzione tratta da [Pappo 1933], libro IV delle Collezioni

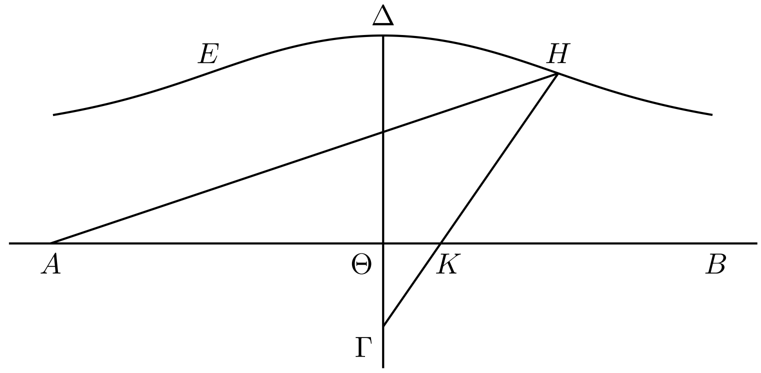


Figura 2.2: Costruzione del problema di Neusis attraverso la concoide di Nicomede.

> **Costruzione:**
> Tracciamo dal punto Γ la perpendicolare $\Gamma\Theta$ alla retta AB e prolunghiamola dalla parte di Θ; costruiamo $\Theta\Delta$ in modo tale che sia uguale al segmento dato, e tracciamo la concoide $E\Delta H$ il cui polo è il punto Γ, l'intervallo è uguale ad $\Theta\Delta$ e la direttrice è la retta AB. Questa linea incontrerà quindi la retta AH, per la ragione discussa precedentemente. Queste si incontrano nel punto H, che congiungiamo a Γ attraverso una retta. Allora si ha che il segmento KH è uguale a quello dato.

La risoluzione presentata è quella presentata da Pappo nelle *Collezioni* per il problema di inclinazione generale tra due rette. Come abbiamo già accennato, esistono altre formulazioni di questo problema, che prevedono la sostituzione di una o di entrambe le rette con delle circonferenze; tuttavia, dal momento che non sono necessarie ai fini della nostra discussione, non le tratteremo.
Concentreremo invece la nostra attenzione su una formulazione particolare del problema di inclinazione, che Pappo presenta sempre nel libro IV delle *Collezioni*, subito dopo aver discusso il problema di trisezione dell'angolo (la cui risoluzione è direttamente collegata a quella appena vista). Ci riferiremo a tale problema con il nome di problema del rettangolo. Questo problema è una generalizzazione del problema del quadrato, che però a differenza di quest'ultimo non è risolvibile utilizzando solamente i metodi euclidei. È tuttavia interessante vedere che l'ipotesi aggiuntiva dell'angolo retto permette di risolvere il problema di inclinazione evitando l'utilizzo della concoide, sostituendola con due curve più semplici: la circonferenza e l'iperbole equilatera.
Per questo problema, a differenza di quelli precedentemente trattati, è presente anche la parte dell'analisi, che precede la sintesi. Tratteremo pertanto la risoluzione partendo dall'analisi di Pappo.

Matematiche, proposizione 23, pp. 187-188

[6] In questa particolare formulazione del problema di neusis, Pappo fa riferimento all'angolo tra le rette HA e AB perchè questa costruzione è propedeutica alla risoluzione del problema della trisezione dell'angolo.

Problema del Rettangolo (Pappo)[7] 2.3
Sia dato un rettangolo $AB\Gamma\Delta$, e sia prolungata la retta $B\Gamma$. Bisogna tracciare la retta AE in modo tale che il segmento EZ sia uguale ad un segmento dato.

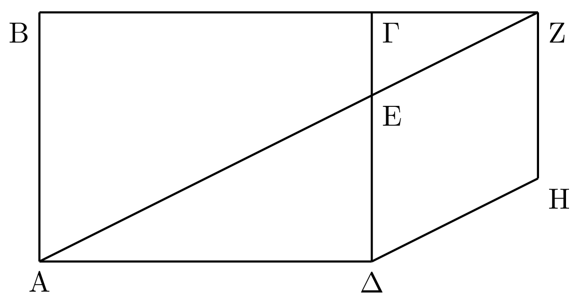


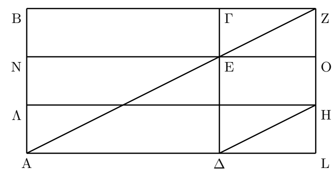
Figura 2.3: Costruzione del problema del rettangolo. Ricostruzione della figura originale tratta da [Pappo 1933], p. 210.

Analisi:
Supponiamo di aver ottenuto la soluzione richiesta. Costruiamo quindi le rette HZ e ΔH parallele alle rette ΔE ed EZ. Allora, poiché il segmento ZE è dato, sarà noto anche il segmento ΔH uguale a quest'ultimo. Inoltre anche il punto Δ è dato; quindi il punto H appartiene ad una circonferenza nota in posizione[8]. Inoltre dal momento che il rettangolo di lati $B\Gamma$ ed $\Gamma\Delta$ è dato ed è equivalente al rettangolo di lati BZ ed $E\Delta$, ciò significa che il rettangolo di lati BZ ed $E\Delta$, o equivalentemente il rettangolo di lati BZ e ZH, è noto[9] . Di conseguenza il punto H è su un'iperbole. In aggiunta il punto H è anche su una circonferenza nota in posizione. Allora il punto H risulta essere noto.

[7] Traduzione della costruzione tratta da [Pappo 1933], libro IV delle Collezioni Matematiche, Proposizione 31, pp.e 210-212

[8] Una circonferenza è nota "in posizione" secondo Euclide quando è nota la posizione del centro e la lunghezza del raggio.

[9] Questo discende dalla proposizione 43 del libro I degli Elementi di Euclide: "in ogni parallelogramma, i complementi dei parallelogrammi costruiti attorno alla diagonale sono equivalenti tra loro", ovvero preso un punto sulla diagonale di un parallelogramma, e tracciate le parallele ai lati del parallelogramma, passanti per quel punto, i due parallelogrammi che si vengono a creare rispettivamente sopra e sotto la diagonale, sono equivalenti. Nel nostro caso, considerato il rettangolo $ABZL$ e preso E sulla diagonale, i due rettangoli $B\Gamma EN$ e ΔEOL sono equivalenti. Pertanto, lo saranno anche i rettangoli $AB\Gamma\Delta$ e $ALON$ in quanto somma di rettangoli equivalenti, e quindi di conseguenza saranno entrambi equivalenti al rettangolo $BZH\Lambda$ che ha i lati congruenti a quelli di $ALON$.



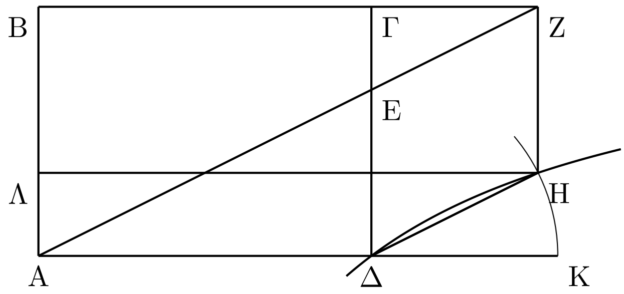


Figura 2.4: Costruzione del problema del rettangolo. Ricostruzione della figura originale presa da [Pappo 1933], pagina 211.

Costruzione:
Sia $AB\Gamma\Delta$ il rettangolo dato, M il segmento dato in lunghezza e sia ΔK uguale a quest'ultimo (preso sul prolungamento di $A\Delta$). Tracciamo dal punto Δ l'iperbole $\Delta H\Theta$ con asintoti AB e $B\Gamma$[10] e tracciamo inoltre a partire da K l'arco di circonferenza KH con centro in Δ. Quest'ultimo incontra l'iperbole in H. Infine, costruiamo la retta ZH parallela alla retta $\Delta\Gamma$ e la retta ZA (che taglia la il segmento $\Gamma\Delta$ in E); allora il segmento EZ è uguale al segmento M dato.

[Dimostrazione: Per mostrare che EZ è uguale a M tracciamo la retta $H\Delta$ e la retta $H\Lambda$ parallela a KA. Allora il rettangolo di lati $H\Lambda$ e ZH, ovvero il rettangolo di lati BZ e ZH, è equivalente al rettangolo di lati $A\Delta$ e $\Delta\Gamma$, ovvero al rettangolo di lati $B\Gamma$ e $\Delta\Gamma$[11]. Di conseguenza $\Delta\Gamma$ sta a ZH come BZ sta a $B\Gamma$, vale a dire come $\Delta\Gamma$ sta a $E\Delta$. Pertanto $E\Delta$ è uguale a ZH; quindi ΔEZH è un parallelogramma. Allora il segmento EZ è uguale al segmento ΔH, quindi anche a ΔK, quindi anche ad M.]

Come si può notare dalla risoluzione, l'analisi segue un cammino inverso rispetto a quello della sintesi. Nell'analisi, infatti, Pappo parte supponendo di conoscere già ciò che deve trovare, e prosegue a ritroso fino ad arrivare a qualcosa che era dato dalle ipotesi del problema, mentre nella sintesi si parte costruendo ciò che è possibile derivare dagli elementi noti, per poi arrivare a ciò che veniva richiesto di trovare.
Passiamo ora a trattare la risoluzione del problema del quadrato. Quest'ultimo è un caso particolare del problema del rettangolo appena trattato, ma anche di un altro problema geometrico: il problema del rombo. Il problema del rombo era uno dei problemi del *De inclinationibus*, il trattato perduto scritto da

[10]Pappo spiega come è possibile tracciare tale iperbole in una proposizione successiva. Facendo riferimento al testo [Pappo 1933] è possibile trovare la costruzione nella proposizione 33, p. 214.
[11]Se consideriamo le rette ZH e ΛH tracciate a partire da H appartenente all'iperbole, e le rette $\Delta\Gamma$ e ΔA tracciate a partire dal punto Δ sull'iperbole, tutte e quattro parallele ai due asintoti dell'iperbole, allora si ha che $ZH \times \Lambda H = \Delta\Gamma \times \Delta A$, dalla quale, considerando i segmenti paralleli citati nel testo, si ottiene $ZH \times BZ = \Delta\Gamma \times B\Gamma$.

Apollonio di Perga (262 a.C. - 190 a.C.); Pappo nelle sue *Collezioni* inserisce una proposizione che sostiene essere correlata a questo problema. Tale proposizione precede immediatamente il problema del quadrato nell'opera di Pappo, infatti, a differenza dei problemi di inclinazione visti fino ad ora, i problemi del quadrato e del rombo vengono collocati nel libro VII delle *Collezioni*, nelle proposizioni 70 e 72. Quest'ultima è preceduta da un lemma (proposizione 71) indispensabile alla risoluzione e che pertanto riportiamo di seguito prima di trattare il problema del quadrato. Riportiamo anche l'enunciato del problema del rombo di Apollonio e la proposizione dimostrata da Pappo per sottolineare il legame tra loro. Essendo il trattato di Apollonio perduto, l'enunciato del problema del rombo che riportiamo qui è quello proposto da Marino Ghetaldi, la cui costruzione sarà trattata nel prossimo paragrafo. Le due risoluzioni di Pappo (quella della proposizione 70 e della proposizione 72) presentate all'interno delle *Collezioni* non sembrano essere collegate, per cui quella correlata al problema del rombo verrà omessa[12].

Problema del Rombo (Ghetaldi)[13] 2.4
Dato un un rombo e prolungato un suo lato, inserire nell'angolo esterno un segmento uguale a un segmento assegnato che, prolungato, passi per [il vertice] l'angolo opposto.

Proposizione correlata al problema del rombo (Pappo)[14] 2.5
Sia $A\Delta$[15] *un rombo di cui* $B\Gamma E$ *è il diametro prolungato*[16]*, se prendiamo* EZ *come medio proporzionale tra* BE *ed* $E\Gamma$*; se costruiamo il cerchio* $ZH\Theta$ *(Con* H *punto di incontro della circonferenza con il prolungamento di* $A\Gamma$*) di centro* E *e raggio* EZ*, allora la linea che passa per* H*,* K *(punto di incontro tra* $\Delta\Gamma$ *e la circonferenza),* B *sarà una retta.*

[12] È possibile trovare la risoluzione completa della proposizione 70 in [Pappo 1933], pagine 603-604.

[13] Enunciato del problema del rombo tratto dall'opera *Apollonius redivivus: liber primus et secundus* di Marino Ghetaldi. La risoluzione del problema è presentata in seguito a pagina 38.

[14] Traduzione dell'enunciato tratto da [Pappo 1933], libro VII delle Collezioni Matematiche, proposizione 70, pagina 603.

[15] In questa notazione le due lettere rappresentano i vertici opposti del quadrilatero. Vedremo che Pappo usa la stessa notazione anche per il quadrato.

[16] $B\Gamma$ è il diametro del rombo, cioè una sua diagonale, e viene prolungato sino al punto E.

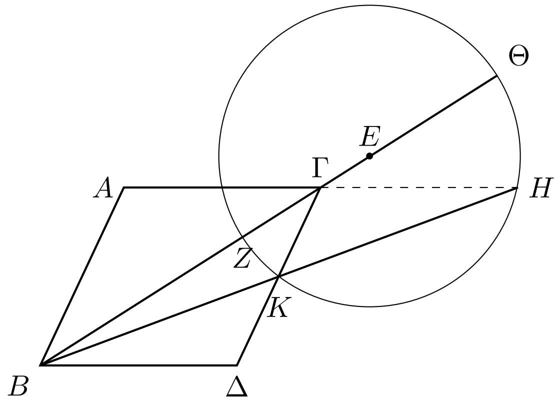


Figura 2.5: Ricostruzione della figura presa da [Pappo 1933], libro VII delle *Collezioni*, pagina 604.

Lemma antecedente il problema del quadrato (Pappo)[17] 2.6
Sia dato un quadrato AD, si conduca BGE e perpendicolarmente ad esso si tracci EF. Dico che i quadrati costruiti su CD e GE sono equivalenti al quadrato su DF (vedi Figura 2.6).

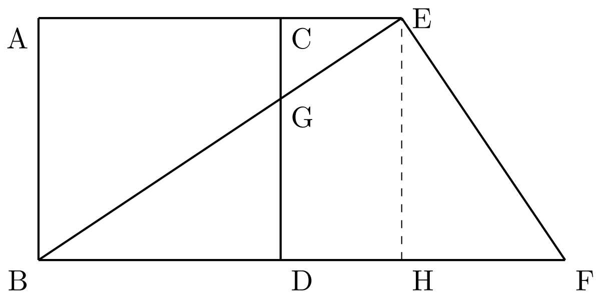


Figura 2.6: Costruzione del lemma antecedente il problema del quadrato. Ricostruzione della figura presa da [Rosso 2024].

Costruzione:
Dobbiamo dimostrare che:

$$BD^2 + EG^2 = DF^2.$$

Costruiamo a partire da E la parallela al lato CD del quadrato, che taglia BF in H. Poiché gli angoli retti $C\hat{E}H$ e $F\hat{E}G$ hanno l'angolo $G\hat{E}H$ in comune, deve essere:

$$C\hat{E}G = F\hat{E}H$$

da cui segue che i triangoli rettangoli $\triangle FEH$ e $\triangle BDG$ sono congruenti e, in particolare,

[17] Costruzione presa da [Rosso 2024].

$$EF = BG.$$

Inoltre, visto che anche il triangolo $\triangle FEB$ è rettangolo in E, si ha

$$BF^2 = EF^2 + BE^2.$$

Notiamo anche che i triangoli $\triangle BGD$ e $\triangle BEF$ sono simili, quindi

$$BG : BF = BD : BE$$

da cui segue

$$BF \times BD = BE \times BG \tag{2.1}$$

che può essere letta come un'equivalenza tra il rettangolo di lati BF e BD e quello di lati BE e BG. Osserviamo inoltre che i punti G, E, F e D devono appartenere ad una stessa circonferenza, in quanto il quadrilatero $GEFD$ è ciclico, avendo gli angoli opposti supplementari. Se dal quadrato di lato BF si toglie il rettangolo di lati BF e BD resta il rettangolo di lati BF ed FD. D'altronde, per quanto visto prima, possiamo dedurre che

$$BF \times FD = BF^2 - BF \times BD = EF^2 + BE^2 - BE \times BG$$

e siccome, togliendo il rettangolo di lati BE e BG dal quadrato di lato BE, si ottiene il rettangolo di lati BE ed EG, si può concludere, anche usando $BG = FE$, che

$$BF \times FD = BG^2 + BE \times EG.$$

Ora, poiché $BE \times EG = BG \times EG + EG^2$, possiamo ricombinare i termini ottenendo cosi

$$BF \times FD = BG^2 + EG^2 + BG \times EG = EG^2 + BG \times BE.$$

Confrontandola con l'equazione (2.1), otteniamo

$$BF \times FD = BG^2 + BE \times EG = EG^2 + BF \times BD.$$

Rimuovendo il rettangolo di lati BD e FD da entrambi i lati dell'equazione, a sinistra resta il quadrato di lato FD mentre a destra resta il quadrato di lato GE e quello di lato BD, che è appunto la tesi del lemma.

Problema del Quadrato (Pappo)[18] 2.7
Dato un quadrato AD, prolungare AC fino ad E e tracciare da esso un segmento, con EG di lunghezza assegnata, che raggiunga il punto B.

[18]Costruzione presa da [Rosso 2024], ma riformulata dividendo analisi e tesi come nel Problema 2.3.

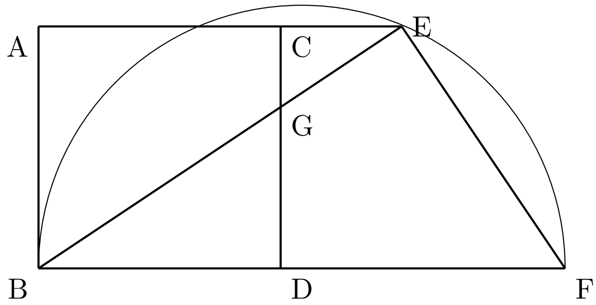


Figura 2.7: Costruzione del problema del quadrato. Ricostruzione della figura presa da [Rosso 2024].

Analisi:
Consideriamo il problema risolto, ovvero supponiamo di aver trovato il punto E sul prolungamento di AC tale che il lato CD stacchi su BE un segmento EG di lunghezza prefissata. Se tracciamo a partire da E il segmento EF ortogonale a BE (vedi Figura 2.7) allora per il lemma appena dimostrato vale l'uguaglianza $BD^2 + EG^2 = DF^2$ per cui DF si può considerare noto, visto che lo sono BD e EG. Di conseguenza, il segmento BF è esso stesso noto e per questo si può considerare nota la posizione della semicirconferenza di diametro BF che deve passare per E visto che, per costruzione, l'angolo $B\hat{E}F$ è retto.

Costruzione:
Sia AD il quadrato dato e sia M il segmento dato. Sia DF tale che il quadrato costruito su di esso sia equivalente alla somma dei quadrati costruiti su BD e su M. Il punto E, soluzione del problema, si ottiene intersecando la circonferenza di diametro BF e il prolungamento del lato AC dalla parte di C.
[Dimostrazione: dal lemma precedente segue che $BD^2 + EG^2 = DF^2$, ma per costruzione si ha che $BD^2 + M^2 = DF^2$, allora $EG = M$.]

Notiamo che Pappo utilizza la stessa struttura di analisi e sintesi già discussa nella risoluzione del problema del rettangolo.
Inoltre osserviamo che la soluzione di Pappo è una soluzione solamente geometrica. Nella risoluzione del problema del quadrato e del lemma che lo precede da noi presentate sono state aggiunte delle equazioni che spiegano in un linguaggio algebrico moderno la costruzione dei due problemi; tuttavia, questa notazione non appartiene alla risoluzione originale proposta da Pappo, la quale non contiene operazioni algebriche, ma mantiene le operazioni sul piano geometrico[19]. Questo tipo di risoluzione porta Pappo a trovare un'unica soluzione del problema, e nella sua trattazione non vi è alcun elemento che suggerisca l'esistenza di

[19] É possibile constatare questo fatto osservando la traduzione della costruzione originale in [Pappo 1933], pp. 605-608. Si osservi ad esempio che nel testo originale non viene mai mostrata l'equazione $BD^2 + M^2 = DF^2$, ma si fa riferimento all'equivalenza dei quadrati costruiti sui lati BD, M e DF.

ulteriori soluzioni.
Vedremo che, con l'introduzione dell'analisi algebrica, questo problema verrà ripreso e studiato da diversi matematici dell'età moderna; la sua risoluzione, grazie all'impiego di metodi algebrici, subirà una trasformazione tale da condurre all'individuazione di ulteriori soluzioni, tra le quali figurano anche alcune soluzioni negative.

2.2 Marino Ghetaldi e i problemi che *sub algebra non cadunt*

Facciamo ora un salto temporale, andando ad analizzare una delle prime soluzioni del problema del quadrato presentate durante l'età moderna. L'autore di questa risoluzione è Marino Ghetaldi (1568 - 1626), un matematico e scienziato dalmata vissuto nella Repubblica di Ragusa. Nello specifico andremo ad analizzare lo studio che Ghetaldi racchiuse nelle opere *Apollonius redivivus: liber primus et secundus* pubblicate nel 1607 e, in una seconda versione, nel 1613, il cui scopo principale era quello di restaurare il contenuto del trattato perduto *De inclinationibus* di Apollonio di Perga. Il tema dei problemi di inclinazione, come abbiamo già visto, era stato ampiamente trattato dai matematici greci, ma era da poco ritornato ad essere una questione centrale del dibattito matematico in seguito alla pubblicazione della traduzione latina delle *Collezioni* di Pappo (1588); inoltre, ulteriore rilevanza era stata acquisita da questi problemi in seguito alle osservazioni di François Viète (vedi Sezione 1.5.1), che arrivò a formulare il problema di inclinazione come postulato della geometria, andando così ad arricchire i tradizionali postulati di Euclide. Questa operazione aveva un grandissimo potenziale: attraverso l'aggiunta di questo postulato era possibile risolvere alcuni dei problemi classici non risolubili con i metodi euclidei e, grazie alla risoluzione di quest'ultimi e all'analisi algebrica da lui introdotta, Viète riuscì a risolvere ogni problema appartenente alla classe dei "problemi solidi" (vedi la classificazione di Pappo presentata nella Sezione 1.2.1).
Per queste motivazioni anche Ghetaldi si interessò alla risoluzione dei problemi di *neusis*, in particolare a quelli trattati da Apollonio nel testo perduto, che, stando a quanto riferito da Pappo nelle *Collezioni*, dovevano essere tutti problemi di inclinazione risolvibili con riga e compasso.
Prima di passare alla risoluzione del problema del quadrato è importante far luce sui metodi di risoluzione conosciuti ed utilizzati da Ghetaldi. Come abbiamo già visto per altri autori, anche Ghetaldi risolve i problemi avvalendosi del metodo di analisi e sintesi. Per Ghetaldi l'analisi è "il risalire, attraverso conseguenze successive, da ciò che si cerca, considerato come dato, verso ciò che è veramente dato" [Brigaglia & Nastasi 1986], mentre la sintesi è "il risalire, per conseguenze successive, da ciò che è dato verso lo scopo e comprensione di ciò che si cerca" [Brigaglia & Nastasi 1986]. Ghetaldi conosce sia il metodo di analisi algebrico sia quello classico e constata che spesso, se si riesce a ricondurre il problema ad un'equazione algebrica, questo viene risolto più facilmente. Tuttavia, Ghetaldi riconosce che non tutti i problemi sono traducibili in linguaggio

algebrico[20] e individua una classe di problemi per cui questa traduzione non è possibile; questi ultimi sono i problemi in cui le quantità da determinare e da trasformare non rappresentano soltanto segmenti, aree o volumi, ma anche angoli. Ghetaldi porta otto esempi di problemi contenuti in questa classe, tra cui il problema del rombo, che abbiamo già citato.
A parte nel caso particolare dei problemi che *sub algebra non cadunt*, Ghetaldi ci tiene a sottolineare che la via geometrica, in generale, non deve imporsi su quella algebrica, anzi l'analisi geometrica classica deve intrecciarsi ai metodi algebrici per arrivare alla risoluzione del problema. Si tratta di una posizione che già Rafael Bombelli aveva avanzato nella sua celebre *Algebra* del 1572, descrivendo il legame tra algebra e geometria in questi termini:

> hanno intra di loro tanta convenientia che l'una è la prova dell'altra e l'altra è la dimostrazion dell'una.

Analizziamo ora la risoluzione di Ghetaldi per il problema del quadrato. A differenza di altri autori, Ghetaldi non tratta il problema del quadrato come un problema a sé stante, ma solamente come un caso particolare del problema del rombo. Quest'ultimo viene risolto da Ghetaldi attraverso un'analisi solamente di tipo geometrico in quanto, come detto precedentemente, fa parte della categoria di problemi che *sub algebra non cadunt*. Presentiamo le due risoluzioni di seguito.

Problema del Rombo (Ghetaldi)[21] 2.8
Dato un un rombo e prolungato un suo lato, inserire nell'angolo esterno un segmento uguale a un segmento assegnato che, prolungato, passi per l'angolo opposto.

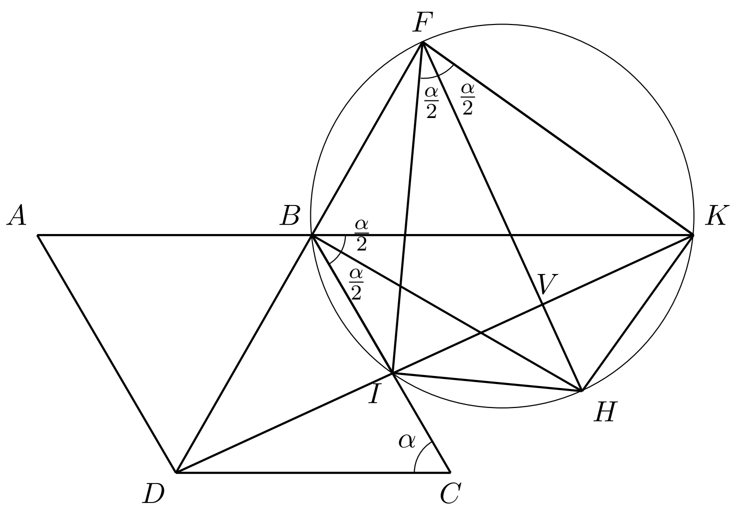


Figura 2.8: Figura riferita all'analisi del problema del rombo di Ghetaldi. Ricostruzione della figura tratta da [Brigaglia & Nastasi 1986], p. 114.

[20]Ghetaldi indica questi problemi utilizzando l'espressione *sub algebra non cadunt*.
[21]Costruzione tratta da [Brigaglia & Nastasi 1986], pp. 112-115.

Analisi:
Supposto il problema già risolto (vedi Figura 2.8), si consideri la bisettrice BH dell'angolo $\widehat{CBK} = \alpha$ e la circonferenza per i punti B, I, K e sia F il punto d'incontro di questa circonferenza con la diagonale prolungata. Se si congiunge F con H (punto d'incontro della bisettrice con la circonferenza) è facile provare che FH è una retta diametrale (BH è infatti parallela all'altra diagonale e quindi perpendicolare a DB, dunque $\widehat{HFB} = \pi/2$) ed è l'asse del segmento (dal momento che gli archi $\overset{\frown}{IH} = \overset{\frown}{HK}$ segue $IH = HK$ e dall'essere di conseguenza $\overset{\frown}{IF} = \overset{\frown}{FK}$ segue $\widehat{IHV} = \widehat{VHK}$, e perciò i 2 triangoli $\triangle IVH$, $\triangle HVK$ aventi anche VH in comune sono uguali e quindi $IV = VK$). Segue dunque, sebbene sia superfluo, che l'angolo alla circonferenza $\widehat{IFK} = \alpha$ ed i 2 triangoli $\triangle IFK$, $\triangle DBC$ sono simili e perciò $DB : IK = FI : BC$ cioè $FI = \frac{DB \times BC}{IK}$. A questo punto, è facile vedere che la determinazione del segmento BF avviene attraverso l'*inserzione* (tra la circonferenza ed il prolungamento VD della perpendicolare al diametro) del segmento DB uguale alla diagonale del rombo.[22]

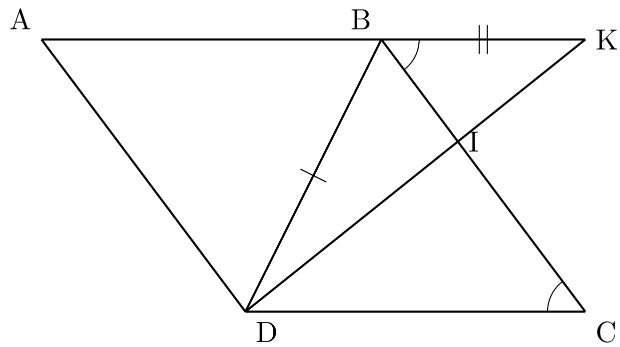


Figura 2.9: Costruzione del problema del rombo di Ghetaldi, figura 1. Ricostruzione della figura tratta da [Brigaglia & Nastasi 1986], p. 112.

Costruzione:
Sul segmento dato EG si descriva il segmento circolare EFG in modo tale che $\widehat{EFG} = \alpha$, dove α è l'angolo esterno al rombo in cui si vuole inserire il segmento dato (vedi l'angolo $\widehat{CBK}$ in Figura 2.9). Si completi poi il cerchio $EFGH$, il cui diametro sia perpendicolare ad EG nel suo punto medio V. Si prolunghi EG dalla parte di E, e si inserisca tra la circonferenza e tale prolungamento un segmento $LM = BD$ (tale che il suo prolumgamento passi per F)[23]. Si tracci il segmento LG e lo si riporti in Figura 2.9 sul prolungamento di AB

[22]Quest'ultimo passaggio richiama un problema già risolto da Ghetaldi (Problema II) che gli permette di inserire un segmento di lunghezza data tra una circonferenza e una retta perpendicolare a un suo diametro. Per ulteriori dettagli vedi nota 23.

[23]Ghetaldi aveva già trattato questo problema di inclinazione all'interno del Problema II, libro I dell'*Apollonius Redivivus*, pagina 4. Riportiamo qui la traduzione del testo del

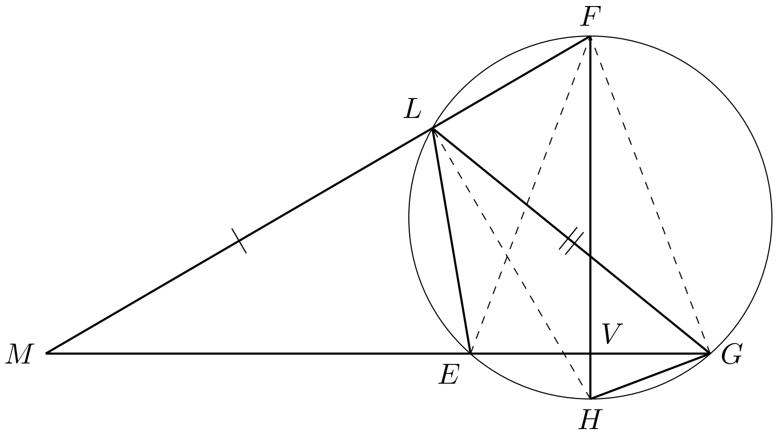


Figura 2.10: Costruzione del problema del rombo di Ghetaldi, figura 2. Ricostruzione della figura tratta da [Brigaglia & Nastasi 1986], p. 113.

> dalla parte di B. Abbiamo cosi determinato il punto K che risolve il problema.
>
> [Dimostrazione: Si veda infatti che, congiungendo D con K, il segmento IK che così resta determinato è uguale al segmento EG. Per provarlo dimostriamo l'uguaglianza dei triangoli $\triangle LEG$ e $\triangle BIK$, la quale segue direttamente dalla congruenza dei triangoli $\triangle MLG$ e $\triangle DBK$. Per provare ciò si veda l'uguaglianza tra gli angoli $\widehat{MLG} = \widehat{MLE} + \widehat{ELG}$ e $\widehat{DBK} = \widehat{DBI} + \widehat{IBK}$; per costruzione, $\widehat{ELG} = \widehat{EFG} = \widehat{IBK}$; dimostriamo quindi che anche $\widehat{MLE} = \widehat{DBI}$. $\widehat{MLE}$ è esterno rispetto al triangolo $\triangle LFE$, pertanto $\widehat{MLE} = \widehat{LFE} + \widehat{LEF} = \widehat{EHL} + \widehat{LHF} = \widehat{EHF} = \widehat{DBI}$ perché, essendo il quadrilatero $EHGL$ ciclico, segue che $\widehat{ELG} + \widehat{EHG} = \pi = \widehat{ABI} + \widehat{IBK}$, da cui $\widehat{EHG} = \widehat{ABI}$ e quindi $\widehat{EHF} = \frac{1}{2}\widehat{EHG} = \frac{1}{2}\widehat{ABI} = \widehat{DBI}$). Essendo uguali i triangoli $\triangle MLG$ e $\triangle DBK$ (per il primo criterio di congruenza dei triangoli), avranno uguali i restanti elementi, tra cui $\widehat{LGE} = \widehat{BKI}$, da cui ricaviamo che anche i triangoli $\triangle LEG$ e $\triangle BIK$ sono congruenti (per il secondo criterio). Perciò $EG = IK$.]

Come possiamo notare il problema è stato risolto attraverso un'analisi di tipo geometrico. Questo, come già abbiamo osservato in precedenza, accade perché nella risoluzione del problema gli angoli giocano un ruolo determinante, facendo ricadere quindi il problema nella categoria di quelli che *sub algebra non*

problema:

> Dato un semicerchio e una retta perpendicolare alla sua base, tracciare tra tale perpendicolare e la circonferenza del semicerchio un segmento di lunghezza assegnata che arrivi all'angolo del semicerchio.

Detto in altre parole, occorre tracciare un segmento di lunghezza assegnata, con un estremo sulla perpendicolare alla retta su cui giace il diametro del semicerchio, l'altro estremo sulla circonferenza. Inoltre il segmento, eventualmente prolungato, deve passare per uno degli estremi del diametro del semicerchio.

cadunt. Tuttavia, dopo la pubblicazione del *De risolutione* i matematici Pierre Hérigone e Cartesio dimostreranno che in alcuni casi Ghetaldi si era sbagliato e che era effettivamente possibile tradurre alcuni dei problemi in questione in equazioni algebriche, adottando così un metodo di analisi differente da quello classico utilizzato da Ghetaldi. Ciò che il matematico dalmata sembra ignorare, infatti, è la possibilità di utilizzare le formule trigonometriche interpretandole come risultati di proporzioni geometriche. Quest'ultime potevano essere usate durante l'analisi del problema, a patto di farle poi scomparire dalla forma finale dell'equazione associata al problema.
Passiamo ora a considerare la risoluzione del problema del quadrato di Ghetaldi. A differenza di quanto accade con i problemi relativi ai triangoli, per cui Ghetaldi risolve algebricamente il caso relativo all'angolo retto dopo aver risolto geometricamente il caso generale, per il problema del quadrato egli applica la stessa risoluzione utilizzata nel problema del rombo.
La risoluzione di Ghetaldi è pertanto, come quella di Pappo, solamente geometrica e anche in questo caso la soluzione trovata è unica. Le risoluzioni che vedremo nei prossimi paragrafi, invece, saranno precedute da un'analisi di tipo algebrico e porteranno i matematici a interrogarsi sul significato delle molteplici soluzioni trovate.

2.3 Albert Girard e l'interpretazione geometrica delle soluzioni negative

In questo paragrafo studieremo la soluzione del problema del quadrato del matematico francese Albert Girard (1595 – 1632). Come già accennato, lo scopo di molti matematici del primo periodo moderno è quello di riuscire a risolvere i problemi utilizzando il metodo di analisi algebrica introdotto da poco. Girard e Cartesio, in particolare, riusciranno a mostrare che Ghetaldi sbagliava a classificare il problema del quadrato come problema che *sub algebra non cadunt*, riuscendo a trovare la soluzione per via algebrica.
Girard pubblica la sua risoluzione del problema del quadrato nell'opera *Nouvelle invention en l'algèbre* del 1629; quest'ultima è la risoluzione del problema già visto nei paragrafi precedenti, riformulato in un caso specifico dove il lato del quadrato misura 4 e il segmento dato misura $\sqrt{153}$. Questi valori hanno un significato ben preciso, permettono infatti di trovare più facilmente le soluzioni dell'equazione associata al problema che risulta essere di quarto grado.

Problema del Quadrato (Girard)[24] 2.9
Dato un punto A posto sulla bisettrice del primo e terzo quadrante in modo che $AF = AB = 4$, si tracci la retta passante per A e tale che la sua intercetta CN compresa tra gli assi ortogonali DH e CL abbia lunghezza $\sqrt{153}$.

[24] Costruzione tratta da [Rosso 2024].

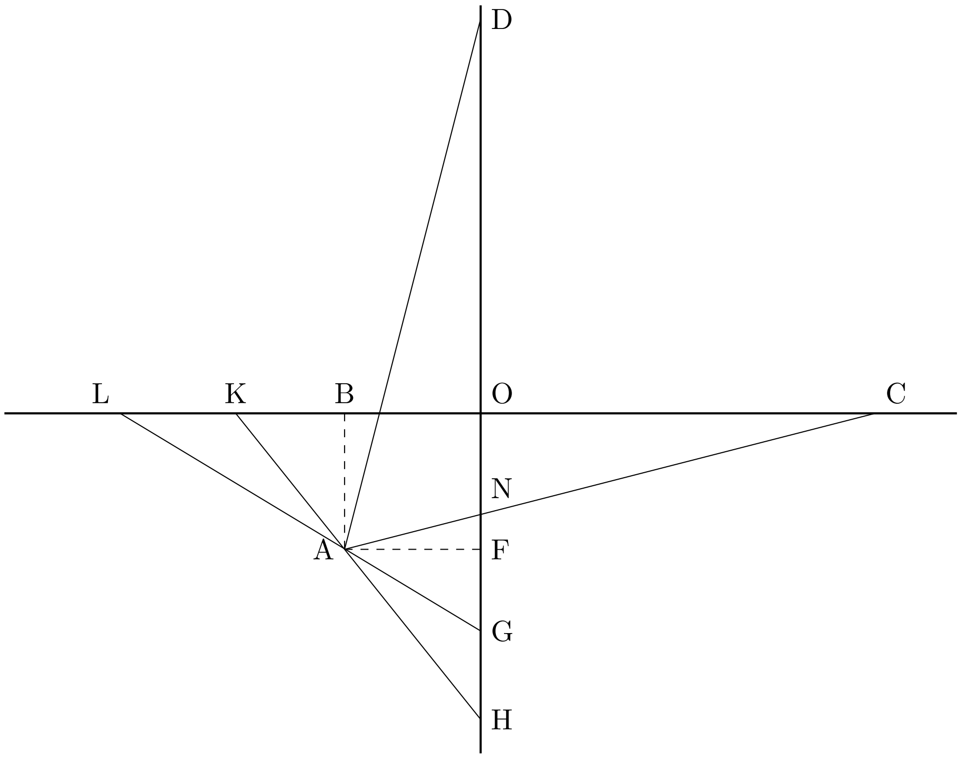


Figura 2.11: Costruzione del problema del quadrato di Girard. Figura tratta da [Rosso 2024].

Analisi:
Poniamo $FN = x$. Dalla similitudine dei triangoli $\triangle FAN$ e $\triangle NOC$ ricaviamo

$$AN : NC = FN : NO$$

ovvero

$$\sqrt{16 + x^2} : \sqrt{153} = |x| : |4 - x|$$

da cui si ottiene

$$\sqrt{16 + x^2} \times |4 - x| = |x| \times \sqrt{153}.$$

Elevando al quadrato e sistemando i termini otteniamo l'equazione

$$x^4 - 8x^3 - 128x + 256 = 0$$

che ha come radici positive $x = 1$ e $x = 16$ (associate ai segmenti FN ed FD), mentre le radici negative sono $x = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$ (associate ai segmenti FG ed FH).

Girard, a differenza di Pappo e Ghetaldi, ottiene quattro soluzioni del problema, tra le quali due sono rappresentate da valori *negativi* dell'incognita introdotta. L'interpretazione geometrica che Girard dà delle soluzioni negative è la seguente:

> Queste soluzioni mostano i punti G ed H, come se le distanze FG, FH fossero meno di nulla, presi FN ed FD che crescono mentre FG, FH retrocedono finch´e le intercette CN, DP, GL, HK, tendono ad inclinarsi a partire da A, facendo ciascuna $\sqrt{153}$, secondo le regole qui stabilite. E per interpretarle ancora meglio, le due soluzioni che sono minori di 0 si debbono scambiare, a seconda dei segni. Si otterrà
>
> $$\begin{cases} 4\frac{1}{2} - \sqrt{4\frac{1}{4}} & \text{per } FG \\ 4\frac{1}{2} + \sqrt{4\frac{1}{4}} & \text{per } FH \end{cases}$$
>
> che vanno contate in verso opposto a quello di FN, FD, come mostra la figura precedente: e dunque si dovranno intendere così tutte le soluzioni negative, che é un osservazione con conseguenze in geometria, sconosciute sinora.

Pertanto l'utilizzo del metodo algebrico porta con sé una trasformazione cruciale nell'interpretazione delle soluzioni di un problema. Fino ad ora la soluzione considerata per il problema del quadrato era sempre stata unica e positiva. Con l'introduzione dell'analisi algebrica non è più possibile ignorare le altre soluzioni e di conseguenza i matematici sono spinti a dare un'interpretazione geometrica anche delle quantità negative, che fino a quel momento erano state accettate solo in problemi particolari, di natura contabile, grazie alla loro interpretazione come *debiti.* Girard si esprime sulla questione in questi termini:

> Finora non abbiamo ancora spiegato a cosa servano le soluzioni negative, quando ve ne siano. La soluzione negativa si spiega in Geometria procedendo all'indietro, ed il segno meno indietreggia, laddove il segno + avanza.

Vedremo però che non tutti i matematici del periodo moderno si esprimeranno sulla questione fornendo un'interpretazione come quella di Girard, alcuni continueranno a rifiutare le radici negative dell'equazione, ritenendole senza significato.
La soluzione di Girard si presenta come caso particolare del problema del quadrato. Se esaminiamo il caso generale con il lato del quadrato di lunghezza a e il segmento assegnato di lunghezza k otterremmo, dalla similitudine dei due triangoli, la proporzione $\sqrt{a^2+x^2}\times|a-x| = |x|\times k$, da cui discende l'equazione $x^4-2ax^3+(2a^2-k^2)x^2-2a^3x+a^4 = 0$. Le radici di questa equazione non sono semplici da costruire nel caso generale, ma la scelta di Girard di risolvere il problema in un caso specifico in cui $2a^2 = k^2$ gli permette di ricavare le soluzioni in modo più semplice; tuttavia, tale scelta va discapito della generalità della sua soluzione. Come vedremo nel prossimo paragrafo, solamente otto anni dopo la pubblicazione della soluzione di Girard, Cartesio pubblicherà una soluzione del

problema genarale nella *Géométrie*, mostrando l'efficacia e la validità del suo metodo.

2.4 Il problema del quadrato nella *Géométrie* di Cartesio

Nel 1637 Cartesio pubblicò la *Géométrie*, un'opera che contiene il risultato degli studi nel campo del *problem solving* geometrico da lui affrontati nei due decenni precedenti. Il metodo cartesiano, di cui si è già ampiamente discusso nella Sezione 1.6, portò una vera e propria rivoluzione nel panorama del problem solving geometrico, creando una visione unitaria dei metodi di costruzione geometrici e della loro legittimità che era mancata durante tutto il primo periodo moderno.
In particolare, nel III libro della *Géométrie* viene presentata la risoluzione cartesiana del problema del quadrato, proposta come esempio di applicazione del metodo cartesiano di riduzione delle equazioni di quarto grado a equazioni di grado inferiore. Analizziamo ora tale risoluzione a partire dall'analisi algebrica sviluppata da Cartesio.

Problema del Quadrato (Cartesio)[25] 2.10
Dati il quadrato AD ed il segmento BN, occorre prolungare il lato AC sino ad E, in modo che EF, tracciato da E verso B, sia uguale ad NB.

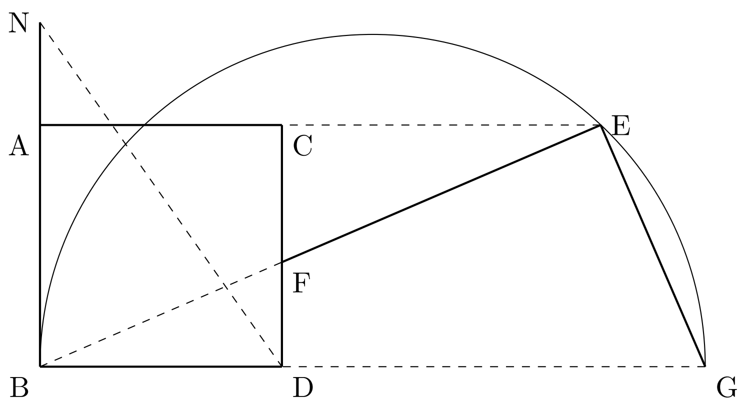


Figura 2.12: Costruzione del problema del quadrato di Cartesio. Ricostruzione della figura originale della *Géométrie* presa da [Descartes 1954], pagina 189.

Analisi:
Posto $BD = a$ e $BN = EF = c$, Cartesio utilizza la similitudine dei triangoli $\triangle BFD$ e $\triangle CFE$ per scrivere l'equazione risolutiva in termini dell'incognita $x = DF$. Dalla similitudine si ha che

[25] La costruzione qui presentata è quella proposta in [Descartes 1954], con alcune modifiche volte a renderla più aderente a uno stile moderno. Tali modifiche sono ispirate ai testi [Rosso 2024] e [Brigaglia & Nastasi 1986].

$$CF : FE = FD : FD : BF$$

dalla quale otteniamo

$$a - x : c = x : BF$$

quindi $BF = \frac{cx}{a-x}$. Considerando il triangolo rettangolo $\triangle BDF$ si ha che $FD^2 + BD^2 = BF^2$, dalla quale si ottieniene

$$x^2 + a^2 = \frac{c^2x^2}{(a-x)^2}.$$

Moltiplicando entrambi i lati per $(a - x)^2$ otteniamo l'equazione

$$x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = c^2x^2$$

riordinando i termini

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$$

che contiene l'equazione di Girard come caso particolare corrispondente alla scelta $c^2 = 2a^2$. Ponendo ora $x = z + \frac{a}{2}$, cioè eseguendo la trasformazione già introdotta da Cardano e Viète, si ottiene la seguente equazione, in cui è stato eliminato il termine di terzo grado

$$z^4 + (\frac{a^2}{2} - c^2)z^2 - (a^3 + ac^2)z + \frac{5}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2c^2 = 0. \qquad (2.2)$$

Consideriamo ora l'equazione di sesto grado[26]

$$y^6 + (a^2 - 2c^2)y^4 + (c^4 - a^4)y^2 - (a^3 + ac^2)^2 = 0,$$

vogliamo individuare una radice y^2 dell'equazione di terzo grado. Cercando tra i divisori del termine noto, possiamo verificare in modo semplice che $y^2 = a^2+c^2$ è radice. Scriviamo allora l'equazione (2.2) come prodotto delle due equazioni seguenti

$$\left(z^2 - yz + \frac{1}{2}y^2 + \left(\frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{2}\right) - \frac{a^3+ac^2}{2y}\right) = 0$$

$$\left(z^2 + yz + \frac{1}{2}y^2 + \left(\frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{2}\right) + \frac{a^3+ac^2}{2y}\right) = 0.$$

nelle quali sostituendo $y^2 = a^2 + c^2$ si ottiene

[26]Da questo punto in poi procediamo con il metodo presentato da Cartesio per la riduzione delle equazioni di quarto grado in un prodotto di due equazioni di secondo grado. Cartesio non riporta esplicitamente questi passaggi durante l'analisi del problema, ma è facile ricostruire la sua analisi seguendo il metodo da lui presentato alle pagine 180-188 di [Descartes 1954].

$$z^2 - \sqrt{a^2+c^2}\, z + \tfrac{3}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2} = 0$$

$$z^2 + \sqrt{a^2+c^2}\, z + \tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2} = 0.$$

dalle quali si ottengono le radici[27]

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{-\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{-\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}\,.$$

Risostituendo $x = z + \frac{a}{2}$ otteniamo[28]

$$x = \tfrac{a}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{-\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$x = \tfrac{a}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{-\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{2}a\sqrt{a^2+c^2}}\,.$$

Costruzione:
Si sa da Pappo che, se si è prolungato dapprima BD fino a G, di modo che DG sia uguale a DN[29], ed avendo descritto un cerchio di diametro BG, se si prolunga la retta AC, essa interseca la circonferenza del cerchio nel punto E richiesto.

Come possiamo notare dall'analisi appena presentata, Cartesio, nonostante l'utilizzo del metodo algebrico, considera nella sua costruzione solamente una delle quattro soluzioni dell'equazione di quarto grado associata al problema. La motivazione che lo spinge a fare ciò è probabilmente legata all'opinione di Cartesio in merito alle radici negative delle equazioni. Egli, infatti, considera quest'ultime prive di valore, riferendosi a tali radici con l'appellativo di "radici false", contrapposto a quello di "radici vere" con cui indica le radici positive. I commentatori di Cartesio, come ad esempio Frans van Schooten, riprenderanno le radici scartate da Cartesio e ne daranno un'interpretazione geometrica vicina a quella data da Girard. Riportiamo un passaggio dai *commentarii* all'edizione latina della *Géométrie* nel quale Van Schooten che lascia intendere il suo pensiero riguardo l'utilizzo delle radici negative:

> È possibile mostrare qui elegantemente l'impiego delle radici, tanto le false quanto quelle vere, di alcune equazioni hanno in geometria e a quali condizioni possiamo essere da loro condotti alla piena

[27] Cartesio sceglie di non riportare le radici negative nella sua risoluzione, in quanto, come verrà discusso in seguito, le considera prive di validità, "false" (termine che lui utilizza per indicare le radici negative).

[28] Solamente la seconda soluzione sarà presa in considerazione da Cartesio, perchè è quella che risolve a tutti gli effetti il problema di Pappo, in cui il punto E viene preso sul prolungamento di AC dalla parte di C. Tale soluzione è quella di cui riportiamo la costruzione.

[29] Cartesio costruisce sulla figura il triangolo rettangolo $\triangle BND$, il cui lato DN si può ottenere applicando il teorema di Pitagora $DN^2 = BN^2 + BD^2$, che è noto perché lo sono il lato del quadrato e il segmento assegnato. Questo passaggio è equivalente all'enunciato del lemma che Pappo antepose al problema del quadrato (Lemma 2.6).

> intelligenza di alcuni problemi; affinché non vi siano casi che non scopriamo e di cui non giungiamo alla determinazione. Occorre sapere infatti che, benché (come detto in precedenza) in aritmetica le radici vere indicano una quantità maggiore di nulla e quelle false la mancanza di una certa quantità, ovvero di quanto sono minori di nulla, similmente le radici vere in geometria indicano segmenti [percorsi] nel verso come si propone di trovare mentre le radici false sono da assumere in verso contrario, a partire dallo stesso punto.

In questo passaggio si può cogliere come l'impostazione di Van Schooten si avvicini maggiormente a quella di Girard piuttosto che a quella di Cartesio, sebbene Van Schooten risulti più restio di Girard nel riconoscere uno *status* di legittimità alle radici "false".
Altri commentatori di Cartesio, come Claude Rabuel, proveranno a dare un'interpretazione delle radici negative riformulando il problema in modo tale da includerle tra le soluzioni cercate. Secondo Rabuel, infatti, la natura problematica delle altre radici stava nel fatto che il problema formulato da Cartesio prevedeva un'unica soluzione, quella con il segmento FE compreso tra il prolungamento del lato AC dalla parte di C, e il lato CD. Riformulando il problema si sarebbero potute includere le altre soluzioni, assegnando così un significato alla molteplicità di risultati ottenuti dall'analisi algebrica. Rabuel proporrà la seguente riformulazione del problema:

Problema del Quadrato (Rabuel)[30] 2.11
Assegnato il quadrato $ABCD$ e prolungandone i lati AC, CD, trovare tutti i segmenti che:

1. *sono tracciati a partire dal punto B*
2. *tagliano i lati AC, CD*
3. *la parte dei segmenti compresa tra questi lati sia uguale ad un segmento assegnato BN.*

Da un confronto con gli autori dei paragrafi precedenti risulta chiaro che l'analisi di tipo algebrico porti i matematici a confrontarsi con il problema dell'interpretazione delle radici multiple, tra cui sono presenti anche quelle negative. Questo porta inevitabilmente a una reinterpretazione del problema e a chiedersi se le radici negative, che per molto tempo erano state scartate, possano avere invece una loro interpretazione all'interno del contesto del *problem solving* geometrico. Concludiamo con un'osservazione che Cartesio pone a conclusione della sua risoluzione del problema del quadrato:

> Se si fosse preso BF, o CE, o BE come incognita, si sarebbe ricondotti ad una equazione la quale sarà di quarto grado, ma essa é più facile da risolvere e si otterranno le incognite molto facilmente; se invece si fosse preso DG come incognita, si otterrebbe molto

[30] Enunciato del problema tratto da [Rabuel, 1720], p. 485.

> più difficilmente un'equazione che però sarà anch'essa molto semplice. Affermo ciò per avvertire che quando il problema non é affatto di terzo grado, se si perviene ad un'equazione molto difficile, se ne può di solito ottenere una più semplice, cercando un'altra [incognita].([Descartes 1954], pp. 190-191)

L'autore vuole quindi metterci in guardia dalle possibili conseguenze derivanti dalla scelta di una piuttosto che di un'altra incognita in un dato problema. Sotto questo punto di vista il metodo cartesiano appare forse meno generale di quanto Cartesio stesso auspicasse, poiché, come l'autore sottolinea, la scelta dell'incognita determina sia la difficoltà di risoluzione del problema sia le «giuste» trasformazioni algebriche da applicare per giungere al risultato desiderato. Nella *Géométrie* non ritroviamo risoluzioni del problema del quadrato basate su una scelta dell'incognita differente, tuttavia è possibile rintracciare alcune risoluzioni di questo tipo nei testi di commento all'opera cartesiana[31].

2.5 Huygens tra classicità e modernità

La formazione matematica di Christiaan Huygens avviene alla scuola di Frans Van Schooten, matematico olandese e docente presso l'università di Leida che abbiamo già ricordato come autore dei *Commentarii in Geometriam Cartesii.* Huygens inizia il suo percorso formativo con lo studio dei metodi classici degli antichi, per poi proseguire con l'analisi dei testi matematici più recenti. La formazione di Christiaan Huygens emerge chiaramente nella sua trattazione dei problemi: egli si dedica infatti alla risoluzione di diversi problemi della tradizione classica, più volte richiamati nei capitoli precedenti, quali la duplicazione del cubo, l'inserzione di due medi proporzionali tra due segmenti dati e alcuni problemi archimedei tratti dall'opera *La sfera e il cilindro.*
Nonostante l'influenza classica che traspare nelle sue risoluzioni, il giovane matematico olandese è incoraggiato da Van Schooten a rielaborare in modo originale i problemi affrontati. Per questo motivo, nelle opere di Huygens si può osservare una duplice natura delle soluzioni proposte: alcune rispecchiano maggiormente lo stile analitico degli antichi, altre, invece, vedono prevalere il linguaggio algebrico, ormai consolidato nel panorama matematico dell'epoca.
In particolare ci concentremo sullo studio di due sezioni del lavoro di Huygens per mettere in risalto questa duplice natura delle sue risoluzioni. Come nei paragrafi precedenti, la nostra attenzione sarà rivolta allo studio del problema del quadrato e al problema del rombo. Tuttavia, a differenza degli altri autori già trattati, e anche diversamente da coloro che verranno in seguito, nella trattazione geometrica Huygens non mette in evidenza la relazione che corre tra i due problemi, trattandoli invece in modo indipendente. Viceversa, per quanto riguarda la trattazione algebrica, vedremo come egli scegla di partire da una generalizzazione del problema, per poi ricondursi ai casi particolari.
Le prime risoluzioni che andremo ad analizzare sono tratte dalle *Problematum quorundam illustrium constructiones*, presentate dall'autore in appendice all'opera *De circuli magnitudine inventa*, pubblicata nel 1654. Tali risoluzioni sono

[31]Si veda, ad esempio, la risoluzione di Van Schooten [1690].

di carattere geometrico e, già dalla formulazione dei problemi, si può cogliere l'influenza esercitata dalle *Collezioni* di Pappo sugli studi del matematico olandese. Tuttavia, la soluzione proposta da Huygens si discosta da quella di Pappo, pur mantenendo invariata la costruzione geometrica.
Il problema del quadrato si articola in due problemi, indicati dai numeri VI e V nel testo [Huygens 1910], che differiscono tra loro per un'ipotesi sul prolungamento dei lati. Presentiamo di seguito entrambi i problemi con le rispettive risoluzioni.

Problema del Quadrato - Prima formulazione (Huygens)[32] 2.12
Sia dato un quadrato e sia prolungato un suo lato. In un angolo esterno inserire un segmento dato in grandezza, il cui prolungamento passi per l'angolo opposto.

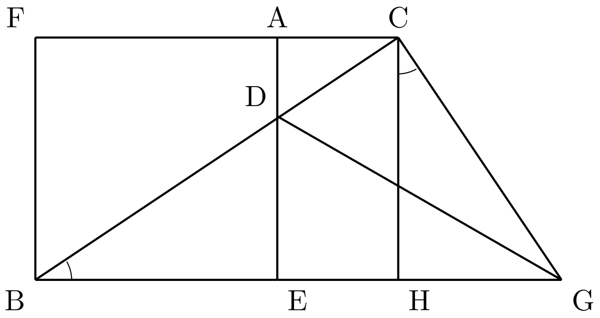


Figura 2.13: Analisi del problema del quadrato di Huygens, prima versione. Immagine tratta da [Huygens 1910], p. 199.

Analisi:[33]
Sia dato il quadrato $BFAE$. Supponiamo di aver costruito il segmento BDC, che incontra in C il prolungamento di FA dalla parte di A, e sul quale si stacca un segmento CD di lunghezza assegnata. Si prolunghi il lato BE dalla parte di E. Si tracci a partire da C la retta CH perpendicolare a BE (dove H è il punto d'incontro della retta con il prolungamento di quest'ultimo); inoltre, sempre a partire da C, si tracci una retta CG, tale che l'angolo $\widehat{HCG}$ sia uguale all'angolo $\widehat{EBD}$. Si considerino quindi triangoli rettangoli simili $\triangle DBE$ e $\triangle CHG$; da $BE = CH$ segue che $BD = CG$ e $DE = HG$. Inoltre, essendo per il teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangoli $\triangle DCG$ e $\triangle CGH$, rispettivamente $DG^2 = CD^2 + CG^2$ e $CG^2 = CH^2 + HG^2$, risulta

$$DG^2 = CD^2 + CH^2 + HG^2.$$

[32]Enunciato e risoluzione del problema del quadrato (problema IV) tratti da [Huygens 1910], pp. 198-199. È possibile ritrovare la risoluzione del problema anche all'interno del testo [Florio, Maierù 2022], pp. 222-223.

[33]Huygens non divide l'analisi dalla costruzione all'interno della sua risoluzione, ma ci sembra più sensato riproporre questa suddivisione, anche per evidenziare la somiglianza della sua costruzione con quella di Pappo e la differenza tra le due analisi. L'analisi si presenta pertanto leggermente diversa da quella originale.

Sottraendo DE^2 da entrambi i membri si ottiene

$$DG^2 - DE^2 = CD^2 + CH^2 + HG^2 - DE^2$$

ovvero

$$EG^2 = CD^2 + CH^2.$$

Poichè $CH = BE$, si ha $EG^2 = CD^2 + BE^2$ ed essendo CD e BE noti, si può considerare il problema risolto.

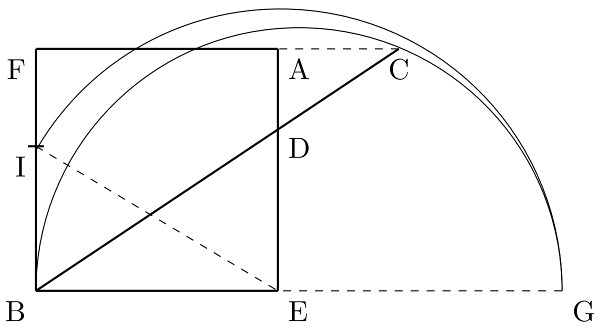


Figura 2.14: Costruzione del problema del quadrato di Huygens, prima versione.

Costruzione:
Sia dato il quadrato $BFAE$ (Figura 2.14) e prolungato il lato FA dalla parte di A. Costruiamo il segmento BI perpendicolare a BE e di lunghezza uguale a quella di un segmento assegnato K. Tracciato EI, si avrà che $EI^2 = K^2 + BE^2$. Prolunghiamo BE dalla parte di E e costruiamo la circonferenza di centro E e raggio EI. Chiamiamo G[34] il punto di intersezione tra tale circonferenza e il prolungamento di BE. Allora $EG = EI$. Tracciamo la semicirconferenza BCG, di diametro BG, che intersechi il prolungamento di FA in C. Tracciamo BDC che intersechi AE in D. Su tale retta si stacca il segmento $CD = K$ all'interno dell'angolo esterno $\widehat{EAC}$ e pertanto è soluzione del problema.

Problema del Quadrato - Seconda formulazione (Huygens)[35] 2.13
Sia dato un quadrato e siano prolungati due suoi lati consecutivi; inserire nell'angolo interno un segmento di grandezza data, che passi per l'angolo opposto,

[34]Nella risoluzione originale, Huygens costruisce così il punto G:

> Prolunghiamo BE dalla parte di E fino a G, in modo che risulti $EG^2 = K^2 + BE^2$. ([Florio, Maierù 2022], p. 222)

La costruzione che ho voluto riportare qui è il processo attraverso il quale può essere costruito EG che soddisfi tale condizione, utilizzando la riga e il compasso.

[35]Enunciato e risoluzione del problema del quadrato (problema V) tratti da [Huygens 1910], pp. 198-201. È possibile ritrovare la risoluzione del problema anche all'interno del testo [Florio, Maierù 2022], pp. 223-224.

con la condizione che il segmento non sia minore del doppio della diagonale del quadrato.

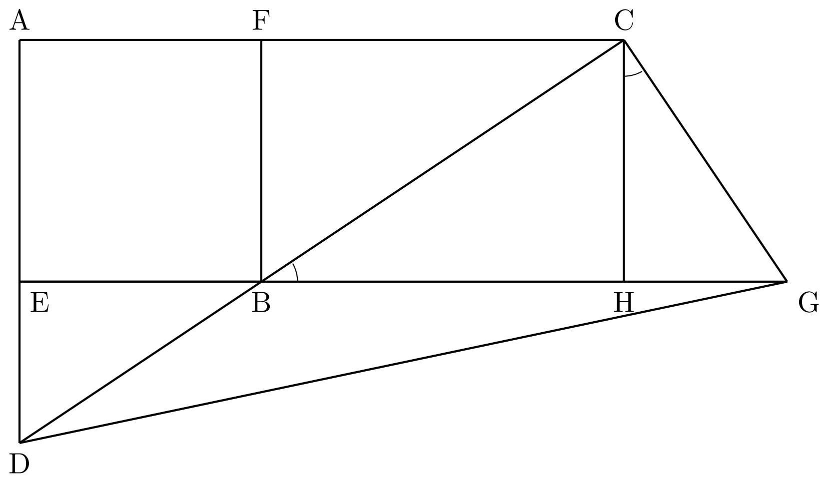


Figura 2.15: Analisi del problema del quadrato di Huygens, seconda versione. Immagine tratta da [Huygens 1910], p. 200.

Analisi:[36]
Seguiamo lo stesso ragionamento del caso precedente. Dato il quadrato $BEAF$ supponiamo di aver costruito il segmento DBC che incontra i prolungamenti di AE ed AF rispettivamente in D e in C e che abbiam lunghezza uguale a quella assegnata. Si prolunghi BE dalla parte di B e si tracci CH perpendicolare a BE. Inoltre, sempre a partire dal punto C, si tracci la retta CG, in modo tale che $\widehat{HBC} = \widehat{HCG}$. Si considerino i triangoli rettangoli $\triangle CHG$ e $\triangle DBE$ che sono congruenti perché $CH = BE$ e gli angoli in B e C hanno uguale ampiezza, per costruzione. Si avrà dunque $GH = DE$ e $CG = DB$. Inoltre, applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\triangle DCG$ si ha $DG^2 = CD^2 + CG^2$ e al triangolo $\triangle CGH$ si ha $CG^2 = CH^2 + GH^2$, cosicché

$$DG^2 = CD^2 + CH^2 + GH^2.$$

Sottraendo DE^2 da entrambi i membri si ottiene

$$DG^2 - DE^2 = CD^2 + CH^2 + GH^2 - DE^2$$

ovvero

$$EG^2 = CD^2 + CH^2.$$

[36]Anche in questo caso riportiamo una versione modificata della risoluzione di Huygens che ci permette di distinguere l'analisi dalla costruzione del problema. L'analisi è stata ricostruita seguendo quella del caso precedente, nella sua versione Huygens fa riferimento alla risoluzione del problema IV, senza mostrare i passaggi specifici applicati a questo secondo caso.

Poichè $CH = BE$, si ha $EG^2 = CD^2 + BE^2$, ma essendo CD e BE noti, questo risolve il problema.

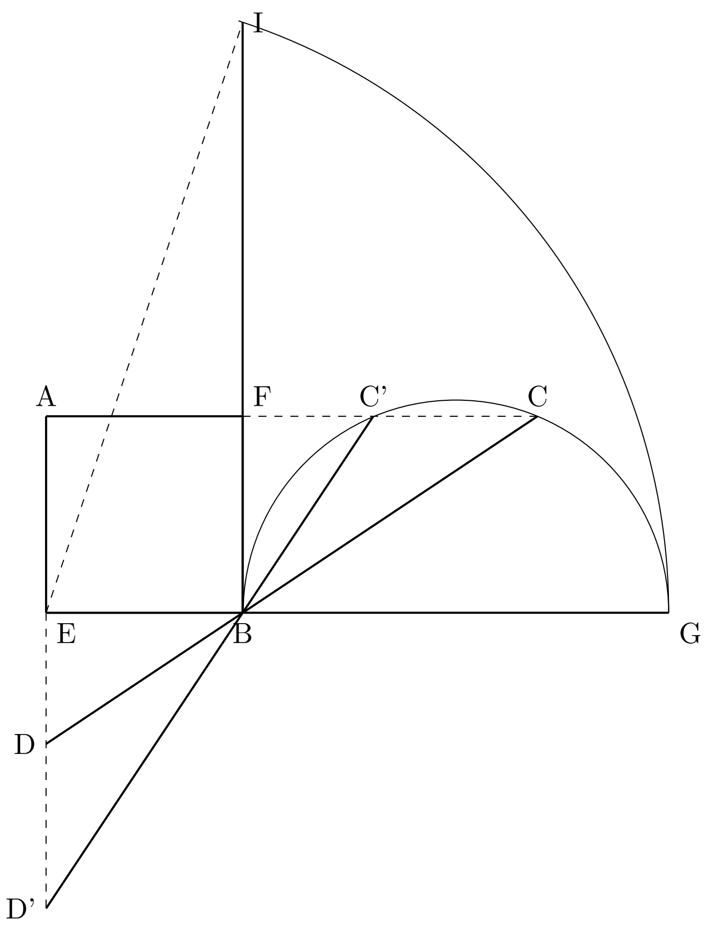


Figura 2.16: Costruzione del problema del quadrato di Huygens, seconda versione.

Costruzione:
Sia dato il quadrato $BFAE$ e prolungato il lato FA dalla parte di F e il lato AE dalla parte di E. Inoltre sia dato un segmento di lunghezza $K \geq 2AB$. Dobbiamo inserire nell'angolo $\widehat{FAE}$ un segmento $CD = K$, passante per B. Huygens considera separatamente i casi

- $K = 2AB$
- $K > 2AB$.

Nel primo caso si verifica facilmente che il segmento CD perpendicolare ad AB e passante per B risolve il problema.
Nel secondo caso Huygens procede seguendo il ragionamento della costruzione precedente. Sulla perpendicolare a BE si prenda

$BI = K$. Si tracci EI in modo da avere $EI^2 = K^2 + BE^2$. Prolunghiamo BE dalla parte di B e costruiamo la circonferenza di centro E e raggio EI. Quest'ultima interseca il prolungamento di BE in G. Allora $EG = EI$. Tracciamo la semicirconferenza BCG, di diametro BG, che intersechi il prolungamento di FA in C[37] (in questo caso trovo due punti, che indicherò con C e C'). Tracciamo BDC che intersechi il prolungamento di AE in D. Su tale retta si stacca il segmento $CD = K$ all'interno dell'angolo interno $\widehat{EAF}$, e pertanto è soluzione del problema.

Come abbiamo già osservato la costruzione del problema IV rimane fedele alla versione delle *Collezioni*, mentre l'analisi che Huygens compie sul problema è diversa rispetto a quella del matematico ellenico. Notiamo che i due enunciati insieme ci permettono di ritrovare le quattro soluzioni trovate da Girard attraverso la risoluzione dell'equazione di quarto grado. Christiaan Huygens introduce dunque un elemento di novità rispetto ai suoi predecessori: riesce a individuare tutte le soluzioni del problema pur affidandosi esclusivamente ad un'analisi di tipo geometrico. Tuttavia, come avrebbe osservato Claude Rabuel nel commento discusso a p. 46, per poter considerare tutte le soluzioni era necessaria una riformulazione del problema. Ed è proprio questo che Huygens propone: due diverse formulazioni dello stesso problema, entrambe risolvibili con la medesima analisi geometrica sviluppata però a partire da due configurazioni differenti. Un altro riflesso della diversità delle configurazioni è la presenza del *diorisma*, della limitazione cioè sui valori ammissibili per K.
Presentiamo ora il problema del rombo, anch'esso articolato su due proposizioni (problemi VI e VII in appendice a [Huygens 1910]) la cui formulazione riprende l'impostazione già adottata per il caso del quadrato. In questo caso, tuttavia, la risoluzione si rivela più complessa rispetto ai precedenti. Risulta inoltre significativa la scelta dell'autore di non trattare il caso del rombo come una semplice generalizzazione del quadrato, ma come una configurazione indipendente che richiede un'analisi distinta.

Problema del Rombo - Prima formulazione (Huygens)[38] 2.14
Dato un rombo, di cui prolunghiamo uno dei lati, inserire nell'angolo esterno un segmento di grandezza data, tale che il suo prolungamento passi per l'angolo opposto.

---

[37] Si può dimostrare che questa semicirconferenza interseca sempre il prolungamento di FA. Infatti, $K < 2AB$, quindi $K^2 > 4AB^2 = 8EB^2$. Inoltre $EG^2 = (EB + BG)^2 = EB^2 + BG^2 + 2EB \times BG$. Ma essendo $BG^2 = EB^2 + K^2$ si avrà certamente $EG^2 > 9EB^2$. Allora essendo $EG > 3EB$, sottraendo EB da entrambi i membri, si ha che $BG > 2EB$, pertanto il raggio della semicirconferenza di cui BG è diametro sarà maggiore di EB, per cui esistono sempre le due intersezioni della semicirconferenza con il prolungamento di FA. Si veda anche il Problema riportato a p. 119.

[38] Enunciato e risoluzione del problema del rombo (problema VI) tratti da [Huygens 1910], pag 200-203. È possibile ritrovare la risoluzione del problema anche all'interno del testo [Florio, Maierù 2022], pag 224-226.

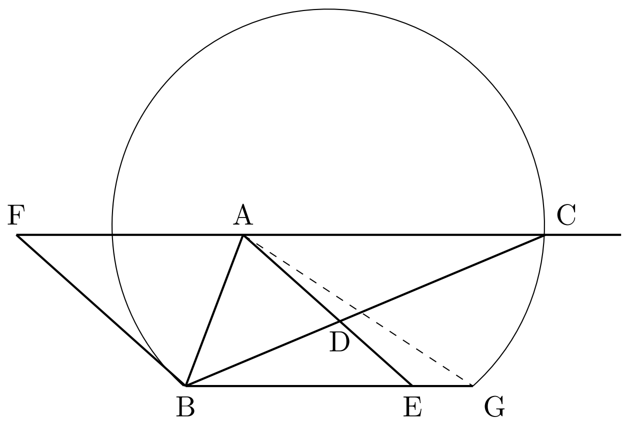


Figura 2.17: Costruzione geometrica del problema del rombo di Huygens.

Costruzione:[39]
Sia dato il rombo $AEBF$, di cui prolunghiamo il lato FA dalla parte di A. Sia anche dato il segmento K. Dobbiamo tracciare il segmento BDC in modo che sia $DC = K$.
Tracciamo la diagonale AB e prolunghiamo il lato BE fino a G, in modo che sia $AG^2 = K^2 + AB^2$.
Tracciamo l'arco di circonferenza che ha corda BG, in modo che sottenda un angolo uguale all'angolo $\widehat{BFA}$. Questa circonferenza intersechi il prolungamento di FA in C.
Tracciamo, poi, il segmento BC, che intersechi AE in D. Allora il segmento DC di BC sarà uguale a K.
[Dimostrazione: Consideriamo l'intersezione C tra la semicirconferenza e il prolungamento di FA. Tracciamo AN in modo che $\widehat{BAN} = \widehat{BFA} = \widehat{BEA}$. Allora i triangoli $\triangle BAN$ e $\triangle BEA$ sono simili e isosceli. Per questo motivo, se tracciamo l'arco di circonferenza di corda BN, che comprende l'angolo $\widehat{BFA}$, essa è tangente a FA in A.

[39]In questo caso non dividiamo analisi e costruzione ma presentiamo la risoluzione originale del problema, presentata da Huygens. L'analisi è deducibile dalla dimostrazione che Huygens presenta per giustificare la costruzione.

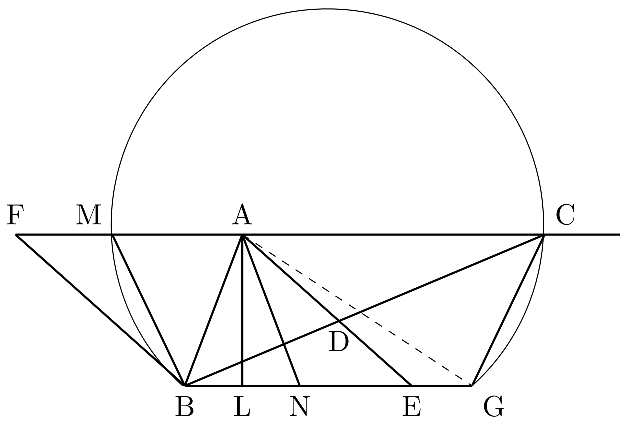


Figura 2.18: Costruzione geometrica del problema del rombo di Huygens.

Poiché $BG > BN$, essendo $AG^2 = AB^2 + K^2 > AB^2 = AN^2$, allora AG è all'esterno al triangolo isoscele $\triangle BAN$. Perciò la semicirconferenza di corda BG interseca il prolungamento di FA in C.
Sia M l'altra intersezione tra la semicirconferenza e FA. Tracciamo BM, CG e AL perpendicolare a BE. Poiché[40]

$$AG^2 = AB^2 + BG^2 - 2BG \times BL = AB^2 + BG^2 - BG \times BN$$

e inoltre

$$AG^2 = K^2 + AB^2$$

allora si ha anche

$$K^2 = BG^2 - BG \times BN = BG(BG - BN) = BG \times NG.$$

Avendo $\frac{BG\times NG}{BE\times NG} = \frac{BG}{BE}$, allora $\frac{BG}{BE} = \frac{K^2}{BE\times NG} = \frac{K^2}{BE\times BG - BE\times BN}$.
Considerando i triangoli simili $\triangle BGC$ e $\triangle DBE$, si ha che

$$BG : BC = BD : BE$$

[40] Qui Huygens utilizza il teorema del coseno nella versione euclidea che si trova nel Libro II degli *Elementi*. Euclide, proprio perché non introduce alcuna funzione trigonometrica, enuncia il teorema in due modi differenti, a seconda che consideri un triangolo ottusangolo od uno acutangolo. Così, nella Proposizione II.12, per i triangoli ottusangoli scrive: "Nei triangoli ottusangoli il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è maggiore, rispetto alla somma dei quadrati dei lati comprendenti l'angolo ottuso, del doppio del rettangolo compreso da uno dei lati che contengono l'angolo ottuso e dalla proiezione dell'altro su di esso". Per i triangoli acutangoli, il teorema è formulato in questo modo (Prop. II.13): "

> "Nei triangoli acutangoli, il quadrato del lato opposto all'angolo acuto è minore della somma dei quadrati degli altri due lati, di quanto è il doppio del rettangolo contenuto da uno dei lati intorno all'angolo acuto, e dalla porzione di esso lato che è compresa fra il vertice dell'angolo acuto e la perpendicolare abbassata dal vertice opposto." [Euclide 1926]

.

che possiamo riscrivere come $BG \times BE = BC \times BD$.
Considerando invece i triangoli simili $\triangle BAN$ e $\triangle BAE$ abbiamo

$$BN : BA = BA : BE$$

e quindi $BA^2 = BN \times BE$.
$\frac{BG}{BE} = \frac{K^2}{BC \times BD - BA^2}$.
Poichè il quadrilatero $CGBM$ è inscritto in una circonferenza, si avrà che $\widehat{BGC} + \widehat{BMC} = \pi$. Inoltre anche $\widehat{BDE} + \widehat{ADB} = \pi$.
Ora, per la similitudine dei triangoli $\triangle BCG$ e $\triangle BDE$ abbiamo $\widehat{BGC} = \widehat{BDE}$ e quindi deve essere anche $\widehat{BMC} = \widehat{ADB}$.
Consideriamo ora i triangoli $\triangle BAD$ e $\triangle BAM$: essi hanno AB in comune e le coppie di angoli $\widehat{BMA}$, $\widehat{BDA}$ e $\widehat{BAM}$, $\widehat{BAD}$ congruenti.
Allora questi due triangoli risultano essere congruenti, e in particolare si avrà $AM = AD$, $BM = BD$ e $\widehat{MBA} = \widehat{DBA}$.
Se consideriamo allora il triangolo $\triangle MBC$, BA sarà la bisettrice del suo angolo $\widehat{MBC}$, e risulta quindi

$$BC \times BD - AB^2 = AM \times AC = AD \times AC.$$

Pertanto si avrà $\frac{BG}{BE} = \frac{K^2}{AD \times AC}$. Poichè $\frac{BG}{BE} = \frac{BG \times BE}{BE^2}$, allora $\frac{BG \times BE}{BE^2} = \frac{K^2}{AD \times AC}$.
Essendo $\frac{BC \times BD}{BE^2} = \frac{BC \times BD}{BE \times BE} = \frac{BC \times DC}{BF \times AC} = \frac{DC^2}{AD \times AC}$.
Allora $K^2 = DC^2$ e di conseguenza $K = DC$.]

Risulta chiara la complessità di questa risoluzione rispetto al caso precedente del quadrato. Il problema VII viene trattato da Huygens seguendo lo stesso schema risolutivo del problema V rispetto al problema IV, pertanto non riportiamo la soluzione, ma ci limitiamo a riportare l'enunciato del problema.

Problema del Rombo - Seconda formulazione (Huygens)[41] 2.15
Sia dato un rombo e siano prolungati due suoi lati contigui; inserire nell'angolo interno un segmento di grandezza data che passi per l'angolo opposto, con la condizione che il segmento dato non sia minore del doppio della diagonale che tocca gli altri due angoli del rombo.

Passiamo ora all'analisi delle risoluzioni in linguagggio algebrico. Tali risoluzioni vengono presentate in alcune pagine manoscritte di Huygens, datate febbraio 1652. È quindi probabile che queste risoluzioni siano la base da cui Huygens parte per redigere le soluzioni che presenterà poi nell'appendice del *De circuli magnitudine inventa* nel 1654.
Iniziamo a presentare la risoluzione che ritroviamo negli appunti datati 9 febbraio 1652[42]. In questo caso il matematico olandese sceglie di considerare inizialmente un problema generale, da cui discendono come casi particolari i problemi

[41]Enunciato del problema del rombo (problema VII) tratto da [Huygens 1910], pag 203-207.
[42]Riportiamo in Appendice B le traduzioni degli appunti manoscritti di Huygens riguardanti la risoluzione dei problemi del quadrato, del rombo e le loro generalizzazioni.

del rombo e e del quadrato. L'analisi algebrica porta alla traduzione del problema in un'equazione di quarto grado; nel caso particolare del rombo e del quadrato essa si presenta come un'equazione biquadratica, riducibile quindi a due equazioni di secondo grado. Nel caso generale, al quale ci riferiremo con il nome di *problema del parallelogramma*, l'equazione di quarto grado è invece associata ad un problema solido[43] ovvero non risulta scomponibile nel prodotto di due equazioni di secondo grado, come avveniva nei casi particolari.
Anche nel caso della risoluzione algebrica Huygens sceglie di dividere il caso in cui viene prolungato un solo lato, dal caso in cui vengono prolungati due lati, come abbiamo visto per le risoluzioni geometriche. La risoluzione che troviamo negli appunti del 9 febbraio 1652, che presentiamo di seguito, è quella in cui viene prolungato un solo lato.

Problema del Parallelogramma (Huygens)[44] 2.16
Dati l'angolo $\widehat{EAD}$ e un punto esterno B, tracciare la retta BE tale che sia uguale a un segmento dato.

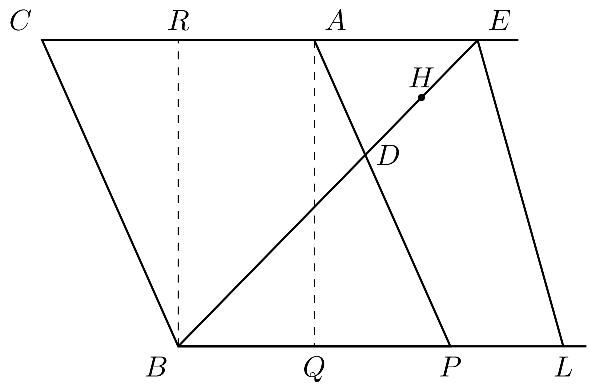


Figura 2.19: Costruzione del problema del parallelogramma di Huygens.

Analisi:
Dopo aver costruito (Fig. 2.19) l'angolo $\widehat{EAD}$ e aver preso il punto B, esterno all'angolo, prolunghiamo EA fino a C, da C tracciamo CB, parallelo ad AD, e da B tracciamo BR, perpendicolare a CE. Prolunghiamo inoltre AD fino ad intersecare in P il segmento BP parallelo a CE.
Siano $CA = a$, $CB = b$, $DE = c$, $CR = d$ e $BE = x$. Allora (per il teorema di Talete) $BD : BE = CA : CE$, ovvero $\frac{x-c}{x} = \frac{a}{CE}$, da cui $CE = \frac{ax}{x-c}$.

[43]Ci riferiamo qui alla classificazione di Pappo presentata nella Sezione 1.2.1, dove i problemi solidi sono quelli risolvibili mediante l'uso delle coniche, oltre che della riga e del compasso.

[44]Enunciato e analisi algebrica del problema del parallelogramma tratto da [Huygens 1910], pag 26-31. La risoluzione che riportiamo qui è riscritta in chiave moderna così come è presentata nel testo [Florio, Maierù 2022] alle pp. 227-230.

Quindi, nel triangolo $\triangle CBE$ abbiamo $CB = b$, $BE = x$ e $CE = \frac{ax}{x-c}$. Allora, per la Proposizione II 13 degli *Elementi* di Euclide[45] applicata al triangolo $\triangle CBE$ si ha

$$BE^2 = CE^2 + CB^2 - 2CE \times CR.$$

Pertanto $CR = \frac{CE^2+CB^2-BE^2}{2CE}$, cioè

$$d = \frac{b^2+(\frac{ax}{x-c})^2-x^2}{2\frac{ax}{x-c}}$$

che trasformiamo in

$$d = \frac{-x^4+2cx^3+(a^2+b^2-c^2)x^2-2b^2cx+b^2c^2}{2ax^2-2acx},$$

da cui otteniamo l'equazione

$$x^4 - 2cx^3 + (2ad - a^2 - b^2 + c^2)x^2 + 2c(b^2 - ad)x - b^2c^2 = 0.$$

Applichiamo a quest'ultima la trasformazione $x = y + \frac{c}{2}$ e otteniamo

$$y^4 + (2ad - \frac{c^2}{2} - a^2 - b^2)y^2 + c(b^2 - a^2)y + c^2(\frac{c^2}{16} - \frac{ad}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}) = 0 \tag{2.3}$$

Osserviamo che se $CA \neq CB$, ovvero $a \neq b$, la figura $APBC$ è un parallelogramma; se invece prendiamo $CA = CB$, ovvero $a = b$, ottenamo un rombo, e in questo caso l'equazione associata al problema diventa

$$y^4 + (2ad - \frac{c^2}{2} - 2a^2)y^2 + c^2(\frac{c^2}{16} - \frac{ad}{2} - \frac{a^2}{2}) = 0 \tag{2.4}$$

che è un'equazione biquadratica. Infine, se consideriamo un caso particolare di quest'ultimo in cui si ha che $CR = 0$, ovvero $d = 0$, ci troviamo di fronte al problema del quadrato, associato all'equazione

$$y^4 - (\frac{c^2}{2} + 2a^2)y^2 + c^2(\frac{c^2}{16} - \frac{a^2}{2}) = 0. \tag{2.5}$$

In questa prima parte Huygens prende in considerazione il problema generale, andando così ad ottenere un'equazione di quarto grado associata ad un problema solido. Successivamente l'autore abbandona il caso generale per concentrarsi sulla risoluzione del problema del rombo, associato all'equazione (2.4). Procediamo quindi nell'analisi seguendo i passi di Huygens.

Analisi (Problema del rombo):

Dall'equazione (2.4) si ricavano le radici $y^2 = a^2 - ad + \frac{c^2}{4} \pm a\sqrt{a^2 + c^2 - 2ad + d^2}$. Di queste consideriamo solamente la radice positiva, ovvero $y^2 =$

[45]Si veda la nota a p. 54.

$a^2 - ad + \frac{c^2}{4} + a\sqrt{a^2 + c^2 - 2ad + d^2}$ e riprendiamo la costruzione geometrica assegnando alla soluzione trovata un significato geometrico (Fig. 2.19).
Dividiamo DE in due parti uguali nel suo punto medio H per cui si avrà $DH = HE = \frac{c}{2}$; allora $BH = BE - HE = x - \frac{c}{2} = y$.
Tracciamo EL in modo che $\widehat{BEL} = \widehat{BPA}$ e sia L il punto di incontro di EL con il prolungamento di BP dalla parte di P.
Poichè $\widehat{BDP} = \widehat{ELP}$, allora $\widehat{BDP} + \widehat{EDP} = \widehat{ELP} + \widehat{EDP} = \pi$; pertanto possiamo affermare che i punti D, E, L, P si trovano su una circonferenza. Per il teorema delle secanti applicato a tale circonferenza si ha

$$BL \times BP = BE \times BD = (BD + 2DH) \times BD = BD^2 + 2BD \times DH. \tag{2.6}$$

Inoltre,

$$BH^2 - DH^2 = (BD + DH)^2 - DH^2 = BD^2 + DH^2 + 2BD \times DH - DH^2 = \\ = BD^2 + 2BD \times DH \quad (2.7)$$

per cui dalla (2.6) e dalla (2.7) si ricava

$$BL \times BP = BH^2 - DH^2.$$

Essendo $BH = y$, risulta

$$BH^2 = y^2 = a^2 - ad + \frac{c^2}{4} + a\sqrt{a^2 + c^2 - 2ad + d^2},$$

da cui, essendo $DH = \frac{c}{2}$, si ottiene

$$BH^2 - DH^2 = y^2 = a^2 - ad + a\sqrt{a^2 + c^2 - 2ad + d^2}.$$

Ora, poiché $BP = CA = a$, essendo BP e CA lati del rombo, e sfruttando quanto appena visto, scriviamo

$$PL \times BP = (BL - BP) \times BP = BL \times BP - BP^2 = \\ a^2 - ad + a\sqrt{a^2 + c^2 - 2ad + d^2} - a^2 = -ad + a\sqrt{a^2 + c^2 - 2ad + d^2}.$$

Dunque

$$PL = \frac{PL \times BP}{BP} = \frac{-ad + a\sqrt{a^2 + c^2 - 2ad + d^2}}{a} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ad + d^2} - d.$$

Costruiamo AQ parallelo a BR; allora nel rombo si ha $CR = QP = d$. Quindi, dall'equazione precedente, ricaviamo che

$$QL = PL + QP = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ad + d^2} - d + d = \\ \sqrt{a^2 + c^2 - 2ad + d^2}.$$

Allora, essendo $BQ = a - d$ risulta

$$QL^2 = a^2 + c^2 - 2ad + d^2 = c^2 + (a - d)^2 = DE^2 + BQ^2.$$

Huygens ci guida quindi nell'interpretazione geometrica di ogni singola operazione algebrica. Dalla sua analisi è facile dedurre la costruzione del problema, che presentiamo di seguito.

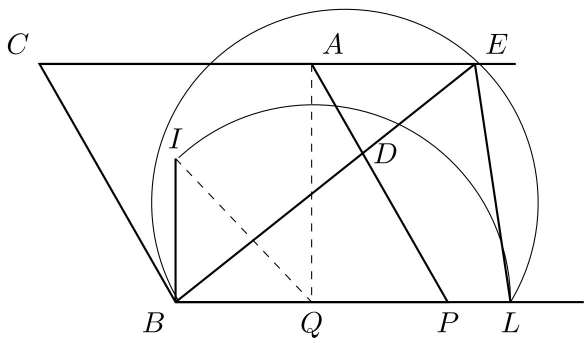


Figura 2.20: Costruzione del problema del rombo di Huygens (Caso particolare del problema del parallelogramma).

Costruzione:
Dato (Fig. 2.20) l'angolo $\widehat{EAD}$ e il punto B esterno ad esso, si prolunghi EA dalla parte di A. Si tracci poi BC parallelo ad AD e sia C il punto di intersezione tra questa retta e il prolungamento di EA. Si tracci poi la retta BP parallela a CA e sia P il punto di incontro di questa retta con il lato DA dell'angolo dato. Si tracci ora AQ perpendicolare a BP e sia Q il piede della perpendicolare. Si tracci il segmento BI perpendicolare a BP e di lunghezza assegnata (la stessa lunghezza che dovrà avere il segmento DE). Si tracci poi QI; quest'ultimo segmento soddisfa la relazione $QI^2 = BI^2 + BQ^2 = DE^2 + BQ^2$. Si tracci l'arco di circonferenza di raggio QI e centro Q, e si indichi con L la sua intersezione con il prolungamento di BP dal lato di P. Si tracci infine l'arco di circonferenza che ha corda BL e che sottende l'angolo $\widehat{BPA}$. Tale circonferenza incontra il lato AE dell'angolo nel punto E che, unito a B, fornisce la soluzione desiderata.

Nella seconda parte di appunti manoscritti, quella[46] dell'11 febbraio 1652, Huygens tratta il problema del parallelogramma nel quale il segmento di lunghezza data viene inserito all'interno del prolungamento dei due lati. Anche in questo caso l'analisi è di tipo algebrico e, come già visto per il problema precedente, è l'autore a guidarci nell'interpretazione geometrica delle soluzioni. Alla fine di questi appunti l'autore enuncia e dimostra due teoremi preliminari alla risoluzione del problema del rombo. Ne riportiamo gli enunciati di seguito, rimandando all'Appendice B per le figure (pp. 117 e 118) e le dimostrazioni

[46]Anche di questa parte viene riportata la traduzione in Appendice B.

(pp. 117 e 118).

Teorema 1
Sia dato un rombo $GCHA$ e si tracci KAF che taglia i prolungamenti di entrambi i lati del rombo e si conduca FD che forma un angolo $\widehat{AFD}$ uguale a $\widehat{CGH}$ e sia GB perpendicolare ad AC.
Allora i quadrati su KF e su AB sono uguali al quadrato su BD.

Teorema 2
Sia ancora $GCAH$ un rombo di cui CH sia una diagonale e sul prolungamento del lato AC cada il piede della perpendicolare GB, inoltre sia HQ uguale HC e si supponga BS tale che il quadrato su di esso sia uguale al quadrato su BA insieme a quello su CH. Dico che AS è proprio congruente a CQ.
A questi teoremi segue l'enunciato del problema del rombo e la relativa costruzione geometrica che sfrutta i teoremi appena presentati. Anche per quest'ultimo riportiamo solamente l'enunciato, è possibile vedere la costruzione in appendice a pagina 119.

Problema del Rombo 2.17
Dato un rombo e prolungati due suoi lati consecutivi, collocare un segmento rettilineo assegnato all'interno dell'angolo che essi delimitano. Occorre che il segmento assegnato non sia minore del doppio della diagonale che congiunge gli altri due vertici del rombo.

Nei successivi appunti manoscritti, quelli datati 14 e 17 febbraio 1652[47], Huygens presenta una risoluzione del problema solido del parallelogramma e una soluzione alternativa del problema del rombo, dedotta da essa. Egli osserva innanzitutto che un caso particolare di questo problema era già stato trattato da Pappo nel libro IV delle *Collezioni*: si tratta della situazione in cui il parallelogramma risulta essere un rettangolo. Questo caso fu studiato da Pappo nel contesto della trisezione dell'angolo ed è già stato analizzato nel corso della nostra trattazione a p. 30. Pappo era riuscito a risolvere quest'ultimo problema mediante l'utilizzo di un'iperbole. Allo stesso modo Huygens, seguendo la via già percorsa da Pappo, risolve un caso particolare del problema del parallelogramma, sempre servendosi di un'iperbole. Il caso trattato dal matematico olandese è quello in cui il punto dato dal testo del problema giace all'interno del piano dell'angolo, anch'esso assegnato. In questo caso la risoluzione è di tipo geometrico; la costruzione del problema del rombo che ne deriva è invece preceduta da un'analisi di carattere algebrico.
Tutto il lavoro di Huygens è quindi contraddistinto da una dualità dei metodi utilizzati, attraverso i quali si riesce a cogliere il legame sempre più stretto che lega le discipline dell'algebra e della geometria in questo periodo storico. Ed è proprio questo legame che favorirà la nascita della geometria analitica come area di studio indipendente.
Possiamo quindi affermare che l'autore abbia affrontato, durante i suoi studi

[47] In Appendice B è possibile trovare la traduzione di queste pagine di appunti.

all'università di Leida sotto la guida di Van Schooten, una trattazione completa di questo problema, dimostrando di conoscere e saper integrare metodi antichi e moderni. Egli mostra inoltre di non voler limitare la propria analisi ai soli casi particolari dei problemi piani, ma di essere in grado di affrontare il problema delle neusi nella sua generalità.

2.6 Il problema del quadrato nel trattato sulle coniche di de L'Hôpital

Guilluame de L'Hôpital, matematico e nobile francese, nacque a Parigi nel 1661. Le sue nobili origini sono facilmente deducibili dal suo nome completo Guillaume-François-Antoine Marquis de l'Hopital, Marquis de Sainte-Mesme, Comte d'Entremont and Seigneur d'Ouques-la-Chaise, spesso abbreviato in l'Hospital o L'Hôpital.
Sin da bambino L'Hôpital mostrò una predisposizione, oltre che un forte interesse, per la matematica, mentre sembrava non amare molto le materie umanistiche. Seguendo l'esempio del padre, egli iniziò una carriera militare diventando capitano dell'esercito in un reggimento di cavalleria, ruolo che, purtroppo, dovette abbandonare a causa di una grave miopia.
Questa circostanza riportò L'Hôpital agli studi matematici; egli, infatti, entrando a far parte del circolo di Nicolas Malebranche alla Congregazione dell'Oratorio ebbe la possibilità verso la fine del 1691 di seguire alcune lezioni di Johann Bernoulli. Quest'ultimo era molto informato sui recenti sviluppi della matematica, soprattutto sui metodi infinitesimali, e L'Hôpital ne rimase affascinato tanto da voler continuare a seguire con lui lezioni private una volta trasferitosi nella sua residenza a Ouques. Anche quando Johann Bernoulli fece ritorno a Basilea, L'Hôpital mantenne i rapporti con il suo insegnante tramite corrispondenza. Tale corrispondenza si interruppe solo per alcuni mesi a causa di un diverbio riguardante la soluzione di un problema matematico ma riprese il 17 marzo 1694 con una proposta da parte di L'Hôpital al matematico svizzero. Egli si offrì infatti di corrispondere a Johann Bernoulli un compenso annuo di 300 sterline in cambio di un aggiornamento costante sui risultati matematici da lui ottenuti. Inoltre, come si può leggere nell'estratto tratto dalla lettera originale, il matematico svizzero fu invitato a promettere di non comunicare tali risultati ad altri, se non allo stesso L'Hôpital.
Riportiamo di seguito il passaggio della lettera che rende esplicite le intenzioni del matematico francese.

> Ti darò una pensione di trecento sterline, che inizierà dal primo gennaio di quest'anno [...]. Prometto di aumentare a breve questa pensione che so bene è molto modesta, non appena i miei affari saranno un po' sistemati [...]. Non sono così irragionevole da chiedervi tutto il vostro tempo, ma vi chiederò di concedermi ad intervalli qualche ora del vostro tempo, per lavorare su ciò che ti chiedo e comunicarmi anche le tue scoperte, chiedendoti allo stesso tempo di non condividerle con altri. Ti prego anzi di non mandare qui al signor

> Varignon o ad altri copie degli scritti che mi hai lasciato; se verranno pubblicati non ne sarò affatto contento. Rispondimi riguardo a tutto questo [Truesdell 1958]

Bernoulli, allora disoccupato, dovette accettare la proposta di L'Hôpital anche se la lettera con la risposta non è mai stata ritrovata.
Nel 1696 L'Hôpital pubblicò l'opera per cui è oggi maggiormente ricordato, intitolata *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.* Questo testo è particolarmente significativo poiché costituisce il primo trattato a stampa sul calcolo differenziale. Nell'introduzione l'Hôpital ringrazia Leibniz, Jacob e Johann Bernoulli, nonché Newton, riconoscendo di aver attinto alle loro scoperte; tuttavia considera le basi teoriche presentate nell'opera come proprie. Dopo la morte di L'Hôpital, avvenuta nel 1704, Johann Bernoulli cercò di rivendicare la paternità del contenuto dell'opera. A causa di precedenti contrasti con il fratello Jacob, tuttavia, le sue affermazioni non furono ritenute credibili. La questione fu chiarita soltanto nel 1922, con il ritrovamento di un manoscritto contenente gli appunti del corso tenuto per l'Hôpital, il cui contenuto confermava la versione di Bernoulli.
Sembra quindi che, nonostante le sue indubbie competenze, L'Hôpital possa vantare poche — se non nessuna — scoperte matematiche originali.
Nel 1707 fu pubblicata postuma un'altra opera di l'Hôpital sulle coniche, dal titolo *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problemes tant déterminez qu'indéterminez.* Per la nostra analisi ci concentreremo su questa seconda opera, di cui introduciamo brevemente il contenuto.
Il *Traité analytique des sections coniques* è un testo di geometria analitica suddiviso in 10 libri, che ripercorre il contenuto delle *Coniche* di Apollonio di Perga, per poi utilizzarlo nella risoluzione di problemi determinati e indeterminati[48]. Possiamo affermare che questa è un'opera di geometria analitica in quanto l'Hôpital abbandona inizialmente il metodo tradizionale di costruzione delle coniche tramite sezione del solido, per proporre invece una definizione di quest'ultime basata sulle loro coordinate nel piano, approccio che viene utilizzato ancora oggi. Lo studio tradizionale attraverso le sezioni del cono è trattato da l'Hôpital solamente nel sesto libro. intitolato *Des Sections Coniques considérées dans le Solide.*
All'interno di quest'ultima opera, l'Hôpital affronta il problema del quadrato, riportandolo come esempio di risoluzione nella classe dei problemi determinati. Nell'introduzione al decimo libro, intitolato *Des Problèmes déterminés*, l'autore spiega come questo tipo di problemi vadano affrontati per arrivare alla soluzione. Riportiamo qui un estratto di questa introduzione

> **Essendo proposto un problema determinato di geometria, trovarne la soluzione.**

[48] Si parla di problemi indeterminati quando la soluzione è un luogo di infiniti punti che devono sottostare a determinate condizioni. I problemi determinati sono invece quei problemi che hanno soluzione finita, come ad esempio un punto o un segmento e sono quelli maggiormente studiati dai matematici del primo periodo moderno. I problemi del quadrato e del rombo rientrano in questa seconda categoria.

> Si considererà innanzitutto il problema proposto come se fosse già risolto e si tracceranno le linee che si riterranno più adatte a rendere evidente ciò che è soltanto supposto. Si assegnerà poi un nome a tutte queste linee (che di solito formano triangoli rettangoli o simili) mediante lettere dell'alfabeto, vale a dire indicando con le prime lettere le linee note e con le ultime lettere quelle incognite. Si esamineranno quindi tutte le condizioni del problema, confrontando tra loro queste linee nell'ordine più semplice e naturale possibile; ciò servirà a stabilire tante diverse uguaglianze quante sono le incognite. Infine si applicheranno le regole ordinarie dell'algebra per ridurre queste diverse uguaglianze a una sola, nella quale compaia soltanto un'incognita, e per abbassarne, se possibile, il grado. Una volta risolta mediante le regole esposte nel libro precedente, da essa si ricaverà la soluzione cercata del problema. Tutto ciò sarà chiarito perfettamente dagli esempi che seguono. ([L'Hôpital 1720], pag 362)

Da questo estratto appare chiaro che l'analisi che l'Hôpital intende utilizzare sia un'analisi di tipo algebrico. Inoltre, come molti matematici prima di lui, anch'egli ritiene che l'analisi proceda in senso opposto rispetto alla sintesi, partendo da ciò che non è conosciuto, considerato come noto, fino ad arrivare a ciò che è dato.
L'Hôpital propone diversi esempi di risoluzione di problemi determinati. Il problema del quadrato è presentato come secondo esempio ed è inizialmente trattato senza alcun riferimento a possibili generalizzazioni. Tuttavia, dopo una prima risoluzione, l'autore ne propone una seconda e una terza, menzionando il problema del rombo soltanto nel contesto di quest'ultima.
Riportiamo il problema presentato da l'Hôpital e le relative risoluzioni.

Problema del Quadrato (l'Hôpital)[49] 2.18
Dato il quadrato $ABCD$, condurre da uno dei suoi vertici A la retta AE, in modo che la parte FE, compresa tra i lati BC e CD opposti a tale vertice, sia uguale a un segmento b dato.

Analisi:
Suppongo che il punto E, preso sul lato DC prolungato, sia tale che la parte FE della retta AE sia uguale a b; cioè suppongo l'equazione risolta e indico con a la quantità data AB, oppure AD, oppure DC, oppure CB, e con x l'incognita DE.

Posto ciò, i triangoli simili $\triangle EDA$ ed $\triangle ECF$ danno

$$ED(x) : DA(a) = EC(x-a) : CF,$$

da cui

$$CF = \frac{ax - a^2}{x}.$$

[49]Enunciato e risoluzione del problema del quadrato tratti da [L'Hôpital 1720], libro X, esempio II pag 366-370.

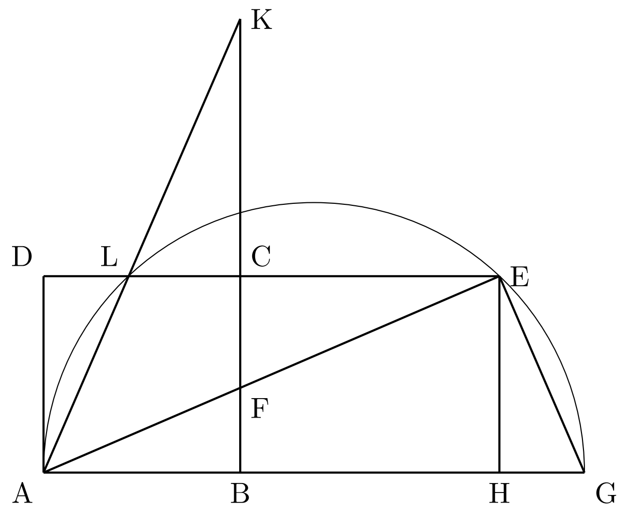


Figura 2.21: Costruzione del problema del quadrato di l'Hôpital. Ricostruzione della figura originale presa dal testo [L'Hôpital 1720], p. 370, figura 242.

Inoltre il triangolo rettangolo $\triangle ECF$ ci fornisce l'uguaglianza

$$FE^2 = EC^2 + CF^2 = x^2 - 2ax + a^2 + \frac{a^2x^2 - 2a^3x + a^4}{x^2}.$$

Ma poiché, per la condizione del problema, FE deve essere uguale a b, si ha

$$x^2 - 2ax + a^2 + \frac{a^2x^2 - 2a^3x + a^4}{x^2} = b^2,$$

ovvero

$$x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - b^2x^2 - 2a^3x + a^4 = 0.$$

Da ciò si vede che la risoluzione di questa equazione deve fornire per DE (x) un valore tale che, tracciando la retta AE, la parte FE compresa tra i lati CB e DC sia uguale alla quantità data b.
Poiché l'uguaglianza che si è appena trovata è di quarto grado, bisognerebbe impiegare per risolverla una sezione conica. Per questo motivo bisogna prima cercare, mediante le regole fornite dall'algebra, se essa non possa essere ridotta a un grado più semplice; e trovo infatti che, se si pone

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

essa diventa il prodotto delle due equazioni

$$x^2 + a^2 - ax - cx = 0,$$

$$x^2 + a^2 - ax + cx = 0,$$

le quali sono entrambe di secondo grado; cosicché, per ottenere le quattro radici dell'equazione di quarto grado basta trovare le radici

di ciascuna di queste due equazioni.
Hôpital non si sofferma a cercare le radici dell'equazione

$$x^2 + a^2 - ax + cx = 0,$$

poiché, essendo c maggiore di a, la disposizione dei segni mi fa capire che entrambe sono false[50]; ma trovo invece quelle dell'altra equazione

$$x^2 + a^2 - ax - cx = 0,$$

che so essere entrambe vere, nel modo seguente.

Costruzione:
Si prenda sul lato AB prolungato il segmento $BG = c$, e si descriva sul diametro AG una semicirconferenza che taglia in E il lato DC prolungato: dico che questo punto sarà quello che si cerca.

[Dimostrazione: Infatti, chiamando DE con x e tracciando la perpendicolare EH, si avrà

$$HG = a + c - x,$$

e, per la proprietà del cerchio[51],

$$AH \times HG = ax + cx - x^2 = EH^2 = a^2.$$

DE così trovato è quindi pari all'incognita che risolve l'equazione associata al problema.]

Subito dopo aver presentato questa prima risoluzione, l'Hôpital propone alcune osservazioni su quanto appena visto.
La prima osservazione dell'autore riguarda il numero di radici ottenute dall'analisi algebrica. Infatti, egli osserva che solo una delle radici ottenute corrisponde alla soluzione del problema per come l'avevamo immaginata. Tuttavia, egli afferma che anche le altre radici possono essere soluzioni del problema. Riportiamo l'osservazione contenuta nel testo.

Quando, dopo aver soddisfatto alle condizioni di un problema, si giunge a un'uguaglianza composta che possiede più radici reali, è evidente che ve n'è una sola tra queste radici che esprime il valore dell'incognita che si cerca; ma bisogna anche osservare con attenzione che le altre possono ugualmente servire alla risoluzione della questione, in un modo che non può essere diverso da quello che si sarebbe immaginato se non in alcune circostanze particolari.

---

[50] Anche l'Hôpital come Cartesio utilizza il termine "false" per indicare le radici negative e il termine "vere" per quelle positive.

[51] Qui l'Hôpital sta applicando il secondo teorema di Euclide, che afferma che in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

Così, in questo esempio, la piccola radice vera $DL(x)$ dell'uguaglianza $x^2 - ax - cx + a^2 = 0$, fornisce sul lato DC un punto tale che, tracciando la retta AL che incontra il lato BC prolungato in K, il segmento LK risulta uguale alla quantità data b.
Allo stesso modo, se si prende $Bg = c$ sul lato BA prolungato verso A, e si descrive sul diametro AG un semicircolo, esso taglierà il lato CD prolungato verso D nei punti e e l, cosicché De e Dl saranno le due radici false dell'uguaglianza $x^2 + cx - ax + a^2 = 0$. E se da questi punti si conducono le rette Ae, Al, che incontrano il lato CB prolungato nei punti f e k, le rette ef e lk risulteranno ancora ciascuna uguale alla quantità data b.
Da ciò si vede che, sebbene nel risolvere il problema si fosse avuto in vista soltanto di trovare il valore di DE, si è tuttavia giunti a un'uguaglianza le cui radici hanno fornito altri valori DL, De, Dl, i quali hanno tutti risolto il problema in qualche modo. ([L'Hôpital 1720], p. 368)

Pertanto anche l'Hôpital, come molti dei matematici prima di lui che fanno uso dell'analisi algebrica, si sente in dovere di dare un'interpretazione geometrica delle soluzioni trovate tramite l'equazione algebrica. Egli, infatti, nonostante inizialmente escluda le radici negative (che, come Cartesio, definisce "false"), nell'osservazione appena riportata riprende queste radici e ne da un'interpretazione simile a quella di Girard, in cui il segno negativo della radice non è altro che il senso di percorrenza del segmento, ovvero spostandosi dal punto D verso sinistra per ottenere i segmenti De e Dl.
La seconda osservazione riportata da l'Hôpital riguarda l'equazione ottenuta tramite l'analisi algebrica del problema. Egli infatti pone l'attenzione sul fatto che se l'equazione che otteniamo dalla risoluzione del problema può essere abbassata di grado è necessario farlo, e che se sembra che sia possibile ottenere un'equazione di un grado più basso o più semplice rispetto a quella già ottenuta, vale la pena tentare di risolvere il problema percorrendo un'altra strada che, anche se a prima vista sembra meno naturale, può portare a un'equazione di più semplice risoluzione.
A supporto di quest'ultima osservazione l'Hôpital presenta altre due risoluzioni del problema del quadrato, partendo da una scelta dell'incognita differente rispetto alla prima già presentata. Riportiamo le due costruzioni di seguito.

Seconda analisi del problema del quadrato:
Avendo supposto il problema risolto, tracciamo (Fig. 2.21) EG perpendicolare ad AE, la quale incontra il lato AB prolungato nel punto G, e prendo come incognite le due rette AF e BG, che indico con y e z.

Posto ciò, i triangoli rettangoli simili $\triangle ABF$ e $\triangle AEG$ danno

$$AB(a) : AF(y) = AE(y + b) : AG(a + z).$$

Da cui
$$ay + by = a^2 + az.$$

Ora, poiché ho due incognite e il problema è determinato, bisogna trovare ancora un'altra uguaglianza.
Per trovarla considero che $EG = AF(y)$; infatti, tracciando EH perpendicolare ad AG, il triangolo rettangolo $\triangle EHG$ è simile al triangolo rettangolo $\triangle ABF$ e inoltre i lati omologhi AB ed EH risultano uguali tra loro.

Si ottiene quindi (a causa del triangolo rettangolo $\triangle AEG$) questa ulteriore uguaglianza

$$a^2 + 2az + z^2 = y^2 + 2by + b^2 + y^2 = 2y^2 + 2by + b^2.$$

Sostituendo al posto di $2y^2+2by$ il valore $2a^2+2az$ trovato mediante la prima uguaglianza, si ottiene

$$a^2 + 2az + z^2 = 2a^2 + 2az + b^2,$$

che si riduce alla semplice relazione

$$z = \sqrt{a^2 + b^2},$$

la quale fornisce la stessa costruzione indicata sopra.

Questa costituisce la prima delle due risoluzioni alternative proposte da l'Hôpital.
Presentiamo ora anche la seconda. Nell'introdurre tale procedimento, l'autore fa riferimento al problema del rombo, considerandolo come una generalizzazione del problema del quadrato. Egli osserva infatti che l'analisi che ci accingiamo a esporre rimane valida sia nel caso in cui $ABCD$ sia un quadrato, sia nel caso più generale in cui esso sia un rombo.

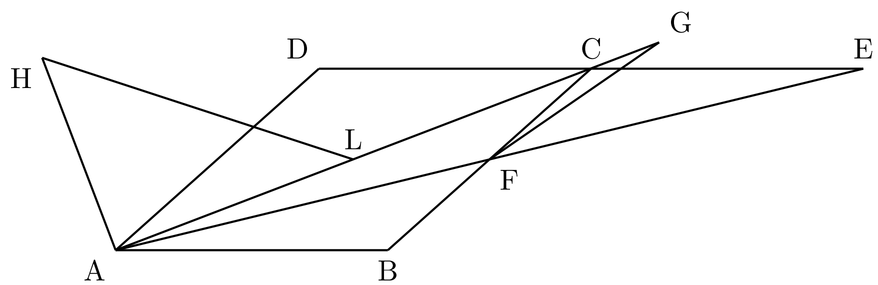


Figura 2.22: Costruzione del problema del rombo di l'Hôpital. Ricostruzione della figura originale presa dal testo [L'Hôpital 1720], p. 370, Figura 243.

Terza analisi del problema del quadrato:
Tracciando dal punto cercato F, che considero come dato, il seg-

mento FG tale che con AF formi l'angolo $A\hat{F}G$ uguale all'angolo dato $A\hat{C}E$, e che incontri nel punto G la diagonale AC prolungata quanto necessario, si avranno tre angoli $A\hat{C}E$, $A\hat{F}G$, $G\hat{C}F$ che saranno uguali tra loro.
Infatti, in primo luogo, l'angolo in A è comune ai due triangoli $\triangle ACE$ e $\triangle AFC$, e gli angoli $A\hat{C}E$ e $A\hat{F}G$ sono uguali per ipotesi; è quindi evidente che questi due triangoli appena citati sono simili.
In secondo luogo, il triangolo $\triangle ADC$ è isoscele, quindi l'angolo $D\hat{C}A$, cioè $E\hat{C}G$, è uguale all'angolo $D\hat{A}C$, cioè $A\hat{C}F$; aggiungendo da entrambe le parti lo stesso angolo $F\hat{C}E$, l'angolo $F\hat{C}G$ sarà uguale all'angolo $A\hat{C}E$, cioè $A\hat{F}G$. Poiché inoltre l'angolo in G è comune, i due triangoli $\triangle AGF$ e $\triangle GCF$ risultano simili.

Posto ciò, siano le incognite $CE = x$ e $AG = z$, e siano date le quantità $DC = a$, $FE = b$, $AC = c$; si avrà (a causa delle parallele AD e CF) la proporzione

$$CE(x) : FE(b) = CD(a) : AF,$$

pertanto $AF = \frac{ab}{x}$.
Inoltre, a causa dei triangoli simili $\triangle ACE$, $\triangle AFG$ e $\triangle GCF$, si ottiene

$$AC(c) : CE(x) = AF\left(\frac{ab}{x}\right) : FG$$

e

$$AG(z) : FG\left(\frac{ab}{c}\right) = FG\left(\frac{ab}{c}\right) : GC(z-c).$$

Da queste relazioni, moltiplicando gli estremi e i medi, si ottiene l'uguaglianza

$$z^2 - cz = \frac{(ab)^2}{c^2},$$

che fornisce la seguente costruzione.

Costruzione associata alla terza analisi del problema:
Tracciata dal punto A la retta $AH = \frac{ab}{c}$ perpendicolare ad AC, si condurrà per il punto medio L della diagonale AC la retta HL, e sulla diagonale prolungata dal lato di C si prenderà il segmento LG uguale a LH.

Si descriverà quindi, con centro in G e raggio FG, uguale ad AH, un arco di cerchio che intersecherà il lato BC nel punto F.

Ciò è evidente, poiché dalla costruzione si ha

$$z^2 - cz = \frac{(ab)^2}{c^2},$$

e inoltre

$$GF = \frac{ab}{c}.$$

L'Hôpital riesce quindi a risolvere in quest'ultimo caso anche il problema del rombo. Inoltre, come già affermato, l'autore trova in queste ultime due analisi due equazioni di grado inferiore a quella trovata nella prima risoluzione, dimostrando quindi che è possibile ottenere una soluzione più semplice per questo problema solamente variando la scelta dell'incognita.
Rivediamo quindi nell'analisi di l'Hôpital molti dei temi già trattati dagli autori che lo precedono, tra i quali l'utilizzo dell'algebra come strumento per l'analisi, l'interpretazione geometrica delle radici di un'equazione e la variazione della difficoltà del problema in base alla scelta dell'incognita.

2.7 Newton e l'allontanamento da Cartesio

In questo paragrafo mostreremo le risoluzioni del problema del quadrato proposte dal grande scienziato inglese Isaac Newton (1463 - 1727).
Egli si avvicina inizialmente al problema grazie alla risoluzione di Cartesio pubblicata nella *Géométrie*, e in alcune note del 1665 Newton riprodusse la risoluzione di Cartesio aggiungendo alcune riflessioni personali sul rapporto tra il problema, l'equazione che lo traduce e le soluzioni. Newton studia questo problema nel contesto della risoluzione delle equazioni di quarto grado e la sua attenzione è rivolta principalmente all'equazione associata al problema e alla ricerca delle soluzioni. Tuttavia, questo non è l'unica testimonianza che abbiamo degli studi di Newton sul problema del quadrato. Infatti, anche se inizialmente egli sembra restare fedele a quella che è la risoluzione cartesiana, con i successivi studi si discosterà dall'operato del matematico francese. Ne troviamo la prova all'interno del suo trattato *Arithmetica Universalis* pubblicato nel 1707 da William Whiston, suo successore come professore Lucasiano all'università di Cambridge. Il testo di Newton tratta delle operazioni algebriche e aritmetiche, e dell'utilizzo di quest'ultime nella risoluzione dei problemi (non solo geometrici).
Infatti, Newton [1720], pp. 1-2 afferma

> Ma l'Algebra è particolarmente eccellente in questo, cioè dove nell'Aritmetica i problemi sono risolti solo procedendo dalle quantità assegnate alle quantità cercate, l'Algebra procede, in modo inverso, dalle quantità cercate quando sono date, alle quantità date quando sono cercate, per giungere ad una conclusione o Equazione, dalla quale si può ottenere la quantità cercata.

Da questa affermazione possiamo intravedere in Newton una certa affinità con l'idea di Pappo del cammino inverso di analisi e sintesi. In particolare, l'algebra segue il percorso che l'analisi dovrebbe compiere: da ciò che è incognito, assunto come se fosse noto, a ciò che è effettivamente dato. Non sorprende quindi che in questo trattato compaiano le risoluzioni di numerosi problemi, la cui analisi è condotta in forma algebrica.
In particolare, nella sezione del testo in cui Newton illustra il procedimento di traduzione di un problema geometrico in un'equazione, ricompare il problema del quadrato, presentato in una formulazione un poco diversa rispetto a quelle incontrate in precedenza. Newton non si limita a fornire una soluzione del problema, ma mostra come la scelta dell'incognita possa incidere in modo decisivo

sulla semplicità del procedimento risolutivo. Cartesio, nella *Géométrie*, aveva già formulato questa osservazione ma fu Newton ad offrirne una dimostrazione concreta proponendo diverse risoluzioni dello stesso problema, ciascuna associata a una differente scelta dell'incognita.

Problema del Quadrato (Newton)[52] 2.19
Sottendere nell'angolo retto $\widehat{EAF}$ una retta data in grandezza EF, di modo che prolungata passi per un punto dato C, che deve essere equidistante dalle due rette che comprendono l'angolo retto (quando sono prolungate).

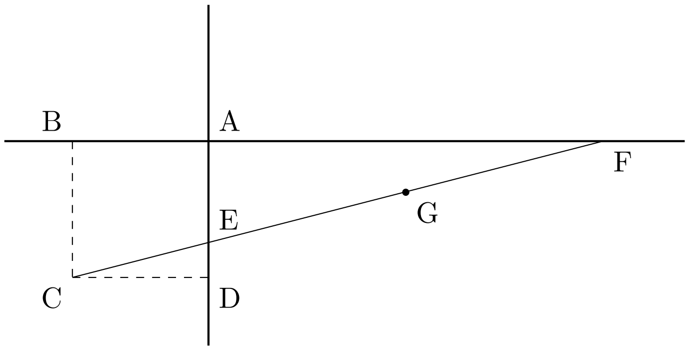


Figura 2.23: Costruzione del problema del quadrato di Newton.

Analisi:[53]
Si completi il quadrato $ABCD$ e si bisechi il segmento EF in G. Poniamo CB e CD uguali ad a; EG e FG uguali a b; CG uguale ad x; allora avremo $CE = x - b$ e $CF = x + b$. Quindi, poiché $CF^2 - BC^2 = BF^2$, otterremo $BF = \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}$. Considerando poi i triangoli simili $\triangle CDE$, $\triangle FBC$ si avrà $CE : CD = CF : BF$, o

$$x - b : a = x + b : \sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2},$$

dalla quale si ottiene

$$a(x + b) = (x - b)\sqrt{x^2 + 2bx + b^2 - a^2}.$$

Elevando al quadrato ciascuna parte dell'equazione e riordinando i termini si ottiene

$$x^4 - (2a^2 + 2b^2)x^2 - 2a^2b^2 + b^4 = 0$$

dalla quale, estraendo le radici come nelle equazioni quadratiche otteniamo

[52] Enunciato e risoluzione del problema del quadrato tratti da [Newton 1720], pp. 112-114.
[53] La notazione con cui vengono indicate le operazioni algebriche è stata cambiata per rendere il testo più conforme allo stile attuale.

$$x^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}.$$

Di conseguenza, avremo $x = \sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}}$. Avendo quindi trovato CG è possibile determinare CE o CF, dai quali si ricava il punto E oppure il punto F, che risolve il problema.

Come già detto, Newton [1720] propone diverse versioni di risoluzione del problema che utilizzano diverse incongite: riportiamo qui una seconda risoluzione.

Analisi:
Sia $CE = x$, $CD = a$ e $EF = b$; allora avremo $CF = x + b$ e $BF = \sqrt{x^2 + b^2 + 2bx - a^2}$. Inoltre, dal momento che $CE : CD = CF : BF$ (per i triangoli simili $\triangle CDE$ ed $\triangle FBC$), si ha

$$x : a = x + b : \sqrt{x^2 + b^2 + 2bx - a^2}$$

da cui

$$ax + ab = x\sqrt{x^2 + b^2 + 2bx - a^2}.$$

Elevando al quadrato entrambe le parti dell'equazione e riordinando i termini si ottiene

$$x^4 + 2bx^3 + (b^2 - 2a^2)x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0$$

un'equazione di quarto grado la cui ricerca delle radici è più complicata di quella del caso precedente. Tuttavia è comunque possibile ricavare le radici procedendo in questo modo: aggiungiamo da entrambi i lati dell'equazione $a^2b^2 + a^4$ e otteniamo

$$x^4 + 2bx^3 + (b^2 - 2a^2)x^2 - 2a^2bx + a^4 = a^2b^2 + a^4.$$

Ora estraiamo la radice quadrata da ogni membro e si avrà

$$x^2 + bx - a^2 = \pm a\sqrt{a^2 + b^2}$$

da cui $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{a^2 + b^2}}}{2}$.

Newton conclude la seconda analisi del problema formulando quella che lui definisce una "regola" per la scelta dell'incognita, in modo da ottenere un processo risolutivo più semplice ([Newton 1720], p. 113)

> È qui l'occasione di dare una regola sulla scelta dei termini più adatti per cominciare il calcolo. Quando due termini hanno una tale somiglianza di rapporto con gli altri termini del problema, tale che prendendo l'uno o l'altro si arriva a equazioni del tutto simili o che prendendo entrambi nello stesso tempo, essi abbiano nell'equazione finale lo stesso numero di dimensioni e la stessa forma, e differiscono solo per i segni + e −, bisogna rigettarle entrambe e prendere al loro posto un terzo termine che abbia uno stesso rapporto con l'uno o l'altro, per esempio la loro semi-somma o la loro semi-differenza, o un medio proporzionale o, infine, un'altra quantità a piacere che abbia con essi una stessa relazione, purché questa quantità sia la sola che goda di questa proprietà.

Newton, tuttavia, non si limitò a proporre risoluzioni di tipo algebrico; presenteremo ora infatti una risoluzione di tipo geometrico che egli colloca nelle note finali dell'opera *Geometriae liber primus*, la cui composizione si colloca all'incirca nell'anno 1693. La risoluzione del problema è preceduta da una riformulazione della regola sopra enunciata ed è presentata come esempio di applicazione di quest'ultima.

Problema del Quadrato (Newton)[54] 2.20
Dal vertice A di un quadrato $ABCD$ si tracci una retta, la cui parte GE compresa tra i prolungamenti dei lati DC e BC sia di lunghezza data.

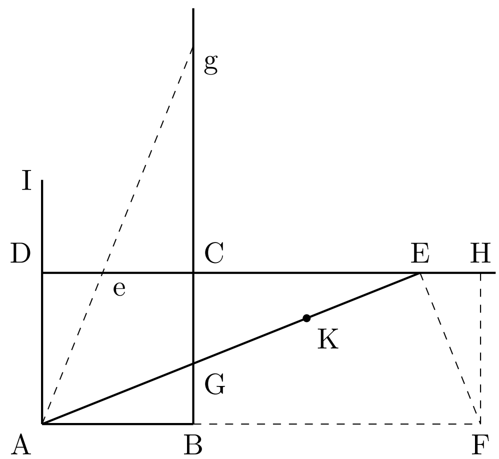


Figura 2.24: Costruzione geometrica del problema del quadrato di Newton, figura presa da [Newton 1967–1981], p. 374.

> **Analisi:**
> La linea retta GE può essere tracciata allo stesso modo all'interno dell'angolo $\widehat{DCg}$ come all'interno dell'angolo $\widehat{BCE}$; di conseguenza ci saranno due soluzioni. Se si cerca la linea DE che si estende

[54] Traduzione della costruzione presa da [Newton 1967–1981], volume VII, parte II, pp. 373-377

dal punto D all'intersezione delle linee DC e AE, si troveranno due linee di questo tipo, DE e De; se invece si cerca la linea AE che si estende dal punto A alla stessa intersezione, ci sono similmente due linee di questo tipo, AE ed Ae. Perciò non cerco né l'una né l'altra, ma piuttosto quelle correlate nello stesso modo a entrambe — la loro somma, differenza o il rettangolo dei due, o ancora la somma dei loro quadrati. Prendendo $EH = De$, di conseguenza DH sarà quella somma. Ora, erigendo EF ed HF perpendicolari in E e H rispetto ad AE e DH, si formerà il triangolo $\triangle EHF$ congruente al triangolo $\triangle ADe$ e quindi anche ad $\triangle ABG$, mentre la linea AB, se estesa, passerà per il punto F. Di conseguenza, si deve cercare la relazione di AF o BF con le altre linee. Si ha quindi $AF^2 = AE^2 + EF^2$; al posto di EF si scrive AG e si ottiene $AF^2 = AE^2 + AG^2$; si biseca GE in K e al posto di AG e AE si scrivono $AK - GK$ e $AK + GK$; si ottiene così $AF^2 = 2AK^2 + 2GK^2$. Inoltre, poiché i triangoli $\triangle ABG$ e $\triangle AEF$ sono simili, si ha $AB : AG = AE : AF$ e quindi $AB \times AF = AG \times AE$; ora al posto di AG e AE si scrivono $AK - GK$ e $AK + GK$, e si ottiene $AB \times AF = AK^2 - GK^2$. Inoltre possiamo togliere $2(AB \times AF)$ da AF^2, ottenendo così $4GK^2$, ovvero GE^2. Di conseguenza il punto F è determinato. Se si desidera affinare ulteriormente la soluzione, si può aggiunge AB^2 a ciascun lato e si ottiene

$$AF^2 - 2(AB \times AF) + AB^2 = GE^2 + AB^2$$

ma dal momento che la parte sinistra dell'equazione corrisponde a BF^2, mentre nella seconda parte posso sostituire $GE = AI$, allora si ottiene che

$$BF^2 = AI^2 + AB^2 = BI^2.$$

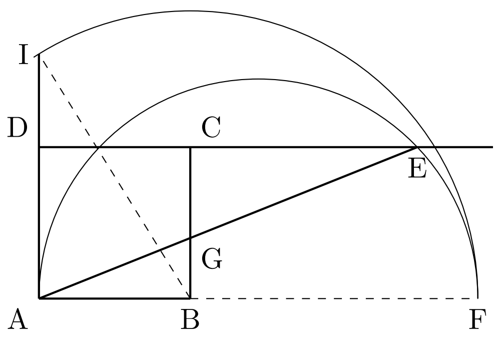


Figura 2.25: Costruzione geometrica del problema del quadrato di Newton.

Costruzione:[55]
Partendo dal quadrato $ABCD$ si costruisca un segmento AI perpendicolare ad AB e che abbia lunghezza data (la stessa che dovrà avere il segmento GE). Si tracci poi il segmento BI, e la circonferenza avente centro in B e raggio BI. Si trovi poi l'intersezione di tale circonferenza con il prolungamento del lato AB dalla parte di B e si indichi tale punto con la lettera F. Si tracci poi la semicirconferenza di diametro AF e si trovi la sua intersezione con il prolungamento del lato DC dalla parte di C. Si indichi quest'ultimo punto con E, e lo si colleghi con il vertice A del quadrato. Tale retta è quella che contiene il segmento GE di lunghezza assegnata.

Sempre nello stesso testo, subito dopo aver presentato il problema del quadrato, Newton espone la propria risoluzione geometrica del problema del rombo. Egli presenta i problemi in ordine inverso rispetto agli altri matematici che erano infatti partiti dal caso generale (quello del rombo) per poi arrivare a trattare il caso particolare (quello del quadrato). Questa inversione dell'ordine è ben giustificata dalla Regola 6, che Newton antepone alla risoluzione del problema ([Newton 1967–1981], p. 377):

Regola 6) Quando, nonostante ciò, ci si trova bloccati su un problema più difficile, è necessario scomporre i casi più semplici. Infatti, una volta che questi sono risolti, di solito si apre una via per affrontare quelli più complessi.

Pertanto, Newton considera il problema del rombo come un esempio pratico dell'applicazione della Regola 6, illustrando come la soluzione del problema del quadrato possa fornire indicazioni utili per affrontare configurazioni più generali dello stesso problema.

Problema del Rombo (Newton)[56] **2.21**
Dal vertice A di un rombo $ABCD$ si tracci una retta, la cui parte GE compresa tra i prolungamenti dei lati DC e BC sia di lunghezza data.

Analisi:
Considero prima come il problema debba essere risolto quando gli angoli della figura sono retti; poi, dopo aver in questo caso risolto il problema come sopra, seguendo i passaggi di quella soluzione ragionerei come segue. Preso EH uguale a BG e costruito il triangolo $\triangle EHF$ congruente al triangolo $\triangle ABG$, la linea retta AB, quando viene prolungata, passerà per il punto F e allora, seguendo il procedimento della soluzione precedente del caso più semplice e

[55] Newton non presenta la parte della sintesi ma solamente l'analisi geometrica. Troviamo utile tuttavia affiancare all'analisi anche la costruzione che ne consegue e che abbiamo ricostruito seguendo i passi percorsi nell'analisi in senso contrario.

[56] Traduzione della costruzione tratta da [Newton 1967–1981], volume VII, parte II, pp. 377-379.

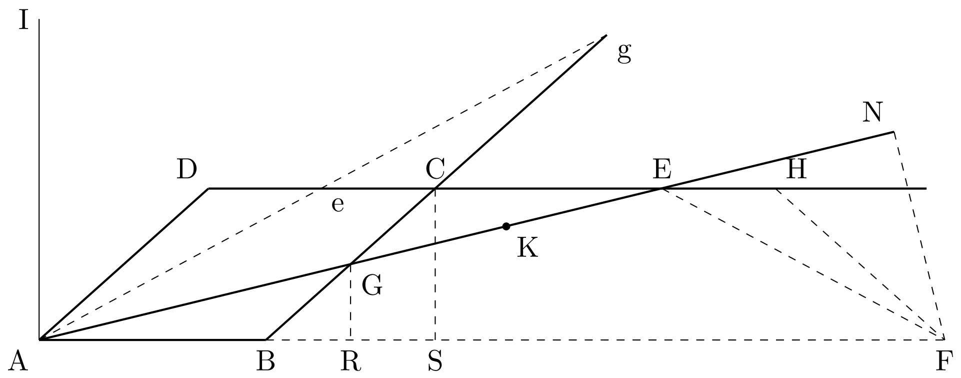


Figura 2.26: Costruzione geometrica del problema del rombo di Newton, figura tratta da [Newton 1967–1981], p. 376.

applicando la proposizione II 13[57] degli *Elementi* di Euclide[58], si avrà

$$AF^2 = AE^2 + EF^2 + 2(AE \times EN).$$

dove FN è, naturalmente, la perpendicolare abbassata sul prolungamento del lato AE; qui, al posto di EF si sostituisca AG e si avrà

$$AF^2 = AE^2 + AG^2 + 2(AE \times EN). \tag{2.8}$$

Con le perpendicolari GR e CS abbassate su AB a partire dai punti G e C si ha ancora, a causa delle figure simili $AFEN$ e $AGBR$[59]

$$AF : EN = AG : BR. \tag{2.9}$$

Inoltre, applicando il teorema di Talete alle coppie di rette parallele: AB e DE tagliate dalle trasversali AE e BC; GR e CS tagliate dalle trasversali BC e BS, si ha

$$AG : AE = BG : BC = BR : BS$$

[57]Questa proposizione è già stata richiamata nella nota a pagina 54

[58]Nel caso precedente l'utilizzo di questa proposizione non era necessario in quanto il triangolo $\triangle AEF$ era rettangolo.

[59]Le figure qui prese sono due coppie di triangoli. Va considerata infatti la similitudine dei triangoli $\triangle ANF$ e $\triangle AGR$, ma anche quella dei triangoli $\triangle AFE$ e $\triangle AGB$, contenuti nei precedenti due. Da queste similitudini seguono le proporzioni:

$$AF : AG = AN : AR$$

e

$$AF : AG = AE : AB$$

che, combinate, forniscono $AN : AR = AE : AB$ da cui, permutando i medi ed applicando la proprietà dello scomporre segue

$$AN : EN = AR : BR$$

da cui segue la proporzione (2.9).

da cui si ottiene

$$AG : BR = AE : BS. \tag{2.10}$$

Pertanto, confrontando le (2.9) e (2.10) si ha

$$AF \times BS = AE \times EN.$$

Riprendiamo l'equazione (2.8) e sostituiamo $2(AF \times BS)$ al posto di $2(AE \times EN)$ e si avrà

$$AF^2 = AE^2 + AG^2 + 2(AF \times BS)$$

ovvero

$$AF^2 - 2(BS \times AF) = AG^2 + AE^2. \tag{2.11}$$

Inoltre, ancora per la similitudine dei triangoli $\triangle ABG$ e $\triangle AEF$, si ha

$$AB : AG = AE : AF$$

da cui si ottiene

$$AB \times AF = AG \times AE.$$

Togliendo due volte questo termine dalla (2.11), rimane

$$AF^2 - 2(AS \times AF) = AG^2 + AE^2 - 2(AG \times AE),$$

cioè il quadrato della differenza tra AE ed AG, ossia GE^2. Da ciò il punto S è determinato. Possiamo perfezionare il risultato aggiungendo AS^2 a ciascun membro, poiché si avrà allora

$$AF^2 - 2(AS \times AF) + AS^2 = FS^2 = GE^2 + AS^2.$$

Ora, sempre seguendo la soluzione del caso più semplice, e applicando due volte la proposizione II.13 degli *Elementi* di Euclide—il teorema del coseno—prima al triangolo $\triangle BGF$, poi al triangolo $\triangle GFE$, si otterrà

$$\begin{gathered} BF^2 - 2(BR \times BF) = GF^2 - GB^2 = \\ GE^2 + EF^2 - GB^2 + 2(GE \times EN). \end{gathered}$$

Al posto di $EF^2 = AG^2$, si scriva $AB^2 + GB^2 + 2(AB \times BR)$ e si avrà

$$BF^2 - 2(BR \times BF) = GE^2 + AB^2 + 2(AB \times BR) + 2(GE \times EN).$$

Per il teorema di Talete applicato alle coppie di rette parallele: AB e DE tagliate dalle trasversali AE e BC; GR e CS tagliate dalle trasversali BC e BS, si ha

$$AG : GE = BG : GC = BR : RS$$

che, con la (2.9), fornisce

$$AF : EN = AG : BR = GE : RS,$$

perciò si scriva $2(AF \times RS)$ al posto di $2(GE \times EN)$ e si avrà

$$BF^2 = GE^2 + AB^2 + 2(AB \times BR) + 2(AF \times RS) + 2(BF \times BR)$$

ovvero

$$BF^2 = GE^2 + AB^2 + 2(AF \times BS).$$

Da ciò il punto F è determinato e quando questa equazione ridotta ai termini più semplici, risulta uguale a[60]

$$FS^2 = AS^2 + GE^2.$$

Costruendo $AI = GE$ perpendicolare alla retta AB, si ottiene quindi

$$FS^2 = AS^2 + AI^2$$

da cui $FS^2 = SI^2$.

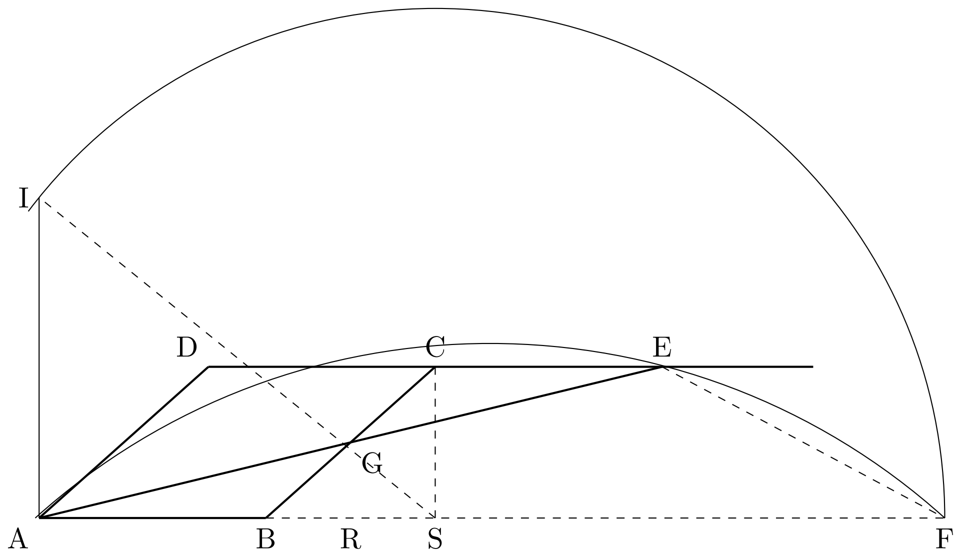


Figura 2.27: Costruzione geometrica del problema del rombo di Newton.

[60]Per ottenere questo risultato, si scrive $BF^2 = BS^2 + SF^2 + 2BS \cdot FS$ e si confrontano le due espressioni di BF^2; infine, si sostituisce AB^2 con $(AS - BS)^2$.

Costruzione:[61]
Partendo dal rombo $ABCD$ si costruisca un segmento AI perpendicolare ad AB e che abbia lunghezza data (la stessa che dovrà avere il segmento GE). Si tracci a partire da C la perpendicolare alla retta AB, la quale incontra il prolungamento di AB nel punto S. Si congiunga quest'ultimo punto con I. Abbiamo allora trovato il segmento SI che, per quanto visto all'analisi, sappiamo essere uguale a FS. Si costruisca quindi la circonferenza di centro S e raggio SI, che incontra il prolungamento di AB (dalla parte di B) in F. Ora abbiamo il segmento AF che sappiamo essere la base del triangolo $\triangle AEF$, dove E è il punto che stiamo cercando sul prolungamento del lato CD e che realizza la tesi. Tale triangolo ha angolo opposto alla base congruente all'angolo $\widehat{ABC}$ del rombo (come visto nell'analisi), pertanto il segmento AF è una corda sulla circonferenza AEF che sottende un angolo ottuso pari a $\widehat{ABC}$. Costruiamo tale circonferenza[62] e dall'intersezione di quest'ultima con il prolungamento del lato CD avremo il punto E, soluzione del problema.

Abbiamo quindi presentato due tipologie di risoluzione molto diverse tra loro, la prima delle quali utilizza l'analisi algebrica, la principale innovazione portata dai matematici del primo periodo moderno, mentre la seconda fa uso dell' "analisi degli antichi", il metodo tradizionale geometrico portato avanti per molti secoli. Come già abbiamo accennato queste due risoluzioni non sono le uniche proposte da Newton, il quale inizialmente mostra una risoluzione molto vicina a quella cartesiana.
Le risoluzioni del problema del quadrato del matematico inglese tracciano la storia degli studi da lui intrapresi in campo matematico. La prima risoluzione, infatti, si colloca storicamente in un momento di formazione del giovane Newton; tale risoluzione è contenuta all'interno degli appunti che egli redasse nel mese di maggio 1665 e che oggi possiamo trovare contenuti nel volume I, parte III del testo [Newton 1967–1981]. In questi appunti si parla delle equazioni e del rapporto tra le radici; in particolare Newton riporta come esempio di risoluzione delle equazioni di quarto grado il problema del quadrato, con la risoluzione cartesiana tratta dalla *Géométrie*. Dagli appunti di Newton è evidente che l'edizione della *Géométrie* da lui studiata sia quella commentata da Frans van Schooten, e che le riflessioni che Newton espone rispetto al problema del quadrato seguano la via tracciata dal matematico olandese.

[61]Newton non presenta la parte della sintesti, ma solamente la parte dell'analisi geometrica. Troviamo utile tuttavia affiancare all'analisi anche la costruzione che ne consegue e che abbiamo ricostruito seguendo i passi percorsi nell'analisi in senso contrario.

[62]È possibile costruire con riga e compasso una circonferenza di cui è data una corda e l'angolo alla circonferenza che quest'ultima sottende. Si prenda infatti il supplementare di tale angolo e lo si bisechi. Ora si trasporti questo angolo su uno dei due estremi della corda. Quest'ultima operazione è possibile sfruttando la congruenza tra triangoli. Una volta trasportato questo angolo, si osservi dove la retta che determina l'angolo (quella che non contiene la corda) interseca l'asse della corda. Questo punto appartiene alla circonferenza cercata. Abbiamo quindi tre punti appartenenti alla circonferenza e ora il procedimento di costruzione di quest'ultima risulta immediato.

La seconda risoluzione del problema del quadrato, che coincide con quella algebrica da noi presentata, si può ritrovare in diversi punti delle opere newtoniane, le quali si collocano tutte nel periodo in cui Newton ha già raggiunto la maturità scientifica che gli permette di distaccarsi dalla risoluzione cartesiana e di formularne una propria. Troviamo questa risoluzione nel volume II di [Newton 1967–1981] all'interno del paragrafo *Newton's 'observations' on Kinckhuysen's*[63] *'Algebra'*[64] presumibilmente redatte negli anni 1669-1670. Un secondo punto della medesima opera in cui è possibile individuare tale risoluzione è all'interno della prima parte del volume V, nel capitolo intitolato da Whiteside *Newton's lectures on algebra during 1673-1683: the copy later deposited in the Cambridge archives*. Le ultime due pagine in cui è possibile trovare questa risoluzione si trovano all'interno dell'*Arithmeticae universalis liber primus*,

[63]Gerard Kinckhuysen (1625-1666 circa) di Haarlem era un mercante olandese e uno studioso di matematica, affascinato in particolare dal lavoro di Cartesio. Egli è ricordato oggi per due testi matematici che pubblicò nel 1660-1661 in cui presenta, oltre agli elementi della geometria cartesiana, le scoperte più recenti in campo algebrico. Anche se questi libri non presentano alcun contenuto originale, la loro traduzione latina ebbe un discreto successo nella realtà inglese dell'epoca.
Non si possiedono molte informazioni sulla vita dell'autore, e quelle disponibili risultano spesso contraddittorie o prive di prove che ne attestino con certezza la veridicità. Ciò che sappiamo con sicurezza è che Kinckhuysen intraprese studi matematici sotto la guida del maestro Pieter Wils e che pubblicò i suoi primi lavori già all'età di diciotto anni. In seguito interruppe tuttavia la propria attività matematica per dedicarsi alla carriera di mercante, seguendo così le orme del padre.
Le opere già menzionate appartengono invece a un secondo periodo della sua attività matematica e sono proprio quelle per cui l'autore è oggi principalmente ricordato.

[64]L'opera di Kinckhuysen a cui si fa riferimento è quella pubblicata nel 1661 dal titolo *Algebra Ofte Stel-konst*. Questo testo doveva avere come scopo principale quello di introdurre l'algebra a coloro che non la conoscevano; quest'ultimo viene infatti pubblicato un anno dopo la pubblicazione di un'altra opera di Kinckhuysen, il *De Grondt der Meet-konst* scritto in lingua olandese, il cui oggetto di studio erano gli elementi della geometria analitica cartesiana. Quest'ultimo non aveva riscontrato molto successo tra i matematici della scuola olandese e, secondo l'autore, la motivazione era da attribuirsi alla loro scarsa conoscenza dell'algebra, anche per la mancanza di un testo in lingua volgare che introducesse a tale disciplina. Pertanto solamente un anno dopo Kinckhuysen pubblica l'*Algebra Ofte Stel-konst*, scritto in olandese volgare. Purtroppo questa opera non raggiunge lo scopo per cui era stata pensata inizialmente dall'autore, ma la ricordiamo in quanto funge da raccolta dei più recenti lavori dell'epoca in campo algebrico.
L'opera arrivò nelle mani di Newton attraverso John Collins, un matematico inglese membro della Royal Society, che trova il manoscritto di Kinckhuysen un ottimo testo per coloro che intendono affacciarsi ai più recenti sviluppi dell'algebra, e che intende quindi tradurre per renderlo disponibile al pubblico inglese. La traduzione (latina) viene affidata da Collins al matematico tedesco Nicolaus Mercator e fu completata nel 1669. Nell'autunno dello stesso anno Collins chiederà al suo amico e corrispondente Isaac Barrow di revisionare il testo prima della pubblicazione. Tuttavia Barrow stava per lasciare la cattedra di matematica a Cambridge e passò così il compito al suo successore, Isaac Newton. Quest'ultimo accettò di revisionare il testo e di aggiungere ad esso delle note che potessero chiarirne alcuni punti. Tuttavia questo lavoro di revisione si protrasse per molto tempo, tanto da rendere superflua la pubblicazione del trattato, in quanto nel frattempo era già apparso un altro trattato di algebra ad opera di John Kersey. Pertanto, dopo varie discussioni, Collins decise di non pubblicare la traduzione del testo di Kinckhuysen, che passò nelle mani di John Wallis che integrò gli appunti di Newton sul testo con quelli che egli redigeva per tenere le lezioni universitarie e che saranno in seguito ritrovati insieme ad altri testi mai pubblicati.

composta nella primavera del 1684.[65] In queste pagine la risoluzione newtoniana si discosta da quella cartesiana, pervenendo a formulare osservazioni più puntuali rispetto a quelle di Cartesio in merito alla scelta dell'incognita nella formulazione algebrica di un problema.
L'ultima risoluzione newtoniana del problema del quadrato, quella geometrica, si colloca all'interno della *Geometriae liber primus* che è possibile ritrovare contenuto nel volume VII del testo [Newton 1967–1981]. La composizione di questo scritto si colloca all'incirca nell'anno 1693 ma non fu mai pubblicata dall'autore. È in quest'opera che si misura il distacco maturato col tempo da Newton rispetto ai metodi cartesiani. Qui Newton riprende il problema apolloniano, affiancandolo al problema del rombo, che ne costituisce una generalizzazione, e ne presenta le risoluzioni come esempi a sostegno di due regole da lui enunciate sui metodi di risoluzione dei problemi.
Possiamo quindi concludere che, attraverso lo studio di questo problema, si coglie un vero e proprio sviluppo intellettuale del matematico inglese. Egli, infatti, pur mostrando una profonda conoscenza dell'opera cartesiana e di quella di Pappo e dimostrandosi inizialmente fedele ad esse, se ne discosta in seguito, una volta raggiunta una propria maturità intellettuale, giungendo a esplorare e formulare un metodo risolutivo autonomo.

2.8 Conclusioni

Ripercorrere la storia del problema del quadrato ci ha permesso di evidenziare i punti salienti della storia delle costruzioni geometriche e delle sue principali evoluzioni durante il periodo moderno. Infatti, nonostante l'inizio dello studio dei problemi di inclinazione si collochi ben prima di questo periodo (si ricordi che una prima risoluzione di questi problemi era contenuta nello scritto perduto *De Inclinationibus* di Apollonio del II secolo a.C.), possiamo affermare che l'età moderna abbia portato degli sviluppi nel campo delle costruzioni geometriche non confrontabili rispetto ai periodi che la precedono.
Nella nostra trattazione abbiamo voluto evidenziare quello che a noi è sembrato lo sviluppo chiave di questo periodo: l'introduzione dell'algebra come strumento di analisi dei problemi geometrici. Questa innovazione, favorita dai lavori di Viète e di Cartesio, porta con sé importanti conseguenze come la nascita della geometria analitica e un rinnovato interesse per lo studio di problemi di costruzione che erano stati studiati per secoli senza trovare un metodo risolutivo che potesse mettere d'accordo l'intera comunità matematica.
In particolar modo abbiamo scelto di concentrarci sul problema del quadrato, e sulle sue generalizzazioni, per la ricchezza di fonti inerenti alla sua risoluzione. Questo problema, a cui ci siamo riferiti anche con l'appellativo *Problema di Pappo* - essendo introdotto per la prima volta da quest'ultimo all'interno delle *Collezioni*[66] -, si rivela essere oggetto di studio di molti dei più importan-

[65] Le ultime due risoluzioni si discostano leggermente da quella da noi proposta in quanto varia la scelta dell'incognita. Tuttavia tali risoluzioni vengono affrontate scegliendo una delle incognite suggerite da Newton nella regola che abbiamo riportato a pag 72.

[66] Le *Collezioni* costituiscono la più antica fonte a noi pervenuta in cui compare questo problema; tuttavia, Pappo, nel presentarlo, rinvia esplicitamente all'ottavo problema del trattato

ti matematici del periodo moderno, e le soluzioni proposte portano con sé una molteplicità di osservazioni che sono fondamentali per cogliere gli interrogativi e i punti chiave della ricerca matematica dell'epoca. Infatti, come abbiamo avuto modo di sottolineare più volte all'interno di questo capitolo, lo studio di questo problema porta ad affrontare alcuni temi come l'interpretazione geometrica delle soluzioni negative, la riduzione delle equazioni algebriche e la conseguente scelta degli strumenti necessari per risolvere un problema, la difficoltà nella scelta dell'incognita e la trasponibilità di un metodo risolutivo da un caso generale a uno particolare e viceversa.
La varietà di risoluzioni presentate suggerisce l'importanza data a questo problema nel corso della storia, e fornisce uno strumento di analisi dell'evoluzione della geometria nel periodo moderno, su cui abbiamo scelto di concentrarci nel nostro studio per le motivazioni appena esposte.
Tuttavia, non riteniamo corretto affermare che questo problema abbia giocato un ruolo importante solamente nella storia delle costruzioni geometriche. Infatti, il problema del quadrato ha fornito - e continua a fornire - importanti spunti di riflessione nella didattica. Nei prossimi capitoli tratteremo alcuni di questi aspetti, in particolare vedremo come questo problema, che abbiamo trattato a lungo da un punto di vista storico, possa giocare un ruolo nella didattica contemporanea.

perduto *De Inclinationibus* di Apollonio. Egli, infatti, assegna al paragrafo contenente tale risoluzione il titolo "Teoremi considerati in correlazione con l'ottavo problema" ([Pappo 1933], p. 603). Inoltre, Paul Ver Eecke, curatore dell'edizione delle *Collezioni* qui adottata, in diverse note di questo paragrafo cita soluzioni precedenti a quella di Pappo, attribuendole ad Apollonio e a Eraclito.

Capitolo 3

Il problema del quadrato: una fonte storica di ispirazione per la didattica

Come anticipato nel Capitolo 2, in questo capitolo ci concentreremo sull'analisi dell'uso del problema del quadrato nella didattica. In particolare, esamineremo alcune questioni emerse dalla nostra indagine storica, che si sono rivelate essere elementi fondamentali nel percorso educativo collegato a questo problema.
L'idea di analizzare il problema del quadrato dal punto di vista della didattica moderna nasce dalla ricchezza di materiale didattico in cui è presente quest'ultimo e la sua risoluzione. Infatti, la nostra analisi è partita da alcune collezioni di esercizi, tra le quali ad esempio quella pubblicata da Honoré-Adolphe Desboves ([Desboves 1892]), un matematico francese noto per i suoi manuali scolastici e raccolte di esercizi destinate agli studenti, e quella prodotta da Eugène Charles Catalan ([Catalan 1858]), matematico belga noto per la sua congettura in teoria dei numeri[1], per i suoi lavori in diversi campi della matematica e in particolare per la successione di numeri che porta il suo nome[2]. Inoltre, dall'analisi delle risoluzioni storiche del problema, è emerso che la maggior parte di esse si basa su risultati già noti agli studenti che completano il percorso della scuola secondaria. Ne consegue che questo problema può essere affrontato dagli studenti

[1] Catalan formulò la sua congettura in una lettera del 1844 destinata ad August Crelle, editore del *Journal für die reine und angewandte Mathematik*:

> « Vi prego, signore, di voler enunciare, nella vostra raccolta, il seguente teorema, che credo vero, nonostante non sia ancora riuscito a dimostrarlo completamente; altri potranno forse essere più fortunati.
> Due numeri interi consecutivi diversi da 8 e 9 non possono essere entrambi potenze esatte; in altre parole, l'equazione $x^p - y^q = 1$ a valore nei numeri interi positivi, ammette una sola soluzione. »

Questa congettura fu dimostrata nel 2002 dal matematico rumeno Preda Mihăilescu.

[2] I numeri di Catalan sono una successione di numeri naturali utili nell'ambito del calcolo combinatorio. Essi furono presentati per la prima volta in un articolo del 1838 intitolato *Note sur une Équation aux différences finies*, e appaiono come soluzione del problema di divisione di un poligono in triangoli, per mezzo di diagonali che non si intersecano tra loro (il numero n-esimo della successione rappresenta il numero di modi in cui questa operazione può essere effettuata su un poligono di $n + 2$ lati). La successione dei numeri di Catalan può essere

degli ultimi anni della scuola secondaria di secondo grado, i quali dovrebbero possedere tutti i prerequisiti necessari per comprendere pienamente tali risoluzioni. Un'ulteriore conferma di ciò arriva dalle collezioni di esercizi già citate e da altri articoli[3] più recenti riguardanti il mondo della scuola, i quali analizzano il potenziale di questo e di altri problemi nel contesto dell'insegnamento della matematica.
Un altro punto a favore dell'utilizzo di questo problema nella didattica è sicuramente la grande varietà di soluzioni che presenta. Abbiamo già analizzato molte di queste nei capitoli precedenti, e molte altre vengono presentate all'interno dei materiali che abbiamo preso in esame. In alcuni casi gli autori più recenti prendono ispirazione dalle risoluzioni storiche del problema, per poi andare trasporre didatticamente[4] quest'ultime, in modo da poterle adattare al contesto in cui saranno presentate, alle conoscenze degli studenti e ai metodi di risoluzione a loro noti. Analizzeremo in seguito alcune di queste risoluzioni, cercando di porre l'accento sull'intento didattico dell'autore delle risoluzioni, e sui cambiamenti fatti per renderle più accessibili ad un pubblico di studenti contemporanei.

Le osservazioni che hanno guidato il nostro studio possono essere riassunte come segue: in primo luogo, abbiamo posto l'attenzione sulla varietà delle soluzioni proposte, e la dualità che le contraddistingue. Esse infatti si dividono tra quelle che utilizzano i metodi della geometria, e quelle che utilizzano un'analisi di tipo algebrico. Analizzeremo brevemente la scelta fatta sull'utilizzo dell'uno o dell'altro metodo in relazione all'ambiente scolastico, e come questo doppio metodo di risoluzione sia una caratteristica che rende il problema un ottimo punto di partenza per stimolare alcune riflessioni nello studente.
In secondo luogo ci concentreremo sull'importanza del proporre alla classe problemi dalla risoluzione non banale. Il problema del quadrato, infatti, offre agli studenti la possibilità di sperimentare quale sia la via migliore per affrontarlo, stimolando così un'indagine matematica significativa, che si discosta dalla banale applicazione di un metodo già noto.

---

definita algebricamente dall'espressione $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, oppure ricorsivamente come

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n \end{cases}$$

[3]In particolare facciamo riferimento all'articolo di Galluzzi e Rovelli [1996], a quello di Giuseppe Di Dia [Di Dia 1916-17] e all'opuscolodi Federico Occella [Occella 1897]. Di Dia ed Occella furono insegnanti di scuola superiore attivi tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento.

[4]Facciamo qui riferimento al concetto di trasposizione didattica introdotto da Yves Chevallard nel 1985. La trasposizione didattica è quel processo attraverso il quale il "sapere sapiente" o "sapere esperto", ovvero il sapere matematico costruito dalla comunità scientifica, si trasforma in "sapere insegnato", ovvero il sapere che gli alunni apprendono tramite l'insegnante. Questo processo si articola in due fasi, nelle quali sono coinvolti diversi attori: nella prima fase il "sapere sapiente" viene trasformato in "sapere da insegnare", e questo avviene grazie al contributo di quella che Chevallard definisce la *noosfera*, un insieme di esperti del settore, educatori, politici e di coloro a cui spetta la formazione dei programmi. Nella seconda fase il "sapere da insegnare" viene trasformato dall'insegnante in "sapere insegnato".

Infine l'ultimo punto su cui ci soffermeremo è l'interessante problema didattico con cui si confronta Giuseppe Di Dia all'interno del suo articolo ([Di Dia 1916-17]) che abbiamo avuto modo di sottolineare anche durante l'analisi storica del problema. Infatti Di Dia, come molti dei matematici del periodo moderno, torna ad interrogarsi sulla difficoltà riscontrata nella scelta dell'incognita, e sulle conseguenze che una certa scelta può portare, focalizzandosi sul caso degli studenti di scuola secondaria.
Presentiamo quindi l'analisi di questi tre temi facendo emergere da quest'ultimi alcuni punti critici della didattica contemporanea.

3.1 Dualità dei metodi di risoluzione

Le nostre prime osservazioni relative alla didattica di questo problema nascono dalla dualità che contraddistingue le soluzioni che sono presentate agli studenti: alcune utilizzano un approccio totalmente geometrico, altre si servono di un'analisi di tipo algebrico. Questa dualità ricalca la duplice natura delle soluzioni che sono state presentate nel corso della storia e che sono state descritte nel capitolo precedente.
All'interno della collezione di esercizi di Catalan [Catalan 1858], ad esempio, il problema è risolto con un metodo di analisi geometrico, che richiama il metodo storico di analisi presentato nel Capitolo 2. Tuttavia, a differenza del metodo puramente geometrico impiegato ad esempio nella risoluzione di Pappo (Problema 2.7), Catalan si serve di una notazione algebrica per le uguaglianze tra quantità geometriche, mantenendo così uno stile più moderno che risulta essere maggiormente comprensibile ad uno studente che non ha familiarità con i testi storici. La soluzione di Catalan[5] è comunque differente da quelle che abbiamo avuto modo di analizzare anche se si avvicina a quelle proposte da Pappo (Problema 2.7) e da Huygens (Problema 2.13). In particolare la costruzione di Catalan differisce da quella di Pappo per due ragioni principali: all'interno della soluzione non viene divisa la parte in cui si ricava il risultato che Pappo ottiene dal lemma che precede la risoluzione e che invece è presentato come parte integrante della risoluzione; inoltre per arrivare all'uguaglianza tra quadrati, la tesi del lemma di Pappo, vengono utilizzate due strade differenti dai due autori; infatti, provando a trasporre il procedimento di Pappo sulla configurazione proposta da Catalan[6] si nota facilmente che Pappo sfrutta maggiormente la somma e la differenza delle superfici di quadrati e rettangoli, mentre Catalan, sempre restando fedele ad un approccio più moderno, utilizza principalmente le relazioni ricavate dalle proprietà dei triangoli. È importante sottolineare un'al-

[5]Tale risoluzione non è riportata qui per non appesantire la lettura ma è possibile ritrovarla in Appendice C a pagina 127.

[6]Queste due configurazioni risultano a prima vista differenti perché i due problemi sono formulati in modo tale da evidenziare solo alcune delle quattro soluzioni di questo problema. La soluzione evidenziata da Pappo è il segmento che viene tagliato da uno dei due lati non adiacenti al vertice contenuto dalla retta che contiene la soluzione, e dal prolungamento dell'altro lato non adiacente. Le soluzioni evidenziate da Catalan sono invece quelle contenute tra i due prolungamenti dei lati non adiacenti al vertice contenuto nella retta. Per maggior chiarezza rimandiamo alla Figura 2.7 a pagina 35 e alla figura C.1 in appendice a pagina 128

tra differenza che contraddistingue le due soluzioni: nonostante Catalan, come Pappo, sembri aver in mente una specifica soluzione all'inizio della risoluzione del problema, egli riesce comunque a trovare tutte e quattro le soluzioni del problema del quadrato. Pappo, e più in generale i matematici che utilizzavano un metodo di analisi puramente geometrico, abbiamo visto che spesso non riuscivano a determinare tutte le possibili soluzioni, rendendo di fatto il metodo di risoluzione geometrico più limitato rispetto all'analisi algebrica, che invece mostrava più chiaramente la presenza di quattro soluzioni.
A differenza di Catalan, altri autori di collezioni di esercizi hanno preferito presentare questo problema all'interno di capitoli riguardanti la risoluzione algebrica di problemi geometrici. Questo è, ad esempio, il caso di Desboves [Desboves 1892] e di una collezione di esercizi il cui autore è indicato laconicamente con F. J. Verosimilmente si tratta di Frère Justin, un fratello delle Scuole Cristiane ed uno degli autori di un corposo *Cours de Mathématiques Élémentaires.* La raccolta di esercizi risolti curata da F.J. è molto estesa, si contano infatti più di duemila esercizi, e mira a far in modo che il lettore si impadronisca dei metodi generali con cui si affrontano i problemi geometrici (analisi e sintesi) come pure dei metodi speciali: il metodo dei luoghi geometrici, delle figure ausiliarie, della trasformazione delle figure; il metodo algebrico, quello dei massimi e minimi.
Nel caso del testo di Desboves [Desboves 1892], a differenza di quello di Catalan, la collezione di esercizi non è composta solamente da esercizi di geometria ma il filo conduttore dei problemi presentati è la risoluzione attraverso metodi algebrici. Il testo si struttura in due parti, nella prima delle quali vengono presentati i metodi algebrici e le conoscenze teoriche necessarie per affrontare la risoluzione dei problemi presentati nella seconda parte. All'interno delle due parti è poi presente una suddivisione in sezioni, in particolare la sezione su cui abbiamo posto la nostra attenzione, ovvero quella in cui compare il problema del quadrato, è quella intitolata "trasformazione dei problemi geometrici in un'equazione". Questa sezione è preceduta da un incipit sul metodo che si intende utilizzare nella risoluzione dei problemi, e da una dichiarazione dell'autore dove dice di esser stato guidato dall'*Arithmetica Universalis* di Newton nella stesura di questo capitolo. L'incipit afferma quanto segue:

> La risoluzione di un problema di Geometria consiste, in generale, nel determinare la posizione di punti sconosciuti a partire da condizioni date. Ma quando si vuole applicare l'Algebra alla Geometria, si ricondurrà la determinazione di questi punti a quella di certe lunghezze che diventano allora le vere incognite della questione. Si suppone inoltre che le lunghezze date o incognite siano espresse con numeri, e che questi numeri siano a loro volta rappresentati da lettere; si è così ricondotti a risolvere un problema su grandezze le cui misure sono rappresentate da lettere, e la regola n^{o} 21 è ancora applicabile, soltanto deve essere completata come segue:
>
> Dopo aver tracciato tutte le linee note o incognite che figurano nel problema, così come le linee ausiliarie la cui introduzione può facilitare l'applicazione dei teoremi di Geometria, si cercheranno le

> equazioni che legano tra loro le lunghezze note o incognite senza fare inizialmente alcuna distinzione tra esse; e il problema sarà messo in equazione quando si saranno ottenute tante equazioni quante sono le incognite.([Desboves 1892], pag. 378)

Questa dichiarazione di intenti è perfettamente coerente con il metodo algebrico che abbiamo visto più volte applicato alle risoluzioni del Capitolo 2. Tuttavia Desboves fa un ulteriore passo avanti, dichiando esplicitamente quali teoremi e proprietà della geometria intende utilizzare:

> I teoremi di Geometria che si avrà inoltre occasione di utilizzare più frequentemente saranno i ben noti teoremi sui triangoli simili e sul triangolo rettangolo; spesso si applicheranno anche i teoremi che forniscono le espressioni della proiezione di un lato di un triangolo su un altro e quelle della somma o della differenza dei quadrati di due lati di un triangolo. Quando una figura sarà inscritta in un cerchio, si farà anche uso dei due teoremi noti sul quadrilatero inscrivibile.([Desboves 1892], pag. 379)

Anche in questo caso i teoremi richiamati da Desboves sono in linea con le proprietà generalmente applicate dai matematici nelle risoluzioni che abbiamo già avuto modo di analizzare.
All'interno della sua risoluzione del problema del quadrato, Desboves propone diversi metodi di risoluzione, alcuni basati su fonti storiche, altri originali dell'autore. Le prime due risoluzioni, ad esempio, sono proprio quelle proposte da Newton (vedi le due risoluzioni proposte nel Problema 2.19, pag. 70). Di queste due risoluzioni l'autore si limita a presentare l'analisi, la parte sintetica non è presente, come non lo è all'interno del testo originale di Newton. Nella risoluzione successiva[7], invece, l'autore fa una differente scelta delle incognite, optando come valori da trovare, per le lunghezze dei segmenti sui lati dell'angolo compresi tra il vertice e i punti in cui incontrano la secante. Questa scelta porta l'autore a ottenere un sistema di due equazioni in due incognite, che però l'autore stesso osserva essere più facilmente risolvibile considerando la somma e il prodotto delle incognite come valori da determinare. A questa risoluzione seguono due diversi metodi di costruzione della soluzione (parte sintetica). L'autore conclude proponendo altre scelte dell'incognita tramite le quali è possibile risolvere il problema, ma tali risoluzioni sono lasciate al lettore.
Nella raccolta di esercizi anonima che abbiamo analizzato sono presenti varie estensioni del problema del quadrato, nelle quali è presente una risoluzione di tipo algebrico in linea con quanto già visto. Tale collezione, tuttavia, differisce dalla precedente in quanto contiene solamente esercizi di natura geometrica, risolti con vari metodi (tra cui quello algebrico).
Il capitolo sul metodo di risoluzione algebrico presenta un incipit simile a quello già riportato di Desboves, dove si afferma che per risolvere un problema geometrico utilizzando una risoluzione algebrica è necessario scegliere un certo numero di incognite e determinare tante equazioni quante le incognite che

[7]Questa risoluzione non è stata inserita in questo paragrafo per non appesantire troppo la lettura, ma è possibile ritrovarla in Appendice C a pagina 128.

si sono scelte. Inoltre, all'inizio del capitolo l'autore propone una spiegazione su come tradurre le operazioni algebriche tra quantità note in costruzioni geometriche mediante l'uso della riga e del compasso, in modo da consentire al lettore di passare dal valore dell'incognita, determinato analiticamente, alla costruzione sintetica della soluzione[8]. Questo passaggio evidenzia l'importanza attribuita alla componente sintetica della risoluzione all'interno del manuale, un'osservazione tutt'altro che banale. Se ci si pone infatti in una prospettiva didattica più moderna, si può notare come il processo storico che ha portato a privilegiare la risoluzione analitica abbia avuto come conseguenza anche il progressivo abbandono della fase sintetica di costruzione della soluzione.
Analizzando manuali scolastici contemporanei, si osserva infatti che la risoluzione algebrica dei problemi geometrici è ancora trattata, ma essa si arresta generalmente alla determinazione del valore dell'incognita, senza proseguire nella costruzione geometrica della soluzione.
Concludiamo presentando un'ultima risoluzione che abbiamo avuto modo di studiare, che è quella presentata da Federico Occella all'interno di un opuscolo didattico intitolato *Intorno ad un problema di Pappo: nota di matematica elementare* [Occella 1897]. Questa risoluzione si configura come quella che utilizza il metodo di analisi più moderno tra quelli presentati; infatti, la risoluzione utilizza i metodi della geometria anlitica tipici dell'approccio scolastico moderno ai problemi di questo tipo. Non si cerca più di determinare la lunghezza di alcuni segmenti dati, ma le coordinate cartesiane di uno specifico punto (nel suo caso il punto medio del segmento compreso tra i lati dell'angolo). Il problema è quindi risolto determinando, per mezzo di queste coordinate, due equazioni che rappresentano le curve la cui intersezione determinerà il punto cercato. Questo metodo permette quindi non solo di mostrare un'analisi chiara, ma anche di determinare un modo efficace per costruire la soluzione grafica.
Lo scopo di Federico Occella all'interno del suo opuscolo è quello di presentare una generalizzazione delle soluzioni proposte da Newton, infatti all'interno della sua trattazione parte dal caso più generale del problema di Pappo—che lui denomina "Problema di Pappo generalizzato" ma che, in realtà, non è altro che il problema di neusis generale che abbiamo presentato all'interno del Capitolo 1—per poi arrivare, attraverso la progressiva aggiunta di ipotesi, alla trattazione del problema del quadrato.

Concludiamo quindi affermando che la dualità di soluzioni che abbiamo osservato nell'analisi storica viene mantenuta anche all'interno della trattazione didattica di questo problema. Alcuni problemi legati all'analisi geometrica, quale ad esempio il numero variabile di soluzioni trovate a seconda della formulazione del problema, sembrano essere stati risolti in questa trattazione più moderna. Inoltre, emerge che il problema si configura come un ottimo esempio per presentare agli studenti sia una risoluzione di tipo geometrico, che una di tipo algebrico, mantenendo infatti in entrambe le risoluzioni un livello di difficoltà compatibile con le conoscenze di uno studente di scuola secondaria.

[8]L'incipit riguardante il metodo di risoluzione algebrico e la traduzione delle operazioni algebriche in costruzioni geometriche si possono trovare alle pagine 153-156 del testo [F.J. 1896]

L'importanza di questa dualità non è un retaggio del passato ma è stata ribadita a livello dei programmi scolastici stessi. Ad esempio, nei programmi scolastici stilati dalla Commissione Brocca[9] leggiamo:

> Un traguardo fondamentale nello studio della geometria è il piano cartesiano, inteso come modello del piano euclideo. *Con la sua introduzione, per affrontare i problemi geometrici diventano disponibili sia gli strumenti della geometria classica sia quelli della geometria analitica; lo studente è così incoraggiato a scegliere di volta in volta l'approccio più adatto*, in base alla naturalezza, alla chiarezza espressiva e alla semplicità che esso consente nel caso specifico considerato.

Il problema del quadrato si configura dunque come un'ottima fonte storica da proporre agli studenti in diversi ambiti del curriculum scolastico, permettendo di stabilire un collegamento tra il dominio della geometria e quello dell'algebra. Tale collegamento può favorire una comprensione più profonda della corrispondenza tra queste due discipline, dalla quale ha avuto origine la geometria analitica.

3.2 Il percorso verso un'indagine matematica significativa

All'interno dei capitoli precedenti ci è capitato più volte di evidenziare la ricchezza di metodi risolutivi che contraddistingue il problema del quadrato. Le implicazioni didattiche che esporremo in questa sezione nascono proprio da questa osservazione, congiuntamente allo studio di alcuni manuali in cui il problema è presentato.

Come suggerisce il titolo di questa sezione, un problema con cui spesso ci si scontra all'interno dell'attività didattica contemporanea è la presentazione di esercizi dalla risoluzione non banale. Infatti, ciò che più contraddistingue la matematica scolastica è l'idea che per risolvere un certo esercizio occorra conoscere una procedura da applicare. Questa idea, tuttavia, porta allo sviluppo di competenze puramente mnemoniche ma non permette di sviluppare tutte le competenze necessarie per affrontare il *problem solving* che richiede la comprensione dei concetti e delle motivazioni che ne stanno alla base.

Queste osservazioni si sono sviluppate in particolare a partire dalla lettura di un passaggio contenuto all'interno della collezione anonima di esercizi geometrici che abbiamo già citata all'interno del paragrafo precedente [F.J. 1896]:

> Utilità degli esercizi di geometria. — Noi crediamo che sia necessario esercitare gli studenti a trattare da soli un numero abbastanza

[9]La Commissione Brocca fu un gruppo di lavoro istituito dal Ministero della Pubblica Istruzione alla fine degli anni '80 per rinnovare i programmi della scuola secondaria superiore, in particolare del primo biennio in vista del prolungamento dell'obbligo scolastico fino al sedicesimo anno di età. I cosiddetti programmi Brocca furono quindi proposte sperimentali di curricoli e indicazioni didattiche, orientate a una formazione più moderna, interdisciplinare e con percorsi più flessibili.

> grande di questioni, e si può giustificare questa affermazione con due ragioni principali:
>
> 1° L'esposizione sintetica dei teoremi di un corso elementare non sviluppa lo spirito di ricerca, poiché nulla è lasciato all'iniziativa dello studente; bisogna dunque stimolare le sue riflessioni personali proponendogli esercizi da risolvere e portarlo così a fare uso di tutte le nozioni che ha acquisito.
>
> 2° L'estrema varietà degli esercizi geometrici, l'assenza di qualsiasi metodo abbastanza generale, o almeno abbastanza pratico, che conduca in modo sicuro alla soluzione di una questione nuova, esigono che lo studente si dedichi a numerose ricerche, se vuole prepararsi seriamente a far fronte agli imprevisti che gli riservano gli esami da sostenere. ([F.J. 1896])

Questo passaggio sottolinea l'importanza della ricerca autonoma da parte dello studente di un metodo che possa portare alla risoluzione di dato problema. L'autore ci fa notare che la consueta pratica didattica dove lo studente è osservatore passivo di ciò che gli è presentato non gli permette di sviluppare le abilità necessarie alla risoluzione di problemi non banali, un'abilità può essere acquisita solamente facendo esperienza di questo tipo di attività.
Questa tesi non è sostenuta solo in un testo ed attraversa diverse epoche storiche. Infatti, in un articolo pubblicato nel 1996 gli autori, Massimo Galuzzi e Daniela Rovelli affermano che

> Chi consideri lo stato miserando al quale spesso si è ridotto l'insegnamento dei 'problemi con discussione' nei nostri licei (i problemi sembrano spesso scelti fra i più stupidi, giusto al fine di dar luogo ad una discussione di assoluta banalità) potrà forse trarre sollievo e conforto dall'esame di questo affascinante 'problema del quadrato', la cui discussione, durata per secoli, non smette di avere elementi di vivo interesse. ([Galuzzi-Rovelli 1996])

Il problema analizzato si configura come un perfetto esempio delle tipologie di problemi che possono portare gli studenti a sviluppare una ricerca matematica della soluzione che vada oltre alla semplice applicazione di procedure. Lo studente in questo processo è stimolato a mettere in pratica le conoscenze acquisite, sviluppando contemporaneamente delle capacità di problem solving.
Abituare lo studente a interfacciarsi con problemi di questo tipo non aiuta solo lo studente ad allenare le competenze già citate, ma può inoltre favorire lo sviluppo di una visione della matematica meno procedurale.

3.3 La scelta dell'incognita

In questa sezione analizziamo il tema della scelta dell'incognita all'interno della risoluzione algebrica di un problema, tema già evidenziato da Cartesio e Newton. Il tema è stato affrontato nel corso nel corso della storia per confrontare

metodi diversi di soluzione, soprattutto quando queste sono di carattere algebrico per cui, a seconda dell'incognita scelta, la ricerca delle soluzioni può presentare livelli di difficoltà molto variabili. Anche nella storia degli insegnamenti, il tema è stato oggetto di diverse riflessioni tra cui abbiamo scelto quella di Giuseppe Di Dia,[10] che si interroga sulle implicazioni didattiche che tale questione può comportare.
Procediamo con ordine analizzando prima ciò che ritroviamo nelle fonti storiche e successivamente le implicazioni a livello scolastico di questo problema.
Abbiamo già osservato che sia Cartesio sia Newton affrontarono il tema della scelta dell'incognita. Ricordiamo (si veda p. 46) che Cartesio richiamò, a conclusione della risoluzione algebrica del problema del quadrato, l'attenzione dei lettori sulla circostanza che, partendo da un'incognita differente, l'equazione sarebbe potuta risultare più complicata, invitando i lettori, nel caso di problemi associati ad equazioni troppo complicate, a riformulare il problema in termini di un'incognita differente. Oltre a questo commento, Cartesio si pronunciò in almeno un'altra occasione sulla questione. Infatti, in una lettera indirizzata alla principessa Elisabetta Carlotta del Palatinato, Cartesio scrisse:

> Non temo, del resto, di supporre più quantità incognite per ridurre la questione a termini tali che essa non dipenda che da questi due teoremi; al contrario, preferisco supporne più che meno, poiché in questo modo vedo più chiaramente ciò che faccio e, districandole, trovo le vie più brevi ed evito le moltiplicazioni superflue.

Cartesio non stabilì criteri oggettivi per ottimizzare la scelta dell'incognita, proponendo piuttosto di procedere per tentativi, individuando di volta in volta l'incognita che consenta di ottenere il risultato più conveniente in termini di semplicità dell'equazione.
A tale impostazione si contrappone l'approccio newtoniano. Egli, infatti, pose in evidenza la difficoltà insita nella scelta dell'incognita ma propose anche criteri oggettivi grazie ai quali pervenire a una scelta più appropriata. Abbiamo già riportato (p. 72) un passo tratto dall'*Arithmetica Universalis* dove Newton avanzò un possibile criterio per la scelta dell'incognita.
Sulla stessa linea si pone la raccolta di esercizi di Desboves che suggerisce un metodo di selezione dell'incognita volto a ottenere una riduzione del grado dell'equazione associata. Riportiamo di seguito l'estratto del testo che contiene tale osservazione.

> Nel metodo precedente si è ottenuta un'equazione di quarto grado che forniva le quattro radici CA, CA', CA'', CA''', corrispondenti alle quattro posizioni della secante. Ma si comprende che, se si prendesse come incognita ausiliaria una grandezza che, per le quattro posizioni della secante, assumesse soltanto due valori, si potreb-

[10] Non si conosce molto questa figura di insegnante che tra il 1920 ed il 1921 fu insegnante alla scuola normale femminile "Lambruschini" di Genova e all'analoga istituzione "Agnesi" di Milano. L'articolo di Di Dia apparve sulla rivista *Il Pitagora*, fondata a Palermo nel 1895 e diretta da Gaetano Fazzari. Si trattava di un mensile dedicato alla diffusione tra gli allievi delle scuole superiori della storia e della didattica della matematica.

> be ricondurre la determinazione di tale incognita alla risoluzione di un'equazione di secondo grado. ([Desboves 1892], pag 390)

Trovare un'equazione associata di grado minore risulta, infatti, fondamentale per comprendere la natura del problema (e di conseguenza i possibili metodi di costruzione dello stesso). In ambito scolastico, un'osservazione di questo tipo assume un rilievo ancora maggiore, poiché gli studenti non dispongono degli strumenti necessari per affrontare equazioni di grado arbitrario. D'altra parte, è altrettanto vero che lo studente, proprio in ragione di tali limitazioni, risulta maggiormente incentivato, rispetto a chi possiede strumenti più avanzati, a effettuare diversi tentativi variando la scelta dell'incognita, qualora la sua prima scelta conduca a un'equazione per lui non risolvibile.
Infine, un'ulteriore considerazione in merito alla scelta dell'incognita è proposta da Di Dia nel suo articolo *Sul classico problema elementare di Pappo* [Di Dia 1916-17]. Si riporta di seguito l'*incipit* del lavoro, nel quale il problema viene presentato secondo una prospettiva legata alla pratica didattica.

> Molti problemi di 2° grado offrono risoluzioni semplici ed eleganti, o molto complicate o qualche volta riescono di impossibile risoluzione nei limiti delle conoscenze algebriche degli studenti d'Istituto Tecnico (sezione fisico-matematica) a seconda della scelta conveniente della o delle incognite. La loro opportuna scelta non è sempre relativamente facile a prima vista e non è quindi raro il caso di candidati alla licenza[11], anche valorosi, i quali dopo sperimentati vani tentativi lascino il foglio in bianco.
> Talaltra volta avvenne di presentare il lavoro scritto incompleto o appena iniziato perchè dopo rintracciata la via maestra conducente alla risoluzione, era già troppo tardi: le sei ore concesse erano già trascorse.
> Certo è utile che durante l'anno scolastico si abituino gli studenti a trovare le risoluzioni più semplici a furia di tentativi personali: ma agli esami di licenza mi sembra giusto sia loro — quando la indole del problema lo consenta — additata la incognita o le incognite.
> In questa nota mi propongo principalmente di far vedere come la risoluzione del problema elementare di Pappo — abbastanza noto — possa offrire una risoluzione algebrica *facile* o *complicata* od *impossibile* a seconda della scelta dell'incognita.

Il professor Di Dia porta alla luce una questione ampiamente discussa all'interno della pratica scolastica: il problema del tempo. È giusto sottoporre agli studenti un problema la cui risoluzione non sia banale, tale da condurli a un'indagine matematica significativa all'interno di un intervallo di tempo limitato? Vi sono certamente contesti in cui ciò risulta possibile; tuttavia, secondo l'autore, l'esame di Stato non dovrebbe rientrare tra questi. Egli, infatti, pone l'accento sul fatto che la scelta dell'incognita — questione che, come si è visto, ha storicamente suscitato un certo interesse — può condurre a risultati

[11] Attuale esame di stato.

caratterizzati da livelli di difficoltà anche molto diversi. Inoltre, non è affatto immediato prevedere gli esiti di tale scelta senza procedere alla risoluzione effettiva del problema.
Per provare questo punto l'autore stesso mostra all'interno del suo articolo quattro risoluzioni del problema, due delle quali sono risoluzioni algebriche simili a quelle già incontrate, una è di tipo geometrico e l'ultima invece sfrutta le conoscenze di geometria analitica. Tutte queste risoluzioni sono perfettamente gestibili da uno studente alla fine del suo percorso scolastico, ma non tutte hanno lo stesso grado di complessità.
La proposta del professor Di Dia, volta a evitare le difficoltà derivanti dai vincoli propri del contesto scolastico, consiste pertanto nel suggerire agli studenti l'incognita da adottare in situazioni come quelle sopra descritte, senza tuttavia trascurare l'importanza della ricerca autonoma della soluzione in contesti meno vincolati.

Capitolo 4

L'integrazione tra storia e didattica della matematica: potenzialità e limiti di questo approccio

In quest'ultimo capitolo andremo a fare alcune osservazioni su due temi della ricerca in didattica della matematica sui quali il nostro percorso ci ha portato a porre l'attenzione.
Tali osservazioni nascono da due domande fondamentali: quale utilità può avere la storia della matematica nel contesto didattico? Quale ruolo gioca l'errore all'interno dell'apprendimento dello studente?
La prima domanda deriva dallo studio di molti dei testi analizzati nel capitolo precedente, in particolare dal manuale di più recente pubblicazione, dal titolo *Exploring Classical Greek Construction Problems with Interactive Geometry Software* [Meskens–Tytgat 2017]. Lo scopo degli autori è presentare una raccolta di attività da svolgere in ambiente di geometria dinamica per mostrare agli studenti in primo luogo i limiti delle costruzioni con riga e compasso e in secondo luogo alcune tecniche di risoluzione dei problemi non piani classici[1]. Nel raggiungere questo obiettivo gli autori ricostruiscono la storia di questi problemi, ripercorrendo insieme agli studenti le varie proposte di risoluzione di un dato problema, mostrando la varietà di metodi risolutivi utilizzati dai matematici e l'impossibilità di riuscire a trovarne uno che risultasse accettabile per tutti. Queste osservazioni ci hanno fatto riflettere sull'importanza di una disciplina come la storia della matematica all'interno dell'ambiente scolastico, portandoci a interrogarci su quali potenzialità può avere un approccio di questo tipo e come influisce sull'apprendimento degli studenti.
Possiamo invece affermare che la seconda domanda sia in parte una conseguenza diretta della prima. La parte storica che abbiamo trattato all'interno dei capitoli precedenti e che, come abbiamo osservato, viene più volte richiamata all'interno delle attività didattiche, è ricca di errori, passi falsi e incertezze,

[1]Facciamo qui riferimento ai problemi non piani citati all'interno del Capitolo 1: la duplicazione del cubo, la trisezione di un angolo e la quadratura del cerchio.

con cui i grandi matematici nella storia si sono dovuti confrontare. È quindi spontaneo chiederci: quale ruolo ha l'errore nello sviluppo storico del sapere matematico? E, conseguentemente, quale ruolo può avere l'errore nel percorso di apprendimento di uno studente?
La nostra discussione verterà quindi sul valore della storia della matematica e degli errori all'interno dell'apprendimento, mostrando come questi due temi possano rivelarsi interconnessi e come questo collegamento venga evidenziato all'interno di alcuni risultati di ricerca in didattica della matematica.

4.1 Motivazioni e modalità di utilizzo della storia nella didattica

In questo paragrafo ci proponiamo di analizzare il complesso legame tra la storia della matematica e la didattica, interrogandoci in particolare sulla possibilità, e in caso affermativo sulle modalità, con cui la storia della matematica possa essere impiegata a fini didattici.
Come già anticipato nell'introduzione, la nostra curiosità su questo tema nasce dall'analisi del testo *Exploring Classical Greek Construction Problems with Interactive Geometry Software*, nel quale gli autori affermano che

> La storia della matematica è importante per gli insegnanti di matematica. Essa offre loro l'opportunità di permettere agli studenti di cogliere le motivazioni alla base dell'introduzione di determinati concetti, chiarisce che la matematica è un'attività non lineare e consente agli studenti di intravedere le persone che hanno contribuito alla sua costruzione in tutta la loro dimensione umana. Inoltre, rende gli studenti consapevoli del fatto che spesso si trovano ad affrontare le stesse difficoltà che incontrarono gli stessi autori nel tentativo di comprendere determinati concetti. [Meskens–Tytgat 2017]

Tuttavia, nonostante questa visione ottimistica circa le possibilità di integrazione tra queste due discipline, un'analisi più approfondita della letteratura ha messo in luce l'esistenza di posizioni fortemente contrastanti su questo tema, nonché di numerose criticità evidenziate in diversi studi.
In primo luogo, numerosi studi si limitano a descrivere le attività svolte in classe con gli studenti, mettendone in evidenza le potenzialità e indicando gli obiettivi raggiunti attraverso ciascuna di esse. Esempi di attività di questo tipo sono riportati in [Furinghetti 1997], dove tuttavia si tenta anche di inquadrarle all'interno di una classificazione relativa alle motivazioni che ne hanno guidato la progettazione. In letteratura esistono numerose classificazioni come quella proposta da Fulvia Furinghetti nel suo articolo, alcune anche significativamente più complesse; tuttavia, allo stato attuale, non siamo riusciti a individuarne alcuna che possa costituire una sintesi efficace delle altre.
Nonostante ciò, riteniamo utile presentare almeno una delle tassonomie emerse dagli articoli analizzati, al fine di discutere, in riferimento ad essa, le potenzialità e le criticità che possono emergere dall'impiego di un approccio storico nella didattica della matematica.

La classificazione a cui abbiamo scelto di far riferimento è quella presentata da Uffe Thomas Jankvist in un articolo del 2009 intitolato *A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education* [Jankvist 2009]. L'obiettivo di Jankvist, all'interno dell'articolo, è quello di presentare una tassonomia delle motivazioni (*whys*) e una delle modalità (*hows*) attraverso cui la storia della matematica è impiegata nella didattica. L'autore raccoglie numerosi riferimenti ad altre tassonomie, proponendo un confronto con quella da lui elaborata. Tuttavia, quest'ultima si distingue dalle altre classificazioni considerate per la netta separazione tra motivazioni e modalità di integrazione della storia nelle attività didattiche. L'autore sottolinea infatti come, nelle altre tassonomie, queste due dimensioni vengano spesso confuse, rendendole meno chiare e più difficili da applicare.
La prima classificazione riguarda le motivazioni per le quali la storia è generalmente utilizzata nella didattica. Jankvist distingue tali motivazioni in due categorie: da un lato, quelle che considerano la storia uno strumento per il raggiungimento di un fine (*history-as-a-tool*); dall'altro, quelle che attribuiscono all'insegnamento della storia stessa il ruolo di obiettivo finale (*history-as-a-goal*). Alcuni esempi di motivazioni che ricadono nella prima categoria sono:

- La storia può essere utilizzata come strumento per catturare l'attenzione degli studenti e mantenere viva la loro curiosità verso la disciplina.

- Lo studente può rispecchiarsi nelle difficoltà incontrate dai grandi matematici della storia, sentendosi così meno in soggezione davanti ad una disciplina così rigorosa; è infatti possibile che lo studente incontri delle difficoltà nella comprensione di un concetto la cui interpretazione ha rappresentato una sfida anche per i matematici che l'hanno teorizzato.

- La storia può fornire un ordine naturale di costruzione dei concetti matematici. Il principio secondo cui lo studente apprende attraverso lo stesso percorso con cui il sapere matematico è stato costruito si chiama principio storico-genetico[2]. Tale principio non si applica solamente all'intero sapere, ma risulta valido anche su un singolo argomento.

- Un altro argomento di tipo evolutivo é quello che evidenzia il parallelismo tra i dubbi e gli ostacoli che possono sorgere durante il processo di apprendimento degli studenti e quelli che sono effettivamente sorti nell'arco della storia durante la costruzione dei concetti matematici.

- La storia può essere inoltre usata come strumento per identificare gli ostacoli epistemologici a cui inevitabilmente si andrà incontro nella costruzione della conoscenza. Il concetto di ostacolo epistemologico fu introdotto per la prima volta da Bachelard[3] nel 1938 e ripreso successivamente all'in-

[2]Questo principio prende ispirazione dalla legge formulata nel 1874 dal biologo tedesco e filosofo naturale Ernst Haeckel che afferma che "l'ontogenesi ripercorre la filogenesi". In biologia questa legge si riferisce al fatto che lo sviluppo di un embrione animale ripercorre l'evoluzione storica della sua specie.

[3]Gaston Bachelard è stato un filosofo della scienza francese che ha proposto una visione storica e non lineare del progresso scientifico, fondata su rotture, errori e trasformazioni del

terno della *teoria delle situazioni didattiche* di Brousseau[4]. Quest'ultimo afferma che

> Gli ostacoli di autentica origine epistemologica sono quelli dai quali non si può né si deve prescindere, a causa del loro ruolo formativo nel processo di costruzione della conoscenza. Essi si ritrovano nella storia stessa dei concetti.

Pertanto Brousseau propone un'utilizzo della storia, presentata con gli opportuni adeguamenti, per identificare tali ostacoli e per comprendere come poterli superare.

Si osservi come all'interno della prima categoria rientrino motivazioni molto diverse tra loro. Mentre le prime due sono orientate ad agire sulla dimensione motivazionale e affettiva dello studente, le altre mirano al superamento degli ostacoli cognitivi che possono emergere nel processo di costruzione della conoscenza. Non è difficile immaginare come altre tassonomie possano quindi aver raggruppato le motivazioni evidenziandone caratteristiche differenti rispetto a quella qui proposta.
Prima di presentare argomenti appartenenti alla seconda categoria, è bene specificare che l'autore con l'espressione *history-as-a-goal* non intende promuovere la conoscenza della storia in sé come insieme di fatti, ma piuttosto la conoscenza degli aspetti evolutivi della disciplina matematica.
Mostriamo ora qualche esempio di motivazione afferente alla seconda categoria presentata:

- La storia mostra la matematica come una disciplina che si è costruita nel tempo, come qualcosa che non è semplicemente pre-esistente rispetto all'uomo, ma qualcosa che si è evoluto grazie alla presenza di forze esterne ed interne alla disciplina stessa.

- La storia della matematica mostra quest'ultima come un prodotto dell'uomo, i cui significati sono stati negoziati nel tempo fino a raggiungere una visione comune.

Le questioni emergono dall'utilizzo della storia della matematica nel contesto didattico sono di tipo differente a seconda della motivazione che ci ha spinto

sapere. È noto soprattutto per il concetto di ostacolo epistemologico e per la sua opera principale pubblicata nel 1938, *La formation de l'esprit scientifique.* All'interno di questo scritto, infatti, possiamo leggere che

> È in termini di ostacoli che bisogna porre il problema della conoscenza scientifica, in quanto si conosce contro una conoscenza anteriore, distruggendo conoscenze mal fatte, superando quello che nello spirito stesso fa da ostacolo alla spiritualizzazione.

[4]Guy Brousseau è un pedagogista e didatta francese, considerato uno dei principali fondatori della didattica della matematica. La sua ricerca si concentra sull'analisi dei processi di insegnamento e apprendimento, con particolare attenzione alle condizioni in cui si costruisce il sapere matematico. È noto soprattutto per aver elaborato la *teoria delle situazioni didattiche*, nella quale attribuisce un ruolo centrale alle interazioni tra studente, insegnante e ambiente (milieu), inteso come contesto strutturato entro cui l'allievo è posto nella condizione di costruire attivamente le proprie conoscenze.

a questo utilizzo. Se prendiamo il caso delle motivazioni contenute nella seconda categoria (*history-as-a-goal*), le questioni che verranno trattate saranno a livello *meta*[5] e concernenti l'evoluzione della matematica come disciplina; se invece consideriamo le questioni generate dall'utilizzo della storia come strumento (*history-as-a-tool*), esse saranno prevalentemente questioni interne alla matematica, riguardanti i concetti stessi presentati nella disciplina e le loro relazioni. Tuttavia, è importante sottolineare come anche attraverso l'utilizzo della storia come strumento possono sollevarsi questioni a livello *meta* che però non riguarderanno la sfera evolutiva della disciplina.

Passiamo ora all'analisi delle modalità con cui la storia viene integrata all'attività didattica. Anche in questa occasione seguiremo la tassonomia proposta da Jankvist. Egli individua tre principali modalità con cui la storia viene portata in classe: la prima è attraverso l'aggiunta di fatti storici (biografie, aneddoti, eventi, date) al normale metodo si insegnamento proposto in classe (*illumination approaches*). La seconda modalità consiste invece nella progettazione di unità didattiche autonome basate sulla storia (*modules approaches*). I metodi riconducibili a questa categoria sono molteplici e includono, ad esempio, l'analisi di fonti storiche originali, la realizzazione di progetti di gruppo da parte degli studenti, lo svolgimento di ricerche su specifici argomenti e la presentazione di strumenti meccanici legati alla storia della matematica. L'ultima categoria comprende gli approcci basati sull'utilizzo della storia in maniera indiretta (*history-based approaches*). In quest'ultimo caso la storia non è presentata in modo diretto agli studenti ma è utilizzata come strumento di progettazione delle attività didattiche, ad esempio utilizzando l'evoluzione storica di un concetto come struttura da seguire nell'organizzazione della pratica didattica.
È importante sottolineare come tutti e tre questi approcci possano essere impiegati in diversa misura all'interno del contesto didattico. È infatti possibile proporre tali attività in modo sporadico oppure farne un uso più sistematico, integrandole nel programma scolastico.
Anche nel caso delle modalità non è difficile immaginare che possano esistere altre tassonomie che mettono in luce aspetti differenti delle modalità utilizzate, come ad esempio il tipo di materiali utilizzati, il tipo di storia impiegata nell'attività (fattuale, concettuale...) o le modalità di lavoro proposte agli studenti (progetti, ricerche...).

Le modalità e le motivazioni per l'utilizzo di un approccio storico nella didattica sono strettamente connesse tra loro ma, come già detto in precedenza, non bisogna confonderle. Il nostro scopo ora è quello di presentare le relazioni che possono esserci tra questi due elementi, facendo riferimento alle tassonomie appena presentate.
Idealmente esistono sei possibili interconnessioni tra i due insiemi di categorie proposti precedentemente ma non tutte hanno la stessa rilevanza. Infatti,

[5]Il livello *meta* di una questione matematica riguarda la riflessione sul processo stesso di produzione e apprendimento della matematica, piuttosto che sul suo contenuto specifico. In questo livello non si opera sugli oggetti matematici, ma sulle modalità con cui essi vengono definiti, rappresentati, insegnati o compresi.

considerando ad esempio l'*illumination approach*, ci rendiamo conto di come questa strategia sia molto più efficace nel caso in cui il nostro scopo sia quello di agire sugli aspetti motivazionali e affettivi dello studente (quindi nel caso della categoria *history-as-a-tool*), rispetto al caso in cui il nostro obiettivo sia quello di sollevare questioni a livello *meta*. Per quest'ultimo obiettivo l'approccio più adatto è sicuramente il *modules approach*, che risulta anche essere il più idoneo per trattare gli aspetti cognitivi e concettuali (anch'essi appartenenti alla categoria *history-as-a-tool*); possiamo quindi affermare che entrambe le categorie di obiettivi hanno una stretta interconnesione con il *modules approach*. Non possiamo dire lo stesso dell'*history-based approach* che, non coinvolgendo la storia in modo diretto, risulta abbastanza inefficace nel sollevare questioni *meta* riguardanti l'evoluzione storica della disciplina (facciamo qui riferimento agli obiettivi della categoria *history-as-a-goal*). Tuttavia, quest'ultimo approccio presenta un forte legame con il principio storico-genetico, che si configura come la principale motivazione per il suo utilizzo nella didattica.

Dopo aver analizzato le motivazioni che evidenziano le potenzialità dell'integrazione della storia nelle attività didattiche, ci soffermeremo ora sulla presentazione delle criticità legate a tale approccio.
Le criticità che analizzeremo sono quelle presentate da Jankvist all'interno del suo articolo. Tali criticità vengono suddivise in due categorie: quelle che riguardano le motivazioni a favore dell'utilizzo della storia nella didattica, e quelle che riguardano le modalità.
Iniziamo la nostra discussione da quelle che ricadono in questa prima categoria. Rispetto alle motivazioni concernenti l'interesse degli studenti una critica che viene spesso sollevata è la seguente: la storia rende davvero la matematica più interessante? Se i ragazzi non amano la storia quanto non amano la matematica, di quale utilità può essere presentare questa disciplina attraverso un approccio storico?
Una seconda critica mossa rispetto all'utilizzo della storia come strumento per raggiungere una miglior comprensione dei concetti matematici è quella che sostiene che questo approccio possa confondere maggiormente i ragazzi, piuttosto che aiutarli nella comprensione di un concetto. Coloro che, infatti, presentano delle difficoltà in matematica, potrebbero rivelarsi interessati a un cambiamento nella classica routine scolastica ma l'aggiunta di nuove informazioni potrebbe rendere più difficile la comprensione, anziché semplificarla.
Una critica alle motivazioni concernenti gli aspetti evolutivi della disciplina, invece, è quella che mette in luce le difficoltà nel ricostruire il percorso attraverso cui alcuni concetti si sono sviluppati. La storia che conosciamo è sempre una ricostruzione e pertanto è presentata in modo soggettivo, attraverso l'interpretazione dello storico. Questa critica porta la motivazione basata sul principio storico-genetico a perdere di senso perché, se non è possibile ricostruire come un concetto si è sviluppato, non potrò servirmi di questa informazione per costruire un percorso di apprendimento ad esso parallelo.

Un secondo insieme di critiche è quello relativo ai metodi di integrazione della storia nelle attività didattiche. L'*illumination approach* viene spesso criticato

in quanto i fatti narrati all'interno di questo tipo di attività sono per lo più aneddoti che hanno poco a che vedere con la realtà. Infatti, questo tipo di narrazione ha generalmente lo scopo di incentivare l'interesse per la disciplina piuttosto che riportare dei fatti storicamente accurati.
Un'altra fonte di critiche è l'utilizzo dei testi storici originali all'interno del contesto didattico. Questi testi, infatti, non sono testi didattici e lo studente potrebbe trarne elementi di confusione, in quanto lo sviluppo della storia presentato attraverso le fonti originali non è qualcosa di lineare, ma qualcosa di contorto e difficile da comprendere con le conoscenze che egli ha a disposizione.
Un'ultima critica, mossa questa volta all'*history-based-approach*, è che lo sviluppo storico dei concetti è stato possibile per mano degli adulti e che, pertanto, possa non essere adatto ad essere utilizzato come guida nel processo di apprendimento degli studenti. Concentrandosi troppo sulla storia, infatti, si rischia di perdere di vista il vero obiettivo della pratica educativa, che deve mettere gli studenti al centro, i quali dovranno quindi essere anche il punto di partenza nella progettazione della pratica stessa.

La classificazione proposta da Jankvist ci permette di analizzare e di classificare gli argomenti a favore e quelli contrari all'utilizzo della storia della matematica all'interno della didattica, tuttavia non ci fornisce una chiara visione di quale tra queste due opinioni prevalga sull'altra.
Nonostante le numerose critiche rivolte a questo tipo di approccio, la letteratura offre diversi studi che presentano esempi di esperienze scolastiche legate alla storia della matematica, nonché spunti utili a orientare una progettazione didattica fondata su di essa. Riteniamo pertanto che, pur nella complessità del rapporto tra queste due discipline, la storia della matematica e la didattica possano trovare un punto d'incontro e integrarsi efficacemente nel contesto educativo.

4.2 Valorizzazione dell'errore: tra storia e didattica

Ripartendo dalla citazione di Meskens e Tytgat riportata all'inizio del capitolo, ci siamo interrogati sull'utilizzo della storia nella didattica, con l'obiettivo di rispondere al seguente quesito: è possibile impiegare la storia della matematica per far comprendere agli studenti che la costruzione del sapere matematico non avviene in modo lineare, ma attraverso difficoltà ed errori che, una volta superati, hanno contribuito al progresso della disciplina? Da tale consapevolezza può inoltre derivare un atteggiamento di valorizzazione dell'errore come elemento fondamentale nel processo di apprendimento e nella costruzione di significato?
Alcune risposte, seppur parziali, emergono dalla letteratura, in particolare nel testo [Borasi 1996] di Raffaella Borasi e nell'articolo [Boaler & Anderson 2018] di Jo Boaler, che sono stati oggetto di analisi. Presentiamo dunque i principali risultati a cui lo studio ha condotto.

Lo scopo con cui la storia della matematica viene impiegata all'interno di questi testi rientra nella categoria *history-as-a-tool* presentata precedentemente, in quanto la storia è utilizzata con l'obiettivo di veicolare l'importanza del dubbio e dell'errore all'interno del processo di apprendimento. Per quanto riguarda, invece, le modalità con cui la storia è integrata nella pratica educativa, non è presente una preferenza netta per uno degli approcci presentati nel paragrafo precedente; i due testi contengono per lo più spunti di attività che possono essere proposte in classe per raggiungere questo fine, pertanto le modalità impiegate possono variare in dipendenza dal contesto in cui le attività vengono presentate.

Raffaella Borasi, attualmente ricercatrice e docente alla University of Rochester, presenta all'interno del suo libro *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors* (1996) una strategia didattica che prende l'errore come punto di partenza per stimolare un'indagine matematica, che possa portare lo studente alla costruzione di nuovi significati, oltre che al superamento dell'errore stesso. In questa ottica l'errore è presentato come qualcosa da sfruttare, un'occasione per il progresso, piuttosto che qualcosa da eliminare. Questa concezione riprende in parte la concezione dell'errore presentata da Gaston Bachelard (vedi nota 3 a pagina 95) secondo la quale l'errore è parte indispensabile del processo di costruzione della conoscenza; infatti egli credeva che il vero progresso avvenisse contro la conoscenza anteriore. Inoltre, la teoria di Borasi si colloca all'interno di un quadro costruttivista[6], secondo cui la conoscenza matematica dell'individuo è qualcosa che si costruisce attraverso l'esperienza, la riorganizzazione personale dei significati con cui lo studente entra in contatto e attraverso l'interazione con l'ambiente e con le persone all'interno del contesto di apprendimento.
La strategia proposta da Borasi mira a stimolare nello studente un processo di indagine a partire dall'analisi di una situazione di errore, inteso nel senso più ampio del termine: esso può consistere nell'applicazione di una tecnica inadeguata, nella formulazione di una congettura errata o incompleta, in una dimostrazione scorretta o basata su concetti non chiaramente definiti, oppure in una contraddizione emersa nel corso di una determinata attività. Gli errori proposti nelle attività possono avere diversa origine: alcuni sono prodotti dagli studenti stessi, altri derivano da contesti esterni e vengono introdotti dall'insegnante, altri ancora sono riconducibili a errori o situazioni di contraddizione emersi nel corso dello sviluppo storico di specifici concetti matematici. Nell'ambito della presente ricerca, rivolgiamo la nostra attenzione in particolare a quest'ultima tipologia di errori.
L'autrice all'interno del quarto capitolo del suo libro [Borasi 1996] riporta quattro casi studio dove ripercorre l'indagine che lei o altri matematici hanno avuto modo di svolgere a partire dalle domande che una specifica situazione contraddittoria suscitava in loro. Tra quelli proposti, un caso particolarmente interessante è quello riguardante il quinto postulato di Euclide[7], che per secoli è stato

[6]Il *costruttivismo* è un quadro teorico che si contrappone all'idea che guida l'insegnamento tradizionale, che vede l'apprendimento come pura trasmissione della conoscenza dal maestro all'allievo. Uno delle figure fondamentali nello sviluppo della *teoria costruttivista* è Jean Piaget, psicologo, pedagogista e filosofo svizzero del secolo scorso che ricordiamo per i suoi studi sperimentali dei processi cognitivi legati alla costruzione della conoscenza nei bambini.

[7]Il quinto postulato di Euclide, ricordato anche come *postulato delle parallele* e enunciato

percepito come troppo complicato per essere un semplice un postulato. Questo apparente errore nella classificazione del quinto postulato di Euclide ha portato i matematici ad indagarne la natura, conducendoli alla ricerca di una possibile dimostrazione basata sugli altri quattro postulati o di un possibile candidato per sostituirlo. Borasi mostra come soprattutto la ricerca della dimostrazione sia stata particolarmente proficua per i risultati ottenuti nel campo della geometria. Infatti, tra i tanti matematici che provarono a cercare una dimostrazione per il quinto postulato, ricordiamo in particolare il matematico italiano gesuita Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733). Egli cercò, all'interno dell'opera *Euclides ab omni naevo vindicatus* del 1733, di dimostrare per assurdo il quinto postulato. Formulò innanzitutto l'ipotesi (corretta) che il quinto postulato fosse deducibile dalla proposizione

> In un quadrilatero $ABCD$ avente gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ retti e i lati AD e BC uguali anche gli altri due angoli sono retti.

Conseguentemente cercò di dimostrare per assurdo la validità di tale proposizione, considerando il caso in cui i due angoli $\hat{C}$ e $\hat{D}$ fossero entrambi ottusi o acuti. Solo anni dopo la pubblicazione dell'opera di Saccheri, i matematici furono in grado di identificare gli errori compiuti dal matematico italiano, rendendo di fatto la sua dimostrazione non valida. Tuttavia, questa ricerca condotta da Saccheri si riverlò tutt'altro che inutile. Infatti, egli mostrò come a partire da un insieme scelto di assiomi si possano dedurre teoremi che creano una geometria totalmente diversa da quella euclidea, che fino a quel momento era considerata l'unica. Saccheri, pur non essendo consapevole della sua scoperta, è considerato colui che ha portato all'avvento delle geometrie non euclidee.
Questo esempio di indagine matematica, stimolata inizialmente da qualcosa che era percepito come un errore e successivamente alimentata da errori commessi nel cercare di dare una spiegazione ad una situazione che appariva quasi contradditoria, mostra come il dubbio e l'errore siano elementi indispensabili del progresso matematico.
Lo scopo dell'autrice è quello di evidenziare come un'attività di questo tipo possa essere utilizzata su due piani all'interno del contesto didattico. La prima modalità, che ricade maggiormente all'interno della categoria degli *illumination approaches* è quella di presentare alla classe un'indagine matematica di questo tipo e le potenzialità che questo approccio può avere nell'ambito della costruzione della conoscenza matematica. Questo approccio ha lo scopo di incentivare gli studenti a lasciarsi guidare dai loro errori nella scoperta della matematica non

---

da Euclide come segue:

> Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti.

Tuttavia è bene notare che esistono diverse riformulazioni di questo postulato che sono del tutto equivalenti a quello già riportato. Ricordiamo ad esempio l'assioma di Playfair, formulazione più intuitiva, e di conseguenza maggiormente utilizzata nella didattica moderna

> Dati una qualsiasi retta r e un punto P non appartenente a essa, è possibile tracciare per P una e una sola retta parallela alla retta r data.

limitandosi ad aspettare che l'errore sia corretto dall'insegnante ma a fare uso del potenziale che questo strumento può fornire. La seconda modalità, invece, appartiene alla categoria degli *history-based approaches*; infatti, l'autrice propone di utilizzare l'errore (in questo caso ricavato da una fonte storica) come punto di partenza di un'indagine condotta dallo studente. In questo secondo caso, la storia è fonte di ispirazione per la progettazione dell'attività, oltre a fornirci una preziosa raccolta di errori e contraddizioni che possono essere presentate agli studenti, per far sì che anch'essi possano sfruttare lo stesso potenziale che i matematici nella storia hanno sfruttato nella costruzione del sapere matematico. Questa seconda modalità appartiene al gruppo degli *history-based approaches* in quanto la storia non è impiegata in modo diretto, ma è ciò che guida la progettazione dell'insegnante; è importante sottolineare come non si possa determinare a priori dove la ricerca scaturita da un errore possa portare, pertanto, anche se la storia è la fonte primaria di ispirazione, lo studente potrebbe percorrere una strada totalmente differente, che lo porterà ad un diverso tipo di conoscenza.
Sebbene la strategia proposta da Raffaella Borasi presenti spunti di grande interesse, la stessa autrice sottolinea le difficoltà che si incontrano nel cogliere le problematiche affrontate dai matematici nel processo di elaborazione di un determinato concetto. A causa della presentazione rigorosa che caratterizza il sapere matematico, infatti, i matematici tendono spesso a celare il percorso complesso che ha condotto alla costruzione di una certa conoscenza, privilegiando invece un'esposizione che ne restituisca un'immagine chiara e uno sviluppo lineare all'interno della teoria.

Jo Boaler, ricercatrice britannica e docente presso la Stanford University Graduate School of Education, è nota nel campo della didattica della matematica per i suoi studi sull'equità e l'inclusione nei contesti scolastici, nonché per le sue ricerche sulle convinzioni degli studenti riguardo all'apprendimento, in particolare in relazione ai concetti di *fixed* e *growth mindset* e al loro impatto sui processi cognitivi e sui risultati in matematica. All'interno dell'articolo che abbiamo preso in esame, l'autrice propone alcuni metodi per rendere gli studenti consapevoli dei loro diritti[8], in particolare del diritto di commettere errori e del diritto di sentirsi confusi. Jo Boaler spiega come nonostante l'importanza di tali diritti sia spesso sottolineata dall'insegnante, gli studenti non si sentano completamente liberi di poter sbagliare, provando invece vergogna per i loro errori che vanno ad incrementare la consapevolezza dello studente di "non essere portato per la matematica". L'obiettivo dell'autrice è quindi quello di proporre

[8] I diritti degli studenti richiamati all'interno dell'articolo di Jo Boaler sono i cinque diritti formulati da Olga Torres, una docente di scuola elementare, per la creazione di una classe equa. Questi diritti sono:

- diritto di sentirsi confusi
- diritto di commettere errori
- diritto di parlare, ascoltare ed essere ascoltato
- diritto di scrivere, fare e rappresentare solo ciò che ha senso
- diritto di sentirsi al sicuro e sentire che le proprie idee sono rispettate.

alcuni metodi attraverso cui lo studente possa acquisire la consapevolezza di tali diritti e possa finalmente sentirsi libero di sbagliare; questa consapevolezza dovrebbe portare inoltre lo studente ad una valorizzazione dell'errore come parte fondamentale del percorso di apprendimento e non come qualcosa assolutamente da evitare.
I metodi attraverso cui Jo Boaler si propone di presentare agli studenti l'importanza dell'errore sono due: uno legato ai risultati ottenuti da studi nel campo delle neuroscienze[9], l'altro riguardante l'utilizzo della storia della matematica. Ci contreremo su quest'ultimo andando ad analizzare la proposta di Boaler in merito all'utilizzo della storia nelle attività didattiche.
Boaler nel presentare questo approccio si appoggia ai risultati ottenuti da uno studio del 2015 di Lin-Siegler, Ahn, Chen, Fang, e Luna-Lucero in cui era stata presentata un'indagine svolta su un gruppo di 472 studenti americani del nono e decimo grado di istruzione[10]. L'obiettivo di tale studio è mostrare agli studenti estratti della storia degli scienziati che evidenzino come molti grandi traguardi siano stati raggiunti attraverso percorsi complessi e non lineari, caratterizzati da sforzi ed errori, contrapponendosi così alla rappresentazione spesso presente nei manuali scientifici, in cui gli scienziati sono descritti come individui dotati di straordinarie capacità intellettive, piuttosto che nelle loro dimensioni più autenticamente umane e ordinarie. Per fare ciò gli autori hanno selezionato le storie di tre scienziati noti, prestando attenzione a scegliere figure in cui gli studenti potessero identificarsi, e hanno riscritto la loro storia in tre diverse versioni, seguendo tre criteri differenti: la prima versione raccontava delle difficoltà che essi hanno dovuto fronteggiare nel loro ambito di studio; la seconda raccontava le difficoltà personali, legate alla biografia dello scienziato preso in esame; infine l'ultima versione era quella che evidenziava solamente le grandi scoperte che da egli erano state fatte, senza prestare attenzione alle storie complicate che potevano aver portato a quei traguardi. Queste tre differenti versioni furono poi assegnate a diversi studenti in modo casuale, e durante il periodo della sperimentazione lo studente veniva in contatto solamente con le storie appartenenti alla categoria che gli era stata assegnata.
I dati raccolti per valutare l'impatto delle diverse tipologie di storie sugli studenti indicano che è stata condotta un'analisi sia di natura quantitativa sia qualitativa. L'analisi quantitativa si è focalizzata sui risultati scolastici degli studenti, rilevati prima e dopo l'esperienza, nonché su una serie di questionari volti a indagare le loro convinzioni in merito a intelligenza, impegno, fallimento, obiettivi e responsabilità rispetto ai propri risultati. L'analisi qualitativa, invece, si è basata sulle interviste condotte con gli studenti, dalle quali emergevano ricorrentemente temi quali l'autovalutazione delle proprie capacità, il valore at-

[9] Le neuroscienze hanno dimostrato che l'attività cerebrale dello studente è maggiore quando lo studente compie un errore, rispetto a quando porta a termine il compito nel modo corretto. Nuovi collegamenti sinaptici si sviluppano in seguito al conflitto che si crea nella mente dello studente tra la risposta corretta e l'errore commesso. Per ulteriori approfondimenti sull'argomento e sulla sua possibile applicazione in classe, si rimanda a [Boaler & Anderson 2018], pagina 2.

[10] Tale livello di istruzione è confrontabile ai primi due anni della scuola secondaria di secondo grado.

tribuito all'errore e allo sforzo nel contesto scolastico e le caratteristiche che gli studenti ritenevano di condividere, o meno, con gli scienziati descritti nei testi.
Un altro punto su cui sia l'analisi di Jo Boaler che lo studio di Lin-Siegler, Ahn, Chen, Fang, e Luna-Lucero si concentrano è l'importanza del *mindset* degli studenti. Carol Dweck, una psicologa americana, formula la teoria riguardante due tipologie opposte di *mindset*, termine che viene da lei definito come "le convinzioni fondamentali di un individuo riguardo alla possibilità di modificare le proprie caratteristiche personali". Le due tipologie di *mindset* a cui Dweck fa riferimento sono il *fixed* e il *growth mindset*, concetti più volte ripresi da Boaler nei suoi articoli. Il *fixed mindset* è associato a coloro che, davanti alle difficoltà, tendono ad arrendersi considerando le proprie competenze come limitate, senza possibilità di miglioramento. I soggetti che riportano questo tipo di convinzioni tendono ad evitare le sfide e sono restii a mettere impegno in ciò che fanno perchè credono che il loro risultato non dipenda da questo fattore. Invece, coloro che presentano un *growth mindset* tendono a percepire le proprie capacità come qualcosa di malleabile che può sempre cambiare in relazione allo sforzo che impiegano per far sì che accada. Questi ultimi tendono quindi ad apprezzare le sfide, vedendole come un'occasione di crescita nel proprio percorso di apprendimento. È stato dimostrato che la tipologia di *mindset* posseduta da uno studente ha un grande impatto sul modo con cui egli si pone rispetto ad un compito all'interno del contesto educativo; in particolare, nello studio che abbiamo preso in esame, uno degli obiettivi è quello di mostrare se attraverso l'approccio story-based appena presentato sia possibile portare gli studenti a sviluppare un *growth mindset*, portandoli alla consapevolezza che persistere di fronte alle difficoltà porti a migliorare le proprie capacità, oltre che i propri risultati.
Gli esiti di questo studio mostrano che gli studenti a cui sono state assegnate storie incentrate sulle difficoltà incontrate dagli scienziati hanno registrato un miglioramento significativo nei risultati scolastici, rispetto a coloro ai quali erano state proposte storie focalizzate sulle grandi scoperte scientifiche. Inoltre, gli studenti che erano entrati in contatto con storie di difficoltà riportano una maggior consapevolezza rispetto a come dovrebbe essere trattato il fallimento in ambito scolastico.
Un ulteriore risultato rilevante emerso dallo studio riguarda la disparità negli esiti tra studenti con basso rendimento nelle discipline considerate e studenti con rendimento elevato. In particolare, i dati evidenziano effetti particolarmente positivi per la prima categoria, i cui membri mostrano un miglioramento significativo delle proprie prestazioni in seguito all'attività di lettura di storie di difficoltà. Una possibile interpretazione di tale risultato risiede nel fatto che gli studenti che sperimentano con maggiore frequenza difficoltà e insuccessi possano identificarsi più facilmente in narrazioni di questo tipo. Tuttavia, lo studio si limita a rilevare la differenza negli esiti tra i due gruppi, avanzando soltanto ipotesi sulle possibili motivazioni senza fornire evidenze conclusive in merito alle cause di questa disparità.
Lo studio che abbiamo analizzato utilizza una modalità di integrazione della storia nella didattica appartenente alla classe degli *illumination approaches*. Infatti, nelle attività riportate all'interno dello studio la storia si limita ad essere

narrata agli studenti tramite fatti, e talvolta aneddoti, riguardanti la biografia degli scienziati, senza modificare le procedure educative precedentemente presenti. Come abbiamo già sottolineato all'inizio del paragrafo, la motivazione che spinge all'utilizzo della storia in questo specifico caso rientra all'interno della categoria *history-as-a-tool*, in quanto la storia serve come tramite per proporre agli studenti un insieme di convizioni riguardanti l'impegno, lo sforzo e il fallimento che possa portarli ad un approccio differente della disciplina.

Entrambi gli studi presentati evidenziano come la storia della matematica possa costituire un importante strumento a supporto della didattica, in quanto capace di veicolare convinzioni rilevanti che nella didattica tradizionale sono spesso messe in secondo piano.
Pur non essendo immuni alle critiche precedentemente esposte, questi due approcci rappresentano esempi significativi di come un'integrazione efficace tra la storia e la didattica della matematica possa produrre risultati positivi nel contesto scolastico, rendendo il dialogo tra questi due ambiti non solo possibile, ma anche auspicabile.

Appendice A

Costruzioni geometriche di Viète

Presentiamo in questa appendice le costruzioni geometriche di Viète per la risoluzione del problema della trisezione dell'angolo e della ricerca dei due medi proporzionali.

Ricerca dei due medi proporzionali (Viète)[1] A.1
Siano dati due segmenti X e Z ; viene richiesto di trovare i due medi proporzionali tra loro[2].

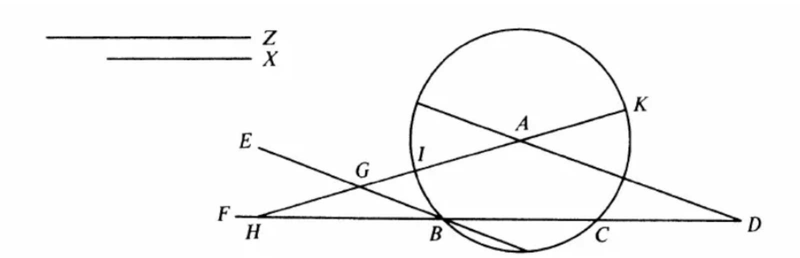


Figura A.1: Costruzione dei due medi proporzionali, immagine presa da [Viète 2006]

Costruzione:
Siano Z e X i due segmenti dati; devono essere trovati i due medi proporzionali tra di essi. Sia Z il segmento più grande e X il più piccolo.
Tracciamo un cerchio attorno ad A, il centro, con raggio AB, uguale alla metà di Z. Al suo interno disegnamo BC, uguale ad X. Prolunghiamo BC fino a D, in modo tale che BD sia il doppio di BC, e uniamo D ad A. Parallelo a quest'ultimo (ovvero DA) costruiamo BE di lunghezza indefinita. Allunghiamo DB indefinitamente dalla parte di B, fino ad F, e dal punto A disegnamo la retta $KAIGH$

[1] Traduzione della costruzione tratta da [Viète 2006], Proposizione V, pp. 392-394.
[2] I due medi proporzionali A e B, tra due segmenti X e Z sono due segmenti tali che $X : A = A : B = B : Z$

che incontra BE e BF nei punti G e H tali che GH sia uguale ad AB. Essa incontrerà la circonferenza nei punti I e K. Sia I il punto più vicino ad H. Possiamo affermare che IK, HB, HI e BC sono in una proporzione continua.
Siccome DA e BG si trovano su due rette parallele, allora[3]

$$HG : HB = GA : BD$$

inoltre

$$HG : IK = BC : BD$$

come ogni cosa sta al suo doppio. Perciò

$$IK : HB = GA : BC.^4$$

Dal momento che GH e AI sono uguali, lo saranno anche HI e GA. Allora

$$IK : HB = HI : BC.$$

Dal punto H esterno alla circonferenza sono state tracciate due rette che intersecano quest'ultima e il prodotto delle parti esterne di tali rette rispetto alla circonferenza (ovvero HI e HB) è uguale al prodotto delle loro parti interne (ovvero IK e BC). Quindi le parti esterne, prese alternativamente, sono in proporzione continua con quelle interne[5]. Allora IK, HB, HI e BC sono in proporzione continua. Dati, quindi, i due segmenti Z e X, ovvero IK e BC, i due medi proporzionali HB e HI tra loro sono stati trovati, come richiesto.

Trisezione dell'angolo (Viète)[6] A.2

Trisezione di un angolo dato.

---

[3]La proporzione seguente si ottiene dal fatto che HGB e HAD sono triangoli simili, pertanto $HG : HB = HA : HD$; da quest'ultima possiamo dedurre che $HG : HB = (HA - HG) : (HD - HB)$.

[4]Dalle due proporzioni precedenti si ricava che $HG \cdot BG = HB \cdot GA$ e $HG \cdot BD = IK \cdot BC$, perciò $HB \cdot GA = IK \cdot BC$ dalla quale discende la proporzione desiderata.

[5]Questa affermazione discende dalla proposizione IIII presentata in [Viète 2006] a pagina 392. Tale proposizione afferma che se due linee rette sono tracciate da un punto esterno ad una circonferenza e la intersecano, inoltre il prodotto delle parti esterne delle due linee è uguale al prodotto delle parti interne, le parti esterne, prese alternativamente, saranno in una proporzione continua con le parti interne delle due rette.

[6]Traduzione della costruzione presa da [Viète 2006], proposizione IX, pagina 398

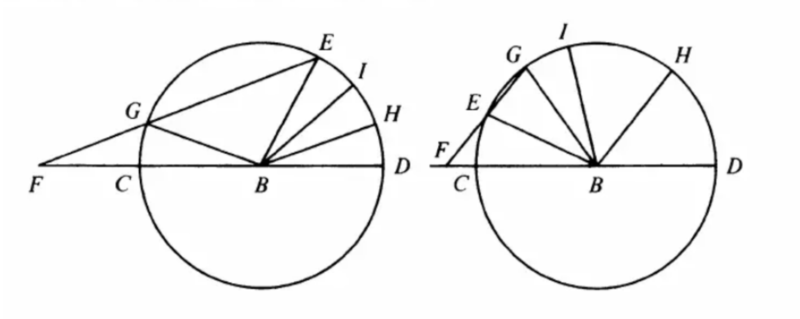


Figura A.2: Costruzione della trisezione dell'angolo, immagine presa da [Viète 2006]

Costruzione:
Sia A l'angolo dato da trisecare.
Dal centro B tracciamo una circonferenza con un raggio scelto a piacere e sia CBD il suo diametro. Segnamo l'arco DE in modo che $\angle DBE$ abbia la stessa ampiezza dell'angolo dato, ed estendiamo indefinitamente la linea DBC. Tracciamo la retta EFG che interseca il diametro prolungato in F e la circonferenza in G, in modo tale che FG sia uguale a BC o BD, il raggio del cerchio. Possiamo affermare che l'angolo $\angle EFC$ è un terzo dell'angolo $\angle EBD$, cioè dell'angolo dato A, e che l'ampiezza dell'arco GC è un terzo di quella dell'arco ED.
Tracciamo il segmento GB. Allora il triangolo FGB è isoscele. Da B, un estremo della sua base, tracciamo BE uguale al lato BG. Ne consegue che l'angolo $\angle EBD$ è tre volte l'angolo $\angle GBF$ o $\angle GFB$[7].
Inoltre l'arco GC determina l'ampiezza dell'angolo GBF. Di conseguenza, sull'arco DE segniamo gli archi DH e HI uguali all'arco CG, e tracciamo i segmenti BH e BI. Allora l'angolo $\angle EBD$ — cioè l'angolo dato A—è trisecato dalle rette BH e BI, come si voleva dimostrare.

[7]Giustifichiamo questa affermazione attraverso i seguenti passaggi:

a) $\angle BGE$ è l'angolo esterno di $\angle BGF$, perciò $\angle BGE = \angle BFG + \angle FBG = 2\angle BFG$

b) $\angle BGE = \angle BEG = 2\angle BFG$

c) $\angle GBE =$2 angoli retti$-4\angle BFG$

d) $\angle GBD =$2 angoli retti$-\angle GBF$

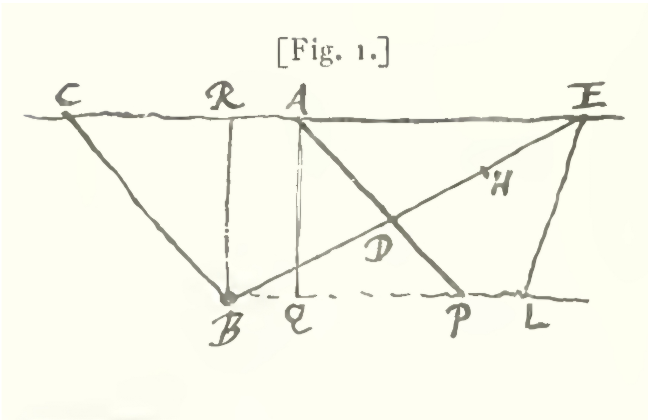
e) Pertanto, $\angle EBD = \angle GBD - \angle GBE =$2 angoli retti$-\angle GBF-$ 2 angoli retti$+4\angle BFG = 3\angle GBF$.

Appendice B

Alcune lettere di Huygens

9 Febbraio 1652

Dato un angolo EAD ed un punto B esterno, tracciare da B un segmento BDE in modo che DE sia uguale ad un segmento dato.



Si prolunghi EA fino all'intersezione con la parallela BC a AD e si tracci BR perpendicolare ad AE. Siano $CA = a$; $CB = b$; $DE = c$; $CR = d$; $BE = x$. BD $(x - c)$ sta a BE (x) come CA (a) sta a CE $\left(\frac{ax}{x-c}\right)$ pertanto $BC = b$, $BE = x$ e $CE = \frac{ax}{x-c}$, sono i lati del triangolo CBE per cui, se si sommano i quadrati di BC, CE, si sottrae da qui il quadrato di BE e si divide la differenza per il doppio di CE, si ottiene la lunghezza della base CR

$$\frac{\frac{aaxx}{xx-2cx+cc} + bb - xx}{\frac{2ax}{x-c}} = d(CR)$$

e ancora

$$x^4 - 2cx^3 + (-aa - bb + cc + 2ad)xx + (2bbc - 2acd)x - bbcc = 0$$

ed eliminando il secondo termine ponendo appunto $y + \frac{1}{2}c = x$ sarà, eseguita l'operazione

$$y^4 = \left(\frac{1}{2}cc + aa + bb - 2ad\right) yy - (bbc + aac)y + \left(-\frac{1}{16}cc + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb\right) cc$$

dalla quale si vede che, se $bb = aa$, si annulla il coefficiente di y e poiché l'equazione che si otterrà è quadrata, inoltre, poiché quando $a = b$, AB è un rombo e, sostituendo b con a, l'equazione diventa

$$y^4 = \left(\frac{1}{2}cc + 2aa + 2ad\right) yy + \left(-\frac{1}{16}cc + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}aa\right) cc$$

da cui si trova

$$yy = aa - ad + \frac{1}{4}cc + \sqrt{aacc + a^4 - 2a^3d + aadd}$$

o

$$yy = aa - ad + \frac{1}{4}cc + a\sqrt{cc + a^2 - 2ad + dd}.$$

Sia H il punto medio di DE cosicché $BH = y$. E si tracci EL che formi un angolo BEL uguale all'angolo BPA; gli angoli ELP e EDP sono uguali a due angoli retti e dunque i punti D, P, L, E sono su una circonferenza ed il rettangolo LBP è uguale al rettangolo EBD. Si sottragga ora il quadrato di lato $DH = \frac{1}{4}cc$ dal quadrato di $BH = aa - dd + \frac{1}{4}cc + a\sqrt{cc + aa - 2ad + dd}$: restano il quadrato di BD più due volte il rettangolo BDH che, insieme, sono uguali al rettangolo EBD per cui il rettangolo EBD o LBP è uguale ad $aa - ad + a\sqrt{cc + aa - 2ad + dd}$; se si sottrae il quadrato di BP uguale ad aa si ha il rettangolo LPB uguale a $a\sqrt{cc + aa - 2ad + dd} - ad$; si divida per $BP = a$: si ottiene $PL = \sqrt{cc + aa - 2ad + dd} - d$ e se AQ è la parallela ad RB, allora $PQ = d$. Aggiunto PQ, sarà $QL = \sqrt{cc + aa - 2ad + dd}$ cioè il quadrato di QL è uguale al quadrato di DE, che è noto, insieme al quadrato di BQ, cioè di $a - d$.

Osserva una certa differenza che si trova quando DE sia tanto piccola o l'angolo APB molto acuto cosicché L si trovi tra B e P.

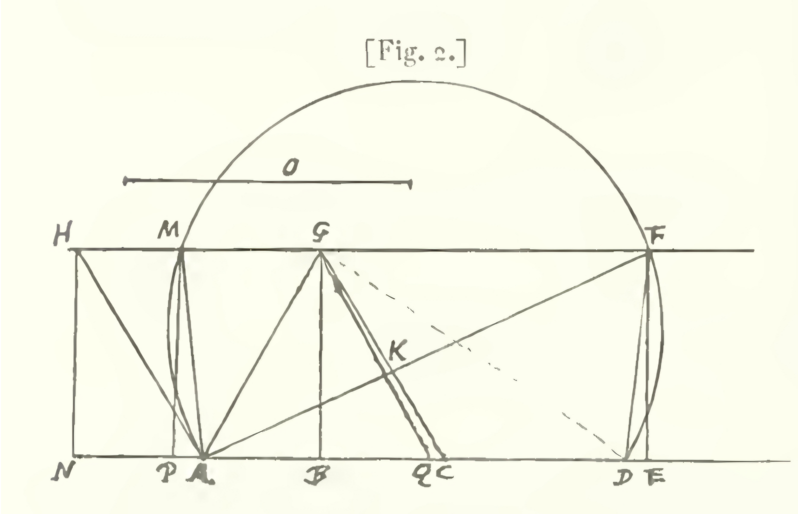
La composizione sarà di questo tipo: sia dato un rombo $HGCA$ ed un segmento o. *La perpendicolare GB cada in AC e si assuma che BD al quadrato sia come i due quadrati su o e AB insieme.* Su AD si descriva la parte di circonferenza che sottenda l'angolo GHA e, dal punto di intersezione F, si conduca AF: dico che KF è uguale ad o.

Infatti, si traccino AM, FD e le rette HN, MP, FE parallele a GB. È evidente che la circonferenza taglierà davvero la retta HF.

Sia $BQ = BA$ e si traccino sia GQ, sia GA. Allora i due angoli A e Q del triangolo GAQ sono uguali tra loro ed agli angoli in A o in G del triangolo[1] HAG, cosicché i triangoli HAG e GAQ saranno simili e l'angolo AGQ sarà uguale all'angolo AHG. Se poi su AQ si descriverà una circonferenza simile alla circonferenza $AMFD$, essa passerà per G e sarà tangente alla retta HF;[2] poiché però il quadrato su BD è uguale ai quadrati su AB ovvero BQ e su o, BD sarà maggiore di BQ ed AD maggiore di AQ, per cui necessariamente la

[1]Per il parallelismo delle rette AC e HF, gli angoli GAQ e AGH coincidono. Inoltre anche il triangolo GAH è isoscele.

[2]Nelle due circonferenze si considerano archi che sottendono lo stesso angolo che, in entrambi i casi, è pari ad AHG. Dunque l'arco costruito su AQ passa per G e GB ne ''e un diametro per cui la tangente in G è proprio HF.



circonferenza $AMFD$ intersecherà la retta HF. Inoltre, poiché l'angolo FDA è uguale all'angolo AKC (infatti, aggiunto FKC ad entrambi si ottengono due angoli retti)[3] e siccome la distanza tra i segmenti HF, AE è uguale a quella tra HA e GC, sarà perciò[4] $FD = AK$. Anche MA è però uguale ad[5] FD per cui MA è uguale anche ad AK ed il triangolo AMH è uguale[6] al triangolo AKC ed entrambi sono poi simili al triangolo ADF. Dunque HM sta ad MA, cioè NP sta ad FD come FD sta a DA. Pertanto il rettangolo di lati NP, AD è uguale al quadrato su DF ed aggiunto ad entrambi[7] il rettangolo PAD ovvero ADE, il rettangolo NAD sarà uguale al quadrato su FD ed al rettangolo ADE.

E moltiplicando tutto per 2, il doppio del rettangolo NAD sarà uguale al doppio del quadrato FD e al doppio del rettangolo ADE. Ed aggiunto ad

[3]Per le proprietà dell'arco di circonferenza costruito su AD, l'angolo AFD coincide con l'angolo AHF che a sua volta è uguale ad ACG, perché angoli opposti di un rombo; quest'ultimo è supplementare di GCD per cui $\widehat{CGD}$ e $\widehat{AFD}$ sono supplementari ed i punti F, G, C e D sono su una stessa circonferenza, non tracciata in figura.

[4]L'equidistanza tra le coppie dirette dipende dal fatto che $ACGH$ è un rombo. Tracciata da A la perpendicolare a GC si viene a formare un triangolo rettangolo di ipotenusa AK il cui angolo in K è congruente a $\widehat{FKC}$ e quindi, per ciò che si è appena mostrato, congruente a $\widehat{FDE}$. Il triangolo FDE è dunque congruente a quello di ipotenusa AK appena costruito e non mostrato in figura e, in particolare, $AK = FD$.

[5]I triangoli AFD e AMD hanno il lato AD in comune, $\widehat{AFD} = \widehat{AMD}$ perch'e insistono entrambi sulla corda AD ed $\widehat{MAD} = \widehat{ADF}$ perché insistono augli archi congruenti AMF ed MFD.

[6]Poiché $ACGH$ è un rombo, $AH = AC$. Abbiamo appena mostrato che $AM = AK$, gli angoli in H e C sono poi congruenti perché angoli opposti di un rombo e gli angoli $\widehat{AMK}$ ed $\widehat{AKC}$ congruenti.

[7]In generale, un rettangolo ABC è un rettangolo di lati AB, BC ed aggiungere un rettangolo significa aggiungerne l'area, cioè $AB \times BC$. In questo caso, la proporzione di partenza, moltiplicando tra loro medi ed estremi, diventa $FD^2 = NP \times DA$. Aggiungendo il rettangolo $PAD = PA \times DA$ si ottiene a destra

$$NP \times DA + PA \times DA = NA \times DA$$

cioè il rettangolo NAD. A sinistra si ottiene $FD^2 + AD \times DE$.

entrambi il quadrato di AD, il doppio del rettangolo NAD con il quadrato di AD, cioè[8] il doppio del rettangolo di lati BC, AD insieme al quadrato su AD (poiché $BC = AN$) è uguale al doppio del quadrato su FD più il quadrato su AD più due volte il rettangolo ADE. Tutti questi insieme però sono uguali al quadrato su AF più quello su FD (infatti il doppio del rettangolo ADE + il quadrato su AD + il quadrato su DF sono uguali al quadrato su AF)[9]. Pertanto il doppio del rettangolo di lati BC, AD + il quadrato su AD è uguale al quadrato su AF più il quadrato su FD, cioè al quadrato su AF + quello su AK, visto che dicemmo che FD ed AK sono tra loro uguali. Ora, il rettangolo di lati CB, AD insieme al rettangolo BAD sono uguali al rettangolo CAD e i doppi dell'uno ai doppi dell'altro;[10] pertanto, se dal quadrato su AD e dal doppio del rettangolo di lati BC, AD si toglie il doppio del rettangolo CAD, rimarrà il quadrato su AD cui è sottratto il doppio del rettangolo[11] BAD. Tuttavia, il doppio del rettangolo KAF è uguale al doppio del rettangolo CAD perché i punti $KDCF$ sono nel cerchio della stessa circonferenza.[12] E il quadrato su AF + il quadrato su AK saranno uguali al quadrato su AD + due volte il rettangolo di lati BC, AD.[13] Sottratto pertanto il doppio del triangolo KAF dal quadrato su AF + il quadrato su AK, cioè sottratto il doppio del rettangolo AKF + il quadrato su AK dal quadrato su AF, resterà[14] il quadrato su KF uguale al quadrato su AD - il doppio del rettangolo BAD, cioè meno il doppio del rettangolo ABD ed il doppio del quadrato su AB;[15] pertanto, aggiunto ad entrambi il quadrato su AB, sarà che il quadrato su KF + il quadrato su AB sono uguali al quadrato su AD meno il doppio del rettangolo ABD meno il quadrato su AB: cioè uguali al quadrato su BD.[16] Per costruzione, però, il quadrato su BD è uguale al quadrato su o + quello su AB. Pertanto questi due sono anche uguali ai due quadrati su KF ed AB e sottratto il quadrato su AB che è in comune si avrà che il quadrato su o è uguale al quadrato su KF, ciò che occorreva dimostrare. L'angolo FDA potrebbe anche essere retto o acuto, nel qual caso il risultato si otterrà o in modo più semplice o in modo non molto diverso dal precedente.

Il secondo caso, in cui l'angolo C del rombo è ottuso, ammette la stessa

[8] Per costruzione, $AN = BC$, come dirà tra un attimo anche Huyghens.

[9] Si veda la nota a p. 54. Dall'applicazione del teorema del coseno al caso in esame si ottiene

$$2BC \times AD + AD^2 = AF^2 + FD^2 = AF^2 + AD^2 = AF^2 + AK^2.$$

[10] Cioè, dalla figura, $2CA \times AD = 2CB \times AD + 2BA \times AD$

[11] Cioè $AD^2 + 2BC \times AD - 2CA \times AD = AD^2 - 2AD \times AB$

[12] Huygens si serve del teorema delle secanti, sfruttando il fatto che C, D, F e K sono su una stessa circonferenza per cui $AF \times AK = AD \times AC$.

[13] Ovvero: $AF^2 + AK^2 = AD^2 + 2BC \times AD$.

[14] L'uguaglianza diretta è $AF^2 + AK^2 - 2AK \times AF = KF^2$. Huygens osserva anche che $AK \times AF = AK^2 + AK \times KF$ e ciò rende conto del secondo inciso.

[15] Dal momento che $AD \times AB = AB \times BD + AB^2$.

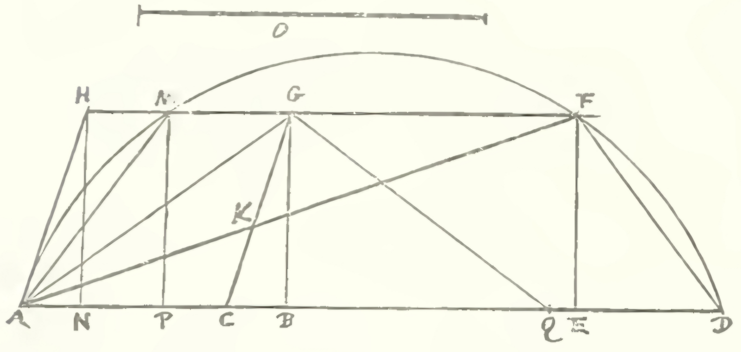
[16] Huygens scrive $AD^2 - 2AB \times BD - AB^2$ come

$$AD^2 + BD^2 - (AB + BD)^2 = BD^2$$

e di qui ricava che $BD^2 = KF^2 + AB^2$.

composizione. Ed anche la dimostrazione è poco differente e sarà dello stesso tipo, solo con qualche cambio di segno nei coefficienti, dove necessario.

[Fig. 3.]



In primo luogo, come si era mostrato (Fig. 3), il rettangolo di lati NP, AD è uguale al quadrato di lato DF.[17] Sottraendo allora entrambi dal rettangolo PAD o ADE si avrà che il rettangolo NAD è uguale al rettangolo ADE − il quadrato su FD; e,[18] moltiplicando tutti i termini per 2, il doppio del rettangolo NAD è uguale al doppio del rettangolo ADE − il doppio del quadrato su FD e sottraendo entrambi dal quadrato su AD sarà[19] il quadrato su AD meno il doppio del rettangolo NAD = al quadrato su AD + il doppio del quadrato su FD− il doppio del rettangolo ADE; tutti questi termini messi insieme però sono uguali ai quadrati su AF e su FD (infatti i quadrati su AD, DF − il doppio del rettangolo ADE sono uguali al quadrato su AF per la Prop. II.13 degli Elementi).[20] Pertanto, il quadrato su AD meno il doppio del rettangolo NAD è uguale ai quadrati su AF ed FD, cioè ai quadrati su AF ed AK: infatti, si è mostrato che $FD = AK$. Sottraendo allora termini uguali da termini uguali, cioè sottraendo là il doppio del rettangolo CAD, qui il doppio del rettangolo KAF (che sono uguali perché i punti D, C, K, F sono nel cerchio di una stessa circonferenza),[21] anche le differenze saranno uguali. Tuttavia se dal quadrato su AD− il doppio del rettangolo NAD ovvero − il doppio del rettangolo di lati CB, AD si sottrae anche il doppio del rettangolo CAD, rimarranno il quadrato su AD− il doppio del rettangolo BAD.[22] Però, togliendo il doppio

[17]Ciò segue adattando l'uguaglianza $NA \times AD - AD \times DE = FD^2$ dimostrata sopra al caso attuale nel quale l'ordinamento dei punti A, N, P è diverso.

[18]$PA \times AD - NP \times AD = AD \times DE - DF^2$ da cui, moltiplicando anche per 2:

$$2NA \times AD = 2AD \times DE - 2FD^2.$$

[19]Cioè:

$$AD^2 - 2NA \times AD = AD^2 + 2FD^2 - 2AD \times DE.$$

Si procede applicando ancora il teorema del coseno nella versione Euclidea contenuta nella Prop. II. 13: si veda la nota 40 a p. 54.

[20]A questo punto abbiamo $AD^2 - 2NA \times AD = AF^2 + AD^2$

[21]Huygens utilizza ancora il teorema delle secanti.

[22]$AD^2 - 2NA \times AD = AD^2 - 2AD \times CB$ perché $AN = CB$; sottraendo ancora $2CA \times AD$

del rettangolo KAF dai quadrati di lati FA e AK, resta il quadrato su KF.[23] Dunque il quadrato su KF è uguale al quadrato su $AD-$ il doppio del rettangolo BAD cioè al quadrato su $AD-$ il doppio del rettangolo $ABD-$ il doppio del quadrato su AB[24] per cui, sommando ad ambo i membri il quadrato su AB, avremo che[25] il quadrato su $AK+$ il quadrato su AD sono uguali al quadrato su $AD-$ il doppio del rettangolo ABD e del quadrato su AB; questo residuo però è uguale al quadrato su BD per cui il quadrato su $KF+$ il quadrato su AB sono uguali al quadrato su BD, cioè al quadrato su o e al quadrato su AB. Sottraendo dunque il quadrato su AB in comune, il quadrato su KF sarà uguale al quadrato su o, come si doveva dimostrare.

Tutte queste cose si possono proporre meglio nel modo con il quale esponiamo l'altra parte del problema, cioè dimostrando prima questo teorema.

Sia dato un rombo $HACG$ e dall'angolo A si tracci AKF fino all'intersezione con il lato HF e con FD che forma un angolo AFD uguale all'angolo H, e sia GB perpendicolare allo stesso AD; dico che i quadrati costruiti su KF e su AB sono uguali al quadrato su BD.

È bene dimostrare questo teorema per primo e poi eposrre la costruzione e la dimostrazione del problema che saranno brevi ed avranno un aspetto meno implicito, come anche Pappo osservò correttamente nella proposizione 72 del Libro VII.[26]

11 Febbraio 1652

Dato un rombo $GHAC$ e prolungati i lati GH, GC, occorre tracciare un segmento KAF di lunghezza uguale ad una data.

Si supponga risolto il problema ed il punto S divida KF in due parti uguali;

si ottiene $AD^2 - 2BA \times AD$.

[23] Ricordiamo che $CA \times AD = KA \times AF$ (Vedi nota 21). Inoltre,

$$AF^2 + AK^2 - 2AK \times AF = (AF - AK)^2 = KF^2.$$

[24] $AD = AB + BD$ e dunque $AD^2 - 2AD \times AB = AD^2 - 2AB \times BD - 2AB^2$.

[25] Siamo arrivati a $AK^2 = AD^2 - 2AB \times BD - 2AB^2$. Se aggiungiamo ad ambo i membri AB^2, otteniamo

$$KF^2 + AB^2 = AD^2 - 2AB \times BD - AB^2 = AD^2 - (AB + BD)^2 + BD^2 = AD^2 - AD^2 = BD^2.$$

[26] Huygens si riferisce alle *Collectiones* di Pappo nella versione di Commandino.

si tracci la diagonale GA. E siano GH, $GC = a$, $GA = b$, $KF = c$, $AS = x$.[27]

$$KA\ \left(\frac{1}{2}c - x\right) \qquad AC\,(a) \qquad KF\,(c) \qquad FG\ \left(\frac{ac}{\frac{1}{2}c - x}\right)$$

$$AF\ \left(\frac{1}{2}c + x\right) \qquad AH\,(a) \qquad KF\,(c) \qquad KG\ \left(\frac{ac}{\frac{1}{2}c + x}\right)$$

si sommino il rettangolo $KAF = \frac{1}{4}cc - xx$ e il quadrato su $GA = bb$: si ottiene

$$\frac{1}{4}cc - xx + bb$$

che è uguale al rettangolo[28] $KGF\ \frac{aacc}{\frac{1}{4}cc - xx}$.

$$\frac{1}{16}c^4 - \frac{1}{2}ccxx + x^4 - bbxx + \frac{1}{4}ccbb = aacc$$

$$x^4 = \left(\frac{1}{2}cc + bb\right)xx + \left(aa - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{16}cc\right)cc,$$

equazione biquadratica. Sottrai il quadrato su AS[29]

$$= xx = \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}bb - a\sqrt{cc + \frac{\frac{1}{4}b^4}{aa}}$$

---

[27] Per ottenere l'espressione di FG si osserva che i triangoli GKF e HAF sono simili per cui vale la proporzione

$$GF : HF = KF : AF$$

o, applicando la proprietà del comporre,

$$GF : HG = KF : KA$$

da cui, coi dati del problema, segue l'espressione proposta per FG. Per l'espressione di KG, basta partire dalla proporzione analoga

$$AF : AH = KF : GK$$

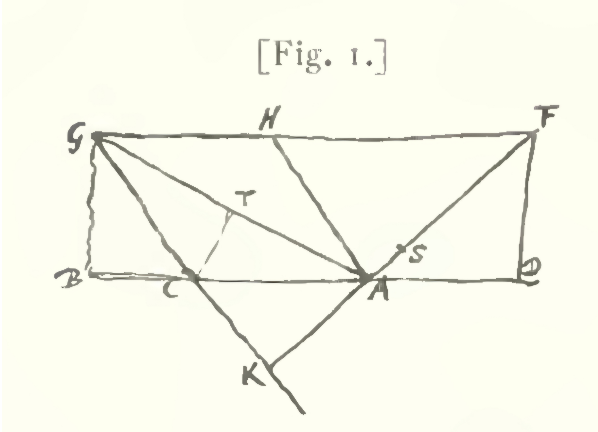
e risolvere direttamente rispetto a GK.

[28] Nel triangolo KGF, AG è la bisettrice dell'angolo in A. Questa uguaglianza è un caso particolare del teorema di Stewarts applicato al triangolo GKF [Alasia, 1900, p. 10]: *in ogni triangolo, il rettangolo di due lati è equivalente al rettangolo dei due segmenti determinati sul terzo lato dalla bisettrice dell'angolo opposto a questo, più o meno il quadrato di tale bisettrice, secondoché essa è interna o esterna al triangolo.* Nel nostro caso, il teorema equivale proprio alla condizione

$$KG \times GF = KA \times AF + GA^2.$$

Nella nota editoriale che compare nel Volume XII delle opere di Huygens, pubblicato nel 1910, si riferisce a questo ridsultato come *bien connu*. Perché ciò fosse vero anche ai tempi di Huygens occorre trovare la fonte del risultato che prescinda dal teorema generale di Stewarts che fu pubblicato nel 1746, ben dopo la morte di Huygens.

[29] Il valore di $AS^2 = x^2$ si ottiene risolvendo rispetto ad x^2 l'equazione biquadratica appena ottenuta e limitandosi a considerare la soluzione positiva.



dal quadrato $SF = \frac{1}{4}cc$ e resta

$$= \frac{1}{2}bb + a\sqrt{cc + \frac{\frac{1}{4}b^4}{aa}}$$

uguale al rettangolo KAF.[30] Si tracci FD che formi un angolo AFD uguale all'angolo ACK e di conseguenza i triangoli simili CAK, FAD. Pertanto i rettangoli CAD e KAF sono uguali.[31] Applicando dunque il rettangolo KAF su $AC = a$ si ha[32]

$$AD = -\frac{1}{2}\frac{bb}{a} + \sqrt{cc + \frac{\frac{1}{4}b^4}{aa}}.$$

Sia GB perpendicolare ad AC e CT perpendicolare a GA. Pertanto i triangoli CAT, GAB sono simili ma $CA = a$, $AT = \frac{1}{2}b$, $AG = b$ per cui[33] $AB = \frac{1}{2}\frac{bb}{a}$ e dunque, essendo $AD = \sqrt{cc + \frac{1}{4}\frac{b^4}{aa}} - \frac{1}{2}\frac{bb}{a}$, se si aggiunge $AB = \frac{1}{2}\frac{bb}{a}$ si avrà $DB = \sqrt{cc + \frac{1}{4}\frac{b^4}{aa}}$, cioè il quadrato su DB è uguale al quadrato su KF insieme al quadrato su AB.

Da ciò si trova la costruzione del problema. *Occorre, tracciata la perpendicolare GB prendere BD tale che il quadrato costruito su di esso sia uguale al quadrato del segmento dato insieme al quadrato su AB. Allora si descriva*

---

[30] L'uguaglianza con $KA \times AF$ è conseguenza dell'espressione $KAF = \frac{1}{4}cc - xx$ trovata sopra.

[31] Dalla similitudine dei triangoli CAK ed FAD deduciamo che

$$AF : AC = AD : AK$$

ed uguagliando i prodotti dei medi e degli estremi, abbiamo $AF \times AK = AC \times AD$, che è l'uguaglianza dei rettangoli cui si riferisce Huygens.

[32] Applicare un rettangolo su un segmento di lunghezza data significa trovare la lunghezza dell'altro lato del rettangolo affinché abbia area di valore prescritto. In questo caso l'area è quella di KAF che, divisa per $AC = a$ fornisce l'espressione di AD data nel testo.

[33] È sufficiente scrivere la proporzione

$$AB : AG = AT : AC,$$

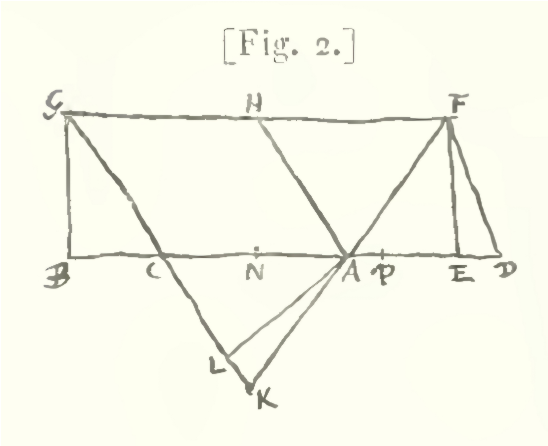
conseguenza della similitudine dei triangoli, risolvendo rispetto ad AB.

la parte di circonferenza che sottenda un angolo uguale all'angolo CGH. Essa taglierà la retta GH prolungata in F: condotta FAK sarà uguale al segmento dato. Essa intersecherà la stessa GF in un altro punto tra H ed F grazie al quale il problema dell'intersezione è risolto allo stesso modo.

TEOREMA 1.

Sia dato un rombo $GCHA$ e si tracci KAF che taglia i prolungamenti di entrambi i lati del rombo e si conduca FD che forma un angolo AFD uguale a CGH e sia GB perpendicolare ad AC.

Dico che i quadrati su KF e su AB sono uguali al quadrato su BD.



Infatti, si traccino le perpendicolari AL ed FE a GK e BD e si prenda AP uguale ad ED ed AN uguale a CB.

Poiché dunque i triangoli GBC ed ACL sono simili ed i lati GC ed AC sono uguali, anche CL sarà uguale a CB, cioè ad AN. Di nuovo, poiché i triangoli CAK, FAD sono simili, hanno infatti l'angolo in A uguale e per costruzione l'angolo AFD è uguale all'angolo ACK, sarà anche l'angolo AKC uguale all'angolo ADF. Tuttavia gli angoli ALK, FED sono retti e pertanto saranno anche simili i triangoli ALK e FED. Però FE è uguale ad AL e quindi anche AK è uguale a FD ed LK è uguale ad ED, cioè ad AP. Pertanto l'intero NP è anche uguale a CK. A motivo della similitudine dei triangoli, AD sta a DF come AK sta a KC. Però AK è uguale ad FD e KC è uguale ad NP. Pertanto AD sta a DF come DF sta a NP e quindi l'area compresa tra AD ed NP[34] è uguale al quadrato costruito su FD e sottraendo ad ambo i membri il rettangolo di lati DA, AP o AD, DE si avrà il rettangolo NAD uguale al quadrato su $FD-$ il rettangolo ADE.[35] E moltiplicati tutti per 2, il doppio del rettangolo NAD è uguale al doppio del quadrato su $DF-$ il doppio del rettangolo ADE ed aggiunto il quadrato su AD in comune, si avrà che il

[34]Si intende l'area del rettangolo di lati AD ed NP.

[35]Partendo da $AD \times NP + DF^2$, si sottrae $AD \times AP$ a sinistra e $AD \times ED$ a destra, sfruttando l'equivalenza di questi rettangoli, in modo da ottenere

$$AD \times AN = DF^2 - AD \times DE.$$

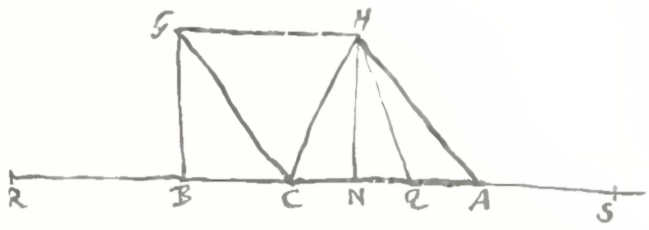
doppio del rettangolo NAD, cioè il doppio del rettangolo di lati[36] BC, $AD+$ il quadrato su $AD =$ al doppio del quadrato su $FD+$ il quadrato su $AD-$ il doppio del rettangolo ADE; questi però sono uguali ai quadrati su AF e FD (infatti[37] i quadrati su FD e su $DA-$ 2 volte il rettangolo ADE sono uguali al quadrato su AF). Pertanto il doppio del rettangolo di lati BC, AD + il quadrato su AD sono uguali ai quadrati su AF ed FD, cioè su AF ed AK, visto che si è dimostrato che AK è uguale ad FD. Aggiungendo pertanto cose uguali a cose uguali, cioè aggiungendo da una parte il doppio del rettangolo CAD, dall'altra il doppio del rettangolo KAF (che sono uguali perché, per similitudine dei triangoli CA sta ad AK come FA sta ad AD) anche le somme saranno uguali. Ma aggiungendo al doppio del rettangolo di lati BC, AD e al quadrato su AD il doppio del rettangolo CAD sarà il doppio[38] del rettangolo BAD + il quadrato su AD ma aggiungendo il doppio del rettangolo KAF ai quadrati su FA e su AK si ottiene il quadrato su KF; dunque il quadrato su KF è uguale al doppio del rettangolo BAD + il quadrato su AD e aggiungendo da ambo le parti il quadrato su BA si avrà che il quadrato su KF + il quadrato su BA sono uguali al quadrato su BD, come si doveva dimostrare.

Inoltre, l'angolo FDA può essere retto o ottuso a seconda che lo sia FKC: in questi casi si dimostra lo stesso risultato con una dimostrazione non molto diversa che è molto più facile se l'angolo FDA è retto.

TEOREMA 2

Sia ancora $GCAH$ un rombo di cui CH sia una diagonale e sul prolungamento del lato AC cada il piede della perpendicolare GB, inoltre sia HQ uguale HC e si supponga BS tale che il quadrato su di esso sia uguale al quadrato su BA insieme a quello su CH. Dico che AS è proprio congruente a CQ.

[Fig. 3.]



Infatti, si tracci HN perpendicolare a CQ; poiché il triangolo CHQ è isoscele, CQ sarà divisa in due parti uguali da N. Si ponga BR uguale a BN cosicché sarà anche uguale ad entrambi GH, cioè CA. Poiché i triangoli CGH, CHQ sono sono simili—infatti gli angoli CGH e CHG sono uguali anche agli angoli HCQ, HQC, sarà che QC sta a CH come CH sta a CG ed il quadrato

[36]Si era infatti dimostrato che $NA = BC$.

[37]Huygens applica ancora una volta il teorema del coseno.

[38]Si osserva che $BC \times AD + AC \times AD = AB \times AD$.

su CH è uguale al rettangolo di lati GC, CQ, cioè al rettangolo di lati BN, CQ,[39] cioè al doppio del rettangolo BNQ, cioè al triangolo RNQ o RNC.

Ancora, il quadrato su BA, cioè il quadrato su RC insieme al doppio del rettangolo RCQ + il quadrato su CQ sono uguali al quadrato su RQ.[40] Tuttavia, il doppio del rettangolo RCQ + il quadrato su CQ sono uguali al quadruplo del rettangolo RNC: infatti, il rettangolo RCQ è uguale al doppio del rettangolo RNC ed il quadrato su CQ al quadruplo del quadrato su CN. Dunque, aggiunto al quadrato su BA il quadruplo del rettangolo RCN, cioè 4 volte il quadrato su CH, la loro somma sarà uguale al quadrato su RQ; per ipotesi questi due quadrati insieme sono uguali al quadrato su BS per cui il quadrato su BS è uguale al quadrato sullo stesso RQ: e BS è uguale a RQ. Pertanto, sottratto BQ che è in comnue, QS sarà uguale ad RB, cioè allo stesso CA; sottratto ancora una volta QA che è in comune, AS sarà uguale a CQ, che è quanto si doveva dimostrare.

PROBLEMA

Dato un rombo e prolungati due suoi lati consecutivi, collocare un segmento rettilineo assegnato all'interno dell'angolo che essi delimitano. Occorre che il segmento assegnato non sia minore del doppio della diagonale che congiunge gli altri due vertici del rombo.

Sia $GHAC$ il rombo [Fig. 4] ed i lati che si prolungano siano GH, GC; inoltre, sia o il segmento dato che deve essere maggiore del doppio della diagonale HC: infatti, se è uguale al doppio di HC la costruzione del problema è ovvia.[41] Sia allora maggiore e si debba tracciare KAF uguale ad o.

Sia GB ortogonale ad AC ed il quadrato su BD sia uguale ai quadrati su BA e su o.[42] Su AD si costruisca una parte di circonferenza che sottenda un angolo uguale a CGH e, dai punti dove interseca il prolungamento di GH, si traccino FAK e MAV: dico che entrambe sono uguali ad o.[43]

Per prima cosa, mostriamo il motivo per cui la circonferenza in esame interseca il prolungamento di GH. Sia HQ uguale ad HC. Poiché allora il quadrato su BD è uguale ai quadrati su o e su BA, dei quali il quadrato su o è maggiore di quattro quadrati costruiti su CH, sarà perciò AD maggiore di CQ, ciò che

[39] In altre parole:
$$CH^2 = 2GC \times CQ = BN \times CQ.$$

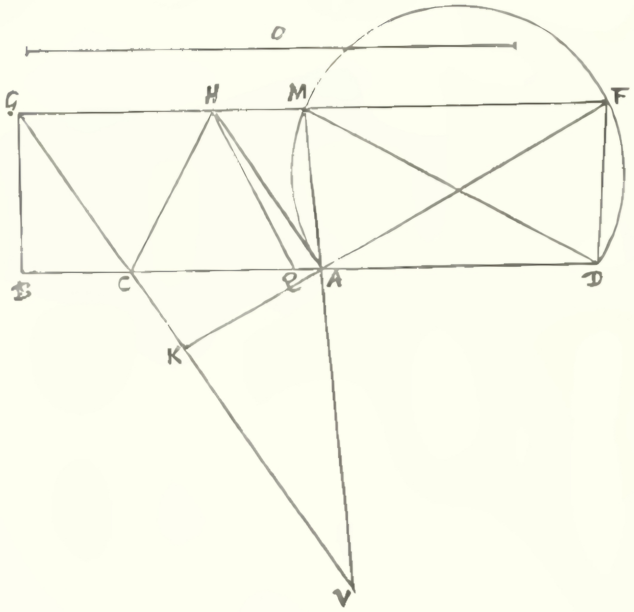
[40] Versione geometrica del quadrato di un binomio:
$$RC^2 + 2RC \times CQ + CQ^2 = RQ^2.$$

[41] Basta infatti tracciare la parallela alla diagonale CH passante per il vertice A.

[42] Annotiamo l'ipotesi di base:
$$BD^2 = BA^2 + o^2.$$

[43] Osserviamo che Huygens ottiene geometricamente *due* rette che risolvono il problema.

[Fig. 4.]



infatti è stato dimostrato nel teorema precedente.[44] Dallo stesso teorema però risulta che il triangolo CHQ è simile al triangolo isoscele CGH. E dunque, se si immagina la parte di circonferenza tracciata su CQ che sottende un angolo CGH, essa passerà per il punto H dove sarà tangente alla retta GH;[45] questa circonferenza sarà simile alla circonferenza che è stata descritta su AD dal momento che anche questa sottende un angolo di ampiezza CGH. Dunque, quando AD è maggiore di CQ, è ovvio che la circonferenza $AMFD$ debba intersecare la retta GHF. Inoltre, tracciati MD ed FD, si vede che i singoli angoli AFD, AMD sono uguali all'angolo CGH. Per questo motivo i quadrati su KF e AB insieme sono uguali al quadrato su BD;[46] tuttavia per costruzione il quadrato su o insieme a quello su AB sono uguali a quello stesso quadrato. Dunque le somme di quadrati sono uguali tra loro. Eliminato il quadrato su AB che è in comune, il quadrato su KF è uguale al quadrato su o e KF è uguale ad o. Allo stesso modo anche il quadrato su MV sarà uguale al quadrato su o che era quanto si doveva dimostrare.

---

[44] Al netto di una notazione differente, nel teorema precedente si era dimostrato che, se $BS^2 = BA^2 + 4CH^2$ allora $AS = CQ$. Il punto D, che prende il posto di S, verifica

$$BD^2 = BA^2 + o^2 > BA^2 + 4CH^2$$

per il diorisma introdotto nel testo. Il segmento AD, che prende il posto di AS è allora tale che $AS > CQ$.

[45] L'angolo $\widehat{CHQ}$ è uguale a $\widehat{CGH}$ per la similitudine dei triangoli isosceli CGH, CHQ e quindi la circonferenza di cui Huygens sta parlando passa per H. Il punto H appartiene al diametro che biseca la corda CQ della circonferenza stessa e dunque la tangente in H deve essere parallela a CQ, cioè coincide con GH.

[46] Qui Huygens si serve del Teorema 1 visto sopra.

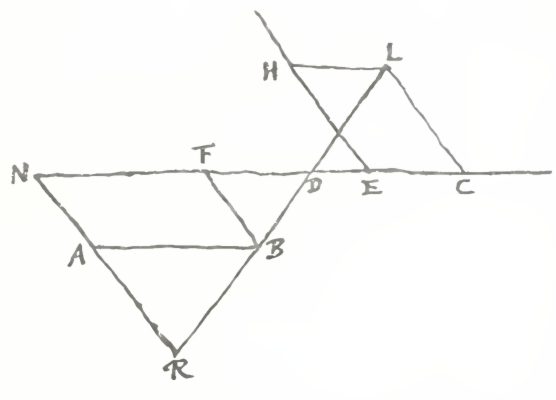
14 Febbraio 1652

Pappo, all'inizio del libro VII dove tratta delle inclinazioni, introduce il problema generale. Date due rette in una certa posizione, occorre tracciare tra di esse un segmento che abbia una lunghezza assegnata.

Il problema è solido a meno che, tracciate dal punto le parallele alle linee date si venga a formare un quadrato o un rombo. Abbiamo già esposto questi casi ed abbiamo insegnato come costruirli. Nella proposizione 31 del libro IV Pappo risolse una parte del problema nel caso in cui sia solido, quando mostra come trisecare un angolo, proponendo però quanto era stato trovato da altri. Sebbene però egli consideri un parallelogramma rettangolo, il problema si risolve tramite le iperboli allo stesso modo anche quando il parallelogramma non è rettangolo. Ora tratteremo invece il caso in cui il punto sia dato dentro un angolo e anche [la soluzione di] questo può essere tentata tramite iperboli. Da questa dedurremo un'altra costruzione per il rombo.

Sia dato un angolo [di vertice] N e si assegni al suo interno un punto B ed occorra tracciare RBD uguale ad un segmento assegnato. Si supponga risolto il problema e si traccino BA, BF parallele alle stesse NF, NA e presa FE uguale ad FN e sia EH parallela ad NA. Si prolunghi RD e si prenda BL uguale ad RD e si traccino LH ed LC ancora parallele ad NF ed NA.

[Fig. 1.]



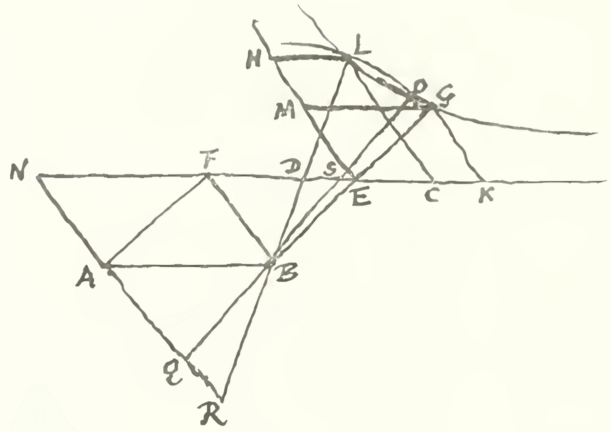
Pertanto i triangoli LDC ed RBA sono simili. Il lato LD è uguale al lato RB perché tutto BL è uguale a tutto DR: e così anche LC è uguale ad AR e CD è uguale ad AB o NF, cioè ad FE e, sottratto il segmento comune DE, EC sarà uguale a DF. Inoltre DF sta ad FB come BA sta ad AR. Pertanto, poiché EC è uguale ad FD ed LC, cioè HE, ad AR si avrà anche che EC sta ad FB come BA sta ad HE per cui il rettangolo di lati EC, HE è uguale a quello di lati FB, BA. Dunque il punto L appartiene ad un'iperbole ma anche alla circonferenza di un cerchio; infatti il punto B è assegnato ed RD è uguale al segmento assegnato BL per cui il punto L ha una posizione data. Inoltre sarà dato anche il segmento LB per cui anche DBR sarà in una posizione data che coincide con il precedente.

Si costruisca il problema in questo modo. Traccata EH come nella risoluzione, si uniscano B ed E [Fig. 2] e si prolunghi BE con EG uguale a EB. Quindi si tracci l'iperbole LG passante per il punto G ed avente asintoti EH,

EK. Con centro in B e raggio BL uguale al segmento assegnato si descriva la circonferenza LO: se essa non interseca l'iperbole, il problema non si può risolvere perché il segmento dato è troppo corto.

Se la circonferenza LO è tangente all'iperbole LG, il segmento dato è il più corto tra tutti quelli che possono risolvere il problema; se infine la circonferenza taglia l'iperbole come qui, nei punti L ed O, si traccino i segmenti LBR, OBQ: dico che le loro intercette DR, SQ risolvono il problema, cioè sono uguali a BL ovvero al segmento assegnato.

[Fig. 2.]



Infatti, si traccino le parallele HL, LC ad EK, EH come pure le parallele GM, GK. Poiché allora EG è uguale allo stesso[47] EB cioè allo stesso FA è evidente che il parallelogramma $MGKE$ è uguale e simile al parallelogramma $NFBA$. Per le proprietà dell'iperbole, il rettangolo di lati LC, CE è uguale al rettangolo di lati EK, KG cioè a quello di lati EF, FB per cui[48] LC sta ad FB, cioè CD sta a DF come FE sta ad EC. Pertanto il segmento FC è diviso nello stesso rapporto dal punto D e dal punto E e per questo motivo CD sarà uguale ad FE ovvero ad AB ed inoltre CD ed AB sono lati corrispondenti dei triangoli simili CDL, ABR; dunque anche DL sarà uguale a BR e l'intero segmento DL sarà uguale a DR ma BL è uguale al segmento assegnato. Dunque si è costruito quanto ci si era proposto. Allo stesso modo si può dimostrare che QS è uguale allo stesso BO ovvero a BL.

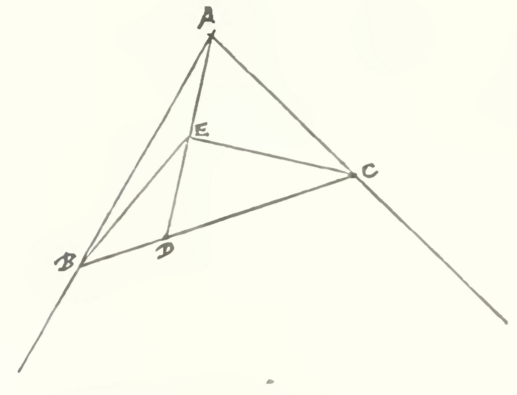
Inoltre il problema rientra tra quelli solidi; infatti, solo con la riga ed il compasso non è possibile trovare il segmento più corto condotto all'interno dell'angolo di vertice N, passante per B. Se l'angolo è retto, in modo che il parallelogramma NB sia rettangolo, si tracci il segmento più breve passante per B in modo che si trovino due medie proporzionali tra i segmenti FN, NA. Così fecero Erone o Nicomede. Ma quanto trovato da Erone si può estendere anche al caso che l'angolo non sia retto. E infatti [Fig. 3], dato un punto D interno all'angolo BAC sia richiesto di tracciare il segmento più corto tra tutti quelli

[47]Per costruzione, i triangoli FEB ed EKG sono congruenti.

[48]La proporzione $LC : FB = CD : DF$ è conseguenza della similitudine dei triangoli LDC e FDB.

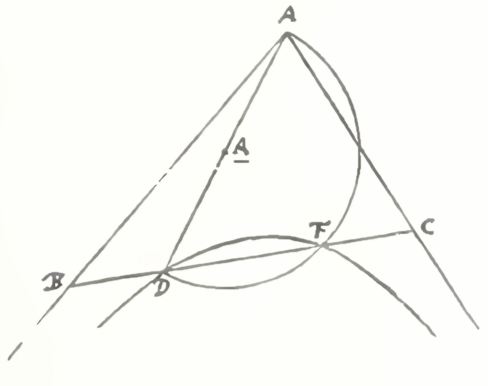
passanti per D che si possono condurre dentro l'angolo; si uniscano i punti D ed A e sia E il punto medio di AD. Si ponga una riga nel punto D e la si muova finché non si trovino EB ed EC uguali, ciò che si può ottenere facilmente per tentativi più spesso e si uniscano B e C: questa sarà la linea più breve. Essa si può determinare in questo modo. Nelle stesse ipotesi si tracci in quest'altro modo il segmento più breve.

[Fig. 3.]



Si descriva l'iperbole DF passante per un punto D ed avente asintoti AB, AC. Su AD si costruisca un semicerchio e, detta F l'intersezione con l'iperbole, si tracci FD prolungandolo da entrambe le parti e ciò risolverà il problema, essendo BDC la più breve di tutte quelle che si possono tracciare da D.

[Fig.4.]

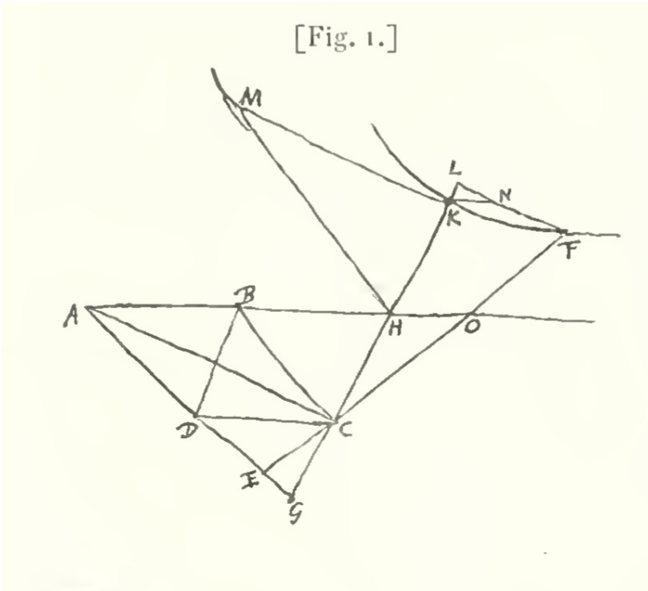


In un altro modo ancora, senza tracciare l'iperbole ma solo il semicerchio, si muova il segmento attorno al punto D finché non si ottengono BD ed FC uguali tra loro.

Più avanti vedrai la risoluzione di questa problema sui minimi, dimostrata con il calcolo.

17 Febbraio 1652

Dato un rombo $ABCD$ e prolungati i suoi lati, occorre tracciare ECO uguale ad un segmento dato.



Si supponga risolto il problema e sia CF uguale ad EO. Allora il punto F starà sull'iperbole che si trova come sopra, tracciate evidentemente le diagonali AC, BD e $GCHK$ parallela a DB, HM parallela a BC, l'iperbole cercata sarà quella passante per K avente asintoti HM, HO e poiché HK ora biseca l'angolo MHO, KL sarà l'asse dell'iperbole, CK il lato traverso. Se KM è perpendicolare a CK, KM sarà uguale ad AC.[49] Si chiami a AC o KM, b il segmento DB o HK, c il segmento EO ovvero CF e, tracciata FL ortogonale a HK, sia $KL = x$.

Il quadrato su KM è uguale alla quarta parte del rettangolo di lati il lato traverso CK ed il lato retto.[50] Dunque HK sta a KM come KM sta a $\frac{1}{2}$ del lato retto. Per cui HK sta ad $\frac{1}{2}$ del lato retto, ovvero CK sta al lato retto come il quadrato su HK sta al quadrato su KM, cioè come bb sta ad aa.[51]

[49]Le rette KG e BD; AC, MK; MH, AG sono parallele ed AC e DB sono perpendicolari, come diagonali di un rombo.

[50]Questa proposizione è la II.1 delle *Coniche* di Apollonio.

[51]Se indichiamo con ℓ il lato retto dell'iperbole, Huygens parte da

$$HK : KM = KM : \frac{\ell}{2}$$

e osserva che

$$HK : \frac{\ell}{2} = 2HK : \ell = CK : \ell$$

e ricava dalla prima proporzione $\frac{\ell}{2} = \frac{KM^2}{HK}$ che, sostituita nell'ultima proporzione permette di scrivere

$$CK : \ell = HK^2 : KM^2 = b^2 : a^2.$$

Per cui, grazie alla Prop. 21 del libro delle Coniche[52] diremo che CK sta al lato retto come il rettangolo CLK sta al quadrato LF[53]

$$bb \text{ sta a } aa \text{ come } 2bx + xx \text{ sta a } \frac{2baax + aaxx}{bb} \text{ quadrato su } LF$$

$$\text{sottraiamo} \begin{cases} \text{il quadrato su } CF = cc \\ \text{il quadrato su } CL = 4bb + 4bx + xx \end{cases}$$

sarà

$$\text{quadrato su } LF = cc - 4bb - 4bx - xx = \frac{2baax + aaxx}{bb}$$

$$xx = \frac{-2a^2b - 4b^3x + bbcc - 4b^4}{aa + bb}$$

sarà che

$$CH(b) \text{ sta ad } HA(\sqrt{aa + bb}) \text{ come} LK(x) \text{ sta a } KN \left(\frac{x\sqrt{aa + bb}}{b} \right) = y$$

dunque[54] $x = \frac{by}{aa+bb}$ che, sostituito al posto di x dà[55]

$$yy = \frac{-2aa - 4bb}{aa + bb} y + cc - 4bb$$

da cui segue la costruzione del problema.

COMPOSIZIONE

Si prenda BH uguale a BA e si conduca GCH, prolungato in modo che sia HK uguale ad HC. Da K si conduca la perpendicolare KP ad AH e si supponga che il quadrato su AQ sia uguale al quadrato su AP insieme alla differenza tra i quadrati costruiti su R e su GH, con il segmento dato R che deve inoltre non essere minore di HG. Inoltre, completato il rettangolo PN, si tracci NF ortononale a GK e da C si tracci CF uguale al segmento dato R e lo si prolunghi in E. Dico che la sua intercetta OE è uguale al segmento dato R.

[52]Ancora un riferimento all'opera di Apollonio. La proposizione richiamata si trova nel I Libro del trattato e che vale sia per le ellissi che per le iperboli:

$$CK : \ell = CL \times LK : LF^2$$

che si traduce nella proporzione riportata nel testo da Huygens in forma algebrica e che serve a trovare il valore di LF^2.

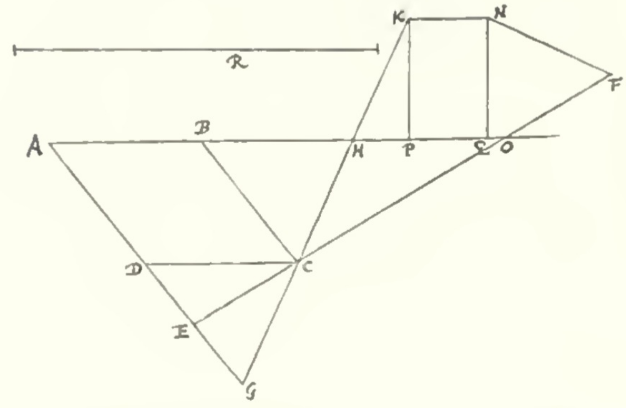
[53]L'espressione seguente di CL^2 si ottiene osservando che $CL = KL + CK = KL + 2HK = x + 2b$. Huygens applica in seguito il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CFL.

[54]Il triangolo rettangolo NLK è stato costruito con KN parallelo ad AH e la proporzione che fornisce il valore di $KN = y$ discende dalla similitudine dei triangoli NLK ed ACH.

[55]La sostituzione si deve effettuare nell'equazione

$$xx = \frac{-2a^2b - 4b^3x + bbcc - 4b^4}{aa + bb}$$

[Fig. 3,]



Più oltre vedi una ottima costruzione di questo.

Appendice C

Risoluzioni del problema del quadrato tratte da manuali

Problema del quadrato (Catalan)[1] C.1
Dato un punto O, situato sulla bisettrice di un angolo retto CAB, tracciare una retta MN tale che il segmento di essa compreso tra i lati dell'angolo abbia lunghezza assegnata l.

Analisi:
Dal punto O, tracciamo sui lati dell'angolo le perpendicolari uguali OD e OE. Dal punto N della trasversale cercata, consideriamo NF perpendicolare a MN, e poi NG perpendicolare a DO.

Se il punto F, intersezione di NF con il prolungamento di DO, fosse noto, il punto N si potrebbe costruire tracciando una semicirconferenza avente OF come diametro.

I triangoli rettangoli $\triangle MDO$ e $\triangle FGN$ sono congruenti, poiché hanno i lati perpendicolari e inoltre $DO = OE = GN$. Ne segue che $MO = NF$. Pertanto:

$$MN^2 = l^2 = (ON + NF)^2 = ON^2 + NF^2 + 2\,ON \cdot NF.$$

D'altra parte, il triangolo $\triangle ONF$ è rettangolo in N e simile a OGN, quindi

$$ON^2 + NF^2 = OF^2, \quad ON \cdot NF = OF \cdot GN = OF \cdot OE$$

e, in definitiva,

$$l^2 = OF^2 + 2\,OF \cdot OE, \quad \text{ossia} \quad l^2 = OF(OF + 2OD).$$

Supponiamo ora di costruire una circonferenza con centro in D e raggio DF e di prolungare EO fino a incontrarla in un punto H. Si ha allora, grazie anche al secondo teorema di Euclide per i triangoli

[1] Traduzione della costruzione tratta da [Catalan 1858], pagine 105-106.

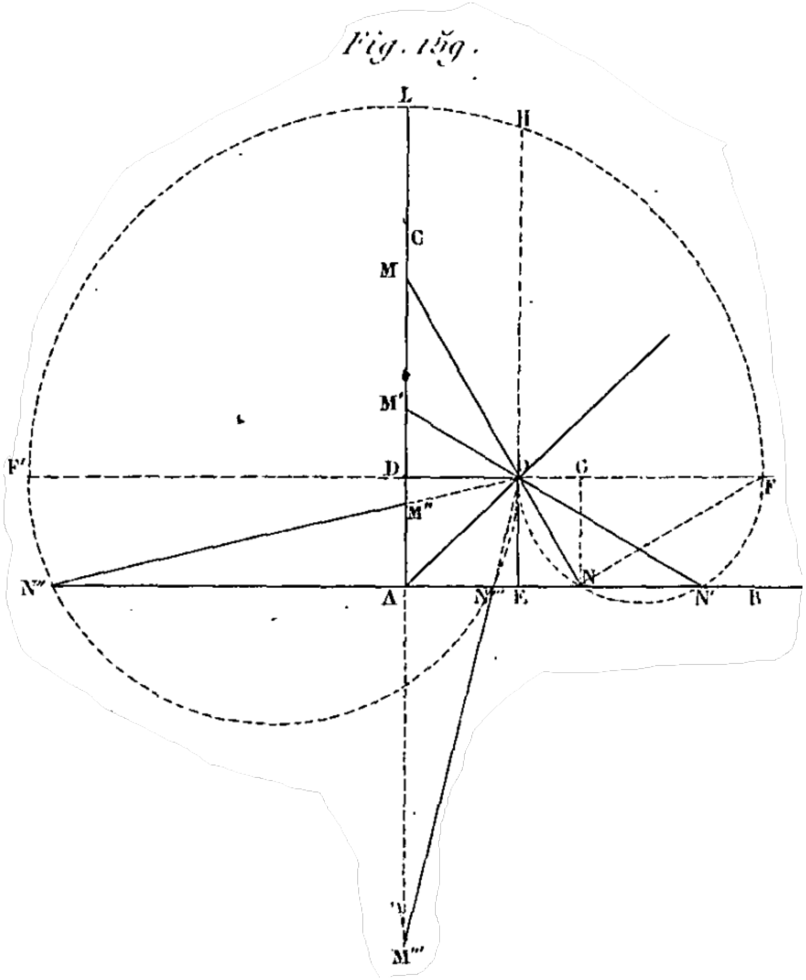


Figura C.1: Figura originale tratta da [Catalan 1858], planche 6 in fondo al volume.

rettangoli,

$$OF' = OF + 2OD, \quad \text{e} \quad OH^2 = OF \cdot OF'.$$

Poiché $l^2 = OF \cdot OF'$, segue che $OH = l$.

Costruzione:
Per risolvere il problema, si procede dunque così: si prende $OH = l$; si costruisce poi la circonferenza FHF' di centro D; successivamente si tracciano le circonferenze aventi per diametri OF e OF'; si congiunge il punto O con i punti in cui queste circonferenze intersecano AB o il suo prolungamento.
Le rette così ottenute soddisfano le condizioni del problema.

Problema del quadrato (Desboves)[2] C.2

[2]Traduzione della costruzione tratta da [Desboves 1892], pp. 390-393.

Date due rette perpendicolari infinite XX' e YY', si vuole tracciare, per un punto C equidistante dalle due rette, una secante tale che il segmento intercettato tra le due rette abbia lunghezza assegnata.

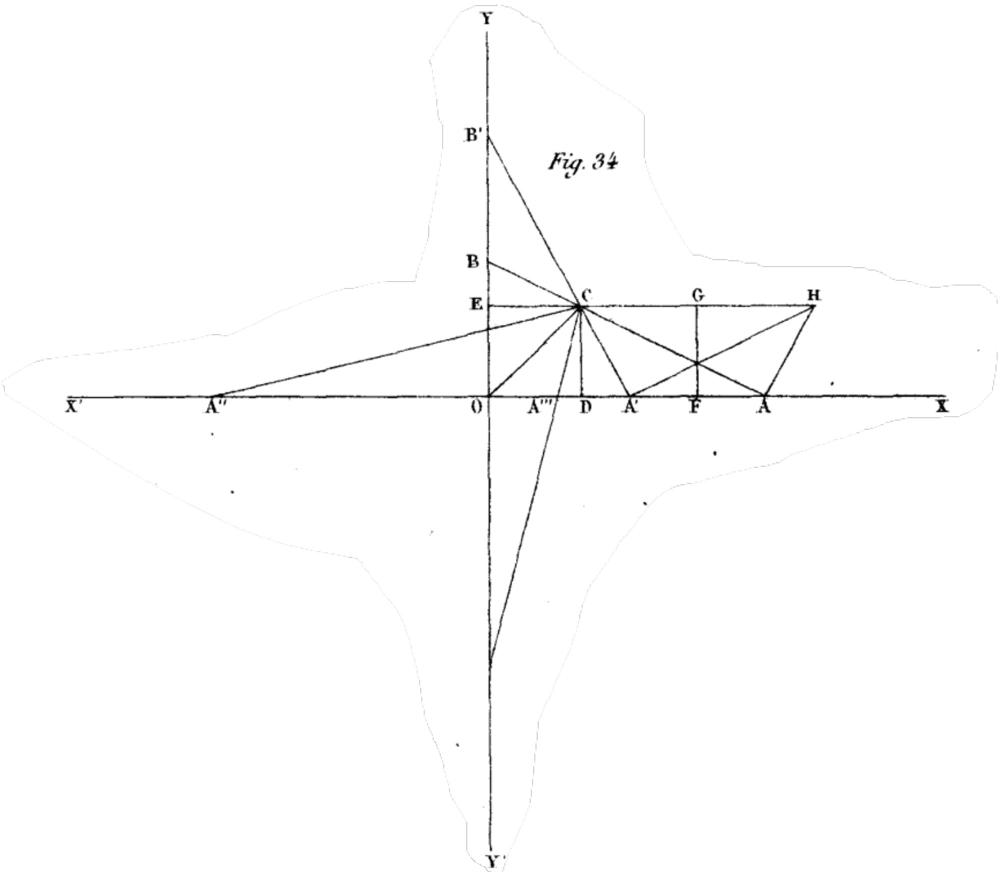


Figura C.2: Figura originale tratta da [Desboves 1892], p. 3 in fondo al volume.

Costruzione:
Sia b la lunghezza assegnata, e a la distanza comune del punto C dalle due rette XX' e YY', ovvero la lunghezza dei segmenti CD e CE.

3° Metodo

Supponiamo anzitutto che la secante sia posta nell'angolo YOX, e prendiamo come incognite x, y le distanze OA, OB; allora il triangolo rettangolo OAB dà

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = b^2;$$

e, scrivendo che l'area del triangolo OAB è uguale alla somma delle aree dei triangoli OCA, OCB, otteniamo

$$(2) \qquad xy = a(x + y).$$

Se la secante fosse compresa negli angoli YOX', XOY', si avrebbe un triangolo uguale alla differenza di altri due, e l'equazione (2) sarebbe sostituita da una delle seguenti:

$$(3) \qquad xy = a(x - y), \qquad (4) \qquad xy = a(y - x).$$

Ma i sistemi delle equazioni (1), (3) e delle equazioni (1), (4) si deducono dal sistema delle equazioni (1) e (2) cambiando x o y in $-x$ o $-y$, cioè il sistema delle equazioni (1) e (2) è generale, purché i valori negativi di x e di y siano contati rispettivamente su OX' e OY'.

Ora, invece di eliminare y tra le equazioni (1) e (2), moltiplichiamo per 2 i due membri dell'equazione (2) e sommiamola, membro a membro, dalla prima: si ottiene allora

$$(5) \qquad (x + y)^2 - 2a(x + y) - b^2 = 0,$$

per cui

$$(6) \qquad x + y = a \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Sostituendo i valori di $x + y$ nell'equazione (2), otteniamo

$$(7) \qquad xy = a\left(a \pm \sqrt{a^2 + b^2}\right),$$

i segni superiori dei radicali nelle equazioni (6) e (7) essendo presi insieme, così come i segni inferiori; x e y saranno dunque le radici di due equazioni di secondo grado

$$(8) \qquad X^2 - \left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) X + a\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) = 0,$$

$$(9) \qquad X^2 - \left(a - \sqrt{a^2 + b^2}\right) X + a\left(a - \sqrt{a^2 + b^2}\right) = 0.$$

Ciascuna delle equazioni (6) e (7) fornisce un sistema di valori per x e y; perciò il problema ausiliario d'Algebra ha soltanto due soluzioni. Ma i valori di x e y, dovendo essere riportati l'uno su XX', l'altro su YY', hanno ciascuno un significato particolare, e il problema di Geometria ha, in generale, quattro soluzioni.

Questa osservazione di Desboves non è pienamente condivisibile perché il sistema (1)-(2) è *simmetrico* rispetto allo scambio $(x, y) \mapsto (y, x)$ e dunque, cambiando i valori di x ed y si riottiene la corretta molteplicità nel problema algebrico. Invece di risolvere le equazioni (8) e (9), è preferibile determinare $x + y$ con l'equazione (6) oppure xy con l'equazione (7); infatti, in Geometria, si sa costruire un triangolo AOB, conoscendo un lato AB, l'angolo O, e la somma o il prodotto degli altri due lati: è ciò che verrà sviluppato nei due metodi seguenti.

4º Metodo

Supponiamo che dal punto O si abbassi la perpendicolare su AB, e che la si prenda come incognita. Indicandola con z, si ha:

$$xy = bz.$$

Se si considera la secante nel primo angolo, l'equazione (7) del metodo precedente dà:

$$xy = a\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right),$$

e, confrontando le due equazioni, si ottiene:

$$z = \frac{a\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}{b}.$$

La lunghezza z si costruisce come quarta proporzionale a tre segmenti dati; una volta ottenuta, si descrive una circonferenza con centro in O e raggio z, quindi dal punto C si tracciano le tangenti a tale circonferenza.

La stessa costruzione vale anche per le altre due posizioni della secante.

5º Metodo

Si parte da uno dei valori di $x + y$ forniti dall'equazione (6) ma, invece di usare la costruzione ordinaria per determinare un triangolo conoscendo un lato, l'angolo opposto e la somma degli altri due lati, si ricava un altro vantaggio dalla somma $x + y$.

Consideriamo anzitutto le due secanti AB e $A'B'$, situate nell'angolo YOX. Nei punti A e A' si innalzano due rette AH e $A'H$, rispettivamente perpendicolari a AB e $A'B'$ e le si prolunga fino a incontrare la retta indefinita EC.

Si vede inoltre facilmente, con la geometria, che le due rette incontrano EC nello stesso punto H; e si osserva anche che, poiché il quadrilatero $HAA'C$ è inscritto in una semicirconferenza, la perpendicolare FG, condotta nel punto medio di AA', passa per il punto medio G di CH. Si ha quindi:

$$OA + OA' = 2OF, \qquad EH + EC = 2EG,$$

da cui segue:

$$EH + EC = OA + OA'.$$

Ora, essendo $OA' = OB = y$, si ha:

$$EH + EC = x + y = a + \sqrt{a^2 + b^2},$$

e quindi:

$$EH = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La lunghezza EH è dunque l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui due cateti sono a e b. Una volta costruita, la si riporta da E a H, poi si descrive una semicirconferenza avente CH come diametro: i due punti in cui essa incontra OX sono i punti cercati A e A'.

Se si fosse supposta la secante situata in uno degli angoli YOX' o XOY', il metodo sarebbe stato lo stesso. Soltanto, le distanze OF e OG sarebbero state le semidifferenze invece che le semisomme delle distanze considerate e, nella formula di $x + y$, si sarebbe dovuto prendere il radicale con il segno meno.

Infine, si sarebbe stati condotti a riportare una lunghezza uguale a EH sulla stessa retta EC, ma in verso opposto, da E a H'; poi si sarebbe descritta una circonferenza avente CH' come diametro, ecc.

Bibliografia

[Alasia 1900] Cristoforo Alasia, *La recente geometria del triangolo*. Lapi, Città di Castello (Perugia), 1900.

[Archimede 2002] Archimede, *The Works of Archimedes*. Edited by T. L. Heath. Dover Publications, Mineola, NY, 2002.

[Bergsten–Jablonka–Klisinska 2010] Christer Bergsten, Eva Jablonka, Anna Klisinska, *A Remark on Didactic Transposition Theory*. In: Proceedings of the Seventh Swedish Mathematics Education Research Seminar, January 2010.

[Boaler & Anderson 2018] Jo Boaler e Robin Anderson, *Considering the Rights of Learners in Classrooms: The Importance of Mistakes and Growth Assessment Practices*. *Democracy & Education*, Vol. 26, n. 2, Article 7, 2018.

[Borasi 1996] Raffaella Borasi, *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors*. Ablex Publishing Corporation, Norwood, NJ, 1996.

[Bos 2001] Henk J. M. Bos, *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. Springer, New York, 2001.

[Brigaglia & Nastasi 1986] Aldo Brigaglia e Pietro Nastasi, *Le ricostruzioni apolloniane in Viète e in Ghetaldi*. Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, Anno VI (1986), fasc. 1, pp. 83-133.

[Catalan 1858] Eugène Catalan, *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*. Troisième édition, revue et augmentée. Paris: Victor Dalmont, 1858.

[Descartes 1954] René Descartes, *The Geometry of René Descartes: with a Facsimile of the First Edition*. Traduzione dal francese e dal latino di David Eugene Smith e Marcia L. Latham, Dover Publications, New York, 1954.

[Desboves 1892] A. Desboves, *Questions d'algèbre élémentaire: méthodes et solutions*. Quatrième édition entièrement refondue et augmentée. Paris: Librairie Ch. Delagrave, 1892.

[Di Dia 1916-17] Giuseppe Di Dia, *Sul classico problema elementare di Pappo*. *Il Pitagora*, **22**, pp. 129-143.

[Euclide 1926] Euclide, *Il primo libro degli Elementi.* Versione italiana, introduzione e note a cura di Giovanni Vacca, con prefazione di Nicola Festa, Zanichelli, Bologna, 1926.

[F.J. 1896] F.[rère] J.[ustin], *Exercices de Géométrie.* (Troisième Édition) Male, Tours.

[Florio 2023] Emilia Florio, *The History of a Lemma from Archimedes to Newton. Mathematics*, vol. 11 (2023), no. 3, art. 747.

[Florio, Maierù 2022] Emilia Florio, Luigi Maierù, *Bellezza ed estetica nella storia del problema del quadrato.* Roma: Aracne editrice, 2022.

[Furinghetti 1997] Fulvia Furinghetti, *History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different Domains. For the Learning of Mathematics*, **17**, pp. 55-61.

[Galuzzi-Rovelli 1996] Massimo Galuzzi, Daniela Rovelli, *Storia della geometria e didattica: qualche osservazione.* In: *L'insegnamento della geometria. Seminario di Formazione per docenti scuole medie.* Quaderni ed Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica Istruzione. Lucca (Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri"), Novembre 1995 – Marzo 1996, pp. 70-110.

[Ghetaldi 1607] Marino Ghetaldi, *Apollonius Redivivus, seu, restituta Apollonii Pergaei inclinationum geometria.* Venezia, Apud Bernardum Iuntam, 1607.

[Hutton 1796] Charles Hutton, *A Mathematical and Philosophical Dictionary.* 2 vols. London: J. Johnson; G. G. & J. Robinson, 1795–1796.

[Huygens 1910] Christiaan Huygens, *Œuvres complètes.* Tome XII: *Travaux de mathématiques pures (1652–1656).* Publiées par la Société Hollandaise des Sciences, Martinus Nijhoff, La Haye, 1910.

[Jankvist 2009] U. T. Jankvist, *A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261, 2009.

[Kempenaars 1990] C. M. P. M. Kempenaars, *Some New Data on Gerard Kinckhuysen (c. 1625–1666). Nieuw Archief voor Wiskunde*, serie 4, vol. 9, 1990, pp. 243–250.

[Lin-Siegler et al. 2016] Xiaodong Lin-Siegler, Janet N. Ahn, Jondou Chen, Fu-Fen Anny Fang, Myra Luna-Lucero, *Even Einstein Struggled: Effects of Learning About Great Scientists' Struggles on High School Students' Motivation to Learn Science.* Journal of Educational Psychology, 108(3), 314–328, 2016.

[L'Hôpital 1720] Guillaume de L'Hôpital, *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminés qu'indéterminés.* Ouvrage posthume. Paris: Montala(nt), 1720.

[Meskens–Tytgat 2017] A. Meskens, P. Tytgat, *Exploring Classical Greek Construction Problems with Interactive Geometry Software.* Cham: Birkhäuser, 2017.

[Newton 1720] Isaac Newton, *Universal Arithmetick: or, A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution.* Translated from the Latin by the late Mr. Raphson, revised and corrected by Mr. Cunn. London, 1720.

[Newton 1967–1981] Isaac Newton, *The Mathematical Papers of Sir Isaac Newton, 1642–1727.* Edited by D. T. Whiteside with the assistance of M. A. Hoskin. Cambridge: Cambridge University Press, 1967–1981. 8 vols.

[Occella 1897] Federico Occella, *Intorno ad un problema di Pappo: nota di matematica elementare.* Casale: Tipografia e Litografia C. Cassone, 1897.

[Pappo 1933] Pappus d'Alexandrie, *La collection mathématique : œuvre traduite pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke*, 2 vol., Desclée de Brouwer & Cie, Paris–Bruges, 1933.

[Rabuel 1720] Claude Rabuel, *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes.* Lione, Duplain.

[Rosso 2024] R. Rosso, Dispense del corso di "Storia della matematica", anno accademico 2024-2025, Università di Pavia.

[Truesdell 1958] C. Truesdell, *The New Bernoulli Edition.* Isis, vol. 49, n. 1, marzo 1958, pp. 54–62. Chicago: The University of Chicago Press for The History of Science Society.

[van Schooten 1690] Frans van Schooten (curatore), *Renati Des Cartes Geometria. Una cum notis Florimondi de Beaune.* Knoch, Francoforte sul Meno, 1690.

[Viète 2006] F. Viète. *The Analytic Art.* Traduzione di T. Richard Witmer. Dover Publications, Mineola, NY, 2006.

Sitografia

[Finco 2020] E. Finco, *L'importanza del Teorema delle Corde per le coniche finalmente riconosciuta: l'Hôpital e Le Poivre.* Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Ferrara, 2020. Disponibile online: `https://dm.unife.it/divulgazione/2020/L_Hopital/L_hopital.html` (consultato il 13 marzo 2026).

[Grokipedia] Grokipedia, *Neusis construction.* Disponibile online: `https://grokipedia.com/page/Neusis_construction` (consultato nel gennaio 2026).

[O'Connor–Robertson 2026a] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *Albert Girard (1595–1632)*. MacTutor History of Mathematics Archive, University of St Andrews. Disponibile online: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Girard_Albert/` (consultato il 27 marzo 2026).

[Polizzi 2002] G. Polizzi, *Bachelard e la formazione dello spirito scientifico: una prospettiva di pedagogia della conoscenza. Comunicazione Filosofica*, n. 10, Società Filosofica Italiana, 2002. Disponibile online: `https://www.sfi.it/archiviosfi/cf/cf10/articoli/polizzi.htm` (consultato l' 11 marzo 2026).

[Università degli Studi di Milano] Università degli Studi di Milano, *Costruttivismo*. Materiale didattico del corso di Didattica dell'Informatica. Disponibile online: `https://mameli.docenti.di.unimi.it/didainfo/raw-attachment/wiki/PrimaLezione/slideCostruttivismo.pdf` (consultato il 12 aprile 2026).

[Wikipedia] Wikipedia, *V postulato di Euclide*. Disponibile online: `https://it.wikipedia.org/wiki/V_postulato_di_Euclide` (consultato il 12 aprile 2026).