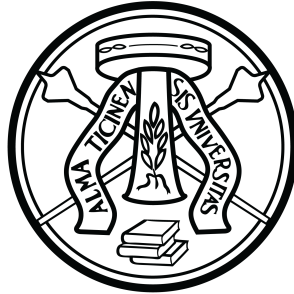


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA



UNIVERSITÀ
DI PAVIA

**I numeri negativi:
evoluzione di un concetto attraverso i secoli**

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof. Riccardo Rosso

Tesi di Laurea di:
Luca Poletti
Matricola 506793

Anno Accademico 2025-2026

Sommario

La tesi ricostruisce l'evoluzione storica del concetto di numero negativo, dalle prime concezioni extra-europee fino alla sua fondazione logica nell'Ottocento, mostrando come il problema posto dai numeri negativi non sia mai stato tanto un problema di calcolo quanto un problema di legittimità e di giustificazione teorica. Il filo conduttore dell'indagine è la regola dei segni — l'affermazione che il prodotto di due quantità negative sia positivo — assunta come punto di cristallizzazione della tensione fra una pratica di calcolo efficace e una teoria capace di fondarla.

Il primo capitolo confronta quattro tradizioni matematiche indipendenti, distanti tra loro nel tempo e nello spazio: la Grecia classica di Euclide e Diofanto, tra il III secolo a.C. e il III secolo d.C.; la Cina imperiale della dinastia Han, tra il I e il III secolo d.C.; l'India medievale di Brahmagupta e Bhaskara II, tra il VII e il XII secolo; il mondo arabo di al-Khwarizmi e al-Samaw'al, tra il IX e il XII secolo. In ciascuna di esse le quantità negative furono concepite, accettate o rifiutate in modo diverso: il capitolo mostra come questo atteggiamento dipendesse strettamente dalla concezione di numero adottata da ogni tradizione.

Il secondo capitolo segue l'ingresso e il progressivo consolidamento operativo dei numeri negativi in Europa. Comparvero dapprima come debito nell'aritmetica commerciale di Fibonacci e Pacioli; attraversarono poi l'insufficienza teorica dichiarata da Cardano e la giustificazione algebrica proposta da Viète. Nel Settecento il problema divenne esplicitamente epistemologico, con le posizioni di Agnesi in Italia e di Clairaut in Francia. Il capitolo si chiude con l'assestamento operativo di inizio Ottocento, affidato a Ruffini, Reynaud e Carnot.

Il terzo capitolo ricostruisce infine la formalizzazione ottocentesca del concetto di numero negativo, seguendo il percorso che va dal rigore convenzionale di Cauchy al principio di permanenza delle forme di Peacock e Hankel. Il capitolo si conclude con la costruzione per coppie di Weierstrass, che trasformò la regola dei segni da convenzione stipulata a teorema dimostrato entro una struttura definita per via costruttiva.

Un capitolo conclusivo esamina infine due manuali italiani di inizio Novecento che affrontano, con un rigore dimostrativo analogo e senza alcun legame documentato con le costruzioni discusse, la stessa esigenza di fondazione, confrontando due approcci pedagogici fra loro indipendenti.

Il lavoro ricostruisce così un arco che muove dalla resistenza e dall'uso pratico verso la piena fondazione logica di un oggetto matematico che per secoli aveva richiesto, per essere accettato, ben più di una semplice regola di calcolo.

Indice

1	Origine dei numeri negativi	7
1.1	Il concetto di numero tra quantità e astrazione	8
1.2	Grecia antica	10
1.3	Cina imperiale	17
1.4	India medievale	19
1.5	Tradizione araba	20
1.6	Quattro tradizioni, una tensione comune	22
2	I numeri negativi in Europa	25
2.1	Il basso Medioevo	26
2.2	Il Cinquecento	32
2.3	Il Seicento	42
2.4	Il Settecento	55
2.5	Tra Settecento e Ottocento	67
3	Dalla convenzione alla costruzione	77
3.1	Tra rigore e convenzione	78
3.2	La scuola del silenzio	81
3.3	La via geometrica	88
3.4	L'algebra simbolica	95
3.5	La via costruttiva	104
4	Aspetti didattici	113
4.1	Capelli	114
4.2	Baroni	116
4.3	Due manuali a confronto	117
4.4	Dall'antichità ai banchi di scuola	119

Capitolo 1

Origine dei numeri negativi: quattro concezioni del numero

Questa tesi nasce dal corso di Storia della Matematica sulle equazioni algebriche tenuto dal relatore, le cui dispense¹ — un riferimento costante lungo l'intero lavoro — ne hanno ispirato l'impostazione storiografica di fondo.

La matematica è spesso presentata come un sistema di conoscenze universali e atemporali, caratterizzato da strutture concettuali rigorose e da risultati validi indipendentemente dal contesto storico in cui sono formulati. La prospettiva della storia della matematica, tuttavia, invita a considerare tali concetti nel processo attraverso cui essi si sono progressivamente sviluppati sino a raggiungere la loro forma attuale. In questo senso, fare storia della matematica non significa limitarsi a ricostruire una successione cronologica di risultati o di scoperte, quanto analizzare i modi in cui determinati concetti sono stati introdotti, interpretati e trasformati all'interno di specifiche tradizioni matematiche.

Un aspetto centrale di questo approccio consiste nell'evitare una lettura retrospettiva che interpreti il passato alla luce delle conoscenze attuali. I concetti matematici che oggi appaiono elementari o intuitivi sono spesso il risultato di processi storici complessi, caratterizzati da tentativi, riformulazioni e talvolta da significative resistenze concettuali. Come sottolineato da Gert Schubring², lo sviluppo delle idee matematiche può essere interpretato come un equilibrio dinamico tra esigenze di generalizzazione, richieste di rigore e forme di intuizione che guidano la pratica matematica. In questa prospettiva, la storia della matematica non si configura come una semplice narrazione di progressi lineari, ma come un'analisi di processi attraverso i quali nuove entità teoriche sono gradualmente integrate nel linguaggio e nelle strutture della disciplina.

Il caso dei numeri negativi costituisce un esempio particolarmente significativo di tale dinamica. Nell'attuale pratica matematica essi rappresentano una componente fondamentale del sistema numerico e la loro introduzione avviene già nei primi livelli dell'istruzione. Tuttavia, la loro accettazione nella storia della matematica è stata tutt'altro che immediata. Per lungo tempo, il concetto di numero è stato strettamente associato alla nozione di quantità o di grandezza

¹Rosso 2024–2025.

²Schubring 2005.

misurabile; in questo quadro interpretativo l'idea di quantità “minori di nulla” appariva difficilmente conciliabile con il significato attribuito ai numeri. Di conseguenza risultati che oggi sarebbero interpretati con naturalezza come negativi erano spesso considerati privi di significato o esclusi dall'ambito delle soluzioni accettabili.

Gli studi di Jacques Sesiano³ hanno mostrato, ad esempio, come nella matematica medievale compaiano già soluzioni negative nel contesto della risoluzione di equazioni algebriche, senza che tali risultati siano tuttavia interpretati come numeri nel senso moderno del termine. Analogamente, tra il XVI e il XVII secolo, diversi matematici europei si trovarono ad affrontare il problema dell'interpretazione di tali quantità nel contesto dell'algebra nascente. Autori come Gerolamo Cardano, Rafael Bombelli e François Viète contribuirono, in modi differenti, alla progressiva elaborazione di strumenti simbolici e concettuali che avrebbero reso possibile una più ampia estensione del dominio numerico.

Da questo punto di vista, lo studio storico dei numeri negativi non si limita a individuare il momento della loro “scoperta” ma si propone di analizzare i diversi significati che tali entità hanno assunto nel corso del tempo, nonché le strategie teoriche e interpretative attraverso cui esse sono state progressivamente integrate nel linguaggio matematico. Ciò implica considerare le pratiche algebriche, le forme di rappresentazione e i modelli interpretativi utilizzati nei diversi contesti storici, nonché le limitazioni concettuali che ne hanno inizialmente ostacolato l'accettazione.

Questa prospettiva assume inoltre particolare interesse anche dal punto di vista didattico. Come evidenziato in studi recenti, tra cui quello di Gagatsis e Alexandrou⁴, molte delle difficoltà che gli studenti incontrano nell'apprendimento dei numeri negativi riflettono, almeno in parte, problemi analoghi a quelli che hanno caratterizzato il loro sviluppo storico. La ricostruzione delle tappe attraverso cui tali quantità sono state progressivamente comprese e formalizzate può dunque offrire strumenti utili non solo per comprendere l'evoluzione della matematica, ma anche per riflettere sui processi di apprendimento dei concetti matematici.

Alla luce di queste considerazioni, questo capitolo si propone di analizzare le fasi iniziali dello sviluppo storico dei numeri negativi, soffermandosi sulle diverse interpretazioni del concetto di numero che si sono venute a formare.

1.1 Il concetto di numero tra quantità e astrazione

Per comprendere le difficoltà che hanno accompagnato l'introduzione dei numeri negativi nella matematica europea è necessario considerare il modo in cui il concetto di numero è stato interpretato nelle diverse fasi della storia della matematica. Nella matematica contemporanea i numeri sono concepiti come elementi di strutture astratte e la loro definizione non è più necessariamente legata a un'interpretazione concreta in termini di quantità o grandezze. Questa concezione è però il risultato di un lungo processo di evoluzione concettuale.

³Sesiano 1985.

⁴Gagatsis e Alexandrou 2022.

Per un lungo periodo, infatti, il numero fu interpretato principalmente come espressione di una quantità positiva o come molteplicità di unità.

Nella tradizione matematica dell'antichità, in particolare in quella greca, il numero era strettamente associato all'idea di pluralità. In questa prospettiva, un numero rappresentava una collezione di unità e, di conseguenza, non poteva essere concepito come inferiore a zero. Il numero uno costituiva il punto di partenza della sequenza numerica, mentre lo zero e le quantità negative non trovavano ancora una collocazione chiara all'interno di questo schema concettuale. Il dominio dei numeri risultava quindi limitato alle quantità positive, che potevano essere interpretate come grandezze misurabili o come risultati di operazioni aritmetiche tra grandezze.

Questa concezione influenzò profondamente lo sviluppo dell'aritmetica e dell'algebra per molti secoli. Anche quando le tecniche di calcolo divennero progressivamente più sofisticate, l'idea di numero continuò a essere associata a una quantità effettivamente esistente. In tale contesto, l'introduzione di numeri "minori di nulla" risultava difficilmente giustificabile dal punto di vista concettuale. Se il numero rappresentava una quantità, come poteva esistere una quantità inferiore a zero? Questo problema non riguardava soltanto la legittimità delle nuove entità numeriche, ma coinvolgeva più in generale la definizione stessa di numero.

La storia della matematica mostra infatti che l'estensione del dominio numerico è avvenuta attraverso successive trasformazioni del concetto di numero. Nel corso dei secoli, nuove entità numeriche sono state introdotte per rispondere a esigenze specifiche della pratica matematica: i numeri razionali per descrivere rapporti tra grandezze, i numeri irrazionali per affrontare problemi geometrici, i numeri negativi per trattare in modo più generale le equazioni algebriche. Tali estensioni non devono essere interpretate come semplici aggiunte a un sistema già completo, ma come trasformazioni concettuali che modificano il significato stesso delle nozioni fondamentali della matematica.

Estensione del concetto di numero	Problema matematico
Numeri naturali	contare quantità
Numeri razionali	rappresentare rapporti e divisioni
Numeri negativi	risolvere equazioni algebriche e rappresentare quantità opposte
Numeri reali	trattare grandezze continue
Numeri complessi	risolvere equazioni algebriche generali

Tabella 1.1: Ogni estensione del sistema numerico non rappresenta semplicemente l'aggiunta di nuovi oggetti matematici ma comporta anche una trasformazione del significato attribuito al concetto stesso di numero.

L'introduzione dei numeri negativi rappresenta un caso particolarmente significativo di questo processo. A differenza di altre estensioni del sistema numerico, i numeri negativi non emergono originariamente dalla necessità di rappresentare nuove grandezze fisiche o geometriche quanto dalla pratica del calcolo e dalla teoria delle equazioni. Le procedure algebriche conducevano talvolta a risultati che non potevano essere interpretati come quantità positive; tali risultati erano però formalmente coerenti all'interno dei procedimenti di calcolo. Si creava così una tensione tra la dimensione operativa della matematica, che suggeriva l'utilità di tali quantità, e la concezione tradizionale del numero, che rendeva difficile attribuire loro un significato.

Prima di essere pienamente accettate come numeri, le quantità negative comparvero in diversi contesti matematici come strumenti operativi all'interno di procedure di calcolo. L'analisi di queste prime forme di utilizzo consente di comprendere come tali entità siano state progressivamente integrate nella pratica matematica.

1.2 Grecia antica: da Euclide a Diofanto

Nella tradizione matematica greca, il concetto di numero era definito in termini rigorosamente positivi e discreti⁵. La formulazione più influente di questa concezione si trova nelle definizioni iniziali del settimo libro degli *Elementi* di Euclide (Alessandria, floruit 300 a.C. ca), dove l'unità (*monas*, μονάς) è descritta come "ciò in virtù del quale ognuno degli enti è detto uno" mentre il numero (*arithmos*, ἀριθμός) come una "molteplicità composta di unità". Questa definizione esclude strutturalmente qualsiasi quantità inferiore all'unità: lo zero non è un numero perché non costituisce una pluralità, e una quantità negativa è semplicemente impensabile all'interno di questo schema, poiché non può corrispondere ad alcuna molteplicità concreta. La stessa impostazione si ritrova nella riflessione filosofica di Aristotele (384-322 a.C.), che nel quinto libro della *Metafisica* distingue tra quantità discreta e quantità continua, identificando il numero con la prima. Per Aristotele il numero è sempre numero di qualcosa: è uno strumento di misura che presuppone un oggetto da misurare e, in quanto tale, non può esistere indipendentemente da una realtà positiva a cui riferirsi, cioè ad un'unità di misura. La concezione greca di *arithmos* non rappresenta una limitazione tecnica o una mancanza concettuale, bensì una scelta ontologica coerente con i presupposti della matematica del tempo: il numero greco è radicato in una molteplicità determinata, e questa radice lo distingue profondamente dal concetto moderno di numero.

Questa impostazione si riflette anche nelle pratiche di calcolo. Gli *Elementi* di Euclide contengono una serie di proposizioni, in particolare quelle del secondo libro che, a partire dalla seconda metà del XIX secolo, è stato riletto dalla storiografia come una forma di algebra espressa in linguaggio geometrico. Un aspetto di queste proposizioni particolarmente significativo per la storia dei numeri negativi è che molte di esse compaiono in coppie: casi che nella notazione algebrica moderna sarebbero unificati dall'uso del segno negativo richiedono

⁵Klein 1968, pp. 49–54.

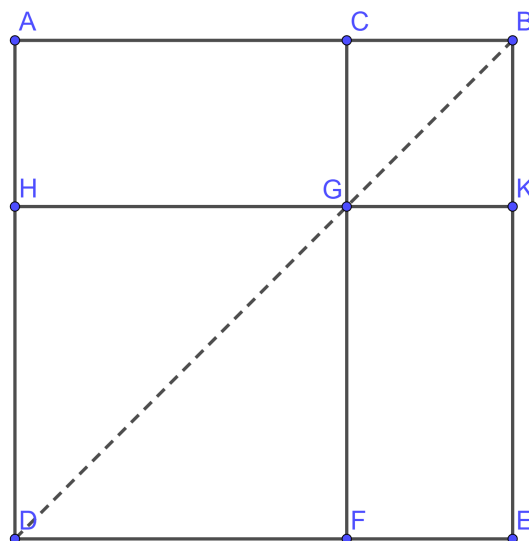


Figura 1.1: Illustrazione della Proposizione 4 del Libro II degli *Elementi* di Euclide.

in Euclide due proposizioni distinte, perché ogni grandezza geometrica deve rimanere positiva per definizione. Il caso più istruttivo è costituito dalla coppia formata dalle Proposizioni II.4 e II.7.⁶

(Proposizione II.4). *Se una retta è divisa a caso, il suo quadrato è uguale alla somma dei quadrati delle parti, insieme con il doppio del rettangolo che le parti contengono.*

Nella notazione moderna, indicando con a e b le due parti in cui la retta è divisa, questa proposizione corrisponde all'identità $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. La dimostrazione euclidea è la seguente.

Dimostrazione. Si divida infatti la AB , a caso, in C . Dico che il quadrato di AB è uguale alla somma dei quadrati di AC , CB , insieme con il doppio del rettangolo contenuto dalle AC , CB .

Si costruisca infatti il quadrato $ADEB$ su AB [Prop. I.46], si congiunga B con D ; per C si conduca la parallela CF a ciascuna delle AD , EB [Prop. I.30 e I.31]; e per G si conduca la parallela HK a ciascuna delle AB , DE . Poiché CF è parallela alla AD , e BD cade su di esse, l'angolo esterno $\widehat{CGB}$ è uguale all'interno ed opposto $\widehat{ADB}$ [Prop. I.29]. Ma $\widehat{ADB}$ è uguale ad $\widehat{ABD}$, poiché anche il lato BA è uguale ad AD [Prop. I.5]; dunque l'angolo $\widehat{CGB}$ è uguale a $\widehat{BCG}$; ed il lato BC è uguale al lato CG . Ma CB è uguale a GK [Prop. I.34], e CG a KB [Prop. I.34]; dunque anche GK è uguale a KB . Perciò $CGKB$ è equilatero; dico che è anche rettangolo. Infatti, poiché CG è parallelo

⁶Gli enunciati e le dimostrazioni delle proposizioni del Libro II degli *Elementi* citati in questo paragrafo sono tratti da Enriques 1925. Per le proposizioni di cui non si riporta la dimostrazione per esteso si rimanda allo stesso testo.

a BK [e su di essi cade la retta CB], gli angoli $K\hat{B}C$, $G\hat{C}B$ sono uguali a due retti [Prop. I.29]; ma $K\hat{B}C$ è retto, dunque anche $B\hat{C}G$ è retto. Perciò anche gli angoli opposti $C\hat{G}K$, $G\hat{K}B$ sono retti [Prop. I.34]. Quindi $CGKB$ è un rettangolo; ma è stato dimostrato che è anche equilatero, dunque è un quadrato ed è costruito su BC .

Per le stesse ragioni anche HF ⁷ è un quadrato, ed è costruito su HG , cioè su AC [Prop. I.34]. Dunque HF , KC sono i quadrati di AC , CB . E poiché AG è uguale a GE [Prop. I.43], ed AG è contenuto da AC , CB perché GC è uguale a CB , anche GE sarà contenuto dalle AC , CB ; quindi AG , GE sono uguali al doppio del rettangolo contenuto dalle AC , CB .

Ma anche i quadrati HF , CK sono costruiti su AC , CB . Perciò la somma dei quattro HF , CK , AG , GE è uguale alla somma dei quadrati costruiti su AC , CB insieme con il doppio del rettangolo contenuto dalle AC , CB .

Ma la somma di HF , CK , AG , GE è tutto $ADEB$, che è il quadrato costruito su AB . Quindi il quadrato di AB è uguale alla somma dei quadrati costruiti su AC , CB , insieme con il doppio del rettangolo contenuto dalle AC , CB .

Dunque se una retta è divisa a caso, il suo quadrato è uguale alla somma dei quadrati delle parti, insieme con il doppio del rettangolo che le parti contengono. $\square$

(Proposizione II.7). *Se una retta è divisa comunque, il quadrato della retta, insieme con il quadrato di una delle parti, è uguale al doppio del rettangolo contenuto da tutta la retta e dalla parte scelta, insieme con il quadrato della rimanente parte.*

Nella notazione moderna, indicando con a tutta la retta e b una sua parte, questa proposizione potremmo tradurla con l'identità $a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$. La dimostrazione procede in modo analogo alla Proposizione II.4, costruendo il quadrato su AB e individuando gli stessi elementi geometrici in una configurazione diversa.

Dimostrazione. Una retta AB sia infatti divisa, comunque, nel punto C . Dico che la somma dei quadrati di AB , BC è uguale al doppio del rettangolo contenuto da AB , BC , insieme con il quadrato di CA .

Si costruisca infatti su AB il quadrato $ADEB$, e si descriva la figura.

Ora, poiché AG è uguale a GE , aggiunto CF , comune, tutto AF sarà uguale a tutto CE . Perciò AF , insieme con CE , è il doppio di AF . Ma la somma di AF con CE è lo gnomone KLM insieme con il quadrato CF . Perciò lo gnomone KLM insieme con CF è uguale al doppio di AF . Ma anche il doppio del rettangolo contenuto da AB , BC è doppio di AF , perché BF è uguale a BC ; perciò lo gnomone KLM , insieme con il quadrato CF , è uguale al doppio del rettangolo contenuto da AB , BC . Si aggiunga DG , comune, che è il quadrato di AC : così lo gnomone KLM , insieme con i quadrati BG , GD è uguale al doppio del rettangolo contenuto dalle AB , BC , insieme con il quadrato di AC . Ma la somma dello gnomone KLM con i quadrati BG , GD è uguale alla

⁷I greci erano soliti indicare quadrati e rettangoli attraverso due vertici opposti: HF indica quindi il quadrato $HDFG$, mentre AG indica il rettangolo $AHGC$.

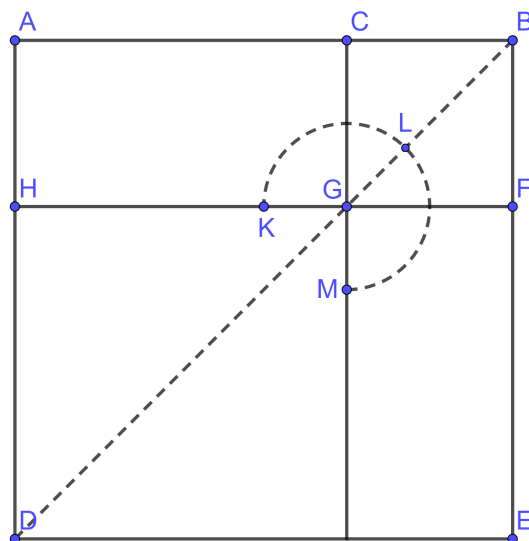


Figura 1.2: Illustrazione della Proposizione 7 del Libro II degli *Elementi* di Euclide.

somma di tutto $ADEB$ con CF , che sono i quadrati di AB , BC .

Quindi la somma dei quadrati di AB , BC è uguale al doppio del rettangolo compreso da AB , BC , insieme con il quadrato di AC . $\square$

Come si vede immediatamente dalla traduzione algebrica, le due identità si ottengono l'una dall'altra semplicemente cambiando il segno del termine $2ab$: nella II.4 esso compare con segno positivo, mentre nella II.7 con segno negativo. Nella notazione moderna, le due proposizioni sono casi particolari dell'identità $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$, unificata dall'uso dei segni. In Euclide, richiedono due proposizioni separate perché il segno negativo non è disponibile come operatore algebrico autonomo: sottrarre $2ab$ da entrambi i membri della II.4 per ottenere la II.7 richiederebbe di ammettere che una grandezza geometrica possa risultare "minore di zero", il che è escluso dalla struttura stessa del ragionamento geometrico.

Lo stesso fenomeno si ripete in altre coppie di proposizioni del Libro II.

(Proposizione II.5). *Se una retta è divisa in parti uguali ed in parti disuguali, il rettangolo contenuto dalle parti disuguali, insieme con il quadrato della differenza tra le due sezioni, è uguale al quadrato della metà della retta data.*

(Proposizione II.6). *Se si biseca una retta, e ad essa si aggiunge per dritto un'altra retta, il rettangolo contenuto dalla retta così composta e dall'aggiunta, insieme con il quadrato della metà della retta data, è uguale al quadrato costruito sulla somma della retta aggiunta e della metà della retta data.*

Indicando con a la metà della retta e con b la differenza tra le due sezioni nella II.5, e con b la retta aggiunta nella II.6, le due proposizioni corrispondono rispettivamente a $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2$ e $(2a + b) \cdot b + a^2 = (a + b)^2$, entrambe

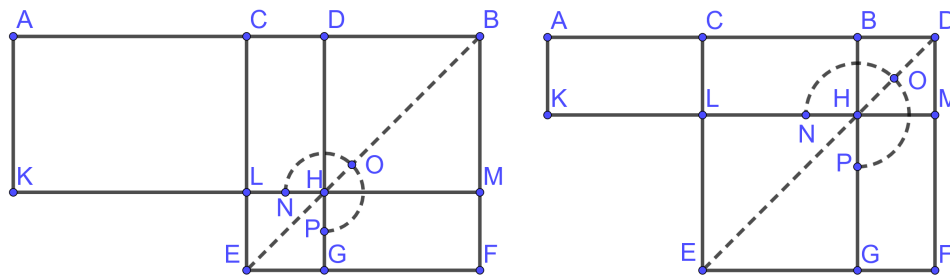


Figura 1.3: A sinistra, illustrazione della proposizione II.5: dato C punto medio di AB e D punto di divisione disuguale, il rettangolo di lati AD , DB insieme al quadrato di CD è uguale al quadrato di CB . A destra, illustrazione della proposizione II.6: AB bisecata in C e prolungata della retta BD ; il rettangolo di lati AD , DB insieme al quadrato di CB è uguale al quadrato di CD .

ric conducibili all'identità $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. La distinzione tra i due casi — punto di divisione interno nella II.5, esterno nella II.6 — è precisamente quella che nella notazione algebrica moderna viene catturata dal segno.

Ancor più eloquente è il caso delle Proposizioni II.12 e II.13, che costituiscono le due forme del teorema del coseno.

(Proposizione II.12). *Nei triangoli ottusangoli, il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso supera la somma dei quadrati degli altri due lati di quanto è il doppio del rettangolo contenuto da uno dei lati che comprendono l'angolo ottuso, e dalla porzione del prolungamento di esso lato che è compresa fra il vertice dell'angolo ottuso e la perpendicolare abbassata dal vertice opposto.*

(Proposizione II.13). *Nei triangoli acutangoli, il quadrato del lato opposto all'angolo acuto è minore della somma dei quadrati degli altri due lati, di quanto è il doppio del rettangolo contenuto da uno dei lati intorno all'angolo acuto, e dalla porzione di esso lato che è compresa fra il vertice dell'angolo acuto e la perpendicolare abbassata dal vertice opposto.*

Nella notazione moderna entrambe si esprimono attraverso un'unica formula, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$, valida per qualsiasi angolo. In Euclide richiedono due proposizioni distinte perché il coseno di un angolo ottuso è negativo: scrivere $-2ab \cos \theta$ quando $\cos \theta < 0$ equivarrebbe ad ammettere una grandezza negativa nel ragionamento geometrico, il che è strutturalmente escluso. Le proposizioni II.12 e II.13 affermano rispettivamente che il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso "supera" la somma dei quadrati degli altri due lati, e che il quadrato del lato opposto all'angolo acuto è "minore" della stessa somma, una distinzione verbale che nella notazione moderna scompare nell'unica formula con segno.

La necessità di sdoppiare queste proposizioni non è dunque una scelta stilistica né una limitazione tecnica della geometria greca, ma una conseguenza diretta e coerente dell'impossibilità di ammettere grandezze negative: là dove la notazione algebrica moderna unifica i casi attraverso il segno, la geometria euclidea deve trattarli separatamente perché ogni grandezza deve rimanere

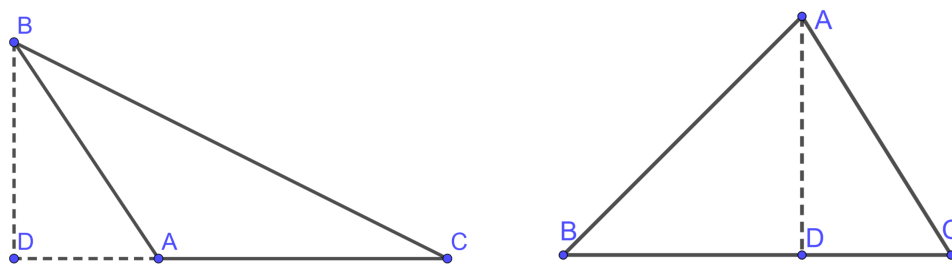


Figura 1.4: A sinistra, la proposizione II.12: nel triangolo ottusangolo ABC , con angolo ottuso in A , il quadrato di BC supera la somma dei quadrati di BA , AC del doppio del rettangolo contenuto da CA , AD , dove D è il piede della perpendicolare condotta da B sul prolungamento di CA . A destra, la proposizione II.13: nel triangolo acutangolo ABC , con angolo acuto in B , il quadrato di AC è minore della somma dei quadrati di CB , BA del doppio del rettangolo contenuto da CB , BD , dove D è il piede della perpendicolare condotta da A su BC .

positiva. Il sistema non aveva bisogno di escludere i numeri negativi esplicitamente: la struttura stessa del ragionamento geometrico non lasciava loro spazio.

Il caso più significativo, nell'ambito della matematica greca, per la storia dei numeri negativi è quello di Diofanto di Alessandria, vissuto probabilmente nel III secolo d.C. La sua opera principale, *Arithmetica*, rappresenta un *unicum* nella tradizione matematica greca: a differenza della geometria euclidea, essa affronta problemi di natura aritmetica e algebrica attraverso una notazione simbolica parziale, che permette di operare su espressioni polinomiali in modo sistematico. Dei tredici libri originali dell'opera, sei sono conservati in greco e quattro in traduzione araba, mentre i restanti tre sono perduti.

Un elemento di particolare interesse è la notazione che Diofanto introduce per indicare la parte sottrattiva di un'espressione polinomiale. Il termine greco completo usato da Diofanto per la negazione è *leipsis* (λεῖψις), che significa mancanza, contrapposto a *hyparxis* (ὑπαρξις), presenza, esistenza nella realtà; nel testo dell'*Arithmetica* esso è abbreviato attraverso un simbolo convenzionale⁸. Attraverso questo simbolo Diofanto distingue i termini additivi da quelli sottrattivi all'interno di una stessa espressione, rendendo possibile la manipolazione sistematica di polinomi che coinvolgono sottrazioni e collocando

⁸Il simbolo usato da Diofanto per indicare la sottrazione nei manoscritti dell'*Arithmetica* ha dato luogo a un dibattito filologico considerevole. Heath descrive il segno come una sorta di Ψ rovesciata e schiacciata, e propone che esso sia in realtà un monogramma formato dalla lettera Λ con una I inserita all'interno, derivato dall'abbreviazione della radice del verbo *leipein* (λείπειν). Questa interpretazione trova un sostegno parziale nelle osservazioni di Tannery sui manoscritti, il quale nota che il segno tende spesso a inclinarsi verso destra fino ad assomigliare alla lettera Λ , e che Planude — il monaco ed erudito bizantino (Nicomedia, 1255 ca. — Costantinopoli, 1305 ca.) autore di scholia (le annotazioni di commento che accompagnano un testo antico nei manoscritti) ai primi due libri dell'*Arithmetica* di Diofanto — lo scrisse chiaramente come prima lettera di $\lambda\epsilon\acute{\iota}\psi\iota\varsigma$. Cfr. Heath 1910, pp. 41–44.

sistematicamente tutti i termini negativi dopo quelli positivi per evitare ambiguità. Nel proemio dell'*Arithmetica*, Diofanto enuncia inoltre esplicitamente il principio che governa la moltiplicazione di tali termini, affermando che una mancanza moltiplicata per una mancanza produce una presenza — in greco $\lambda\epsilon\acute{\iota}\psi\iota\varsigma \epsilon\pi\acute{\iota} \lambda\epsilon\acute{\iota}\psi\epsilon\omega\varsigma \pi\omicron\iota\epsilon\acute{\iota} \upsilon\pi\alpha\rho\zeta\iota\nu$. Questa formulazione è storiograficamente rilevante perché costituisce la prima enunciazione esplicita, in ambito greco, di ciò che la tradizione matematica successiva avrebbe chiamato regola dei segni. È tuttavia essenziale precisare il contesto in cui essa compare: Diofanto non sta affermando l'esistenza di quantità negative come entità matematiche autonome, ma descrive una regola operativa per la moltiplicazione di termini sottrattivi all'interno di espressioni polinomiali. La regola dei segni è presente, ma in forma ancora strettamente procedurale, priva di qualsiasi implicazione ontologica.

L'atteggiamento di Diofanto nei confronti delle quantità negative come risultati autonomi è documentato con precisione da Heath nell'introduzione al suo studio sull'*Arithmetica*. Heath osserva che Diofanto non ha apparentemente alcuna concezione di una quantità negativa in sé, intesa cioè senza una quantità positiva da cui sottrarla; le equazioni che conducono a radici negative, irrazionali o immaginarie sono da lui considerate inutili ai fini della soluzione, e la soluzione è in questi casi *adynatos* ($\acute{\alpha}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\omicron\varsigma$), impossibile. Un esempio concreto di questo atteggiamento si trova nel problema V.2 dell'*Arithmetica*, in cui Diofanto cerca tre numeri in progressione geometrica tali che ciascuno di essi, sommato a 20, dia un quadrato. Nel corso della procedura risolutiva, l'applicazione del metodo standard conduce all'equazione $4x + 20 = 4$, che Diofanto definisce *atopos* ($\acute{\alpha}\tau\omicron\pi\omicron\varsigma$), assurda, poiché implicherebbe che 4 sia maggiore di 20, il che è impossibile nel contesto del problema. Diofanto non sviluppa ulteriormente questa strada, ma torna indietro e riformula i dati iniziali in modo da garantire che la procedura conduca a un risultato razionale e positivo. Come osserva Heath, nella grande maggioranza dei casi in cui Diofanto giunge a un'equazione che darebbe un risultato irrazionale o impossibile, egli ripercorre i propri passi e trova il modo di sostituirla con un'altra equazione che garantisca un risultato accettabile.

Diofanto rappresenta dunque un caso limite nella storia dei numeri negativi in ambito greco. Da un lato, la sua notazione simbolica e la sua enunciazione della regola dei segni lo avvicinano più di qualunque altro matematico greco alla soglia di un sistema che ammette quantità negative; dall'altro, il suo rifiuto esplicito delle soluzioni negative, tanto nei casi generali che definisce $\acute{\alpha}\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\omicron\varsigma$ quanto in quello specifico del problema V.2 che definisce $\acute{\alpha}\tau\omicron\pi\omicron\varsigma$, mostra che tale soglia non viene attraversata: il sistema concettuale entro cui opera rimane quello tradizionale, in cui il numero è sempre una quantità positiva determinata. Come ha osservato Heath, Diofanto conosce le regole operative che governano i termini negativi, ma non compie il passo concettuale che consisterebbe nell'ammettere tali termini come risultati autonomi e legittimi. È precisamente questo passo che le tradizioni matematiche cinese e indiana compiono, aprendo la strada a una concezione del numero profondamente diversa da quella greca.

1.3 Cina imperiale: il *Jiu zhang suanshu*

La prima attestazione documentata dell'utilizzo sistematico dei numeri negativi nella storia della matematica si trova nella tradizione cinese, in particolare nel *Jiu zhang suanshu* ("Nove capitoli sull'arte matematica"). Si tratta dell'opera matematica più importante della Cina antica: la sua datazione è incerta, ma è generalmente accettato che il materiale sia stato raccolto in forma di libro al più tardi nella metà della dinastia Han orientale (25–220 d.C.). L'opera è strutturata in nove capitoli e comprende 246 problemi, che spaziano dal calcolo di aree e volumi alla soluzione di sistemi di equazioni lineari e rappresenta il livello della matematica cinese intorno al 100 d.C. A differenza della tradizione greca, in cui il numero era concepito come pluralità di unità concrete e le operazioni erano ancorate a grandezze geometriche sempre positive, la matematica del *Jiu zhang suanshu* si sviluppa attraverso il sistema dei numerali a bastoncini (*chou suan*), uno strumento di calcolo posizionale che permetteva di rappresentare e manipolare i numeri in modo essenzialmente operativo, svincolato da un significato geometrico sottostante. È precisamente questo contesto che rende possibile l'emergere dei numeri negativi. I numeri negativi compaiono nel capitolo ottavo, intitolato *fang cheng* (letteralmente "tabulazione rettangolare"), dedicato alla soluzione di sistemi di equazioni lineari attraverso un processo di eliminazione. Il metodo consiste nel disporre i coefficienti delle equazioni in forma di matrice sul piano di calcolo e procedere con moltiplicazioni e sottrazioni successive tra colonne. Poiché si tratta di un metodo generale, si presentano inevitabilmente casi in cui un numero da sottrarre è maggiore di quello da cui va sottratto: il risultato di tale operazione deve essere indicato e devono essere stabilite regole per poter proseguire il procedimento di eliminazione. È proprio questa esigenza a dare origine al concetto di numero negativo.

Il funzionamento concreto del metodo e l'emergere dei numeri negativi possono essere illustrati attraverso il problema 8.3, così come presentato nell'articolo della matematica cinese Lam Lay Yong "*Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art): An Overview*":

Ora ci sono 2 fasci di cereale di prima qualità, 3 fasci di cereale di media qualità e 4 fasci di cereale di bassa qualità e tutti i gruppi rendono meno di 1 dou di grano⁹. Se ai fasci di prima qualità si aggiunge 1 fascio di media qualità, ai fasci di media qualità si aggiunge 1 fascio di bassa qualità e ai fasci di bassa qualità si aggiunge 1 fascio di prima qualità, allora ciascun gruppo rende esattamente 1 dou. Trovare la misura di grano contenuta in ciascun fascio di cereale di prima, media e bassa qualità.¹⁰

⁹Il dou è un'unità di misura tradizionale cinese utilizzata per il volume, principalmente per prodotti agricoli secchi come cereali e riso; corrisponde a circa 10 litri.

¹⁰«Now there are 2 bundles of top grade cereal, 3 bundles of middle grade cereal and 4 bundles of low grade cereal, and all [groups yield] less than 1 dou [of grains] as shi. If the bundles of top grade have 1 bundle of medium grade added, the bundles of medium grade have 1 bundle of low grade added, and the bundles of low grade have 1 bundle of top grade added, then each [group yields] 1 dou as shi. Find the measure [of grains] in each bundle of the top, medium and low grade cereal.» (Lam 1994, pp. 35–36).

Alta qualità	1	0	2
Media qualità	0	3	1
Bassa qualità	4	1	0
Dou	1	1	1

Tabella 1.2: Metodo di tabulazione *fang cheng*: una volta costruita la tabella si procede con una serie di moltiplicazioni e sottrazioni tra colonne per isolare le singole qualità con il loro valore in dou.

La soluzione del problema non comporta di per sé quantità negative: un fascio di prima qualità rende $\frac{9}{25}$ dou, uno di media $\frac{7}{25}$ dou, uno di bassa $\frac{4}{25}$ dou; è nella procedura risolutiva che le quantità negative compaiono come risultati intermedi.

I Cinesi chiamarono i numeri negativi *fu* e quelli positivi *zheng*. Le regole che governano le loro operazioni sono enunciate in modo estremamente conciso subito dopo il problema 8.3, nel cosiddetto metodo *zheng fu*. Lam Lay Yong trascrive e commenta questa formulazione¹¹ che regola sia la sottrazione sia l'addizione di numeri positivi e negativi. Le regole per la sottrazione stabiliscono che quando i segni sono uguali si sottraggono i valori assoluti, quando sono diversi si sommano e che sottrarre da zero un numero positivo dà un numero negativo e viceversa. Le regole per l'addizione sono simmetriche: segni diversi comportano la sottrazione dei valori assoluti, segni uguali la loro somma. Subito dopo la spiegazione delle regole di calcolo è riportato un fatto molto interessante: secondo Liu Hui, matematico cinese del III secolo autore di un commentario ai *Nove capitoli*, i numeri positivi e negativi venivano distinti sul piano di calcolo attraverso l'uso di bastoncini di colore diverso, rossi per i positivi e neri per i negativi; in alternativa, se non si disponeva di bastoncini di colore diverso, le quantità negative venivano indicate attraverso un bastoncino disposto in diagonale sull'ultima cifra non nulla del numero. È interessante perché dimostra che i matematici cinesi utilizzassero le quantità negative all'interno di processi di calcolo con frequenza e dimestichezza tali da introdurre dei metodi rappresentativi appositi per queste quantità.

Il caso cinese si distingue profondamente da quello greco per la natura del contesto in cui i numeri negativi emergono. Non si tratta di una quantità che si impone dall'esterno come rappresentazione di un debito o di una mancanza concreta, ma di un risultato che appare all'interno di una procedura algoritmica generale. I numeri negativi non sono qui rifiutati come *atopoi* né i problemi sono riformulati per evitarli: al contrario, essi sono integrati nel calcolo attraverso esplicite regole operative che ne permettono il trattamento sistematico all'interno di un metodo di risoluzione di problemi.

¹¹ «Method of *zheng fu* (positive negative) says: when names are the same subtract mutually, when names are different add mutually. Positive [from] nothing becomes negative, negative [from] nothing becomes positive. When names are different subtract mutually, when names are the same add mutually. Positive [and] nothing becomes positive, negative [and] nothing becomes negative.» (Lam 1994, p. 36).

1.4 India medievale: da Brahmagupta a Bhaskara II

La tradizione matematica indiana rappresenta il secondo grande contesto in cui i numeri negativi emergono esplicitamente e il primo in cui essi sono trattati all'interno di un sistema aritmetico compiuto che include anche lo zero. A differenza della tradizione cinese, dove i negativi emergono come risultati necessari di una procedura algoritmica per la soluzione di sistemi di equazioni lineari, la matematica indiana li affronta in modo diretto e sistematico, enunciando regole generali per tutte le operazioni fondamentali.

Il testo fondamentale per la storia dei numeri negativi in India è il *Brahmasphutasiddhanta* (628 d.C.) di Brahmagupta (598 - 668 ca.), astronomo e matematico operante nel Rajasthan. Il capitolo diciottesimo dell'opera, dedicato all'algebra, contiene nei versi 18.30–35 la prima trattazione esplicita e sistematica in India dell'aritmetica dei numeri positivi, negativi e dello zero. Le regole enunciate da Brahmagupta sono nella loro sostanza identiche a quelle dell'algebra moderna: la somma di due quantità positive è positiva, quella di due negative è negativa, e la somma di una positiva e una negativa è la loro differenza; una quantità negativa sommata a zero rimane negativa, e una positiva sommata a zero rimane positiva. Per la sottrazione, Brahmagupta stabilisce che se da una quantità maggiore si sottrae una minore dello stesso segno il risultato conserva quel segno, mentre se si sottrae una quantità maggiore il segno del risultato si inverte. Per la moltiplicazione, enuncia che il prodotto di una quantità negativa e una positiva è negativo, quello di due negative è positivo e quello di due positive è positivo. Analoghe regole sono fornite per la divisione. Come osserva la storica americana Kim Plofker¹², quasi tutte queste regole sono identiche alle loro controparti nell'algebra moderna.

Un elemento importante per la storia della notazione matematica è fornito dal manoscritto di Bakhshali, il più antico manoscritto matematico sanscrito sopravvissuto, rinvenuto nel 1881 nei pressi dell'odierna Peshawar e databile approssimativamente tra l'VIII e il XII secolo. In questo testo i numeri negativi sono indicati attraverso un piccolo segno a croce che segue la quantità, probabilmente un'abbreviazione della parola sanscrita *rna* (negativo), la cui lettera iniziale in alcune forme grafiche arcaiche è simile ad una croce. Nei manoscritti successivi e nelle edizioni a stampa moderne il segno negativo è invece indicato da un punto sopra il numero.

Mahavira, matematico Jain¹³ operante probabilmente alla corte della dinastia Rashtrakuta nell'India meridionale intorno alla metà del IX secolo, elabora nel *Ganita-sara-sangraha* ("Epitome dell'essenza del calcolo") un sistema analogo a quello di Brahmagupta. Le regole per l'addizione, la sottrazione e la

¹²Plofker 2009, p. 151.

¹³Il Jainismo è una delle principali tradizioni religiose e filosofiche dell'India antica, sorta nel VI secolo a.C. nell'India settentrionale. I suoi seguaci, detti Jain, sono identificabili nei testi matematici medievali dalle invocazioni religiose che aprono le loro opere. La tradizione Jain sviluppò un interesse peculiare per la matematica, in particolare per la quantificazione di grandezze molto grandi e molto piccole, incluse grandezze infinitesimali e infinite, in connessione con un'elaborata cosmologia. Questo interesse contribuì allo sviluppo di alcune tecniche matematiche originali nella tradizione indiana medievale. Cfr. Plofker, *Mathematics in India*, pp. 57–60 e pp. 162–163.

moltiplicazione di quantità positive e negative sono simili a quelle del *Brahmasphutasiddhanta*. Di particolare interesse per la storia dei numeri negativi è l'osservazione di Mahavira sui quadrati e sulle radici quadrate: il quadrato di una quantità positiva o negativa è positivo, e le radici quadrate di tali quadrati sono rispettivamente positive e negative; tuttavia, poiché nessuna quantità negativa può essere il prodotto di due quantità uguali, le quantità negative non hanno radice quadrata. Si tratta di un primo accenno a una riflessione sulla natura di queste entità, che anticipa discussioni analoghe nella tradizione algebrica successiva.

La trattazione più matura dei numeri negativi nella tradizione indiana si trova nell'opera di Bhaskara II (1114 - 1185 ca.), il cui *Bijaganita* ("Calcolo dei semi") è il primo trattato algebrico indipendente sopravvissuto nella tradizione sanscrita. Nell'apertura dell'opera, dedicata alle sei operazioni su quantità positive e negative, Bhaskara adotta per il segno negativo una notazione diversa da quella del manoscritto di Bakhshali: un punto sopra il numero anziché una croce dopo di esso. Come Mahavira, Bhaskara sostiene che non esiste radice quadrata di una quantità negativa "a causa della sua non-quadraticità" (verso 7). Nella sezione dedicata alle operazioni con lo zero, Bhaskara compie un passo concettualmente significativo rispetto a Brahmagupta, associando esplicitamente la divisione per zero all'infinito, attraverso una metafora teologica che paragona la quantità divisa per zero alla divinità immutabile di Vishnu, in cui le creature entrano ed escono senza alterarla (verso 11).

La tradizione indiana dei numeri negativi si sviluppa dunque nell'arco di circa cinque secoli come un sistema operativo progressivamente più articolato, in cui le quantità negative sono accettate come entità legittime all'interno del calcolo algebrico.

1.5 Tradizione araba: da al-Khwarizmi ad al-Samaw'al

La tradizione matematica araba rappresenta un caso peculiare nella storia dei numeri negativi: non perché li sviluppi ulteriormente rispetto alla tradizione indiana, ma perché li evita sistematicamente, pur conoscendo e in parte ereditando i metodi che li avevano prodotti. Questa scelta non è accidentale né il frutto di una limitazione tecnica, ma riflette una precisa concezione della disciplina algebrica e dei suoi oggetti legittimi.

L'opera alla base di questa tradizione è il *Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal-muqabala* ("Compendio sul calcolo per completamento e bilanciamento") di Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780 ca. - 850 ca.), composta a Baghdad tra l'813 e l'833 durante il regno del califfo al-Ma'mun. È il primo testo della storia in cui il termine algebra compare nel titolo per designare una disciplina autonoma e rappresenta, come ha mostrato Roshdi Rashed¹⁴, una rottura radicale rispetto a qualsiasi tradizione precedente, non essendo una sintesi di metodi già noti ma la formulazione di una nuova razionalità matematica. Al-Khwarizmi costruisce la sua algebra attorno a un sistema di sei tipologie di equazioni di

¹⁴Rashed 1994.

primo e secondo grado, che nella notazione moderna corrispondono a

$$\begin{array}{lll} ax^2 = bx, & ax^2 = c, & bx = c, \\ ax^2 + bx = c, & ax^2 + c = bx, & ax^2 = bx + c. \end{array}$$

Come osserva Rashed, tutti i problemi trattati mediante l'algebra devono essere ricondotti a un'equazione con un'unica incognita e coefficienti razionali positivi. La classificazione in sei tipologie non è quindi una scelta arbitraria ma copre i casi richiesti per esaurire tutte le combinazioni possibili di termini positivi: se i coefficienti negativi fossero ammessi, le tipologie si ridurrebbero a una sola forma generale.

Nel testo di al-Khwarizmi la regola dei segni compare nella sezione dedicata alla moltiplicazione, dove è enunciata come regola operativa per il prodotto di binomi: se i termini aggiunti sono entrambi positivi, il quarto prodotto è positivo; se sono entrambi negativi, il quarto prodotto è ugualmente positivo; se uno è positivo e uno negativo, il quarto prodotto è negativo¹⁵. Questa formulazione è strettamente analoga a quella di Diofanto e la sua funzione è identica: descrivere il comportamento dei termini che sono sottratti all'interno di espressioni polinomiali senza mai ammettere che il risultato finale di un'operazione possa essere una quantità negativa autonoma. Quando la procedura risolutiva conduce a una situazione in cui $(\frac{p}{2})^2 < q$ nell'equazione $x^2 + px = q$, al-Khwarizmi dichiara esplicitamente che il problema è impossibile (*Fa-al-mas'ala mustahila*), senza sviluppare ulteriormente il ragionamento.

È significativo tuttavia che questo rifiuto teorico delle quantità negative coesista, nel medesimo testo, con un utilizzo pratico implicito di situazioni che le richiederebbero. La sezione del *Kitab al-jabr* dedicata ai problemi di eredità, che occupa una parte considerevole dell'opera, riflettendo le esigenze concrete del diritto successorio islamico, contiene numerosi problemi in cui compaiono debiti, crediti e situazioni in cui la quota spettante a un erede deve essere calcolata tenendo conto di passività che riducono l'asse ereditario. In questi contesti al-Khwarizmi opera con grandezze che hanno il carattere funzionale di quantità negative (un debito è concettualmente l'opposto di un credito) senza tuttavia nominarle come tali né integrarle nel sistema algebrico formale. La separazione tra la pratica del calcolo economico, che ammette implicitamente quantità negative come strumento operativo, e la teoria algebrica, che le esclude come entità matematiche legittime, è essa stessa un dato storiograficamente significativo: mostra che il problema non era la mancanza di situazioni concrete che richiedessero i negativi, ma la resistenza a riconoscerli come oggetti matematici

¹⁵ «Whenever one number is to be multiplied by another, the one must be repeated as many times as the other contains units. If there are greater numbers combined with units to be added to or subtracted from them, then four multiplications are necessary; namely, the greater numbers by the greater numbers, the greater numbers by the units, the units by the greater numbers, and the units by the units. If the units, combined with the greater numbers, are positive, then the last multiplication is positive; if they are both negative, then the fourth multiplication is likewise positive. But if one of them is positive, and one negative, then the fourth multiplication is negative.» (al-Khwarizmi 1831, pp. 21–22, trad. dall'inglese di Rosen).

autonomi dotati di statuto teorico.

L'evoluzione interna alla tradizione algebrica araba mostra tuttavia un progressivo avvicinamento ai numeri negativi nel corso dei secoli successivi. Al-Karaji, matematico operante tra il X e l'XI secolo, scrive nel suo *al-Fakhri* che "le quantità negative devono essere conteggiate come termini", ma la pratica corrente, come osserva Rashed, condanna questo riconoscimento a rimanere timido: al-Karaji non ha difficoltà ad accettare la sottrazione di un numero positivo da un altro, ma non ammette direttamente che $x - (-y) = x + y$, il che gli impedisce di formulare regole generali per la divisione e l'estrazione di radice quadrata di polinomi con coefficienti razionali. È al-Samaw'al, matematico del XII secolo, che assimilò criticamente l'opera di al-Karaji attraverso lo studio autonomo dei suoi scritti¹⁶, a formulare per la prima volta nella tradizione araba regole generali per i segni in forma esplicita e sistematica, enunciando che il prodotto di un numero negativo (*al-naqis*) per uno positivo (*al-za'id*) è negativo e il prodotto di due negativi è positivo, e stabilendo le regole per l'addizione e la sottrazione di quantità di segno diverso in modo del tutto analogo a quanto Brahmagupta aveva fatto cinque secoli prima in India.

Il confronto tra la tradizione araba e quella indiana mette in luce una differenza concettuale profonda che Plofker ha formulato con precisione: l'algebra araba evita l'uso di quantità negative assolute, che sono invece abitualmente accettate nelle opere indiane. Le sei tipologie di equazioni classificate da al-Khwarizmi sono formulate esattamente in modo da non includere quantità negative nelle soluzioni, senza che esista un equivalente indiano di questa scelta. La trasmissione della matematica indiana al mondo islamico aveva portato con sé i numerali decimali posizionali e la trigonometria fondata sulla funzione seno — la *semicorda* introdotta dagli astronomi indiani in luogo della corda intera della tradizione greca di Ipparco e Tolomeo¹⁷ — ma i metodi algebrici, incluso il trattamento sistematico dei numeri negativi, non seguirono lo stesso cammino. La tradizione algebrica araba si sviluppò come una sintesi autonoma, in cui la dimostrazione geometrica nel senso euclideo giocò un ruolo fondamentale che non aveva equivalenti nella tradizione sanscrita e in cui la legittimità delle quantità negative rimase a lungo una questione aperta.

1.6 Quattro tradizioni, una tensione comune

Il percorso tracciato in questo capitolo mostra come il concetto di numero negativo abbia attraversato culture e tradizioni matematiche profondamente diverse,

¹⁶Al-Samaw'al (1130 ca. – 1180 ca.) nacque oltre un secolo dopo la morte di al-Karaji (953 ca. – 1029 ca.): il rapporto tra i due non fu dunque di discepolato diretto, ma di trasmissione testuale – al-Samaw'al lesse e assimilò criticamente l'opera del predecessore in giovane età, arrivando a preservare, nel proprio *al-Bahir fi'l-jabr* (scritto a soli diciannove anni), alcuni risultati di al-Karaji altrimenti perduti, tra cui il metodo di generazione dei coefficienti binomiali tramite quello che oggi chiamiamo il triangolo di Pascal.

¹⁷Il termine sanscrito *ardha-jya* (*semicorda*), abbreviato in *jya*, fu traslitterato in arabo come *jiba* – parola priva di senso proprio in quella lingua – e in seguito confuso, per l'assenza delle vocali brevi nella scrittura, con *jaib* (*piega*, *insenatura*). È da questa lettura che deriva, tramite la traduzione latina di Gherardo da Cremona come *sinus*, la parola stessa "seno".

assumendo in ciascuna di esse un carattere e uno statuto distinti. Nella tradizione greca, la concezione del numero come pluralità di unità concrete rendeva le quantità negative semplicemente impensabili all'interno del sistema concettuale della matematica: non si tratta di una limitazione tecnica ma di una conseguenza coerente di una precisa ontologia del numero. La tradizione cinese compì un passo decisivo in direzione opposta, integrando i numeri negativi come risultati necessari di una procedura algoritmica generale e formulando regole esplicite per operare con essi, senza tuttavia accompagnare questa pratica con una riflessione sulla loro natura. La tradizione indiana elaborò il sistema più compiuto dell'antichità formulando, con Brahmagupta, regole generali per tutte le operazioni aritmetiche su quantità positive, negative e sullo zero, sviluppando poi con Bhaskara II un linguaggio algebrico in cui i numeri negativi erano entità operative pienamente integrate. La tradizione araba infine, pur conoscendo i metodi che avevano prodotto i negativi, scelse di escluderli sistematicamente dal sistema algebrico formale ammettendoli solo implicitamente nella pratica del calcolo economico e commerciale.

Ciò che accomuna queste tradizioni è una tensione ricorrente tra l'utilità operativa delle quantità negative e la difficoltà di attribuire loro un significato e uno statuto matematico autonomo. È questa tensione che caratterizza la storia dei numeri negativi fino alla loro piena formalizzazione, e che i capitoli successivi ripercorreranno lungo due movimenti distinti: dapprima l'ingresso dei negativi nella pratica matematica europea, dove per secoli l'operatività del calcolo precede, e alla fine rende superflua, ogni risposta alla domanda sulla loro natura; poi la ridefinizione strutturale dell'algebra come scienza delle leggi formali, il solo passo capace di fondare ciò che la pratica, fino a quel momento, aveva soltanto constatato funzionare.

Capitolo 2

I numeri negativi in Europa: dall'uso all'assestamento operativo

Il problema dei numeri negativi in Europa non fu mai, a ben vedere, un problema di calcolo. Fin dal loro primo ingresso nella pratica matematica del continente, i numeri negativi furono usati con crescente disinvoltura molto prima che qualcuno si chiedesse seriamente che cosa fossero, o se fosse lecito trattarli come vere quantità. Il problema che attraversa l'intero capitolo — e che ne costituisce il filo conduttore — è dunque un problema di legittimità: non "come si calcola con i numeri negativi?", domanda a cui l'Europa saprà rispondere con sicurezza crescente già a partire dal tardo Medioevo, ma "in nome di che cosa è lecito calcolare con essi?", domanda che resterà sostanzialmente priva di risposta condivisa per almeno cinque secoli. La regola dei segni — l'affermazione, apparentemente elementare eppure sistematicamente elusiva, che il prodotto di due quantità negative sia positivo — è il punto in cui questa tensione tra pratica efficace e teoria insufficiente si cristallizza con la massima evidenza ed è per questo che servirà in questo capitolo come riferimento per orientarci tra autori, secoli e tradizioni nazionali molto diversi tra loro.

Il percorso che segue non è quello di una progressiva risoluzione del problema di legittimità appena enunciato, ma quello del suo progressivo spostamento: la domanda resta la stessa, a mutare è la forma in cui si ripropone di secolo in secolo. Il problema nasce come necessità pratica nell'aritmetica commerciale di Fibonacci e Pacioli, dove il negativo compare come debito prima ancora che come numero; diventa, nel Cinquecento di Cardano, un'insufficienza dichiarata — la prima ammissione esplicita che la pratica corre più veloce della teoria capace di giustificarla; si consolida operativamente tra la seconda metà del Cinquecento ed il Seicento con Bombelli, Girard, Cartesio e Wallis, fino alla costruzione di una retta orientata che risolve la collocazione dei numeri negativi, ma si arresta di fronte alle loro radici quadrate; esplode in un dibattito dichiaratamente epistemologico nel Settecento in cui si collocano Agnesi, Riccati e Saladini, Clairaut e d'Alembert; infine, raggiunge, tra Sette e Ottocento, un assestamento operativo che possiamo vedere, ad esempio, con i manuali di

Ruffini e Reynaud, ma che Carnot mette in discussione, mostrando che quella sicurezza non aveva mai smesso di essere solo procedurale. È un capitolo che non conduce a una soluzione, ma a una domanda più matura — pronta per la ridefinizione strutturale che il capitolo seguente ricostruirà.

2.1 Il basso Medioevo: l'ingresso dei numeri negativi nell'aritmetica commerciale

È attraverso la traduzione latina dei testi arabi, avvenuta principalmente nei secoli XI e XII nella penisola iberica e in Sicilia, che l'algebra di al-Khwarizmi giunse in Europa. Il nome stesso della disciplina, *algebra*, e il termine *algoritmo* derivano dalla latinizzazione del nome di al-Khwarizmi e di parte del titolo della sua opera, *al-jabr*, testimoniando la centralità di questa trasmissione nella formazione della matematica europea medievale. È in questo contesto che si inserisce l'opera di Fibonacci, il quale, avendo avuto accesso diretto sia alla tradizione araba sia, attraverso di essa, a elementi della tradizione indiana, si trovò a dover fare i conti con un sistema algebrico che escludeva i numeri negativi e con una pratica computazionale che in alcuni contesti li rendeva necessari.

Leonardo Pisano, noto come Fibonacci, nacque a Pisa nel 1170 ca. in una famiglia di mercanti. Il padre Guglielmo era un funzionario della dogana pisana di Bugia, attuale Béjaïa in Algeria, che allora rappresentava uno dei principali scali commerciali del Mediterraneo occidentale. È in questo contesto, commerciale prima ancora che intellettuale, che si svolse la formazione matematica del figlio. Nel celebre proemio del *Liber Abaci*, Fibonacci narra che il padre, convinto che quelle conoscenze gli sarebbero state utili, lo aveva chiamato presso di sé a Bugia, ancora fanciullo, per fargli studiare il calcolo indiano, il sistema di numerazione posizionale con cifre indo-arabiche e gli algoritmi delle operazioni elementari. La formazione di Fibonacci prese avvio a Bugia sotto la guida di un maestro musulmano e, come egli stesso scrive nel prologo del *Liber Abaci*:

Li fui introdotto in tale arte per mirabile insegnamento attraverso le nove figure degli Indiani; la conoscenza di quest'arte mi piacque così tanto rispetto alle altre, e la compresi così bene, che tutto ciò che se ne studiava in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza, con i loro vari metodi, luoghi che in seguito percorsi per ragioni di commercio, lo appresi con assiduo studio e pratica di discussione.¹

Nella frase immediatamente successiva, Fibonacci è ancora più esplicito: tutto quanto aveva appreso in precedenza, compreso ciò che dell'algebra araba circolava già in traduzione latina, lo considerava quasi un errore rispetto al metodo degli Indiani nella sua forma originale.² La sintesi di aritmetica ara-

¹ «Ubi ex mirabili magisterio in arte per novem figuras Indorum introductus, scientia artis in tantum mihi pre ceteris placuit et intellexi ad illam, quod quicquid studebatur ex ea apud Egyptum, Syriam, Greciam, Siciliam et Provinciam cum suis variis modis, ad que loca negotiationis causa postea peragravi, per multum studium et disputationis didici conflictum.» (Fibonacci 2020, p. 4).

² «Sed hoc totum etiam et algorismum atque arcus Pictagore quasi errorem computavi respectu modi Indorum.» (Fibonacci 2020, p. 4).

ba di derivazione indiana, geometria euclidea e pratica mercantile costituisce il nucleo della sua opera e la ragione della sua importanza storica. Fibonacci fece ritorno stabilmente a Pisa intorno all'anno 1200 e lì si dedicò alla stesura di manoscritti di argomento matematico fino alla morte, avvenuta nel 1242 ca. La ricezione in Europa dell'opera di Fibonacci ebbe due dimensioni distinte. La prima fu istituzionale e di corte: la definitiva consacrazione avvenne con la presentazione alla corte dell'imperatore Federico II di Svevia, in occasione del soggiorno di questi a Pisa nel luglio 1226, dove, introdotto da un non meglio identificato Maestro Domenico, discusse alcune questioni matematiche con il filosofo di corte Giovanni da Palermo. L'evento segnò profondamente la sua vita e il desiderio di accreditarsi presso la corte imperiale influenzò tutta la sua successiva produzione scientifica, dedicata o comunque legata ai dotti di corte, quali Michele Scoto, Teodoro di Antiochia e lo stesso Giovanni da Palermo. La seconda dimensione fu pratica e civica: una delibera del Comune di Pisa assegnava a «Maestro Leonardo Bigollo» un salario annuo in ricompensa del lavoro svolto per studiare e determinare le stime e le ragioni necessarie alla città e ai suoi funzionari nelle pratiche d'abaco. Fibonacci non fu dunque soltanto un matematico accolto negli ambienti colti, ma anche un professionista al servizio della vita economica della propria città. In questa doppia veste di mediatore di sapere e operatore pratico si rispecchia con precisione la posizione che i numeri negativi occupano nel suo lavoro: strumenti utili accolti senza cerimonie prima ancora che oggetti di riflessione teorica.

Il contesto in cui i numeri negativi fanno la loro comparsa è quello della matematica commerciale. Nei problemi del capitolo XIII del *Liber Abaci*, dedicato alle questioni di ripartizione tra più persone, Fibonacci si trova ripetutamente di fronte a situazioni in cui la soluzione matematicamente corretta impone di assegnare a uno dei soggetti del problema una quantità di denaro inferiore a zero, ovvero un debito. Il problema "dei quattro uomini e una borsa" è il caso più istruttivo:

Di nuovo gli uomini siano 4; e il primo con la borsa abbia il doppio del secondo e del terzo; il secondo il triplo del terzo e del quarto; il terzo il quadruplo del quarto e del primo. Il quarto similmente con la borsa ha il quintuplo del primo e del secondo.³

Le relazioni che ne derivano formano un sistema di quattro equazioni in cinque incognite, i denari dei quattro uomini (x_i , $i = 1, \dots, 4$) e il contenuto della borsa (y),

$$\begin{cases} x_1 + y = 2(x_2 + x_3) \\ x_2 + y = 3(x_3 + x_4) \\ x_3 + y = 4(x_4 + x_1) \\ x_4 + y = 5(x_1 + x_2) \end{cases} \quad (2.1)$$

che risulta indeterminato, ammettendo una famiglia di soluzioni parametriche. Fibonacci individua una di tali soluzioni e, prima ancora di presentarla, avverte

³ «Item homines sint quattuor et primus cum bursa habeat duplum secundi et tertii, secundus triplum tertii et quarti, tertius quaduplum quarti et primi, quartus similiter cum bursa habet quintuplum primi et secundi.» (Fibonacci 2020, p. 542).

il lettore che «questo problema è insolubile, se non si conceda che il primo uomo abbia un debito»⁴. Seguiamo la procedura risolutiva proposta da Fibonacci, che utilizza il metodo di "doppia falsa positura", utilizzando il linguaggio algebrico odierno.

Dalle equazioni del sistema (2.1) ricaviamo le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x_1 + y) = x_2 + x_3 & (2.2a) \\ \frac{1}{3}(x_2 + y) = x_3 + x_4 & (2.2b) \\ \frac{1}{4}(x_3 + y) = x_4 + x_1 & (2.2c) \\ \frac{1}{5}(x_4 + y) = x_1 + x_2 & (2.2d) \end{cases}$$

Consideriamo l'equazione (2.2a) e aggiungiamo a entrambi i membri $x_1 + x_4$, ottenendo

$$\frac{3}{2}x_1 + x_4 + \frac{1}{2}y = S, \quad (2.3)$$

dove S rappresenta la somma dei denari dei quattro uomini. Similmente aggiungiamo $x_1 + x_2$ alla (2.2b) ricavando

$$x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}y = S \quad (2.4)$$

e dall'uguaglianza di queste due otteniamo

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}y &= \frac{3}{2}x_1 + x_4 + \frac{1}{2}y \\ \frac{4}{3}x_2 &= \frac{1}{2}x_1 + x_4 + \frac{1}{6}y \\ x_2 &= \frac{3}{8}x_1 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{1}{8}y. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ora scriviamo x_3 in funzione di x_1 , x_4 e y ; a partire dalla (2.2c) aggiungiamo $x_2 + x_3$ ad entrambi i membri e otteniamo

$$x_2 + \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}y = S$$

e sostituendo x_2 con quanto trovato nella (2.5) ricaviamo

$$\frac{3}{8}x_1 + \frac{5}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{3}{8}y = S. \quad (2.6)$$

Ne consegue che, tramite l'uguaglianza tra (2.6) e (2.3),

$$\frac{3}{8}x_1 + \frac{5}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{3}{8}y = \frac{3}{2}x_1 + x_4 + \frac{1}{2}y$$

⁴«Hec questio insolubilis est, nisi concedatur primum hominem habere debitum.» (Fibonacci 2020, p. 542).

$$\begin{aligned}\frac{5}{4}x_3 &= \frac{9}{8}x_1 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{8}y \\ x_3 &= \frac{9}{10}x_1 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{10}y.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Cerchiamo quindi di esplicitare x_4 a partire dalla (2.2d). Aggiungiamo $x_3 + x_4$ ad entrambi i membri, ottenendo così

$$x_3 + \frac{6}{5}x_4 + \frac{1}{5}y = S$$

che, grazie all'uguaglianza con la (2.3), restituisce

$$\begin{aligned}x_3 + \frac{6}{5}x_4 + \frac{1}{5}y &= \frac{3}{2}x_1 + x_4 + \frac{1}{2}y \\ x_3 + \frac{1}{5}x_4 &= \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{10}y.\end{aligned}$$

Dalla (2.7) ricaviamo però

$$\begin{aligned}\frac{9}{10}x_1 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{10}y &= \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{10}y \\ \frac{2}{5}x_4 &= \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}y \\ x_4 &= \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}y;\end{aligned}\tag{2.8}$$

ora, se aggiungiamo x_4 ad entrambi i membri, ricaviamo

$$2x_4 = \frac{3}{2}x_1 + x_4 + \frac{1}{2}y,$$

che sappiamo essere uguale ad S per la (2.3), quindi x_4 è uguale alla metà della somma dei denari dei quattro uomini. Mostriamo ora che anche il secondo uomo ha metà dei denari di tutti e quattro gli uomini: infatti se nella (2.5) sostituiamo il valore di x_4 trovato nella (2.8) possiamo ricavare

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{3}{8}x_1 + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{8}y \\ x_2 &= \frac{3}{8}x_1 + \frac{9}{8}x_1 + \frac{3}{8}y + \frac{1}{8}y \\ x_2 &= \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}y\end{aligned}\tag{2.9}$$

che, per quanto appena visto, corrisponde a x_4 che è la metà di S .

La soluzione proposta da Fibonacci è corretta: il debito del primo uomo è 1, i denari degli altri tre sono rispettivamente 4, 1 e 4, mentre il contenuto della borsa è di 11 denari; questo corrisponde al caso particolare $k = 1$ della soluzione generale $x_1 = -k$, $x_2 = x_4 = 4k$, $x_3 = k$, $y = 11k$.

Ciò che colpisce di questo passo non è tanto la presenza in sé di una quantità negativa, quanto il modo in cui Fibonacci la introduce: non come un'anomalia

da segnalare o una difficoltà teorica da discutere, ma come una concessione pragmatica necessaria alla risolubilità del problema. Il debito è una realtà presente nella vita economica prima ancora di essere un concetto matematico e Fibonacci la tratta come tale. La legittimità della quantità negativa è qui interamente pratica: essa compare perché il problema la richiede e il modello contabile, il sistema delle entrate e delle uscite, dei crediti e dei debiti, la rende immediatamente comprensibile senza bisogno di giustificazioni ulteriori. Questo carattere di tolleranza pragmatica è la cifra distintiva del trattamento medievale dei numeri negativi nell'aritmetica commerciale europea. I negativi non sono oggetto di riflessione: sono strumenti. Compaiono come risultati intermedi di calcoli, come indicatori di una posizione debitoria, come esiti di problemi di ripartizione in cui la logica del sistema li impone. Non si chiede cosa siano, si richiede che funzionino e funzionano. La loro legittimità è operativa, non concettuale, e il modello contabile, con la sua distinzione strutturale tra avere e dare, tra credito e debito, fornisce un ancoraggio intuitivo sufficiente a renderli accettabili nel discorso matematico pratico.

Circa tre secoli dopo Fibonacci, Luca Pacioli rappresenta una figura di tutt'altro spessore rispetto ai compilatori di pratiche d'abaco che costituivano il tessuto ordinario della matematica mercantile del suo tempo. Nato a Borgo San Sepolcro nel 1445 ca., nella stessa città di Piero della Francesca, si formò probabilmente in parte nella bottega del pittore-matematico, prima di completare la propria istruzione a Venezia, dove entrò in contatto con l'ambiente mercantile e con le scuole di aritmetica che gravitavano attorno al mercato di Rialto. Entrato nell'ordine francescano attorno al 1470, si dedicò per decenni all'insegnamento itinerante della matematica, raggiungendo anche Perugia, Firenze, Milano, Bologna e Roma, costruendo una rete di relazioni intellettuali che culminò, tra il 1496 e il 1499, nella collaborazione con Leonardo da Vinci alla corte di Ludovico il Moro a Milano; morì a Roma nel 1517. È in questo intreccio tra sapere pratico, speculazione geometrica e ambiente artistico che si colloca la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*, pubblicata a Venezia nel 1494: il primo trattato generale di aritmetica e algebra dato alle stampe in volgare italiano, destinato non al pubblico universitario e scolastico che leggeva e scriveva in latino — matematici, filosofi naturali e teologi formati nella tradizione medievale — ma ai mercanti, ai notai, agli artigiani di rango, ossia il pubblico delle scuole d'abaco.

All'interno di questa enciclopedia pratica si trova il *Tractatus XI*, noto come *De computis et scripturis*, dedicato alla tenuta dei libri contabili secondo il metodo veneziano della partita doppia. Pacioli non ne rivendica l'invenzione — la pratica era diffusa nelle grandi case mercantili italiane almeno dal XIII secolo — ma ne offre la prima codificazione sistematica a stampa destinata a diffondersi in tutta Europa. Il principio strutturale del sistema è semplice: ogni operazione commerciale deve essere registrata due volte, una volta nel conto del debitore e una volta in quello del creditore, in modo che i due registri si bilancino perfettamente. L'esempio con cui Pacioli illustra il funzionamento del libro mastro mostra concretamente questa simmetria (Figura 2.1): le stesse transazioni tra Lodovico di Piero Forestani, Martino di Piero Foraboschi, Francesco

linguaggio⁷. La legittimità è operativa, non concettuale.

Eppure, entro questi limiti, la posizione di Pacioli non è semplicemente conservativa. Sesiano ha documentato una serie di problemi presenti nelle opere di Pacioli in cui compaiono soluzioni negative⁸. Il caso più istruttivo è quello delle uova:

Uno compra 7 ova per tanto men de 12 denari quanto che li costò li
12 ovi meno de 8 denari. Dimando che valse l'uovo.⁹

Per trovare quanto vale un uovo consideriamo le relazioni espresse nel problema, che sono $7x = 12 - y$ e $12x = 8 - y$, dove x (per Pacioli *cosa*) è il valore di un singolo uovo. Da queste ricaviamo che $12 - 7x = 8 - 12x$, da cui $4 + 5x = 0$ e quindi la soluzione $x = -\frac{4}{5}$. Pacioli non tenta alcuna reinterpretazione, ma accetta il risultato e lo enuncia senza esitazione: «dirai che l'uovo non valse, ma mensvale e indebitisse»¹⁰.

Un altro caso significativo è dato dal problema della divisione di 10 in due parti soggette a una condizione ausiliaria, che conduce all'equazione $100 + 20x = 0$, priva di soluzione secondo le regole comuni. Pacioli annota che ci si trova di fronte a un ostacolo inusuale, ma prosegue ugualmente dividendo i coefficienti e accettando il risultato negativo come soluzione valida, osservando che si è giunti a «un bellissimo chaso»¹¹. È una reazione che tradisce non imbarazzo, ma curiosità: il problema è bello precisamente perché eccede le regole ordinarie.

La posizione di Pacioli sui numeri negativi è dunque, come Sesiano la definisce, ambigua: istintivamente li rifiuta come soluzioni legittime, eppure li accetta caso per caso quando il calcolo li impone, li chiama con il nome del debito per renderli comprensibili e, in almeno un'occasione, li saluta come una «bellissima» eccezione. È una posizione che rispecchia fedelmente un momento storico in cui i numeri negativi sono ormai strumenti indispensabili del calcolo algebrico, ma non hanno ancora trovato una giustificazione teorica soddisfacente. Pacioli non cerca quella giustificazione, ma registra con precisione la tensione tra la pratica che li richiede e la teoria che non sa ancora come accoglierli. Sarà questa tensione, irrisolta nella *Summa* come lo era stata nel *Liber Abaci* tre secoli prima, a diventare il problema centrale della generazione di Cardano.

2.2 Il Cinquecento: il problema della giustificazione

La matematica del Rinascimento italiano ereditò dalla tradizione arabo-medievale un sistema algebrico funzionante ma privo di fondamenta teoriche solide. I negativi circolavano nei calcoli, come si è visto, con la copertura del linguaggio contabile, e la regola dei segni era applicata correttamente da chiunque praticasse l'algebra. Ma applicare una regola e dimostrarla sono operazioni

⁷Pacioli 1494, fol. 117v.

⁸Sesiano 1985, pp. 142–148.

⁹Pacioli 1494, fol. 195r.

¹⁰Pacioli 1494, fol. 195r.

¹¹Pacioli, *Arithmetica et geometria*, Manoscritto - Vat.lat.3129. fol. 230v, in Sesiano 1985, p. 144.

concettualmente distinte e nel Cinquecento questa distinzione cominciò a pesare. Il caso di Gerolamo Cardano è il più istruttivo: nessun altro matematico del periodo mostra con altrettanta chiarezza la tensione tra la padronanza tecnica dei numeri negativi e l'incapacità di giustificarli su basi rigorose, e nessun altro porta quella tensione fino alle sue conseguenze più radicali.

Gerolamo Cardano nacque a Pavia nel 1501 da Fazio Cardano, giurista e matematico dilettante che aveva frequentato Leonardo da Vinci, e da Chiara Micheri. La nascita fu illegittima, e questa condizione di marginalità avrebbe segnato in modo duraturo il carattere e pesato sulla carriera di Gerolamo: proprio per la sua condizione, il Collegio dei Medici di Milano gli negò l'iscrizione per anni, costringendolo a esercitare la professione in provincia prima di riuscire a stabilirsi nella città. Studiò medicina a Pavia e a Padova, dove si laureò nel 1526, e divenne, nel giro di qualche decennio, uno dei medici più celebri d'Europa, tanto che venne chiamato nel 1552 fino a Edimburgo per curare l'arcivescovo di S. Andrews John Hamilton da una malattia che i medici locali non sapevano diagnosticare. La sua fama si estendeva però ben oltre la medicina: matematico, filosofo naturale, astrologo, teorico dei giochi d'azzardo, Cardano fu uno degli intelletti più vasti e inquieti del Cinquecento, autore di oltre duecento opere che spaziavano dall'algebra alla fisica, dall'astrologia alla morale; morì a Roma nel 1576, non senza aver lasciato ai posteri, secondo una tradizione tanto diffusa quanto incerta nei dettagli, la fama di aver predetto astrologicamente la propria morte. È in questo profilo enciclopedico e nel contesto della vivace competizione matematica dell'Italia settentrionale, fatta di sfide pubbliche, segreti gelosamente custoditi e dispute violente, che si colloca la genesi dell'*Ars Magna*. La formula di soluzione delle equazioni cubiche era stata scoperta da Scipione del Ferro (1465-1526) a Bologna probabilmente attorno al 1515, tenuta segreta fino alla sua morte e poi riscoperta indipendentemente da Niccolò Tartaglia (1500 ca. -1557), che la usò per vincere una sfida pubblica nel 1535. Cardano riuscì nel 1539 a convincere Tartaglia a rivelargli il metodo, sotto quello che Tartaglia ritenne un giuramento di segretezza; quando Cardano apprese della priorità di del Ferro, ritenne sciolto ogni vincolo e pubblicò i risultati nell'*Ars Magna* del 1545, con attribuzione esplicita a del Ferro come primo scopritore. Tartaglia si sentì tradito, e ne nacque una delle controversie più aspre della storia della matematica, che terminò solo il 10 agosto 1548, nella disputa pubblica di Milano: Tartaglia fu messo alle strette da Ludovico Ferrari (1522-1565), allievo di Cardano, e abbandonò il campo dopo il primo giorno di confronto.

Cardano pubblicò l'*Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, in breve *Ars Magna*, nel 1545. Si tratta di un'opera fondamentale per la storia dell'algebra europea: per la prima volta, le procedure, le tecniche e i casi particolari scoperti da Scipione del Ferro, Tartaglia e Ludovico Ferrari vengono organizzati in un trattamento sistematico delle equazioni cubiche, corredato di dimostrazioni. La classificazione di Cardano distingue tredici famiglie di equazioni cubiche e per ciascuna fornisce una dimostrazione del metodo di soluzione, seguita da una regola operativa e da esempi numerici. In questo contesto, i numeri negativi compaiono come strumento tecnico ordinario: le soluzioni positive sono chiamate *verae* mentre quelle negative *fictae*, false o fittizie, e Cardano le

menziona quando servono, giustificandole come soluzioni di famiglie di equazioni con coefficienti di segno opposto. La regola dei segni è usata senza esitazione nella sua forma usuale.

Il problema che l'*Ars Magna* non riuscì a risolvere era di natura diversa e più profonda. Nella formula di soluzione per la famiglia $x^3 = a_1x + a_0$, affrontata nel capitolo XII, si presentava un caso in cui la formula risolutiva produceva radici quadrate di numeri negativi come passaggio intermedio, quando *tutte* le soluzioni dell'equazione proposta erano numeri reali. Questo risultato, che la tradizione successiva avrebbe chiamato *casus irreducibilis*, sconcertava Cardano non perché il risultato fosse sbagliato — il risultato era infatti corretto — ma la strada per arrivarci passava attraverso quantità che egli non sapeva come interpretare. Cardano non ammetteva radici quadrate di numeri negativi e, nella prima edizione dell'*Ars Magna*, limitò la validità della formula imponendo una condizione sui coefficienti che escludeva proprio i casi problematici, rimandando la soluzione a una «*quaestio aliza*» ancora da elaborare. Come ha mostrato Confalonieri¹² nel suo articolo¹³ attraverso un'analisi sistematica delle interconnessioni tra i tredici metodi di soluzione, questa limitazione non riguardava solo la famiglia $x^3 = a_1x + a_0$, ma si propagava, per via delle sostituzioni che collegano le diverse famiglie tra loro, alla maggior parte dell'intera costruzione. Il *casus irreducibilis* era un problema strutturale, non un'eccezione marginale.

Fu proprio questa esperienza — l'essersi trovato a maneggiare, come passaggio intermedio verso un risultato reale e corretto, quantità che non sapeva come interpretare — a spingere Cardano a rimettere in discussione le fondamenta del calcolo con le quantità negative, a partire dalla più elementare delle sue regole, quella dei segni. Per comprendere la natura della critica che egli avrebbe sviluppato nei testi successivi, è necessario ricostruire la struttura della dimostrazione che prese di mira. La "prova" corrente della regola dei segni non era un'affermazione intuitiva, ma un argomento geometrico fondato sugli *Elementi* di Euclide, precisamente sulla coppia formata dalla Proposizione II.4 e dalla Proposizione II.7, che, come si è visto nella sezione 1.2, costituiscono due facce della stessa identità algebrica: la II.4 corrisponde a $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, la II.7 a $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Nella struttura della II.7, il termine $2ab$, che nella notazione moderna compare con segno negativo, deve essere sottratto dal quadrato a^2 ; per ristabilire l'uguaglianza, il quadrato di b , sottratto in eccesso, deve essere riaggiunto. Poiché b era sottratto, si diceva che il quadrato di $-b$ "diventava" positivo: il prodotto di due quantità negative produce una quantità positiva. L'argomento sembrava autoevidente nel contesto delle grandezze geometriche positive, dove la sottrazione è sempre sottrazione di una parte da un intero e il risultato rimane positivo per costruzione. Ma come si è osservato nel capitolo precedente, la struttura del ragionamento euclideo esclude strutturalmente le grandezze negative: la separazione tra II.4 e II.7 non è una scelta stilistica, ma una conseguenza diretta di questa esclusione.

Ed è esattamente questa struttura che Cardano identificò come il punto debole della dimostrazione: l'argomento euclideo non prova che il prodotto di due

¹²Sara Confalonieri, storica della matematica specializzata nell'algebra rinascimentale.

¹³Confalonieri 2015, pp. 269-270.

quantità negative sia positivo in senso aritmetico generale, prova soltanto che nel calcolo del quadrato di una differenza geometrica è necessario riaggiungere il quadrato di una grandezza positiva. Estendere questa osservazione a una regola aritmetica universale era, agli occhi di Cardano, un salto logico ingiustificato: fu il primo a formulare questa critica in modo esplicito e a stampa, e fu anche il primo a trarne le conseguenze più radicali.

La risposta di Cardano a questo problema occupò gli ultimi decenni della sua vita e si articolò in due testi distinti: il *De Regula Aliza*, pubblicato in coda alla seconda edizione dell'*Ars Magna* nel 1570, e il *Sermo de plus et minus*, rimasto manoscritto e pubblicato postumo nella sua *Opera omnia* del 1663. I due testi sono stati a lungo fraintesi come testimonianze di un Cardano retrogrado e incoerente, uno studioso che nell'opera della maturità contestava ciò che aveva affermato e usato correttamente in gioventù. La storica della matematica Rosalind Tanner¹⁴ ha mostrato¹⁵ che questa lettura è profondamente sbagliata, in quanto Cardano non contestava la regola in sé, ma la sua dimostrazione.

Il *De Regula Aliza* è un'opera disorganica e di difficile lettura, descritta da Gino Loria¹⁶ come di "una oscurità disperata" e da Cardano stesso, nel titolo interno, come un "libellus", un opuscolo, non un trattato, destinato a completare e correggere l'*Ars Magna*. La tecnica principale che vi viene sviluppata è quella degli spezzamenti: Cardano tenta sistematicamente di riscrivere la famiglia di equazioni $x^3 = a_1x + a_0$ sostituendo $x = y + z$ e ripartendo i termini dell'uguaglianza risultante in modi diversi, nella speranza che qualcuna di queste ripartizioni conduca a un metodo di soluzione che non richieda radici di numeri negativi. Confalonieri ha censito sessantadue possibili ripartizioni¹⁷, nessuna delle quali condusse Cardano al risultato sperato. Il progetto era infatti destinato al fallimento fin dalla partenza: oggi sappiamo che quando un'equazione di terzo grado ha tre radici reali distinte i numeri immaginari non possono essere evitati nella formula.

Al centro del *De Regula Aliza* si trova però anche qualcosa di concettualmente più radicale degli spezzamenti: il capitolo XXII, intitolato "*Sulla contemplazione di più e meno, e che meno per meno fa meno*"¹⁸. Partendo dalla critica alla dimostrazione di stampo euclideo già illustrata, Cardano non si limitò a demolire l'argomento corrente, ma propose una regola alternativa: se meno per meno fa meno, allora la radice di un numero negativo è semplicemente un altro

¹⁴Rosalind Cecilia Hildegard Tanner (1900–1992), matematica e storica della matematica britannica, lavorò per gran parte della carriera nel dipartimento di matematica dell'Imperial College di Londra. I suoi principali interessi di ricerca riguardarono la storia dell'algebra rinascimentale e la figura del matematico elisabettiano Thomas Harriot, al cui studio dedicò gli ultimi decenni della sua vita accademica.

¹⁵Tanner 1980.

¹⁶Gino Benedetto Loria (Mantova, 1862 – Genova, 1954), matematico italiano, insegnò geometria analitica all'Università di Genova dal 1886 fino al 1935, quando fu costretto a lasciare l'insegnamento a causa delle leggi razziali. È principalmente ricordato per il suo contributo alla storia della matematica, disciplina a cui dedicò oltre trecento lavori, tra cui la *Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX* (1929–1933), opera di riferimento per generazioni di storici della disciplina.

¹⁷Confalonieri 2015, pp. 276–284.

¹⁸*De contemplatione p: ℰ m: ℰ quod m: in m: facit m:*

numero negativo, non una quantità impossibile, e la formula di Del Ferro cessa di essere paradossale. La formulazione è netta:

Non più di quanto meno per meno produce più, più per più produce meno.¹⁹

Come chiarito da Tanner, questo non era un attacco all'algebra nuova né un ritorno alla tradizione: era precisamente il contrario. Cardano voleva preservare tutta la potenza delle tecniche algebriche che includevano i numeri negativi e le loro radici, e farlo su basi rigorose. Il suo obiettivo era eliminare lo statuto di "impossibili" assegnato alle radici dei numeri negativi, non per negarle, ma per integrarle nel sistema con una regola coerente. Questo era il progetto del capitolo XXII, e il *Sermo de plus et minus* lo riprese e lo sviluppò: far sì che ogni radice di un numero negativo fosse semplicemente un altro numero negativo.

Il progetto fallì, e Cardano lo sapeva. Nel *Sermo* riconobbe che Bombelli, nella sua *Algebra* del 1572, aveva gestito correttamente le radici dei numeri negativi nel caso delle equazioni di terzo grado, ma lo criticò per non aver spiegato cosa intendesse precisamente con le sue notazioni "più di meno" e "meno di meno":

ha aumentato enormemente la difficoltà di una cosa già oscurissima, omettendo appena due righe.²⁰

L'amarezza del passo rivela la consapevolezza di un'impresa incompiuta: Cardano aveva individuato il problema con lucidità straordinaria, ma non aveva trovato gli strumenti concettuali per risolverlo.

Fu proprio Bombelli, bersaglio di questa critica, a offrire la risposta che a Cardano era mancata — non sul piano teorico, ma su quello, per lui sufficiente, della pratica.

Rafael Bombelli nacque a Bologna intorno al 1526, unico dei dati biografici su di lui che possa essere citato con qualche sicurezza. Di famiglia non nobile — il padre era un commerciante di lana — esercitò per tutta la vita la professione di ingegnere idraulico, lavorando in particolare alla bonifica della Val di Chiana per conto del vescovo Ranuccio Farnese. È verosimile che proprio i lunghi periodi di sosta forzata dovuti alle difficoltà tecniche dei lavori di bonifica gli abbiano fornito il tempo necessario per la stesura dell'*Algebra*, il cui manoscritto circolava già attorno al 1550 ma fu pubblicato soltanto nel 1572; Bombelli morì poco dopo, in una data che le fonti non precisano. Di lui non restano lettere, non restano testimonianze dirette, non restano aneddoti verificabili: resta l'opera, e dall'opera si ricava quasi tutto ciò che è possibile sapere del suo autore. Quella che emerge è la figura di un autodidatta di straordinaria sistematicità, estraneo alle polemiche e alle sfide pubbliche che animavano la matematica italiana del suo tempo, interamente concentrato sul progetto di

¹⁹ «neque enim magis m: in m: producit p: quam p: in p: producit m:» (Cardano, *Sermo*, in *Opera omnia* IV, p. 435, cit. in Tanner 1980, p. 170).

²⁰ «certe multum auxit difficultatem rei alioquin obscurissimae, praetermisit duas vix lineas» (Cardano, *Sermo*, in *Opera omnia* IV, p. 435, cit. in Tanner 1980, p. 170).

costruire un sistema operativo completo per l'algebra, comprensivo di quelle quantità che i suoi predecessori avevano trattato con esitazione o aggirato con cautela.

L'Algebra del 1572 si apre con un gesto che dice già tutto sull'atteggiamento del suo autore. Nel Libro I, Bombelli enuncia le regole del segno come un elenco numerato — regola prima, regola seconda, regola terza — senza preambolo teorico di sorta, come aveva già fatto Pacioli:

Più via più fa più.
 Meno via meno fa più.
 Più via meno fa meno.
 Meno via più fa meno.²¹

Seguono immediatamente esempi numerici, disposti con la stessa secchezza delle regole: «più 8 via più 8, fa più 64; meno 5 via meno 6 fa più 30; meno 4 via più 5 fa meno 20; più 5 via meno 4 fa meno 20». Il registro è didattico, non fondazionale: le regole valgono perché producono risultati coerenti e non si sente il bisogno di dire altro. È solo nelle sezioni successive, dedicate alla somma e alla sottrazione, che Bombelli ricorre all'analogia contabile: «E p.15 con m.20 fà m.5. Perché se io mi trovassi scudi 15, e ne fossi debitore 20, pagati li 15 resterei debitore 5, e si sono posti questi esempi tanto facili per chiarezza di un principiante, e questo basta quanto al sommare.»; lo stesso tenore formale che il lettore ha incontrato in Cardano, applicato però non al prodotto di due negativi ma all'operazione più elementare di tutte.

La dimostrazione geometrica che "*meno via meno fa più*" arriva più tardi, a carta 90, sotto il titolo esplicito "*Dimostrazione come meno via meno faccia più*" e segue l'argomento euclideo dello gnomone. Bombelli considera una linea *gi* (Figura 2.2) di lunghezza R.q.18, cioè $\sqrt{18}$, e su di essa individua il punto *h* tale che *gh* sia pari a R.q.2, ovvero $\sqrt{2}$. Costruisce il quadrato *acgi* di area 18 e lo divide attraverso linee parallele in quattro regioni. Il quadrato piccolo *bcef*, che rappresenta il prodotto del segmento restante *hi* per se stesso, si ottiene sottraendo dal quadrato grande lo gnomone *bghf*: i due rettangoli laterali valgono ciascuno $\sqrt{36} = 6$, e il piccolo quadrato interno *degh* vale $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, sicché lo gnomone complessivo vale $6 + 6 - 2 = 10$, e il quadrato restante vale $18 - 10 = 8$, con lato $\sqrt{8}$. La dimostrazione è corretta e completa nel suo genere; è lo stesso tipo di argomento che Cardano aveva invocato nell'*Ars Magna* per legittimare le operazioni sui numeri negativi attraverso la garanzia euclidea. Nel contesto dell'*Algebra* di Bombelli essa occupa però una posizione radicalmente diversa: non precede le regole per fondarle, non le accompagna per giustificarle, ma le segue come un supplemento che potrebbe non esserci senza che nulla cambiasse nel calcolo. Bombelli sa che la dimostrazione esiste e la include per completezza; le regole del segno erano già state enunciate, esemplificate e messe al lavoro venti carte prima, e nessun lettore aveva bisogno di attendere carta 90 per usarle. La separazione tra la pratica operativa e la sua giustificazione geometrica non è una lacuna dell'*Algebra*: è la sua struttura implicita.

È nel trattamento delle radici di quantità negative che l'originalità di Bombelli si manifesta con maggiore evidenza, e con essa il raccordo con il problema

²¹Bombelli 1572, Libro I, carta 70.

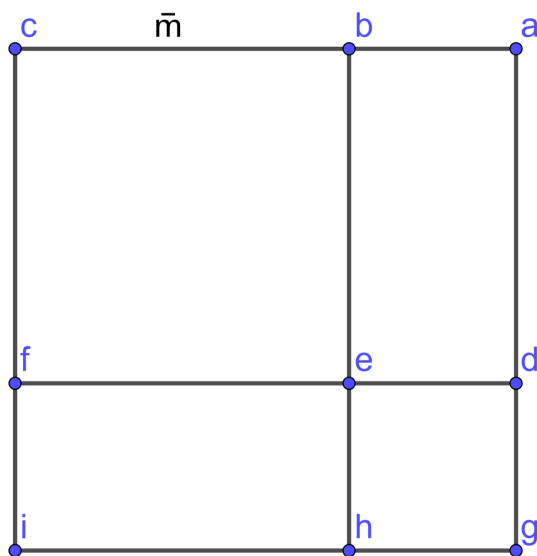


Figura 2.2: Illustrazione della dimostrazione della regola dei segni mediante argomentazione euclidea, così presentata nell'*Algebra* di Rafael Bombelli.

lasciato aperto da Cardano. Nel *De Regula Aliza*, come si è visto nella sezione precedente, Cardano aveva riconosciuto che le soluzioni cubiche del *casus irreducibilis* conducevano inevitabilmente a espressioni della forma $\sqrt{-n}$, e le aveva definite "sophisticae", abbandonate come computazionalmente inutilizzabili. Bombelli non le abbandona: nei capitoli finali del Libro I, a partire da carta 186, costruisce un'aritmetica completa per quelle che chiama "più di meno" e "meno di meno", le radici quadrate di quantità negative con segno positivo e negativo rispettivamente, dotandole di regole operative per la moltiplicazione, la divisione, la somma e la sottrazione. Gli esempi sono immediati e precisi: «Sommisi p. di m. 8 con m. di m. 5, fa p. di m. 3»; «Partasi 8 p. di m.R.q.12 per 2, ne viene 4 p. di m.R.q.3». Nel linguaggio di oggi, "più di meno" e "meno di meno" sono l'unità immaginaria presa con segno $+$ e $-$ rispettivamente e il numero che le accompagna ne è il coefficiente: il primo esempio è $8i + (-5i) = 3i$, il secondo è $(8 + \sqrt{12}i)/2 = 4 + \sqrt{3}i$. La terminologia è deliberata nella sua cautela: Bombelli non dà un nome a queste quantità che ne chiarisca la natura, ma le descrive operativamente in termini di segno. *Più di meno* è una quantità con un comportamento. È un'aritmetica del "come se", e come tale funziona: Bombelli dimostra nel Libro II che le radici cubiche di Cardano, quando elaborate con le regole del *più di meno* e del *meno di meno*, producono risultati reali verificabili, risolvendo così computazionalmente il problema che Cardano aveva dichiarato insolubile per via teorica.

Il movimento complessivo dell'*Algebra* rispetto alla questione dei numeri negativi è dunque quello di una sistematizzazione senza fondazione. Bombelli sa che il problema concettuale esiste — la dimostrazione geometrica di carta 90 lo mostra — ma lo tratta come opzionale rispetto alla pratica, come un ornamento che può essere aggiunto o tolto senza che il calcolo ne risenta. Questa scelta,

che a prima vista potrebbe sembrare una limitazione, è in realtà una presa di posizione precisa: la legittimità di una quantità si misura dalla coerenza delle regole che la governano, non dalla possibilità di assegnarle un referente geometrico o fisico. È una posizione che il Seicento avrebbe fatto propria senza dichiararlo e che il Settecento avrebbe contestato con crescente insistenza.

I casi di Cardano e Bombelli permettono di formulare con precisione la tesi argomentativa di questo capitolo, illustrata da due direzioni opposte. La difficoltà dei numeri negativi nel Rinascimento non era operativa: Cardano usava la regola dei segni nell'*Ars Magna* con la stessa naturalezza con cui l'aveva usata Fibonacci tre secoli prima, e Bombelli ne fece un sistema operativo completo. La difficoltà era epistemologica: cosa significa che meno per meno fa più? Su quali fondamenti si dimostra? Cardano pose la domanda e non seppe rispondervi; Bombelli la eluse deliberatamente, scegliendo la coerenza operativa al posto della fondazione. La separazione tra usare una regola e dimostrarla è il vero problema dei numeri negativi nel Rinascimento.

Il passaggio a François Viète segna, nella storia dei numeri negativi, un cambiamento di registro più profondo di quanto la semplice cronologia lasci intendere. Viète viene una generazione dopo Cardano, e la sua opera principale, *In Artem Analyticem Isagoge* del 1591, trasforma così radicalmente il paesaggio algebrico da rendere in parte irriconoscibile il problema che aveva tormentato il predecessore. La trasformazione non avviene però per rispondere alle domande di Cardano, ma grazie a una diversa impostazione del problema.

François Viète nacque nel 1540 a Fontenay-le-Comte nella provincia del Poitou, nella Francia occidentale, da una famiglia di giuristi. Studiò diritto all'Università di Poitiers e, ottenuta la laurea in legge nel 1559, tornò al paese natale dove esercitò la professione di avvocato del re presso il tribunale di Fontenay-le-Comte, annoverando tra i propri clienti, secondo la tradizione, Maria Stuarda e la regina Eleonora d'Austria. Nel 1564 entrò al servizio della famiglia Soubise come segretario privato e precettore, e fu in questo contesto, occupandosi tra l'altro di astronomia per soddisfare gli interessi della sua allieva, che cominciò a coltivare seriamente la matematica. La sua carriera politica lo portò a Parigi come consigliere del Parlamento, poi a Rennes e di nuovo a Parigi come membro del consiglio privato di Enrico III, al quale rese tra l'altro preziosi servizi come crittoanalista: era così abile nel decifrare i messaggi cifrati dei nemici del re che a Roma, secondo il racconto di Richard Witmer²², vi fu chi attribuì le sue capacità alla stregoneria. Dopo un periodo di esilio forzato per ragioni politiche, fu richiamato a corte da Enrico IV e rimase in servizio fino al 1602, quando si ritirò, morendo l'anno seguente. La matematica fu per Viète una vocazione parallela alla vita professionale, "una vita contemplativa", la chiama il suo traduttore, coltivata negli interstizi di una carriera pubblica intensa e mai abbandonata del tutto. È questa doppia natura, di uomo di corte e di matematico, a spiegare in parte il carattere della sua opera: sistematica,

²²T. Richard Witmer, curatore e traduttore dell'edizione inglese di riferimento dell'*Analytic Art* di Viète (Kent State University Press, 1983); tradusse anche l'*Ars Magna* di Cardano con il titolo *The Rules of Algebra* (Dover/MIT Press). Per l'aneddoto sulla stregoneria, cfr. Viète 1983, p. 3.

ambiziosa nella portata, ma pubblicata in modo frammentario e solo in parte durante la sua vita.

Il progetto dichiarato nell'*Isagoge* è la restaurazione dell'analisi antica. Fin dal primo capitolo, Viète si richiama esplicitamente a Platone e a Teone di Alessandria, e presenta la propria arte analitica come il recupero di un metodo che gli antichi avevano posseduto ma non trasmesso in forma completa. Le regole fondamentali su cui l'analisi si fonda sono quelle degli *Elementi* di Euclide, elencate nel capitolo II dell'*Isagoge* come assiomi: l'intera costruzione teorica di Viète poggia sulla stessa tradizione geometrica euclidea che Cardano aveva cercato di forzare e riformare. Ma il modo in cui Viète si rapporta a quella tradizione è radicalmente diverso: non la contesta dall'interno come Cardano, ma la assume come fondamento e la trascende costruendo su di essa uno strumento nuovo.

Quello strumento è la «*logistica speciosa*», il calcolo sulle specie, ovvero sulle lettere, in opposizione alla «*logistica numerosa*», il calcolo sui numeri. Nel primo capitolo dell'*Isagoge*, Viète introduce sistematicamente l'uso delle lettere dell'alfabeto non solo per le incognite, pratica già diffusa, ma per tutte le quantità note che figurano in un'equazione. Questa sostituzione, che Witmer identifica come il contributo più originale di Viète²³, trasforma la natura stessa del calcolo algebrico: i coefficienti numerici tendono a fondersi tra loro nelle operazioni, oscurando la generalità di ciò che si dimostra; le lettere, invece, mantengono la loro distinzione e rendono visibili le strutture. Come scrive Viète nel capitolo I, la nuova *logistica speciosa* lavora con simboli ed è di gran lunga più feconda e potente della *logistica numerica* nel confrontare le grandezze tra loro.²⁴ Nella notazione di Viète, le tredici famiglie di equazioni cubiche che avevano costretto Cardano a un lavoro classificatorio estenuante collassano in pochi schemi generali. La generalità non è più un obiettivo da raggiungere caso per caso: è incorporata nella struttura della notazione.

Una conseguenza diretta di questo cambiamento è la liberazione dai diagrammi geometrici. Cardano, come Witmer osserva nell'introduzione alla traduzione²⁵, fondava le dimostrazioni di quasi ogni proposizione algebrica su figure geometriche, una pratica non solo scomoda ma strutturalmente limitante per le potenze superiori. Viète abbandona i diagrammi quasi completamente, ricorrendo a figure solo quando tratta di triangoli. Questo non significa che Viète si allontani dalla geometria: al contrario, il suo sistema è esplicitamente geometrico nell'impianto, come mostra la legge di omogeneità enunciata nel capitolo III dell'*Isagoge*²⁶. Questa legge impone che ogni termine di un'equazione o proporzione abbia la stessa dimensione geometrica degli altri: lunghezze con lunghezze, superfici con superfici, solidi con solidi. È una norma di ascenden-

²³Viète 1983, pp. 4–5.

²⁴«Logistice numerosa est quae per numeros, speciosa quae per species seu rerum formas exhibetur, utpote per Alphabetica elementa.» (Viète 1646, Caput III, De praeceptis Logistices Speciosae, p. 4).

²⁵Viète 1983, p. 6.

²⁶«Prima & perpetua lex aequalitatum seu proportionum, quae, quoniam de homogeneis concepta est, dicitur lex homogeneorum, haec est: Homogenea homogeneis comparari.» (Viète 1646, Caput III, De lege homogeneorum & gradibus ac generibus magnitudinum comparatarum, p. 2).

za euclidea, che riflette la concezione delle grandezze algebriche come entità geometriche omogenee.

Ed è proprio qui che si manifestano il contrasto più significativo con Cardano e, insieme, il limite strutturale del sistema di Viète rispetto al problema dei numeri negativi. La legge di omogeneità funziona egregiamente per le grandezze positive: garantisce la coerenza dimensionale delle equazioni e ne chiarisce la struttura. Ma i numeri negativi, in quanto opposti delle grandezze positive, non hanno una collocazione naturale in un sistema fondato sull'omogeneità geometrica. Nella pratica dell'*Isagoge*, i numeri negativi compaiono raramente in modo esplicito: Viète lavora preferibilmente con grandezze positive e quando una quantità deve essere sottratta la tratta come affezione negativa di un termine, non come grandezza autonoma. Il problema della natura dei numeri negativi — cosa siano, quale collocazione ontologica spetti loro in un sistema di grandezze omogenee — non viene affrontato, né era nei propositi di Viète affrontarlo: il suo progetto era la riforma del metodo analitico, non una revisione dei fondamenti del numero. La regola dei segni, però, non resta priva di ogni giustificazione: nel capitolo sulla logistica speciosa, Viète la deriva — non per via geometrica, come Cardano, ma per via algebrica. Poiché il tutto equivale alla somma delle sue parti, il prodotto calcolato per segmenti di una grandezza deve coincidere con quello calcolato sull'intera grandezza: moltiplicando $(A - B)$ per $(D - G)$, i prodotti misti $A \cdot (-G)$ e $(-B) \cdot D$ risultano entrambi negativi, e ciascuno, preso isolatamente, sottrae più del dovuto dal risultato complessivo. Perché il conto torni esatto, il prodotto tra B e G — entrambe negative — deve compensare quell'eccesso, ed essere dunque positivo²⁷.

Il paradosso è dunque solo parziale: Viète costruisce un sistema che si dichiara erede della tradizione euclidea, la stessa che Cardano aveva cercato di riformare dall'interno; ma non si limita a dissolvere la domanda di Cardano cambiando terreno — sul nuovo terreno della logistica speciosa le offre una risposta che l'argomento geometrico non poteva dare. Resta però un residuo irrisolto, ed è quello che più stava a cuore a Cardano: la dimostrazione di Viète giustifica perché il prodotto di due grandezze negative debba essere positivo, ma non tocca la questione di cosa quelle grandezze siano, prese isolatamente, fuori da un'operazione che le richiede per compensazione. Con la logistica speciosa i numeri negativi diventano, per la prima volta, anche giustificabili operativamente; restano, però, privi di uno statuto proprio.

²⁷ «Quoniam totum est suis partibus æquale, ideoque facta sub segmentis alicuius magnitudinis æquantur facto sub tota. Et cum adfirmatum unius magnitudinis nomen ducetur in alterius quoque magnitudinis nomen adfirmatum, quod fiet erit adfirmatum, & in negatum, negatum. Cui præcepto etiam consequens est ut ductione negatorum nominum alterius in alterum, factum sit adfirmatum, ut cum $A - B$ ducetur in $D - G$, quoniam id quod fit ex adfirmata A in G negatam, manet negatum, quod est nimium negare minuereve, quandoquidem A est ducenda magnitudo producta non accurata. Et similiter quod fit ex negata B in D adfirmatam, manet negatum, quod est rursus nimium negare quandoquidem D est ducenda magnitudo producta non accurata, ideo in compensationem dum B negata ducitur in G negatam factum est adfirmandum» (Viète 1646, cap. IV).

2.3 Il Seicento: il consolidamento operativo

Se il Cinquecento aveva reso visibile la tensione tra pratica e teoria, portandola, con Cardano e Viète, fino al punto in cui l'inadeguatezza delle giustificazioni disponibili non poteva più essere ignorata — una tensione che Bombelli, nello stesso secolo, aveva scelto non di risolvere ma di aggirare, costruendo un sistema operativo completo senza mai pronunciarsi sui suoi fondamenti — il Seicento scelse una strada diversa: non risolvere la tensione, ma renderla produttiva. I negativi continuarono a non avere fondamento riconosciuto, ma nel corso del secolo ricevettero qualcosa di forse più prezioso per la storia della matematica: un'interpretazione geometrica isolata, una classificazione senza interpretazione e, infine, un modello capace di riunirle. Questi contributi non si unirono in una teoria coerente — e nessuno dei loro autori pretese che lo facessero — ma insieme delinearono una pratica abbastanza stabile da rendere i numeri negativi indispensabili e una consapevolezza del problema sufficientemente articolata da consegnarlo al Settecento come questione filosofica aperta. La domanda sulla natura dei numeri negativi non scomparve: si spostò, cambiando registro, dalla matematica all'epistemologia.

Fu Albert Girard, nel 1629, a offrire una prima risposta, nata all'interno di un problema specifico più che da un progetto teorico generale.

Albert Girard nacque l'11 ottobre 1595 a Saint-Mihiel, in Lorena, da una famiglia che aveva aderito alla Riforma protestante. Le persecuzioni religiose in Francia lo costrinsero a emigrare, in data imprecisata, nelle Province Unite, dove si stabilì definitivamente: non fu mai pienamente accettato né come francese, per la sua fede, né come olandese, da straniero qual era, e non riuscì mai a procurarsi il patrocinio stabile necessario alla carriera di un matematico nel Seicento; si mantenne in parte suonando il liuto professionalmente. Studiò all'Università di Leida sotto Willebrord Snellius e prestò servizio come ingegnere militare per il principe Federico Enrico di Nassau. Morì l'8 dicembre 1632, verosimilmente a Leida.

Nella sua opera principale, *l'Invention nouvelle en l'Algèbre* (1629), un opuscolo di poche decine di pagine ma di straordinaria densità concettuale, Girard non parte da una posizione di apertura verso le quantità che escono dal dominio dei numeri reali positivi. Nelle pagine iniziali, dedicate alle regole elementari del calcolo, tratta l'estrazione di radice quadrata con la stessa cautela dei suoi predecessori: la radice di 9, scrive, è $+3$ oppure -3 , ma «la radice di -9 è indicibile, e non è né $+$ né $-$ nella propria radice»²⁸ — non ammette, cioè, alcun segno. È la stessa impasse che aveva fermato Cardano ottant'anni prima.

Ma quando affronta la teoria generale delle equazioni, qualche pagina più avanti, il suo atteggiamento cambia radicalmente. Enuncia un teorema che anticipa, in forma ancora acerba, quello che oggi chiamiamo teorema fondamentale dell'algebra: ogni equazione riceve tante soluzioni quante ne indica il grado del-

²⁸ «mais la racine de -9 est indicible, & n'est ny $+$ ny $-$ en sa racine» (Girard 1629, sig. B2v).

la quantità più alta, eccettuate le incomplete²⁹. È un'affermazione di principio, non una dimostrazione, ma Girard la applica con una coerenza che lo porta oltre il dominio dei numeri reali: illustrandola con l'equazione $x^4 = 4x - 3$, le cui quattro soluzioni sono 1 , 1 , $-1 + \sqrt{-2}$ e $-1 - \sqrt{-2}$, si chiede esplicitamente perché conservare le ultime due, che pure aveva appena definito indicibili nelle pagine iniziali. La risposta è netta: «per la certezza della regola generale, per sapere che non ve ne sono altre, e per la loro utilità»³⁰. È lo stesso tipo di mossa che aveva fatto Viète pochi decenni prima, quando aveva esteso il criterio del prodotto degli estremi e dei medi fino a dedurre che il prodotto di due grandezze negative dovesse essere positivo: un criterio formale — qui il numero di soluzioni previsto dal grado dell'equazione, lì la proporzione tra estremi e medi — esteso oltre il dominio in cui è stato concepito, per la sola ragione che la coerenza del sistema lo richiede. Le quantità "impossibili" non ricevono un significato: ricevono una cittadinanza formale, garantita dalla regola che le genera.

È in questo secondo registro, non più cauto ma sistematico, che Girard affronta anche il problema di inclinazione di origine pappiana: condurre, da un punto assegnato, una retta la cui intercetta tra due rette date abbia una lunghezza prefissata — già risolto per via puramente geometrica da Pappo³¹ e ripreso algebricamente, prima di Girard, da Bombelli con l'uso degli squadri e da Viète, che per trattarlo nel piano dovette ammettere un apposito postulato sulla possibilità di condurre rette con intercetta di lunghezza arbitraria.

Nella formulazione che Girard sceglie nell'*Invention nouvelle*, un punto A è fissato sulla bisettrice del primo e del terzo quadrante, con $AF = AB = 4$; si tratta di condurre per A una retta la cui intercetta, presa tra due assi ortogonali, misuri $\sqrt{153}$. Posto $FN = x$, dal triangolo rettangolo AFN si ha $AN^2 = 16 + x^2$; dalla similitudine tra i triangoli AFN e ONC segue la proporzione $\frac{AN}{\sqrt{153}} = \frac{|x|}{|4-x|}$, che, elevata al quadrato e semplificata, produce l'equazione di quarto grado $x^4 = 8x^3 + 121x^2 + 128x - 256$.

Girard elenca le quattro soluzioni affiancando a ciascuna il proprio significato geometrico: due positive, $x = 1$ e $x = 16$, che corrispondono ai segmenti FN e FD , e due negative, $x = -\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$ e $x = -\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}$, che individuano due ulteriori punti, G e H . È su queste ultime due che costruisce l'osservazione che qui ci interessa:

Queste soluzioni mostrano i punti G ed H , come se le distanze FG ,

²⁹ «Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions, que la dénomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incompletes» (Girard 1629, sig. [E4]r-[E4]v).

³⁰ «On pourroit dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je respond pour trois choses, pour la certitude de la reigle générale, & qu'il n'y a point d'autre solutions, & pour son utilité» (Girard 1629, sig. F).

³¹ Pappo di Alessandria (III-IV secolo d.C.), considerato l'ultimo dei grandi geometri greci dell'antichità, autore della *Synagoge*, opera enciclopedica in otto libri che raccoglie e sistematizza buona parte della geometria greca precedente. Il testo greco è sopravvissuto solo in forma frammentaria, attraverso una tradizione manoscritta ristretta; per gli autori qui trattati, tuttavia, la via di accesso fu la traduzione latina di Federico Commandino (1509-1575), pubblicata postuma nel 1588 con il titolo *Mathematicae Collectiones*, che ne permise la graduale diffusione nella comunità scientifica europea.

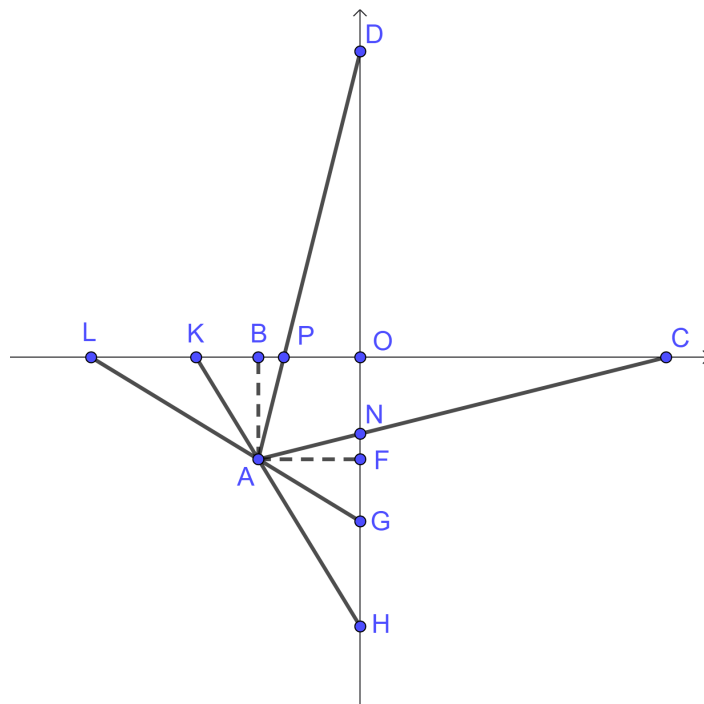


Figura 2.3: Costruzione di Girard per il problema di inclinazione dell'*Invention nouvelle*: il punto A sulla bisettrice del primo e del terzo quadrante e le quattro rette corrispondenti alle radici dell'equazione di quarto grado, con le due radici positive ($x = 1$, $x = 16$) che intersecano gli assi nei punti $N-C$ e $D-P$ e le due negative in $G-L$ e $H-K$.

FH fossero meno di nulla, dato che FN e FD avanzano mentre FG , FH retrocedono, così le intercette CN , DP , GL , HK tendono ad inclinarsi attorno ad A , facendo ciascuna $\sqrt{153}$, secondo le regole qui stabilite [...] e così si dovranno intendere tutte le soluzioni negative, che è un'osservazione con conseguenze in geometria, sconosciute sinora.³²

Le quattro soluzioni non sono dunque casi eterogenei, due da accettare e due da scartare: sono un'unica famiglia di punti, generati dalla stessa costruzione, distribuiti su due versi opposti a partire da F . Qualche pagina più avanti Girard generalizza il principio oltre il singolo problema:

Finora non abbiamo ancora spiegato a cosa servano le soluzioni negative, quando ve ne siano. La soluzione negativa si spiega in

³² «Assavoir monstrant lesdits points G et H , comme si les distances FG , FH estoient moins que rien, en retrogradant, prenant que FN , FD avancement, et FG , FH reculent en arriere, tellement donc que les interceptes CN , DP , GL , HK , tendent et s'inclinent au point A faisant chacune $\sqrt{153}$, selon le requis [...] et ainsi le faudra-il entendre de toutes solutions par moins, qui est une chose de consequence en Geometrie, incogneuë auparavant» (Girard 1629, sig. F3v-F4r).

Geometria procedendo all'indietro, ed il segno meno indietreggia, laddove il segno più avanza.³³

È l'idea di verso di percorrenza di un segmento a conferire ai numeri negativi quella cittadinanza nella geometria a lungo negata: non più un'eccezione da scartare, ma un'informazione — il segno indica una direzione, non un'assenza. È la prima volta, nella ricostruzione qui condotta, che una radice negativa riceve un significato geometrico positivo, invece di essere respinta come "sophistica" o elusa dietro una notazione puramente operativa.

Lo stesso problema di Pappo sarà ripreso, otto anni più tardi, da Cartesio nel Libro III della *Géométrie* — con la stessa costruzione, un'equazione di quarto grado sostanzialmente equivalente, e un silenzio quasi totale su tutto ciò che Girard aveva appena reso esplicito.

René Descartes — Cartesio nella tradizione italiana — nacque nel 1596 a La Haye en Touraine, una piccola città della Turenna, regione della Francia centrale che oggi porta il suo nome. Di famiglia nobile di toga, studiò al collegio gesuita de La Flèche, dove ricevette una solida formazione scolastica che avrebbe poi criticato e superato, e si laureò in diritto a Poitiers nel 1616. Anziché esercitare la professione, scelse invece la vita militare, arruolandosi come volontario in diversi eserciti europei — olandese, bavarese e imperiale — non per vocazione bellica, ma per viaggiare e osservare il mondo, secondo un programma intellettuale che lui stesso descrisse come la decisione di non cercare altra scienza che quella che si poteva trovare in sé stessi o nel grande libro del mondo. Si stabilì infine nei Paesi Bassi nel 1628, dove visse per vent'anni nella relativa tranquillità che quella società tollerante offriva a un pensatore scomodo e dove elaborò la maggior parte della sua opera filosofica e matematica. Morì a Stoccolma nel 1650, dove si era recato su invito della regina Cristina di Svezia, vittima di una polmonite contratta nei rigidi inverni nordici. La *Géométrie*, l'opera che qui interessa, non fu pubblicata come testo autonomo, ma come una delle tre appendici scientifiche al *Discours de la méthode* del 1637, insieme alla *Dioptrique* e ai *Météores*: un dettaglio che dice già qualcosa sull'intenzione dell'autore, che non intendeva scrivere un trattato di algebra, ma dimostrare, attraverso un esempio concreto, la fecondità del suo metodo filosofico applicato alla geometria. Fu in questo contesto, subordinato e quasi incidentale rispetto al progetto filosofico maggiore, che Cartesio produsse alcune delle innovazioni più durature della storia dell'algebra, tra cui il primo trattamento sistematico delle radici negative delle equazioni.

La *Géométrie* si occupa dei numeri negativi non come oggetto di indagine autonoma, ma come sottoprodotto inevitabile di un progetto più ampio: tradurre l'intera aritmetica, comprese le sue operazioni fondamentali, in costruzioni geometriche. Fin dal Libro I, Cartesio ridefinisce il prodotto in questi termini: dato un segmento unitario OU e due segmenti $OA = a$, $OB = b$, il prodotto ab è il segmento OP individuato, grazie al teorema di Talete, dalla proporzione

³³ «Iusques icy nous n'avons encor expliqué à quoy servent les solutions par moins, quand il y en a. La solution par moins s'explique en Geometrie en retrogradant, et le moins recule, là où le + avance» (Girard 1629, sig. F3v).

$1 : a = b : x$ — congiungendo U con B e tracciando da A la parallela a UB , si ottiene su una seconda retta il segmento cercato. È una definizione che si

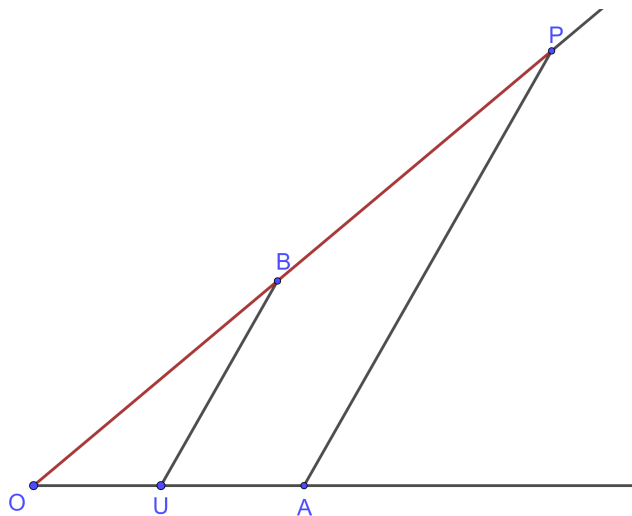


Figura 2.4: Costruzione del prodotto come quarto proporzionale secondo il teorema di Talete: dati il segmento unitario OU e i segmenti $OA = a$, $OB = b$, il segmento OP (in rosso), ottenuto tracciando da A la parallela a UB , è il prodotto ab .

diffonde rapidamente al di là della *Géométrie*: la fa propria, tra gli altri, Pietro Mengoli, allievo di Cavalieri, nella sua *Geometria Speciosa* (1659). Applicata al caso delle grandezze negative, però, questa stessa proporzione si rivelerà tutt'altro che pacifica. Ad esempio, Antoine Arnauld — noto per un trattato di logica ed esponente della cerchia di studiosi attivi nella celebre abbazia di Port-Royal, che ospitò anche Pascal — nei suoi *Nouveaux Elemens de Géométrie* dimostra la regola dei segni, enunciata nelle sue quattro declinazioni, nel caso in cui il moltiplicatore sia negativo, affermando che la moltiplicazione è, anziché un'addizione ripetuta, una *sottrazione* ripetuta, cioè

sottraendo il moltiplicando, quale che sia, tante volte quante sono le unità che figurano negativamente nel moltiplicatore.³⁴

Conclusa la dimostrazione della regola, Arnauld osserva:

Questo modo di concepire la moltiplicazione di meno per meno, eseguendola per via di sottrazione, mi ha permesso di risolvere la più grande obiezione che, credo, le si potesse muovere e che mi aveva fatto ritenere che era solo per accidenti che meno per meno facesse più. Non riuscivo ad attribuire a questo tipo di moltiplicazione, la nozione più naturale della moltiplicazione in generale: cioè che l'unità (determinata nei numeri, indeterminata nell'estensione) deve essere al moltiplicatore come il moltiplicando sta al prodotto. Ciò è evidentemente falso nella moltiplicazione di meno per meno, perché

³⁴Arnauld 1683, p. 15.

non può essere vero che l'unità sta a -5 come -3 sta a $+15$ perché ciò richiederebbe che, essendo il secondo termine più piccolo del primo, anche il quarto fosse più piccolo del terzo mentre è molto più grande.³⁵

Tornando a Cartesio, lo stesso apparato di proporzioni, similitudine di triangoli e teorema di Talete gli permette di soppesare quanto dire o non dire sul problema di Pappo che Girard aveva appena affrontato. Nel Libro III, Cartesio riprende infatti la stessa costruzione: dati il quadrato AD e il segmento BN , si tratta di prolungare il lato AC fino a un punto E tale che EF , tracciato da E verso B , sia uguale a NB ³⁶. Posto $BD = a$ e $BN = EF = c$, e assunta

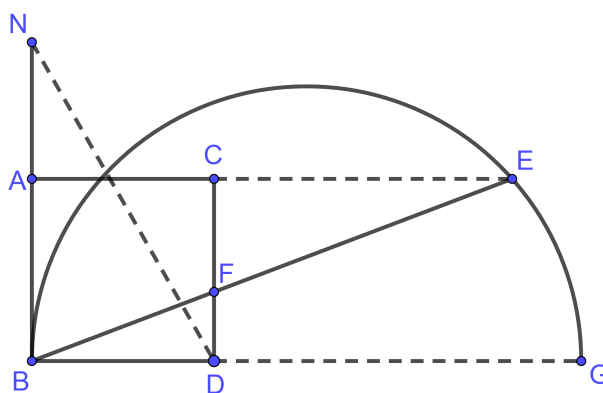


Figura 2.5: Costruzione di Descartes per il problema di Pappo (*Géométrie*, Libro III): dati il quadrato AD e il segmento BN (perpendicolare a BD , di lunghezza c), si prolunga BD fino a G tale che $DG = DN$; la circonferenza di diametro BG interseca il prolungamento di AC nel punto cercato E , da cui si ricava F su CD .

come incognita $x = DF$, la similitudine dei triangoli BFD e CFE conduce a un'equazione di quarto grado, formalmente diversa da quella di Girard ma dello stesso tipo — $x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - c^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$ — la cui soluzione, secondo Cartesio, è $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + c^2}}$. Il valore risolve effettivamente il problema — non è nemmeno l'unica soluzione positiva — ma su questo Cartesio non dice altro: nessun elenco delle altre tre radici, nessuna interpretazione del loro segno, nessun accenno al fatto che, cambiando incognita, altre soluzioni emergerebbero con un ruolo geometrico analogo a quello che Girard aveva assegnato ai punti G e H . L'unica osservazione che dedica

³⁵ Arnauld 1683, §LIX, p. 16.

³⁶ «Si le quarré AD & la ligne BN estant donnés, il faut prologer la costé AC jusque a E , en sorte qu' EF , tirée d' E vers B , soit esgale a NB . On apprend de Pappus, qu'ayant premierement prolongé BD jusques à G , en sorte que DG soit esgale a DN , & ayant descrit un cercle dont le diametre soit BG , si on prolonge la ligne droite AC , elle rencontrera la circonference de ce cercle au point E , qu'on demandoit» (Descartes 1954, p. 189).

alle radici alternative riguarda la comodità del calcolo, non il loro significato: scegliere BF , CE o BE al posto di DF conduce a un'equazione più facile da risolvere; scegliere DG , a una più difficile ma comunque trattabile³⁷. Dove Girard vedeva un'informazione geometrica — un verso, una direzione — Cartesio vede solo un'opportunità di calcolo più o meno comoda.

Questo silenzio non è isolato: riflette l'impostazione generale con cui Cartesio tratta i negativi in tutto il Libro III. Introduce la classificazione delle radici di un'equazione in *vrayes* e *fausses* — vere e false — affermando che le seconde siano *minori di niente*. La definizione è costruita sul concetto di *défaut*: se $x = -5$, allora -5 è il difetto di 5, cioè la quantità che manca a zero quando si sottrae 5 dal nulla. La scelta terminologica è precisa e deliberata, Cartesio non dice che le radici negative non esistano né che siano impossibili: dice che sono *false*, cioè che hanno uno statuto diverso da quello delle radici positive, senza essere per questo prive di significato algebrico. È una distinzione sottile ma storiograficamente rilevante: i numeri negativi sono ammessi nell'algebra cartesiana, ma come categoria di secondo ordine, ontologicamente subordinata alle radici vere.

Questa subordinazione non impedisce a Cartesio di costruire attorno alle *fausses racines* uno strumento analitico di grande potenza. La regola dei segni, enunciata nel medesimo Libro III, stabilisce che un'equazione può avere tante radici vere quante sono le variazioni di segno tra i coefficienti successivi, e tante radici false quante sono le permanenze di segno, cioè le coppie di coefficienti consecutivi con lo stesso segno. Nell'equazione $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, i cambiamenti di segno sono tre e le permanenze una sola: l'equazione ha dunque tre radici vere e una falsa, che è effettivamente 5. Smith e Latham — traduttori dell'edizione della *Géométrie* qui utilizzata — notano in calce che la paternità della regola fu a lungo contesa a favore di Thomas Harriot — un'attribuzione che risale a un'accusa di plagio lanciata contro Cartesio a metà Seicento e che Leibniz stesso contribuì a diffondere, fino a farne un equivoco durato sino al XIX secolo. L'analisi dei testi pubblicati e dei manoscritti di Harriot ha però escluso che egli abbia mai formulato la regola dei segni³⁸: la si deve interamente a Cartesio.

La simmetria tra radici vere e false si manifesta con particolare chiarezza nel procedimento di trasformazione che Cartesio illustra subito dopo: cambiando i segni dei termini di posto pari — secondo, quarto, sesto — e lasciando invariati quelli di posto dispari, tutte le radici false diventano vere e tutte le vere diventano false. L'equazione $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ diventa $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$, che ha una sola radice vera, 5, e tre false, 2, 3 e 4. Le radici negative sono dunque perfettamente manipolabili: si contano,

³⁷ «Que si on posoit BF , ou CE , ou BE pour la quantité inconnuë, on viendroit dereches à une Equation, en laquelle il y auroit 4 dimensions, mais qui seront plus aysée a démesler, & on y viendront assés aysement; au lieu que si c'estoit DG qu'on supposast, on viendroit beaucoup plus difficilement a l'Equation, mais aussy elle seroit tres simple. Ce que ie mets icy pour vous avertir, que lorsque le Probleme proposé n'est point solide, si en le cherchant par un chemin ou vient a une Equation fort composee, on peut ordinairement venir a une plus simple, en le cherchant par un autre» (Descartes 1954, p. 190).

³⁸ Bartolozzi e Franci 1993, pp. 343-345 e passim.

si trasformano e si convertono nelle loro omologhe positive con una procedura meccanica, pur restando concettualmente *minori di niente*. L'accettazione tecnica e la diffidenza ontologica coesistono senza frizione, perché Cartesio non sente il bisogno di riconciliarle.

È però in una nota quasi marginale, verso la fine del Libro III, che la *Géométrie* rivela il limite interno di questa classificazione. Dopo aver discusso le radici vere e false, Cartesio osserva che né le une né le altre sono sempre reali, ma possono essere *immaginarie*³⁹: non hanno un valore reale determinato e restano tali qualunque trasformazione si applichi loro. L'esempio è dato dall'equazione $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ che ha una sola radice reale, 2, e due radici che rimangono immaginarie. Smith e Latham notano che è qui che il termine *imaginaire* entra nel lessico matematico in questo senso tecnico. Ma Cartesio non si ferma su questo punto: lo registra, gli dà un nome e passa oltre. Le radici immaginarie sono un fenomeno che l'algebra cartesiana nomina ma non spiega. Non è solo un problema concettuale: mina la meccanica stessa della regola dei segni appena enunciata. Il conteggio delle variazioni e delle permanenze restituisce il numero esatto di radici vere e false solo quando tutte le radici dell'equazione sono reali; in presenza di radici immaginarie, diventa soltanto un limite superiore. Fu Frans van Schooten, nei suoi *Commentarii* alla *Géométrie*, a chiarirlo per primo: l'uguaglianza tra numero di variazioni e radici positive vale solo per le equazioni le cui radici provengono tutte da fattori reali (*aequationes quae producuntur ex suis radicibus*), non quando l'equazione ammette radici immaginarie⁴⁰.

Ed è esattamente il confine tra ciò che la classificazione copre e ciò che lascia scoperto il luogo dove il problema si aggrava rispetto a Bombelli: egli aveva costruito un'aritmetica per $\sqrt{-n}$ senza chiedersi cosa fosse; Cartesio ha costruito una classificazione che include $\sqrt{-n}$ come categoria residuale senza poterla collocare né tra le vere né tra le false. Il vocabolario si è arricchito; il problema concettuale si è approfondito.

Questa ambiguità di fondo affiora con particolare nettezza in un teorema che Cartesio enuncia poco dopo la classificazione, oggi talora detto di Cartesio-Ruffini: la somma di un'equazione con più radici è sempre divisibile per un binomio formato dall'incognita diminuita del valore di una radice vera o aumentata del valore di una radice falsa⁴¹. In termini moderni diremmo semplicemente che x_0 è radice di $p(x) = 0$ se e solo se $(x - x_0)$ divide $p(x)$, qualunque sia il segno di x_0 — un'unica formula, indifferente al segno. Cartesio non riesce a scriverla così: il binomio è $x - x_0$ se la radice è vera, $x + x_0$ se è falsa. Il segno resta un'informazione da applicare dall'esterno alla radice, gestita con una biforcazione di casi, non una proprietà che il numero porta già con sé. È lo stesso sintomo, in miniatura, che si osserva su scala più larga in tutto il libro: le *fausses racines* vengono maneggiate con piena disinvoltura operativa — risolvono equazioni, hanno un ruolo geometrico definito, obbediscono a regole precise — ma restano, nel nome stesso che le designa e nella sintassi con cui si scrivono,

³⁹ «tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours reelles; mais quelquefois seulement imaginaires» (Descartes 1954, p. 174).

⁴⁰Schooten 1695, p. 285 — cfr. anche Bartolozzi e Franci 1993.

⁴¹Descartes 1954, p. 159.

un'eccezione da accompagnare caso per caso, non una quantità naturalizzata alla pari delle radici vere.

La classificazione cartesiana aveva dunque nominato il problema senza risolverlo: le *fausses racines* erano integrate nell'algebra, le *racines imaginaires* erano registrate come categoria residuale, ma né le une né le altre avevano ricevuto un fondamento che andasse oltre la loro utilità computazionale — e l'interpretazione geometrica che Girard aveva già offerto, proprio a partire dallo stesso problema di Pappo, restava priva di seguito nella stessa opera che quel problema riprendeva. Fu John Wallis, quasi cinquant'anni dopo, a raccogliere e generalizzare quell'intuizione isolata, costruendo non una nuova classificazione, ma un modello geometrico sistematico.

John Wallis nacque nel 1616 a Ashford, nel Kent, figlio di un pastore anglicano che morì quando John aveva appena sei anni. Wallis si formò all'Emmanuel College di Cambridge, dove si laureò nel 1637, e si dedicò inizialmente alla teologia prima di orientarsi definitivamente verso la matematica, disciplina a cui si era accostato da autodidatta intorno alla metà degli anni 1640 leggendo i libri di aritmetica del fratello e una copia della *Clavis Mathematicae* di Oughtred⁴². La rapidità con cui si impadronì della materia fu straordinaria tanto che già nel 1649 fu nominato Savilian Professor di Geometria a Oxford, cattedra che tenne per oltre cinquant'anni fino alla morte nel 1703. Durante la guerra civile inglese aveva prestato servizi come crittoanalista per il Parlamento, decifrando messaggi cifrati dei realisti — un'attività che continuò anche sotto la Restaurazione, passando al servizio della corona senza apparente difficoltà ideologica. Fu uno dei fondatori della Royal Society nel 1660 e rimase per decenni una delle figure centrali della vita matematica inglese: corrispondente di Leibniz, critico di Hobbes, interlocutore di Newton, che lesse la sua *Arithmetica Infinitorum* (1656) da studente traendone ispirazione diretta per il teorema binomiale. Il *Treatise of Algebra*, pubblicato circa trent'anni più tardi, nel 1685, fu la sua opera più ambiziosa nella forma ma anche la più discussa: una storia dell'algebra che intrecciava ricostruzione storiografica e risultati originali e che conteneva, nei capitoli LXVI e LXVII, un tentativo sistematico di dare ai numeri negativi e alle loro radici una fondazione geometrica orientata.

Il capitolo LXVI del *Treatise of Algebra* si apre con una mossa che è già una presa di posizione storiografica. Wallis riconosce esplicitamente che una quantità negativa è impossibile in senso stretto⁴³ e poi aggiunge immediatamente che questa impossibilità non è né assurda né inutile quando opportunamente compresa. La distinzione tra l'impossibilità in senso stretto e la legittimità dell'uso, già implicita in Bombelli e taciuta in Cartesio, diventa in Wallis il punto di partenza esplicito di una riflessione che mira a dare ai numeri negativi qualcosa che né Bombelli né Cartesio avevano fornito: non solo regole operative o classificazioni, ma un'interpretazione che ne spieghi il significato geometrico.

⁴² «Self-taught from his brother's arithmetic books and Oughtred's *Clavis mathematicae*, Wallis knew little enough mathematics when he was appointed» (Stedall 2002, p. 4).

⁴³ «it is not possible that any Magnitude can be Less than Nothing, or any Number Fewer than None» (Wallis 1685, p. 264).

Il modello che Wallis costruisce è cinematico prima ancora che geometrico. Supponiamo, scrive⁴⁴, che un uomo avanzi di cinque yard da A verso B , e poi retroceda di due yard da B verso A : la domanda "di quanto è avanzato rispetto ad A ?" ha risposta $+5-2 = +3$, tre yard in avanti. Ma se invece di retrocedere di due yard retrocede di otto yard, arrivando al punto D , la risposta è $+5-8 = -3$: tre yard "meno di niente", il che in senso stretto è impossibile. Tuttavia, Wallis osserva, -3 designa il punto D sulla retta con la stessa precisione con cui $+3$ designava il punto C ⁴⁵. Il negativo non è un'assenza di quantità, ma una quantità in direzione opposta. $+3$ significa tre yard in avanti; -3 significa tre yard indietro; ma entrambi individuano un punto preciso sulla stessa retta infinita. È la prima formulazione esplicita e sistematica di quella che oggi chiamiamo "retta numerica orientata" e la sua potenza concettuale sta nel fatto che trasforma il negativo da entità problematica, qualcosa di "meno di niente", in entità relazionale, definita non da una grandezza assoluta, ma da una direzione rispetto a un'origine.



Figura 2.6: Il modello cinematico di Wallis: un uomo avanza da A a B di 5 yard, poi retrocede verso C (3 yard avanti rispetto ad A) o, retrocedendo di più, fino a D (3 yard indietro rispetto ad A).

Wallis estende immediatamente il modello dalla retta al piano, passando da grandezze lineari a grandezze areali (guadagno e perdita di acri di terra) e poi alle radici di quantità negative. È qui che il modello mostra sia la sua potenza sia i suoi limiti. Le radici immaginarie corrispondono a punti fuori dalla retta nel piano: laddove, nel caso delle radici negative, il punto B non si trova nella direzione supposta ma si trova pur sempre sulla medesima retta, nella direzione contraria, nel caso di un quadrato negativo il punto B non è collocabile in alcun punto di quella retta, né in avanti né indietro rispetto ad A , ma può trovarsi nel piano, al di sopra della retta stessa⁴⁶. La radice di un quadrato negativo non è un punto sulla retta numerica ma un punto nel piano, sollevato al di sopra della

⁴⁴Wallis 1685, p. 265.

⁴⁵ « -3 doth as truly design the Point D as $+3$ designed the Point C . Not Forward, as was supposed; but Backward, from A .» (Wallis 1685, p. 265).

⁴⁶ «whereas in case of Negative Roots, we are to say, The Point B cannot be found, so as is supposed in AC Forward, but Backward from A it may in the same Line: We must here say, in case of a Negative Square, the Point B cannot be found so as was supposed, in the Line AC ; but Above that Line it may in the same Plain» (Wallis 1685, p. 268).

linea di base. Wallis lo illustra geometricamente nel capitolo LXVIII⁴⁷ legandolo non a equazioni di terzo grado ma di secondo, tramite la costruzione di triangoli rettangoli inscritti in una semicirconferenza. Data un'equazione $x^2 - sx + p = 0$, riporta sulla retta di base un segmento di lunghezza s — la somma delle radici — come diametro della semicirconferenza; l'altezza di un triangolo rettangolo inscritto, relativa all'ipotenusa, è medio proporzionale tra le due parti in cui il suo piede divide il diametro — una relazione euclidea elementare — per cui basta trovare sulla semicirconferenza il punto la cui altezza vale $\sqrt{p}$, la radice del prodotto delle radici, per individuare per proiezione le due radici come i due segmenti del diametro (Figura 2.7). Quando i dati sono compatibili — il discriminante è positivo — quel punto B si trova sulla retta AC , con valore positivo o negativo a seconda del segno delle radici (Figura 2.7a); Quando sono incompatibili — il discriminante è negativo — l'altezza richiesta eccede il raggio della semicirconferenza (Figura 2.7b) e il punto B si trova fuori dalla retta, nel piano, con valore $\sqrt{-n}$ (Figura 2.7c). La costruzione è corretta e anticipatrice, è la forma embrionale della rappresentazione geometrica dei numeri complessi che la matematica dell'Ottocento avrebbe formalizzato nel piano complesso, ma Wallis non la sviluppa in una teoria: la indica, la illustra con esempi, ma non la porta alle sue conseguenze.

C'è un secondo luogo, distinto da quello delle equazioni, in cui il rapporto di Wallis con le quantità negative si complica ulteriormente. Alla Proposizione 104 dell'*Arithmetica Infinitorum* Wallis scrive:

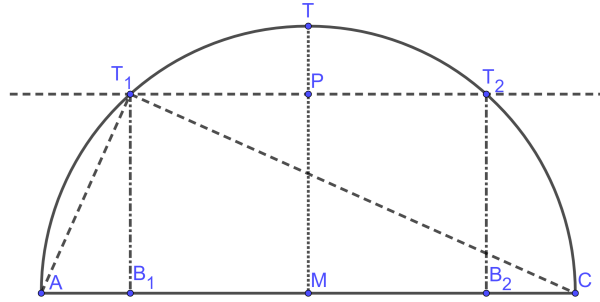
Si consideri ora la figura $AD\beta\beta$ e supponiamo che decresca secondo una serie che sia reciproca di una serie diretta avente l'indice maggiore dell'unità. Essa avrà un'area che sta a quella del parallelogramma secondo un rapporto più che infinito: quello infatti che si suppone un numero positivo abbia rispetto ad uno negativo, minore di nulla, cioè che 1 ha con l'indice aumentato di una unità.⁴⁸

In termini moderni, Wallis sta considerando integrali del tipo $\int_0^1 t^{-\alpha} dt$, con $\alpha > 0$ come indice della serie reciproca. Nelle proposizioni precedenti aveva trattato senza difficoltà il caso $\alpha \in (0, 1)$, dove il rapporto tra l'area e quella del quadrato unitario di riferimento è $\frac{1}{1-\alpha}$, e il caso $\alpha = 1$, l'iperbole equilatera dove lo stesso rapporto diventa $\frac{1}{0} = \infty$ — fu proprio in questo contesto che Wallis introdusse il simbolo ∞ nella forma che usiamo ancora oggi. Quando $\alpha > 1$, continuando a fidarsi della stessa formula, il rapporto risulta "più che infinito": un ordine di infinito superiore a quello dell'iperbole, ottenuto trattando 1 diviso un numero negativo come una quantità maggiore dell'infinito stesso.

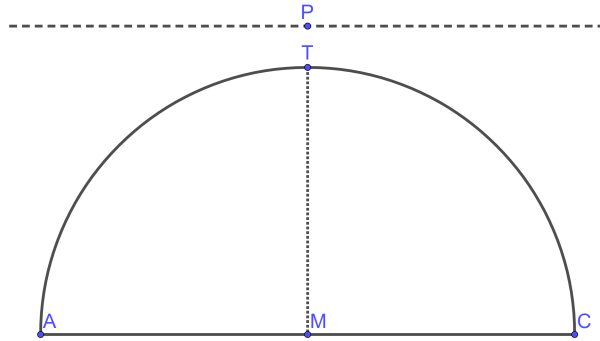
Il "più che infinito" di Wallis, frase formulata per giustificare un caso limite dell'integrazione, sopravvive abbastanza a lungo da generare ambiguità genuine

⁴⁷Wallis 1685, pp. 268-269.

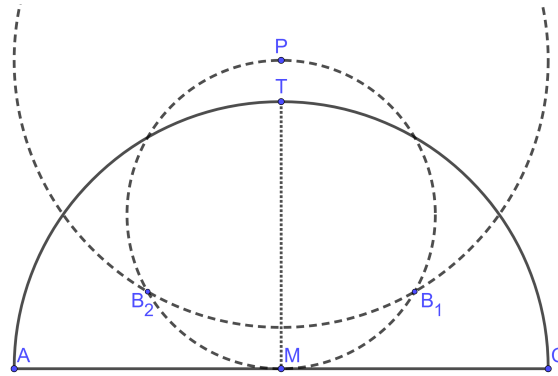
⁴⁸«Si denique eiusmodi Figura $AD\beta\beta$, sic continuo decrescat juxta seriem quæ sit reciproca directæ indicem habenti unitate majorem, habebit illa ad Parallelogrammum inscriptum rationem plusquam infinitam: qualem nempe habere supponatur numerus positivus ad numerum negativum, sive minorem nihilo. Nempe eam, quam habet 1 ad indicem unitate auctum» (Wallis 1656, Prop. CIV, p. 78).



(a) Caso reale ($x^2 - 6x + 5 = 0$): nei triangoli rettangoli inscritti nella semicirconferenza di diametro $AC = s$, l'altezza $\sqrt{p}$ relativa all'ipotenusa individua per proiezione le due radici $B_1 = 1$, $B_2 = 5$ sulla retta stessa.



(b) Caso impossibile sulla retta: quando $\sqrt{p}$ supera il raggio $s/2$ (qui $\sqrt{12} > 3$), nessun punto di AC può fornire un'altezza sufficiente — il vertice T della semicirconferenza segna il massimo raggiungibile.



(c) Collocazione delle radici nel caso impossibile: i punti B_1 e B_2 si trovano sollevati sopra AC , all'intersezione tra la circonferenza di raggio $s/2$ centrata in P e la circonferenza di Talete su PM — lo stesso principio che Wallis userà esplicitamente nel capitolo LXIX (p. 270).

Figura 2.7: La costruzione di Wallis (cap. LXVIII) per le radici, reali e immaginarie, di $x^2 - sx + p = 0$.

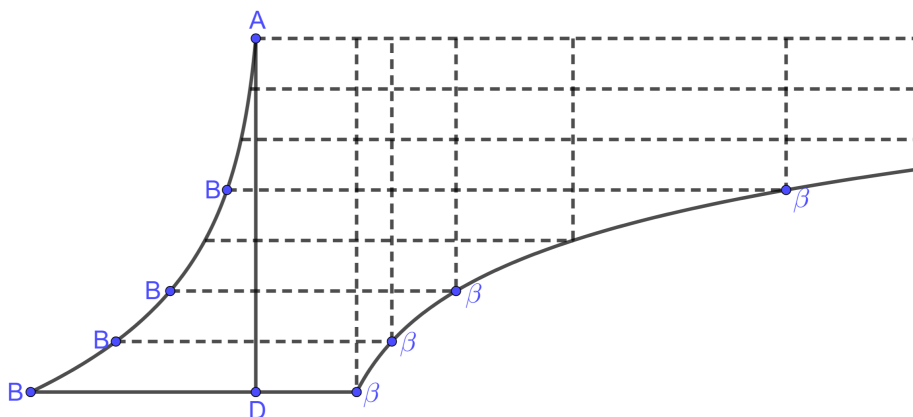


Figura 2.8: Ricostruzione della figura che accompagna la Prop. CIV dell'*Arithmetica Infinitorum*: la figura $AD\beta\beta$, delimitata da due curve speculari rispetto al segmento AD , illustra il rapporto “più che infinito” tra l’area della figura decrescente e quella del parallelogramma inscritto, quando l’indice della serie reciproca supera l’unità.

quasi sei decenni dopo, in un contesto del tutto diverso. Nel 1714 Nicolas Bernoulli si imbatté in un risultato dello stesso tipo discutendo con Pierre Rémond de Montmort riguardo uno dei problemi sul gioco d’azzardo che sarebbe poi confluito nel celebre paradosso di San Pietroburgo: applicando ai termini di una progressione geometrica lo stesso procedimento che usava per un problema analogo, ottenne per l’aspettativa di un giocatore il valore $\frac{1}{-4}$ — una contraddizione palese. Per spiegarla, propose che quella frazione, avendo denominatore negativo e dunque “minore di zero”, fosse in realtà maggiore di $\frac{1}{0}$: l’aspettativa sarebbe dunque “più che infinita”, esattamente il valore che si ottiene sommando la serie infinita corrispondente⁴⁹. In entrambi i casi — Wallis con le aree, Bernoulli con le aspettative di un gioco — una conclusione valida in un regime viene trasportata fuori da esso, e il segno negativo, spinto oltre il proprio dominio naturale, produce i risultati più inattesi.

Il contributo di Wallis alla storia dei numeri negativi è dunque doppio e asimmetrico. Da un lato, fornisce un fondamento geometrico ai numeri negativi come grandezze orientate sulla retta, sciogliendo la tensione tra l’impossibilità in senso stretto e la legittimità dell’uso attraverso un modello che non richiede giustificazioni ulteriori: i numeri negativi sono reali perché designano punti reali su una retta reale, in una direzione determinata. Dall’altro lato, quando estende il modello alle radici di numeri negativi, il meccanismo si inceppa: i punti escono dalla retta e vanno nel piano, ma Wallis non ha gli strumenti per descrivere quel piano in modo sistematico. Il problema che Bombelli aveva aggirato con la terminologia operativa e che Cartesio aveva nominato come categoria residuale riceve così, in Wallis, la propria collocazione più avanzata

⁴⁹Bernoulli 1975.

— e insieme il proprio limite.

2.4 Il Settecento: dall'operatività silenziosa al dibattito epistemologico

Alla fine del Seicento, Wallis aveva lasciato in eredità al secolo successivo uno strumento e un'incompiutezza insieme. Lo strumento era la retta numerica orientata, prima costruzione geometrica capace di ospitare i numeri negativi come oggetti a pieno titolo, distinti dai numeri positivi non per natura ma per posizione; l'incompiutezza era il destino delle radici di quantità negative, che quella stessa retta non sapeva accogliere e relegava, senza poterle descrivere sistematicamente, in un piano che restava muto. Il Settecento eredita questa apertura e la trasforma: ciò che in Wallis era ancora un problema di costruzione diventa, tra Milano, Bologna e Parigi, un problema dichiaratamente epistemologico. Non si tratta più soltanto di dove collocare i numeri negativi, ma di che cosa essi siano — se quantità reali al pari delle positive, se posizioni fittizie da correggere, se semplici convenzioni operative la cui giustificazione può essere rinviata a tempo indeterminato senza pregiudicare la validità dei risultati. È precisamente in questa domanda, mai posta in modo esplicito nei secoli precedenti, che si misura la distanza tra il Seicento della sistemazione operativa e il Settecento del dibattito epistemologico: il segno meno, che Bombelli, Girard, Cartesio e Wallis avevano imparato a maneggiare con crescente sicurezza tecnica, diventa ora oggetto di un'interrogazione sulla propria legittimità che attraversa l'intera Europa colta, dalle *Instituzioni* milanesi di Agnesi fino all'*Encyclopédie* parigina di Diderot e d'Alembert. Le risposte che il secolo elabora non sono uniformi, e la loro varietà segue un gradiente ben preciso, che va dall'assorbimento silenzioso del problema nella pratica del calcolo fino alla sua tematizzazione filosofica più esplicita: un gradiente che questa sezione ripercorre attraverso quattro voci — Agnesi, Riccati e Saladini, Clairaut, d'Alembert — scelte non per ordine cronologico ma per il tipo di risposta che ciascuna offre alla medesima, irrisolta domanda.

Maria Gaetana Agnesi nacque a Milano nel 1718, figlia di un ricco mercante che favorì fin dall'infanzia la sua straordinaria precocità intellettuale, organizzando nel salotto di casa le celebri conversazioni accademiche in cui la giovane discuteva pubblicamente di filosofia e scienza davanti a ospiti di tutta Europa. È tuttavia a partire dal 1740, sotto la guida del monaco olivetano Ramiro Rampinelli, che Agnesi intraprese lo studio sistematico della matematica, entrando in questo stesso periodo in contatto con la famiglia Riccati — Jacopo, il padre, e i figli Vincenzo e Giordano — con cui intratterrà per oltre un decennio un fitto carteggio scientifico.⁵⁰ Non è un dettaglio marginale: Giordano Riccati collaborò attivamente, tra il 1745 e il 1748, alla revisione del trattato che Agnesi stava componendo, occupandosi in particolare della parte di algebra e geometria cartesiana — lo stesso capitolo che contiene la trattazione dei numeri

⁵⁰Cfr. Mazzone e Roero 2010.

negativi qui esaminata. Le *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, pubblicate a Milano nel 1748 in due volumi, nacquero dunque non come opera isolata, ma come prodotto di una collaborazione con uno dei circoli matematici italiani più aggiornati sul dibattito europeo — lo stesso circolo che, attraverso Giordano Riccati, si troverà di lì a poco coinvolto nella controversia sui logaritmi dei numeri negativi, nata dal carteggio tra Leibniz e Johann Bernoulli e poi proseguita tra quest'ultimo ed Eulero, a cui prenderà parte anche d'Alembert.

Nel primo capitolo del primo libro, dedicato alle nozioni e operazioni primarie dell'analisi delle quantità finite, Agnesi introduce la distinzione tra positivo e negativo attraverso tre esemplificazioni consecutive, senza soffermarsi su alcuna giustificazione preliminare della loro natura: i beni posseduti sono positivi, i debiti negativi, poiché vanno sottratti ai primi e ne diminuiscono la somma; un mobile che si allontani dalla meta del proprio viaggio descrive uno spazio negativo rispetto a quello percorso nella direzione della meta; una linea geometrica condotta in una direzione assunta arbitrariamente come positiva rende negativa la linea condotta in direzione opposta⁵¹. È significativo che Agnesi definisca esplicitamente arbitraria la scelta della direzione positiva in geometria — un'ammissione di convenzionalità che avrebbe potuto aprire una riflessione sulla natura relazionale, piuttosto che assoluta, del segno; ma l'autrice non la sviluppa e passa immediatamente, senza soluzione di continuità argomentativa, all'introduzione della notazione simbolica e delle regole operative.

Da qui in avanti il trattato procede con un rigore puramente sintattico. Le regole per la somma, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, l'elevazione a potenza e l'estrazione di radice delle quantità positive e negative sono enunciate in sequenza e ciascuna è giustificata non da un'analisi di ciò che il segno significa, ma da un argomento interno alla coerenza del sistema di calcolo. Particolarmente rivelatore è il modo in cui Agnesi giustifica la regola dei segni per la moltiplicazione: ricorre a un argomento di proporzionalità geometrica, ponendo l'unità come primo termine di una proporzione i cui secondo e terzo termine sono i due fattori e il quarto il prodotto, e deducendo il segno di quest'ultimo dalla natura — diretta o inversa — della proporzione così costruita⁵². È la stessa proporzione, $1 : a = b : x$, con cui Cartesio aveva definito il prodotto di due grandezze positive (si veda supra, §2.3): Agnesi la applica senza discuterne l'estensione al caso in cui i termini possano essere negativi. È un argomento elegante, ma che presuppone piuttosto che dimostrare la liceità di trattare le quantità negative come termini di una proporzione al pari delle positive: la domanda sul perché ciò sia lecito non è posta.

L'opera non restò confinata al contesto milanese in cui era nata. Una commissione dell'Académie Royale des Sciences di Parigi la esaminò con ammirazione già l'anno successivo alla pubblicazione e nei decenni seguenti le *Instituzioni* ricevettero due traduzioni integrali: una francese e una inglese. La traduzione francese, curata nel 1775 da P. Th. Anthelmy con annotazioni di Charles Bossut, copre però solo il secondo tomo, dedicato al calcolo, non il primo qui esaminato, dedicato all'algebra. La traduzione inglese, intitolata *Analytical In-*

⁵¹ Agnesi 1748, p. 3, Libro I, Capo I.

⁵² Agnesi 1748, p. 6, Libro I, Capo I, *Della Moltiplicazione delle Quantità semplici intere*.

stitutions, si deve invece a John Colson, titolare della cattedra lucasiana di matematica a Cambridge — la stessa che era stata di Newton — il quale imparò l'italiano proprio per intraprenderla; fu pubblicata postuma nel 1801 a cura di John Hellins, oltre quarant'anni dopo la morte del traduttore.⁵³ Colson non si limitò a tradurre: nella propria prefazione rivolse alle donne britanniche un esplicito invito a seguire l'esempio di Agnesi, presentata come appassionata studiosa di matematica e autrice originale — un appello che alcune riviste britanniche dell'epoca ripresero⁵⁴. Non era una cortesia di circostanza: nel 1748 esistevano pochissimi precedenti di un trattato matematico sistematico composto da una donna e le *Instituzioni* divennero, secondo la sintesi che ne offre il *Dictionary of Scientific Biography*, un'opera che ottenne un riconoscimento immediato in tutti gli ambienti accademici d'Europa, portando ad Agnesi una personale affermazione come matematica⁵⁵.

L'assenza di qualunque interrogazione sulla natura del segno, che percorre l'intero trattamento tecnico appena esaminato, non è una lacuna né un'ingenuità, ma la cifra stessa dell'operazione che Agnesi compie: i numeri negativi sono incorporati nel tessuto del calcolo come oggetti pienamente operativi fin dalla prima pagina, senza che la loro introduzione richieda una preventiva legittimazione. È un atteggiamento che diciassette anni dopo un altro testo italiano — nato non a caso all'interno dello stesso circolo di corrispondenza che aveva contribuito a plasmare le *Instituzioni* — riprenderà e, in un punto decisivo, supererà.

Vincenzo Riccati nacque a Castelfranco Veneto nel 1707, quarto figlio del matematico Jacopo Riccati; entrato nella Compagnia di Gesù nel 1726, a partire dal 1739 insegnò matematica a Bologna dove resterà fino alla soppressione dell'ordine nel 1773, quando si ritirò a Treviso presso i fratelli. Come detto sopra, fu uno dei protagonisti del medesimo circolo epistolare che aveva contribuito alla revisione delle *Instituzioni* di Agnesi. Sotto la guida di Riccati studiò Girolamo Saladini (Lucca, 1735 – Bologna, 1813), che ne sarebbe divenuto un collaboratore⁵⁶: insieme redassero, tra il 1765 e il 1767, le *Institutiones analyticae*, tre volumi in latino che gli storici della disciplina considerano il più ampio trattato di metodi analitici stampato in Italia nel corso del secolo, superiore per estensione e novità alle stesse *Instituzioni* di Agnesi⁵⁷. Fu lo stesso Saladini a curarne, nel 1775, la traduzione italiana con il titolo di *Compendio d'analisi* — l'edizione qui utilizzata — pubblicata pochi mesi dopo la morte di Riccati, avvenuta a Treviso il 17 gennaio di quello stesso anno.

Le *Institutiones* non furono accolte con plauso unanime — e proprio questo è un dato più interessante di un consenso pacifico. Nel 1773, quando Riccati era

⁵³Su questa vicenda editoriale, cfr. Roero 2016.

⁵⁴Roero, *Giornali, Accademie e Traduzioni*, cit.

⁵⁵«This book won immediate acclaim in academic circles all over Europe and brought recognition as a mathematician to Agnesi» (*Dictionary of Scientific Biography*, s.v. «Agnesi, Maria Gaetana»).

⁵⁶A margine, ricordiamo tra gli allievi di Riccati Gianfrancesco Malfatti, che legherà il proprio nome al celebre problema geometrico dei tre cerchi inscritti (cfr. *Vincenzo Riccati* n. d.).

⁵⁷Cfr. l'ampia recensione dell'opera apparsa sul *Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia*, e la scheda a cura dell'Edizione Nazionale Mathematica Italiana su Vincenzo Riccati.

ancora in vita, il giovane matematico Gioacchino Pessuti pubblicò sul Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia lunghe recensioni critiche dell'opera, che innescarono una polemica diretta con l'autore; alla morte di Riccati, Pessuti proseguì il confronto pubblicando le proprie *Riflessioni analitiche* (1777)⁵⁸. Che un'opera didattica generasse un dibattito pubblico capace di protrarsi ben oltre la morte di uno dei due contendenti testimonia quanto le *Institutiones* fossero prese sul serio negli ambienti scientifici italiani del tempo: non un manuale acquisito passivamente, ma un testo su cui valeva la pena misurarsi criticamente, punto per punto. Riccati, del resto, non insegnava ai margini del panorama accademico italiano. Egli aveva tenuto la cattedra al Collegio di Santa Lucia di Bologna all'interno di quella stessa rete — che comprende anche Ramiro Rampinelli, il futuro maestro di Agnesi — attraverso cui il calcolo leibniziano penetrò e si radicò in Italia nei decenni centrali del secolo⁵⁹.

Il capitolo primo del *Compendio* si apre con una sequenza di definizioni che ricalca da vicino l'impianto delle *Instituzioni*: quantità algebrica, semplice o composta, segni più e meno. Quando spiega come sommare i coefficienti di quantità simili, Saladini ricorre a una formula quasi identica a quella di Agnesi, prescrivendo di sommarli «come nella volgare Aritmetica»⁶⁰. A differenza di Agnesi, che era passata dagli esempi introduttivi alla notazione senza indugi, il *Compendio* si sofferma, nel paragrafo 4, sulla formulazione di una tesi esplicita sulla natura dei numeri negativi: per quanto minori dello zero, tali quantità non sono «impossibili, assurde o immaginarie», ma vanno ritenute «vere e reali, come lo sono le positive»⁶¹. È un'affermazione che Agnesi non pronuncia mai in termini così diretti. A sostenerla, Riccati e Saladini offrono esempi più articolati di quelli agnesiani: non solo il debito contrapposto al credito, ma l'altezza di un monte sopra il piano contro la profondità di una valle sotto il piano, e il viaggio da Bologna verso Roma contro il viaggio da Bologna verso Modena — quest'ultimo un'eco, forse non casuale, del "mobile diretto verso una meta" di Agnesi, ma trasposto da un moto astratto a un tragitto reale, radicato nel territorio dell'autore.

⁵⁸Cfr. Pepe n. d.

⁵⁹Cfr. *La rivoluzione scientifica: i domini della conoscenza. Diffusione e primi sviluppi del calcolo infinitesimale* n. d.

⁶⁰L'espressione ricorre, quasi identica, anche nelle *Instituzioni* di Agnesi, sia pure in un punto diverso: illustrando la moltiplicazione di quantità composte, l'autrice prescrive di disporre un moltiplicatore sotto l'altro «all'uso dell'aritmetica volgare» (Agnesi 1748, p. 15, Libro I, Capo I, *Della Moltiplicazione delle quantità composte intere*). In entrambi i casi il gesto è lo stesso: l'algebra, pur dichiarandosi disciplina più generale e «più eccellente» dell'aritmetica comune, ne importa senza indugio la tecnica materiale di calcolo. Il termine *volgare* conserva qui il lessico della tradizione abbachistica tardomedievale e rinascimentale, che distingueva l'aritmetica scritta in lingua vernacolare per un pubblico di mercanti e apprendisti (come la stessa *Summa* di Pacioli citata al §2.1) dall'aritmetica *speculativa* di ascendenza boeziana insegnata in latino nelle università. Nel Settecento la parola sopravvive, ma la gerarchia di valore che vi si accompagna si è rovesciata: non più pratica contro teorica, bensì *numerosa* contro *speciosa* nel senso di Viète (cfr. §2.2), con l'algebra ora collocata al vertice — pur restando, nella pratica del calcolo, debitrice della disciplina che dichiara di aver superato. Che due trattati didattici separati da diciassette anni riproducano la stessa dicitura, nello stesso contesto operativo, è un ulteriore, minuto indizio della contiguità testuale tra le due opere.

⁶¹Riccati e Saladini 1775, §IV, Libro I, Capo I.

Anche nella giustificazione della regola dei segni per la moltiplicazione il *Compendio* si discosta dal modello agnesiano. Le *Instituzioni* derivano il segno del prodotto da un argomento di proporzionalità geometrica, ponendo l'unità come primo termine di una proporzione i cui altri termini sono i due fattori e il prodotto; Riccati e Saladini procedono invece per un'altra via, definendo il moltiplicatore come ciò che indica «il numero delle volte» per cui va presa la quantità moltiplicanda e osservando che se tale numero decresce fino a zero il prodotto si annulla e se decresce oltre lo zero — cioè diventa esso stesso negativo — il prodotto non può che invertire di segno⁶². È un argomento di continuità più che di proporzione: si segue il comportamento del prodotto mentre il moltiplicatore attraversa lo zero, e se ne deduce per continuità ciò che deve accadere oltre quella soglia⁶³.

Più avanti, al paragrafo XVIII, il *Compendio* compie un passo che né Agnesi né, come si vedrà, Clairaut⁶⁴ si concedono nella medesima forma esplicita: la verifica numerica a posteriori della regola appena enunciata. Gli autori moltiplicano $(3a - 2a)$ per $(2a - a)$ — espressioni entrambe uguali ad a , il cui prodotto deve dunque essere a^2 — e mostrano che questo risultato si ottiene solo attribuendo il segno negativo ai due termini centrali dello sviluppo e positivo all'ultimo: «questo prodotto non si può salvare se non nella regola dei segni data»⁶⁵. La regola, qui, non discende da un principio superiore: viene sottoposta a un test di tenuta interna e si giustifica perché, e soltanto perché, fa tornare i conti. È una mossa che resta saldamente dentro l'orizzonte operativo dei due autori — nessuna digressione ontologica accompagna questo passaggio — ma che apre silenziosamente la strada a un modo di legittimare la regola dei segni indipendente da ogni risposta alla domanda su che cosa i numeri negativi siano. È esattamente il terreno su cui, nella prefazione ai suoi *Éléments d'algèbre*, si muoverà Clairaut.

Alexis Claude Clairaut nacque a Parigi nel 1713, secondo di ventuno figli di un maestro di matematica, e mostrò una precocità che i biografi non esitano a definire eccezionale: lesse il trattato di calcolo di de l'Hôpital a dieci anni, tenne la sua prima comunicazione all'Académie Royale des Sciences a tredici e fu ammesso come membro a diciotto — età per cui occorreva una deroga regia, poiché il minimo legale era venti. Partecipò nel 1736 alla spedizione in Lappo-

⁶²Riccati e Saladini 1775, §VII, Libro I, Capo I.

⁶³Dedurre per continuità, attraverso lo zero, il comportamento di una grandezza al di là della soglia in cui è stata definita è un tipo di argomento che Carnot, qualche decennio più tardi, giudicherà inaffidabile in linea di principio: applicato non alla moltiplicazione ma all'estrazione di radice, lo stesso schema porterebbe a concludere che $\sqrt{A - a}$, al crescere di a oltre A , diventi «semplicemente negativa» anziché immaginaria — conclusione falsa (Carnot 1803, pp. xi-xii). Applicato qui alla sola moltiplicazione, il ragionamento arriva comunque a un risultato corretto, ma non per una garanzia intrinseca del metodo.

⁶⁴L'argomento di Riccati e Saladini è imparentato con quello usato da Viète un secolo e mezzo prima (si veda supra, §2.2), ma lo altera: dove Viète procede per via algebrica generale — scomponendo il prodotto tra due binomi ed estendendo il risultato al caso in cui due termini si annullano —, Riccati e Saladini sostituiscono un'unica verifica numerica concreta. Sarà proprio la forma di Viète, e non quella qui adottata, a essere ripresa da Clairaut, come si vedrà tra poco.

⁶⁵Riccati e Saladini 1775, §XVIII, Libro I, Capo I.

nia guidata da Maupertuis per misurare la lunghezza di un grado di meridiano, verificando sperimentalmente la teoria newtoniana dello schiacciamento terrestre ai poli; scrisse gli *Éléments de géométrie* nel 1741 e gli *Éléments d'algèbre* nel 1746, qui utilizzati nella loro prima edizione. Negli stessi anni si consumò, all'interno della stessa Académie, una rivalità che lo avrebbe accompagnato fino alla morte: quella con Jean le Rond d'Alembert, di cui tratteremo più avanti. I due si conoscevano da tempo — d'Alembert aveva ricevuto il plauso di Clairaut già nel 1740 per un suo primo lavoro sulla meccanica dei fluidi — e si contesero apertamente, tra la fine degli anni 1740 e i primi anni 1750, sulla soluzione del problema dei tre corpi; una contesa che, secondo i biografi, continuò fino alla morte di Clairaut⁶⁶ — avvenuta, non senza una certa ironia per la sezione qui condotta, nello stesso 1765 in cui d'Alembert avrebbe firmato l'articolo «*Négatif*» dell'*Encyclopédie*. I due non sono dunque voci distanti che affrontano per caso lo stesso problema: sono colleghi che si leggono, si contendono la priorità delle scoperte, e scrivono sui numeri negativi a diciannove anni di distanza l'uno dall'altro, ciascuno ben consapevole di ciò che l'altro pensa.

La prefazione agli *Éléments d'algèbre* ripropone fin dalle prime righe il metodo che Clairaut aveva già sperimentato negli *Éléments de géométrie*: presentare le regole dell'algebra nell'ordine in cui i loro stessi inventori avrebbero potuto scoprirle, senza mai introdurre una verità sotto forma di teorema imposto dall'esterno⁶⁷. È un programma pedagogico esplicito, non un'analisi filosofica della natura dei numeri negativi; ma proprio per questo Clairaut individua con precisione il punto in cui il metodo rischia di incepparsi. La moltiplicazione, scrive, è tra tutte le operazioni quella che più arresta i principianti e imbarazza i maestri, e il principio secondo cui il prodotto di due quantità negative è positivo ne costituisce quasi sempre lo scoglio⁶⁸.

La soluzione che Clairaut propone non è un argomento, ma una sequenza di casi. Insegna dapprima a moltiplicare una quantità composta di termini positivi e negativi per un unico termine che suppone sempre positivo, poiché — osserva — l'allievo non è abituato a considerare una quantità negativa come esistente da sola. Passa poi al caso in cui anche il moltiplicatore è composto di termini misti, mostrando che questa seconda operazione altro non è che la prima ripetuta tante volte quanti sono i termini del moltiplicatore. In questo modo, familiarizza il principiante con la moltiplicazione senza mai dover enunciare, a questo stadio, i principi consueti — meno per più dà meno, meno per meno dà più — che, presentando all'orecchio una contraddizione nelle parole, lasciano credere che ve ne sia una nella cosa stessa⁶⁹.

Clairaut è però troppo onesto per fermarsi qui: ammette che si limiterebbe a eludere la difficoltà se non affrontasse mai la moltiplicazione di quantità

⁶⁶Si veda la voce dedicata a d'Alembert in *Encyclopedia.com*, s.v. *Jean Le Rond D'Alembert*.

⁶⁷«J'ai taché d'y donner les réglés de l'Algèbre dans un ordre que les Inventeurs eussent pû suivre» (Clairaut 1746, p. i, Préface).

⁶⁸«ce principe qu'elle renferme, que deux quantités négatives donnent pour leur produit une quantité positive, est presque toujours l'écueil des uns & des autres» (Clairaut 1746, p. iv, Préface).

⁶⁹«sans que j'aye seulement besoin d'énoncer ces principes ordinaires, que moins par plus donne moins, moins par moins donne plus» (Clairaut 1746, p. v, Préface).

puramente negative l'una per l'altra, il caso in cui la contraddizione apparente non può più essere aggirata. Vi arriva conducendo il lettore a un problema che impone di considerare quantità negative indipendentemente da qualunque quantità positiva da cui siano sottratte — e a questo punto compie la mossa più significativa dell'intera prefazione. Anziché enunciare la regola come principio da accettare, cerca una seconda soluzione dello stesso problema che eviti del tutto la moltiplicazione o la divisione di numeri negativi, arrivando al risultato per via di ragionamenti su cui non è possibile alcun dubbio.

Il problema, discusso più avanti nel corpo dell'opera, è quello di due sorgenti che scorrono ciascuna in modo uniforme:

Due sorgenti, ciascuna delle quali scorre in modo uniforme, hanno riempito insieme un serbatoio a , l'una scorrendo per un tempo b , l'altra per un tempo c ; le stesse due sorgenti hanno riempito un altro serbatoio d , la prima scorrendo per il tempo e , la seconda per il tempo f : si chiede la portata di ciascuna di queste sorgenti.⁷⁰

Indicate con x e y le portate incognite delle due sorgenti, le due condizioni del problema si traducono nel sistema⁷¹

$$\begin{cases} bx + cy = a \\ ex + fy = d \end{cases}, \quad (2.10)$$

la cui soluzione generale è

$$x = \frac{cd - af}{ce - bf}, \quad y = \frac{ae - bd}{ce - bf}. \quad (2.11)$$

Un primo esempio numerico (§LVII) dà risultati puliti e positivi, $x = 30$ e $y = 45$; un secondo (§LVIII), scelto apposta perché il denominatore comune $ce - bf$ si annulli in negativo, produce, sostituendo nella (2.11), $x = \frac{300}{-10}$ e $y = \frac{-400}{-10}$: quantità positive divise per negative e negative divise per negative — una «singularité»⁷² di fronte alla quale, ammette Clairaut, chi la incontra per la prima volta si sarà trovato imbarazzato a stabilire che cosa dovessero significare⁷³. Anziché sciogliere il dubbio per via teorica, ripercorre il problema con i valori già sostituiti nelle due equazioni originarie — $4x + 6y = 120$ e $3x + 7y = 190$ — e le risolve per sostituzione diretta, senza mai passare attraverso una divisione tra quantità negative: il risultato, $y = 40$ e $x = -30$, coincide esattamente con quello appena ottenuto per l'altra via, senza che se ne possa più dubitare⁷⁴.

⁷⁰ «Deux sources qui coulent chacune uniformément, ont rempli ensemble un réservoir a , l'une en coulant pendant un temps b , l'autre pendant un temps c ; les deux mêmes sources ont rempli un autre réservoir d ; la première coulant pendant le temps e , la seconde pendant le temps f : on demande la dépense de chacune de ces sources.» (Clairaut 1768, §LVI, p. 68).

⁷¹ Clairaut 1768, §LVI, pp. 69-70.

⁷² Clairaut 1768, §LVIII, p. 71.

⁷³ «aura dû être embarrassé à savoir ce qu'elles devoient signifier» (Clairaut 1768, §LVIII, pp. 71-72).

⁷⁴ Clairaut 1768, §LVIII, p. 72.

È esattamente questo confronto tra le due vie — reso qui esplicito dai due esempi numerici, ma descritto nella prefazione in termini del tutto generali — a permettere a Clairaut di affermare che cosa devono necessariamente essere quei prodotti e quozienti di quantità negative che la prima soluzione gli aveva fornito⁷⁵. La regola dei segni, in altre parole, non discende da un'analisi di ciò che i numeri negativi sono, ma da un requisito di coerenza interna: due percorsi diversi verso la stessa soluzione devono concordare e ciò che li fa concordare è, per definizione, corretto. Solo a questo punto, forte della conferma numerica, Clairaut generalizza il risultato per via puramente algebrica: espandendo l'equazione $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$ senza fissare alcun valore particolare per a e c , osserva che la formula deve restare valida anche quando queste due quantità si annullano, riducendo così il prodotto tra binomi a un prodotto tra pure quantità negative $-b$ e $-d$: «poiché il metodo con cui si è scoperto che il prodotto di $a-b$ per $c-d$ è $ac - bc - ad + bd$ non specifica alcun valore particolare né per a né per c , deve valere ancora quando queste quantità sono uguali a zero»⁷⁶. È un passaggio audace per l'epoca — dal caso numerico singolo alla regola generale, passando per un argomento puramente formale sul prodotto tra binomi — ed è, nella sostanza, lo stesso metodo che Viète aveva usato un secolo e mezzo prima per dedurre il segno del prodotto di due grandezze negative: estendere per coerenza formale un risultato dimostrato in generale fino al caso limite che interessa, senza dimostrarlo in modo indipendente. Nulla indica che Clairaut conoscesse o citasse Viète; è più verosimile che i due condividano la stessa logica interna dell'algebra simbolica, non un debito diretto. È lo stesso tipo di mossa, sia pure in forma ancora acerba e tutta pedagogica, che si ritroverà, resa esplicita e generale, nella formalizzazione ottocentesca discussa in apertura del prossimo capitolo.

Tornando, poco più avanti, sullo stesso problema delle sorgenti, Clairaut interpreta esplicitamente il segno del risultato negativo: poiché $x = -30$ soddisfa comunque le equazioni originarie, bisogna considerare la prima sorgente come se sottraesse acqua ai serbatoi, anziché fornirne⁷⁷ — la sorgente, cioè, non alimenta più il serbatoio: lo svuota. È un'interpretazione piena e non elusiva del segno negativo, che stona con la cautela mostrata solo qualche pagina prima.

Un'ultima osservazione della prefazione merita di essere segnalata, perché rivela quanto profonda fosse ancora la diffidenza verso le radici negative come soluzioni autentiche. Nel trattare le equazioni di secondo grado, Clairaut sceglie deliberatamente un problema — uno di interesse composto — le cui due soluzioni siano entrambe numeri positivi, proprio per timore che i principianti, non disposti a considerare le radici negative come vere soluzioni, potessero

⁷⁵ «je cherche une autre solution du Problème par laquelle je puisse éviter toute espèce de multiplication ou de division de quantités négatives [...] & je vois ce que doivent être ces produits ou quotients de quantités négatives que m'avoit donnés la première solution» (Clairaut 1746, p. vi, Préface).

⁷⁶ «puisque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de $a-b$ par $c-d$ étoit $ac - bc - ad + bd$, ne spécifiant aucune grandeur particulière ni à a ni à c , doit avoir encore lieu lorsque ces quantités sont égales à zero» (Clairaut 1768, §LX, pp. 73-74).

⁷⁷ «regarder la première source comme dérobant de l'eau aux réservoirs, au lieu d'en fournir» (Clairaut 1768, §LXII, pp. 74-75).

credere che il problema ne avesse in realtà una sola⁷⁸. La cautela pedagogica di Clairaut, insomma, non nasconde soltanto la difficoltà della moltiplicazione: rivela un disagio più ampio e diffuso, che nemmeno la generazione più abile nel calcolo con i numeri negativi era riuscita a dissolvere.

La fortuna di questo metodo, del resto, ebbe una storia più complessa e più istruttiva di quanto la sola lettura della prefazione lasci intuire. Sessant'anni più tardi, ripercorrendo la vicenda nella propria opera didattica, Sylvestre-François Lacroix riconobbe che gli *Éléments d'algèbre* «ottennero tutto il successo che meritavano»⁷⁹ — osservando però anche che la marcia dell'invenzione, preziosa per iniziare i principianti, diventava eccessivamente minuziosa quando la si seguiva rigorosamente oltre le prime nozioni: le regole fondamentali dell'algebra, "fuse" negli esempi particolari, permettevano agli allievi di seguire ogni passaggio di Clairaut senza tuttavia riuscire a riprodurlo autonomamente una volta soli⁸⁰. Invece di correggerne il difetto — cosa che Lacroix giudica sarebbe stata agevole — il metodo di Clairaut fu abbandonato completamente per tornare al vecchio modo di esporre l'algebra: «la scienza regredì», scrisse Lacroix senza mezzi termini⁸¹. Fu solo quando Lagrange e Laplace furono chiamati a tenere le lezioni di matematica all'École normale supérieure⁸² che il metodo di Clairaut trovò una riabilitazione parziale. Laplace ne riprese il piano generale, giudicandolo l'unico adatto a un insegnamento ragionato della disciplina, e richiamò l'attenzione dei professori sulle ricchezze che quel metodo, se ben governato, custodiva⁸³; ma, quando nella propria esposizione arriva al segno meno, non lo spinge fino al punto in cui Clairaut lo aveva condotto. Introdotto — come segno da anteporre al numero da sottrarre, si limita a osservare che $+n$ e $-n$ si distruggono a vicenda⁸⁴, senza mai affrontare la domanda che la prefazione di Clairaut aveva reso esplicita: che cosa sia $-n$ preso da solo. A essere riabilitato è dunque l'impianto pedagogico generale, non la sua applicazione più ardua. La parabola è significativa per la sezione: il problema pedagogico che Clairaut affronta nella propria prefazione — come insegnare una regola che suona contraddittoria senza che l'allievo la percepisca come tale — non fu un episodio isolato, ma attraversò l'intero secondo Settecento francese, fino a essere riconosciuto, dai due matematici più autorevoli della generazione successiva, come l'unico impianto degno di essere ripreso.

⁷⁸ «de peur que les commençans qui ne regardent pas volontiers les racines négatives comme de véritables solutions, ne crussent que le Problème n'avoit réellement qu'une solution» (Clairaut 1746, p. viii, Préface).

⁷⁹ «Les *Elémens d'Algèbre* de Clairaut obtinrent tout le succès qu'ils avaient mérité» (Lacroix 1804, p. XII, Préface).

⁸⁰ «mais cette marche, nécessaire pour éclairer et pour encourager ceux qui commencent l'étude de l'Algèbre, devient minutieuse, et se trouve surchargée de détails, lorsqu'on la poursuit rigoureusement au-delà des premières notions» (Lacroix 1804, p. XIII, Préface).

⁸¹ «on l'abandonne entièrement pour retourner à l'ancienne manière de présenter les *Elémens d'Algèbre*; et sous ce point de vue, la science rétrograda» (Lacroix 1804, p. XIII, Préface).

⁸² I cicli di lezioni di Lagrange e Laplace erano intitolati *Leçons élémentaires sur les mathématiques données à l'École normale supérieure en 1795* e *Leçons de mathématiques données à l'École normale supérieure en 1795*, rispettivamente.

⁸³ «Laplace reproduisit le plan qu'avait suivi Clairaut, comme le seul qui convînt à l'enseignement raisonné de la science» (Lacroix 1804, p. XIII, Préface).

⁸⁴ Laplace 1812, Terza seduta, p. 35.

Jean le Rond d'Alembert nacque a Parigi nel 1717, figlio naturale della scrittrice Madame de Tencin e del cavaliere Destouches; abbandonato sui gradini della chiesa di Saint-Jean-le-Rond, da cui prese il nome, venne affidato dal padre biologico — che ne pagò segretamente l'educazione senza mai riconoscerlo ufficialmente — alla moglie di un vetraio, presso cui visse per quasi cinquant'anni. Ammesso all'Académie Royale des Sciences nel 1741, divenne fino al 1759, insieme a Diderot, uno dei due direttori dell'*Encyclopédie*⁸⁵. È già stata segnalata, nel paragrafo dedicato a Clairaut, la rivalità che oppose i due matematici all'interno dell'Académie; vale la pena aggiungere che d'Alembert fu coinvolto, in quegli stessi anni, in un'altra controversia di portata europea, questa volta pertinente da vicino al tema qui trattato: la disputa sui logaritmi dei numeri negativi, in cui si schierò con la posizione di Johann Bernoulli — secondo cui $\ln(-x)$ sarebbe uguale a $\ln(x)$ — contro Eulero — che nel 1749 dimostrò come il logaritmo assuma in realtà infiniti valori complessi e uno solo reale quando l'argomento è reale positivo⁸⁶. È esattamente lo stesso nodo teorico in cui, come si è visto, si erano inseriti Giordano Riccati e Vincenzo Riccati insieme al loro allievo Malfatti: la disputa sui numeri negativi, nel Settecento, non corre su due binari nazionali separati, ma attraversa gli stessi problemi da entrambi i lati delle Alpi, sia pure con esiti diversi.

L'articolo «*Négatif*», comparso nel tomo XI dell'*Encyclopédie* nel 1765, non è la voce di chi cerca faticosamente di chiarire un concetto sfuggente: è, fin dalle prime righe, un atto d'accusa contro ogni tentativo — proprio e altrui — di concedere ai numeri negativi una qualche autonomia concettuale. D'Alembert apre dichiarando che fissare l'idea delle quantità negative non è cosa facile e che alcuni ingegni capaci hanno persino contribuito a ingarbugliarla con nozioni poco esatte⁸⁷ — il seguito dell'articolo mostra che l'obiettivo non è chiarire, bensì respingere. Dire che una quantità negativa sia "al di sotto del nulla" è, scrive senza mezzi termini, avanzare qualcosa che non si può concepire⁸⁸: non un'imprecisione da correggere, ma un vero e proprio non-senso. È il rigetto più netto, in tutto il secolo qui ricostruito, di quella stessa formula che Riccati e Saladini, appena pochi anni prima, avevano ammesso e neutralizzato distinguendola dall'assurdo⁸⁹: dove gli italiani avevano trovato il modo di dire "minore dello zero" senza contraddizione, d'Alembert dichiara la frase stessa priva di senso.

La soluzione che propone — nota come teoria della *fausse position* — non è un compromesso tra le due posizioni, ma il completamento del rigetto. Le quantità negative, sostiene, sono in realtà quantità positive, sempre: quando

⁸⁵Dopo il 1759 d'Alembert si ritirò dalla direzione generale dell'opera, mantenendo tuttavia la responsabilità degli articoli scientifici e matematici, tra cui «*Négatif*» del 1765.

⁸⁶D'Alembert indirizzò all'Accademia di Berlino, nel giugno 1752, un memoriale in cui tentò di confutare la posizione di Eulero; quest'ultimo non riuscì mai a persuaderlo del tutto.

⁸⁷«Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, & que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données» (d'Alembert 1765, p. 72).

⁸⁸«Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir» (d'Alembert 1765, p. 72).

⁸⁹Si veda supra, sul *Compendio d'analisi*.

compaiono con il segno meno, ciò significa soltanto che il problema che le ha generate è stato posto male. L'esempio è un problema elementare: cercando x tale che $x + 100 = 50$, l'algebra restituisce $x = -50$; ma questo significa che la quantità cercata vale in realtà 50 e che invece di essere sommata a 100 doveva esserne sottratta. Il problema avrebbe dovuto chiedere fin dall'inizio quale quantità, sottratta da 100, lasci 50⁹⁰. Il segno meno, dunque, non designa mai una quantità di natura diversa dalla positiva: segnala un errore e serve a correggerlo⁹¹. Non c'è, in questa costruzione, alcuno spazio residuo in cui un negativo possa esistere per conto proprio — ed è coerente con questa premessa che d'Alembert affermi, subito dopo, che non esiste alcuna quantità negativa isolata in senso assoluto: -3 preso astrattamente non presenta alla mente alcuna idea; solo se lo si lega a un contesto — un uomo che dà 3 scudi a un altro — il segno acquista un significato, ma sempre come correzione di un rapporto, mai come proprietà autonoma del numero⁹². Il contrasto con Riccati e Saladini, qui, non potrebbe essere più netto: dove il *Compendio* aveva dichiarato senza esitazione che i numeri negativi sono «vere e reali» quantità, proprio come le positive, d'Alembert nega loro qualunque realtà che non sia presa in prestito da un errore da correggere. Non è un caso che il gradiente qui tracciato tocchi, con d'Alembert, non un punto di arrivo pacificato ma il proprio punto di massimo attrito: il secolo che si era aperto con Agnesi, indifferente alla domanda, si chiude con chi la pone soltanto per negarla in blocco.

Anche la regola dei segni per la moltiplicazione riceve, in d'Alembert, una giustificazione diversa da quelle già incontrate — diversa dalla proporzione geometrica di Agnesi, dalla continuità del moltiplicatore di Riccati e Saladini, dal confronto tra due soluzioni di Clairaut. D'Alembert riprende, capovolgendola, la stessa teoria delle proporzioni che Arnauld aveva dovuto abbandonare: se l'uguaglianza tra il prodotto di -1 per -1 e quello di $+1$ per $+1$ è già acquisita, allora essa stessa costituisce una proporzione, $1 : (-1) = (-1) : 1$, e questa basta a dimostrare che 1 e -1 sono grandezze comparabili, contro chi sosteneva il contrario⁹³. Poiché sommare o porre una quantità negativa equivale a sottrarne una positiva, allora — per la medesima ragione, rovesciata — sottrarne una negativa equivale a sommarne una positiva; l'enunciazione naturale del problema "moltiplicare $-a$ per $-b$ " deve dunque tradursi in "moltiplicare $+a$ per $+b$ ", il cui prodotto è $+ab$. Quattro autori, quattro argomenti distinti per la medesima regola: un segno di quanto la domanda restasse aperta anche quando la risposta operativa era, per tutti, la stessa. D'Alembert stesso, del resto, è costretto a riconoscere che le regole del calcolo sui numeri negativi restano universalmente accolte come esatte, quale che sia l'idea che ci si voglia fare della loro natura⁹⁴: non è un ripensamento, è la conferma, fatta dallo

⁹⁰d'Alembert 1765, p. 72.

⁹¹«Le signe - que l'on trouve avant une quantité sert à redresser & à corriger une erreur que l'on a faite dans l'hypothèse» (d'Alembert 1765, p. 72).

⁹²«Il n'y a donc point réellement & absolument de quantité négative isolée : -3 pris abstraitement ne présente à l'esprit aucune idée» (d'Alembert 1765, p. 72).

⁹³«l'égalité du produit de -1 par -1 , & de $+1$ par $+1$, fait voir que 1 est à -1 comme -1 à 1 » (d'Alembert 1765, p. 72).

⁹⁴«quelque idée qu'on attache d'ailleurs à ces quantités» (d'Alembert 1765, p. 73).

stesso autore che ha appena negato ai numeri negativi ogni autonomia, che la pratica del calcolo non ha mai avuto bisogno della sua teoria per funzionare — segno che l'ostilità di d'Alembert è tutta sul piano di ciò che i numeri negativi significano, mai su quello di come si usano. E quando l'articolo si volge, nelle sue pagine finali, alle radici negative delle equazioni e alla loro distinzione dalle radici immaginarie, d'Alembert si ritrova esattamente sulla soglia in cui Wallis si era arrestato ottant'anni prima: le radici negative, spiega, restano soluzioni autentiche del problema perché, con lievi mutamenti nell'enunciato, possono diventare positive; le radici immaginarie, invece, non lo diventano mai, in nessuna riformulazione. Il nodo lasciato aperto dalla retta orientata di Wallis — cosa fare delle radici di quantità negative che nessuna retta sa ospitare — non è dunque risolto nemmeno dal più sofisticato dei quattro tentativi qui esaminati: è soltanto descritto con maggiore precisione.

Ripercorrendo le quattro voci qui esaminate, il gradiente che si era annunciato in apertura risulta confermato, ma con una torsione che vale la pena rendere esplicita. Agnesi assorbe i numeri negativi nel calcolo senza mai interrogarne la natura; Riccati e Saladini fanno un passo oltre, dichiarandoli espressamente «vere e reali» quantità, ma senza sviluppare quella dichiarazione in un'argomentazione filosofica compiuta; Clairaut individua con precisione lo scoglio pedagogico della regola dei segni e lo risolve con un requisito di coerenza tra due percorsi risolutivi; d'Alembert, infine, porta il problema al livello di massima esplicitazione filosofica, respinge le formule correnti come insufficienti o inconcepibili, e costruisce attorno alla *fausse position* un apparato concettuale che nessuno dei tre autori precedenti aveva tentato. Eppure è proprio l'autore più esplicito a chiudere l'articolo con l'ammissione più remissiva: le regole del calcolo sui numeri negativi, scrive, sono ricevute da tutti come esatte, quale che sia l'idea che ci si voglia fare della loro natura. Il gradiente, insomma, non converge verso una risposta via via più soddisfacente alla domanda "che cosa sono i numeri negativi": converge verso la scoperta, condivisa in filigrana da tutti e quattro gli autori anche quando non la dichiarano, che la domanda può restare aperta senza compromettere in alcun modo l'edificio del calcolo. La pratica ha ormai un'autonomia che nessuna delle quattro giustificazioni — la proporzione di Agnesi, la continuità di Riccati e Saladini, la necessità sistemica di Clairaut, la *fausse position* di d'Alembert — riesce a fondare in modo definitivo, ma di cui nessuna, per lo stesso motivo, riesce più a dubitare.

È in questa autonomia silenziosa, più che in una vittoria concettuale di un argomento sull'altro, che si misura la vera eredità del Settecento sui numeri negativi. Il secolo non scioglie il nodo lasciato aperto da Wallis; lo descrive con crescente raffinatezza, lo tematizza fino ai suoi limiti espliciti — la stessa distinzione tra radici negative e radici immaginarie con cui si chiude l'articolo di d'Alembert torna, quasi immutata, al punto preciso in cui la retta orientata di Wallis si era arrestata — ma non lo risolve mai. Ciò che il XVIII secolo consegna al successivo non è dunque una risposta ma una pratica matura e internamente coerente, orfana però di una teoria che la giustifichi dall'esterno.

2.5 Tra Settecento e Ottocento: l'assestamento operativo

Ma se la domanda resta aperta, come si è visto, la pratica no: nei decenni a cavallo tra Sette e Ottocento, la manualistica algebrica europea raggiunge una sicurezza operativa che i quattro autori appena esaminati non possedevano ancora del tutto — salvo vedersi mettere in discussione, proprio nel momento della propria massima sicurezza, da chi quella sicurezza la osserva con l'occhio più esigente.

Questa sezione ripercorre entrambi i movimenti. È quanto emerge, anzitutto, da due testi nati quasi negli stessi anni, in contesti istituzionali sorprendentemente simili pur essendo di nazioni distinte, senza che risulti alcun rapporto diretto tra i due autori: il *Corso di Matematiche* di Paolo Ruffini, scritto nel 1807 per gli aspiranti alla Scuola d'Artiglieria e Genio di Modena, e gli *Éléments d'algèbre* del barone Antoine André Louis Reynaud, adottati per la preparazione dei candidati all'École polytechnique, alla Marina, all'École militaire di Saint-Cyr e all'École forestière. Non sono opere di ricerca — sono manuali pensati per fissare uno standard, non per discuterlo — e proprio per questo condividono, con una precisione che sorprende, la stessa strategia argomentativa: definiscono un numero negativo attraverso l'operazione che lo genera, non attraverso la sua natura; giustificano la regola dei segni per ripetizione del moltiplicando, addizione o sottrazione iterata a seconda del segno del moltiplicatore; e quando si trovano davanti al punto più delicato dell'intera questione — l'affermazione che i numeri negativi sono "minori dello zero" — lo risolvono non con un argomento filosofico, ma con un accorgimento tecnico locale, capace di rendere l'affermazione rigorosamente vera senza mai chiedersi se sia anche vera nel senso in cui d'Alembert l'aveva giudicata inconcepibile.

A questa sicurezza, però, risponde quasi subito una voce che la mette in discussione dall'interno. Lazare Carnot pubblica la propria *Digression sur la nature des quantités dites négatives* nel 1806 — un anno prima del *Corso* di Ruffini e due anni prima della prima edizione degli *Éléments* di Reynaud: sul piano strettamente cronologico, dovrebbe aprire questa sezione, non chiuderla. La si colloca comunque in coda perché la sua critica presuppone concettualmente il risultato a cui Ruffini e Reynaud erano approdati: si rivolge a una sicurezza operativa già raggiunta per mostrarne la fragilità nascosta, più che annunciare un problema ancora da risolvere. È dunque un ordine logico, non cronologico, quello che questa sezione segue — lo stesso criterio già dichiarato in apertura di §2.4.

Il risultato complessivo è un'operazione di assestamento, non di rifondazione — ma un assestamento che, grazie a Carnot, arriva a conoscere fino in fondo i propri limiti. La pratica del calcolo, ormai matura e internamente coerente, non ha più bisogno di una risposta alla domanda fondazionale per funzionare; ma non ha ancora compiuto il passo, ben diverso, che porterà l'algebra a ridefinire se stessa come scienza delle leggi formali indipendenti da ogni significato.

Paolo Ruffini nacque a Valentano, presso Viterbo, nel 1765 e si trasferì con

la famiglia a Reggio Emilia prima di iscriversi, nel 1783, all'Università di Modena, dove studiò contemporaneamente matematica, medicina, letteratura e filosofia, avendo come insegnanti il geometra Luigi Fantini e l'analista Paolo Cassiani. Si laureò nel 1788 in tutte queste discipline insieme, e fu professore di matematica a Modena dal 1797 — con una sospensione di un anno per essersi rifiutato di prestare giuramento alla Repubblica Cisalpina. Alla morte di Cassiani, avvenuta nel 1806, si rese vacante la cattedra di matematica applicata alla Scuola d'Artiglieria e Genio di Modena, istituita dal governo napoleonico. Fu ancora una volta Ruffini, che già aveva preso il posto di Cassiani vent'anni prima nell'insegnamento universitario, a succedergli. È in questa veste che nel 1807 pubblicò l'*Algebra elementare*, terzo tomo del *Corso di Matematiche ad uso degli Aspiranti alla Scuola d'Artiglieria e Genio di Modena* — un'opera che lo stesso Ruffini presenta, nel *Discorso preliminare*, non come iniziativa propria ma come eredità: doveva essere Cassiani a scriverla, per incarico del governo, ma «pel fatale Decreto, che tutti comprende irrevocabilmente i Mortali» non poté farlo e il compito passò al suo allievo⁹⁵. A differenza degli *Éléments* di Reynaud, che nei decenni successivi avrebbero conosciuto dieci edizioni e sarebbero stati adottati in quattro istituzioni diverse, l'*Algebra* di Ruffini resta un'opera unica, accompagnata soltanto da un'*Appendice* l'anno seguente (1808): non vi è traccia di ristampe né di adozioni al di fuori della scuola per cui fu concepita — segno di un'opera nata e rimasta dentro i confini di un preciso incarico istituzionale, non destinata a diventare essa stessa un'opera a vasta diffusione come il manuale francese che le fa qui da contrappunto. È significativo, per il filo che questa sezione ripercorre, che nello stesso *Discorso* Ruffini dichiara esplicitamente il proprio debito verso un'altra fonte, questa volta francese e già nota al lettore di questo capitolo: dice di aver «procurato giusta il metodo di Clairaut di dedurre dagli esempi medesimi la necessità delle operazioni algebriche»⁹⁶. A sessant'anni di distanza, il metodo genetico-pedagogico francese ha ormai attraversato le Alpi ed è diventato il metodo da seguire anche per un manualista italiano che scrive per una scuola militare napoleonica.

L'*Algebra elementare* introduce positivo e negativo con una definizione esplicita che né Agnesi né Riccati e Saladini avevano formulato in termini altrettanto netti: «Se una quantità si considera come aggiunta ad un'altra, essa in allora chiamasi positiva; che se si considera come levata, le si dà il nome di negativa»⁹⁷. È una definizione puramente operativa — il negativo non è un tipo di quantità, ma uno stato in cui una quantità viene presa — e Ruffini la illustra con esempi che risultano, a questo punto della storia qui ricostruita, molto familiari: una retta condotta in direzione opposta a un'altra già tracciata e il credito-debito di due uomini, di cui uno possiede 1000 zecchini e l'altro ne deve altrettanti⁹⁸.

⁹⁵Ruffini dedica al maestro scomparso parole di gratitudine non convenzionale: la sua «Memoria più tenera e riconoscente rimarrà sempre mai scolpita nel più profondo del mio cuore» (Ruffini 1807, *Discorso preliminare*). Il debito intellettuale verso Cassiani, del resto, non si esaurisce nella teoria delle equazioni, campo in cui gli storici concordano che Ruffini ne abbia raccolto e sviluppato l'eredità scientifica.

⁹⁶Ruffini 1807, *Discorso preliminare*.

⁹⁷Ruffini 1807, n. 25.

⁹⁸Ruffini 1807, n. 25.

Sono gli stessi esempi che avevamo incontrato in Agnesi, in Riccati e Saladini, sia pure senza che risulti alcuna filiazione diretta tra questi testi: segno che, a inizio Ottocento, non è più soltanto la regola dei segni a essersi standardizzata, ma l'intero apparato didattico con cui la si introduce.

Il punto più rivelatore dell'intera trattazione ruffiniana arriva però quando l'autore affronta di petto un'obiezione che il lettore di questo capitolo riconoscerà immediatamente. «Sogliono i Matematici chiamare le quantità positive maggiori dello zero, e le negative minori», scrive Ruffini; «può questo a prima vista sembrare un assurdo»⁹⁹ — la stessa parola *assurdo* con cui d'Alembert aveva bollato come inconcepibile l'idea che una quantità negativa sia al di sotto di nulla. Ma dove d'Alembert si era fermato al rigetto, giudicando la formula stessa priva di senso, Ruffini la salva con un argomento tecnico locale: costruisce la sequenza delle addizioni successive $8 + 3$, $8 + 2$, $8 + 1$, $8 + 0$, $8 - 1$, $8 - 2$, $8 - 3$, osserva che i risultati si susseguono in ordine strettamente decrescente, e ne conclude che l'ordinamento che vale per le quantità aggiunte si estende naturalmente oltre lo zero, rendendo rigorosamente vera — non più assurda — l'affermazione che i numeri negativi sono minori dello zero¹⁰⁰. È esattamente il tipo di mossa che questa sezione intende documentare: non una risposta alla domanda sollevata da d'Alembert ma un accorgimento tecnico che la rende marginale, dissolvendo per via di definizione ciò che quarant'anni prima sembrava un ostacolo insormontabile.

La stessa sicurezza operativa attraversa la dimostrazione della regola dei segni per la moltiplicazione, che Ruffini conduce per casi, riconducendo il moltiplicatore a un intero e sviluppando il prodotto come addizione o sottrazione ripetuta del moltiplicando: se il moltiplicatore è positivo, il moltiplicando si ripete nel proprio segno; se è negativo, si ripete nel segno contrario — donde discendono, per enumerazione esaustiva dei tre casi possibili, tutte le combinazioni della regola¹⁰¹. E quando, risolvendo un problema con tre crediti incogniti, una delle soluzioni risulta negativa, Ruffini non esita — «il valore di z finalmente essendo negativo, Cajo avrà un credito negativo, ossia un debito di Lir. 136»¹⁰² — enunciando subito dopo, come scolio di poche righe e senza alcuna elaborazione ulteriore, la regola generale — «ogniqualevolta ritrovasi il valore di qualche incognita negativo, dobbiam dire, che la quantità corrispondente, che si ricerca, va presa in un senso contrario all'esposto nel Problema»¹⁰³. È la stessa reinterpretazione del segno che Clairaut affidava a un intero passaggio della propria prefazione e che d'Alembert elevava a teoria della *fausse position*: qui, in un manuale per aspiranti ufficiali, si riduce a un corollario tecnico di due righe, applicato e già dimenticato.

Antoine André Louis Reynaud nacque a Parigi nel 1771, dove morì nel 1844. Entrò all'École polytechnique nel 1796, tra i primissimi allievi dell'istituto — fondato appena due anni prima — e vi si laureò tra i migliori nel 1798, entrando

⁹⁹Ruffini 1807, n. 30.

¹⁰⁰Ruffini 1807, n. 30.

¹⁰¹Ruffini 1807, n. 46.

¹⁰²Ruffini 1807, n. 73.

¹⁰³Ruffini 1807, n. 74.

poi nel corpo dei Ponts et Chaussées. Ma fu l'insegnamento, non l'ingegneria, a plasmare la sua carriera: professore di matematica dal 1800, insegnò in un liceo parigino e alla stessa École polytechnique, diventandone infine examinateur per l'ammissione — carica che ricoprì anche per la Marine Royale, come recita per esteso il frontespizio degli *Éléments*, insieme ad una pletora di titoli nobiliari ed onorifici. Al contrario di Clairaut o d'Alembert, Reynaud non fu un matematico innovatore ma colui che sorvegliò la soglia d'ingresso a un intero sistema educativo tecnico-militare: i suoi *Éléments d'algèbre* — dichiaratamente pensati per gli allievi che si dovevano preparare all'ammissione alle principali scuole di formazione francesi sia civili sia militari — sono forse l'illustrazione più esplicita, tra tutti i testi qui esaminati, di cosa significhi trasformare una regola di calcolo in uno standard istituzionale, non perché fossero l'unico manuale sul mercato ma perché il marchio dell'adozione ufficiale «ouvrage adopté par l'université» bastò a farne lo standard sopravvissuto ai propri concorrenti.

Gli *Éléments d'algèbre* non furono, va detto, un caso isolato nel panorama editoriale francese: Reynaud operava in un mercato di manuali fra loro concorrenti, tutti rivolti allo stesso pubblico di aspiranti al Politecnico. Jean-Guillaume Garnier (1766-1840) pubblicò, a partire dal 1806, un'opera dal titolo pressoché identico — *Éléments d'algèbre, à l'usage des aspirants à l'École polytechnique* — a conferma che la standardizzazione dell'insegnamento algebrico in Francia passava non da un unico testo imposto dall'alto, ma attraverso una competizione fra manuali strutturalmente simili, di cui quello di Reynaud si impose come il più duraturo: dalla prima edizione del 1808 fino alla decima, qui utilizzata, del 1859, l'opera accompagnò per oltre mezzo secolo la formazione algebrica di intere generazioni di studenti.

Anche Reynaud, come Ruffini, definisce il negativo attraverso l'operazione che lo produce, non attraverso una tesi sulla sua natura. Quando la quantità da sottrarre supera quella da cui si sottrae, scrive, si è condotti a un resto negativo; «ogni quantità negativa $-b$ può dunque essere considerata come indicante il resto di una sottrazione che si è potuta effettuare solo in parte, e nella quale la quantità da sottrarre superava di b la quantità dalla quale si voleva sottrarla»¹⁰⁴. Il negativo, cioè, non è altro che la registrazione contabile di un'operazione rimasta incompiuta — una definizione che non presuppone alcuna idea preliminare di che cosa un numero negativo sia, ma si limita a descrivere l'esito di un'operazione che si è potuta eseguire solo in parte.

È nel paragrafo successivo, tuttavia, che Reynaud offre il contributo concettualmente più interessante di questa sezione, e lo fa senza alcuna intenzione polemica o filosofica. Introduce la distinzione tra *valeur absolue* e *valeur relative* di una quantità — la prima ottenuta facendo astrazione dal segno, la seconda tenendone conto — e ne trae una conseguenza che risolve, per via di semplice definizione tecnica, esattamente il nodo che d'Alembert aveva giudicato insolubile. Scrive infatti, in una *Remarque*: « $-b$ è minore di zero, cosicché il valore relativo di una quantità negativa è più piccolo di zero, sebbene non

¹⁰⁴ «toute quantité négative $-b$ peut donc être considérée comme indiquant le reste d'une soustraction qui n'a pu s'effectuer qu'en partie, et dans laquelle la quantité à soustraire surpassait de b , la quantité dont on voulait la soustraire» (Reynaud 1859, §5).

esista alcuna quantità il cui valore assoluto sia minore di zero»¹⁰⁵. È la stessa affermazione — «i numeri negativi sono minori dello zero» — che d'Alembert aveva respinto come inconcepibile e che Ruffini aveva salvato costruendo una sequenza ordinata di addizioni successive. Reynaud arriva alla medesima destinazione per una via diversa e più elegante: distingue due sensi in cui una quantità può dirsi "minore", e mostra che l'affermazione problematica è vera nell'uno (il valore relativo) e semplicemente non si applica nell'altro (il valore assoluto, per cui non esiste alcuna quantità "minore di zero", negativa o positiva che sia). Non c'è qui alcun riferimento a d'Alembert e non sorprende: la difficoltà che l'*Encyclopédie* aveva dichiarato insormontabile è, novant'anni dopo, un distinguo terminologico di poche righe.

Qualche anno più tardi, Joseph-Diaz Gergonne (1771-1859) propone una soluzione complementare allo stesso nodo, agendo non sul valore della quantità ma sullo zero stesso. Nella sua distinzione esiste uno zero assoluto — simbolo del nulla puro, al di sotto del quale nulla può darsi — e uno zero limite, punto di partenza puramente convenzionale a cui si riferiscono le quantità dette positive e negative: lo zero del termometro, il livello di riferimento per rilievi e avvallamenti, l'epoca da cui si contano gli anni prima e dopo, l'origine delle coordinate in geometria analitica¹⁰⁶. Una quantità negativa, insomma, non è mai minore dello zero assoluto — nessuna quantità, positiva o negativa, può esserlo — ma si colloca, rispetto allo zero limite proprio della grandezza in questione, dalla parte opposta alle quantità positive: la stessa mossa di Reynaud, applicata non al valore ma al punto da cui il valore si misura.

La dimostrazione della regola dei segni per la moltiplicazione conferma, con un'evidenza che sfiora la coincidenza testuale, quanto questo tipo di argomentazione fosse ormai patrimonio comune della manualistica. Reynaud riduce anch'egli il caso generale a quello di un moltiplicatore intero, positivo o negativo, e sviluppa il prodotto come somma ripetuta: Reynaud riduce anch'egli il caso generale a quello di un moltiplicatore intero, positivo o negativo, e sviluppa il prodotto come somma ripetuta: «quando il moltiplicatore ha il segno +, il prodotto ha il segno del moltiplicando, poiché, essendo il moltiplicatore positivo composto dall'addizione di più unità, dalla definizione della moltiplicazione risulta che il prodotto deve essere composto dall'addizione di più quantità uguali al moltiplicando»¹⁰⁷; e quando il moltiplicatore è negativo, «essendo composto

¹⁰⁵ « $-b$ est moindre que zéro, de sorte que la valeur relative d'une quantité négative est plus petite que zéro, quoiqu'il n'existe aucune quantité dont la valeur absolue soit moindre que zéro» (Reynaud 1859, §6).

¹⁰⁶ «On me demandera maintenant si je considère les quantités négatives isolées comme plus grandes ou comme moindres que zéro? Avant de répondre à cette question, je distinguerai d'abord deux sortes de zéros: savoir, le zéro absolu, symbole d'un pur néant, et au-dessous duquel conséquemment rien ne saurait se trouver, et un zéro limite ou point de départ, qui est de pure convention, et auquel se rapportent constamment les quantités considérées comme pouvant être positives et négatives. C'est, par exemple, le zéro du thermomètre; c'est le plan de niveau duquel on part pour estimer les élévations et les abaissements; c'est l'époque de laquelle partent les chronologistes pour fixer la date des événements, soit antérieurs soit postérieurs; et c'est encore l'origine des coordonnées dans la géométrie analytique» (Gergonne 1814, pp. 10-11).

¹⁰⁷ «quand le multiplicateur a le signe +, le produit a le signe du multiplicande, car le multiplicateur positif étant composé de l'addition de plusieurs unités, il résulte de la définition

dalla sottrazione di più unità, si formerà il prodotto sottraendo più volte il moltiplicando»¹⁰⁸. È, punto per punto, la stessa struttura dimostrativa di Ruffini — riduzione al moltiplicatore intero, sviluppo per addizione o sottrazione ripetuta, lettura del segno risultante dai due casi — pur non risultando, come si è detto in apertura, alcun contatto diretto tra i due autori. La convergenza non è dunque il segno di un'influenza reciproca, ma di qualcosa di più significativo per la tesi di questa sezione: un argomento dimostrativo nato nella temperie pedagogica post-clairautiana era, a inizio Ottocento, così pienamente assimilato da poter essere riprodotto quasi identico, indipendentemente, ai due estremi opposti dell'Europa napoleonica.

Lazare Nicolas Marguerite Carnot nacque a Nolay, in Borgogna, il 13 maggio 1753, da una famiglia borghese che lo avrebbe voluto avviare alla carriera ecclesiastica; fu invece l'arte militare ad attirarlo e nel 1771 entrò alla *École royale du génie militaire* di Mézières — all'epoca l'unica accademia militare francese aperta a chi non fosse di nobiltà. Ingegnere di formazione prima ancora che matematico di professione, si fece notare nel 1784 con un *Éloge de Vauban* premiato dall'Accademia di Digione, in cui già emergeva il tratto che lo avrebbe accompagnato per tutta la vita: la convinzione che il rigore tecnico e il rigore politico siano la stessa disciplina applicata in ambiti diversi. È un tratto che nessuno degli altri autori discussi in questa sezione condivide ed è utile tenerlo presente perché il Carnot che scrive di quantità negative non è un accademico appartato, ma il medesimo Carnot che, di lì a pochi anni, divenne una delle figure più decisive della Rivoluzione francese: membro del Comitato di salute pubblica dal 1793, organizzò in pochi mesi quattordici armate rivoluzionarie e il 9 Termidoro anno II del calendario rivoluzionario — il 27 luglio 1794 nel calendario gregoriano — si schierò contro Robespierre, contribuendo alla sua caduta. Sarebbe rimasto fedele all'ideale repubblicano attraverso il Direttorio, il Consolato e l'Impero napoleonico, che lo volle come ministro della Guerra pur diffidando del suo repubblicanesimo mai sopito; dopo Waterloo, la Restaurazione borbonica lo esiliò per aver votato, vent'anni prima, la condanna a morte di Luigi XVI. Morì in esilio a Magdeburgo il 2 agosto 1823 — la sua salma sarebbe tornata a Parigi, per essere sepolta al Panthéon, solo nel 1889. È significativo che le sue riflessioni più penetranti sulla natura dei numeri negativi — le *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (1797), la *Géométrie de position* (1803) e la *Digression sur la nature des quantités dites Négatives* (1806) — nascano tutte negli interstizi di una vita quasi interamente assorbita dalla politica e dalla guerra: sono il lavoro di un uomo abituato a diffidare delle spiegazioni comode, in matematica non meno che in campo di battaglia.

Il primo bersaglio della *Digression* è la tesi che i numeri negativi isolati siano quantità «minori dello zero» — la stessa formula che d'Alembert aveva già respinto come inconcepibile; ma qui Carnot non si limita a dichiararla oscura: la sottopone a tre controprove concrete. Anzitutto, ottenere una simile

de la multiplication que le produit doit être composé de l'addition de plusieurs quantités égales au multiplicande» (Reynaud 1859, §9, 4°).

¹⁰⁸ «étant composé de la soustraction de plusieurs unités, on formera le produit en retranchant plusieurs fois le multiplicande» (Reynaud 1859, §9, 4°).

quantità richiederebbe di «togliere qualcosa dal nulla, il che è assurdo»¹⁰⁹. In secondo luogo — ed è l'argomento più pungente — se -4 e -5 fossero davvero quantità minori di zero, il loro prodotto dovrebbe in qualche modo riflettere questa minorità; invece $(-4) * (-5) = 20$ risulta maggiore del prodotto di due fattori positivi più piccoli, come $2 * 3 = 6$ ¹¹⁰. Infine, se in un calcolo è lecito trascurare le quantità nulle, a maggior ragione dovrebbe essere lecito trascurare quelle «minori di nulla» — eppure chiunque sa che trascurare i numeri negativi produce errori gravi, non trascurabili affatto¹¹¹.

Il secondo bersaglio è la teoria della reinterpretazione del segno — «i numeri negativi non differiscono dai positivi se non in quanto presi in senso contrario» — che è ancora la *fausse position* di d'Alembert. Carnot le muove un'obiezione di metodo prima ancora che di contenuto: nessuno dei suoi sostenitori spiega in generale che cosa significhi "senso contrario"; si limitano a esempi particolari — un debito è un credito preso in senso contrario, un'ordinata a sinistra è un'ordinata a destra presa negativamente — senza mai fornire un criterio che valga per ogni caso¹¹². E quando si va a verificare la regola anche solo nei casi particolari che i suoi stessi sostenitori propongono, la regola si contraddice da sola: la secante di un arco compreso tra la metà e i tre quarti della circonferenza dovrebbe essere positiva, poiché coincide per grandezza e direzione con la secante di un arco minore di un quarto di circonferenza — che tutti riconoscono positiva; eppure la medesima teoria impone che quella stessa secante sia negativa. È, scrive Carnot, «una contraddizione manifesta»¹¹³. Ne segue un'ultima stoccata, che vale la pena riportare per la sua chiarezza: se bastasse scegliere arbitrariamente quale lato chiamare positivo, si potrebbe rendere a piacimento possibile o impossibile una stessa cosa — «per magia dei segni», dare esistenza a ciò che non può essere, e rendere impossibile ciò che esiste; «i geometri», conclude sarcasticamente Carnot, «non hanno mai sospettato di avere in mano un simile potere»¹¹⁴.

Alla demolizione segue, nella *Digression*, una proposta positiva — e qui Carnot introduce una distinzione che nessuno degli autori fin qui esaminati aveva mai isolato con altrettanta nettezza. La parola "negativo", osserva, viene usata in Algebra in due accezioni del tutto diverse, sistematicamente confuse l'una con l'altra. Nella prima accezione, negativo significa semplicemente «ogni quantità che è affetta dal segno meno» — un fatto puramente sintattico, che riguarda solo come la quantità è scritta. Nella seconda, negativo significa «ogni quantità che si trova affetta dal segno contrario a quello che dovrebbe avere»¹¹⁵ — un fatto

¹⁰⁹ «pour obtenir une pareille quantité, il faudrait pouvoir ôter quelque chose de rien, ce qui est absurde» (Carnot 1806, §2).

¹¹⁰ Carnot 1806, §2.

¹¹¹ Carnot 1806, §2.

¹¹² «ces personnes n'expliquent point ce qu'elles entendent en général par quantités prises en sens contraire les unes des autres» (Carnot 1806, §3).

¹¹³ «C'est donc une contradiction manifeste, et cette opinion est aussi inadmissible que la première» (Carnot 1806, §3).

¹¹⁴ «on pourroit, par la magie des signes, donner l'existence à ce qui ne peut pas être, et rendre impossible ce qui existe; certes, les géomètres ne se sont jamais doutés qu'ils eussent en main un pareil pouvoir» (Carnot 1806, §3).

¹¹⁵ «Suivant la première acception, quantité négative signifie simplement toute quantité qui

semantico, che riguarda se il segno scritto corrisponde a quello corretto. Sono due proprietà indipendenti: una quantità può essere negativa nel primo senso e positiva nel secondo o viceversa. Per evitare la confusione, Carnot propone di riservare il termine "negativo" propriamente detto alla sola accezione sintattica, e di coniare un nome nuovo per la seconda: quantità inversa, contrapposta a quantità diretta¹¹⁶. La stessa distinzione fra un segno sintattico e un segno semantico tornerà, a fine Ottocento, nel tentativo di Méray di separare, con una notazione apposita, segno operativo e segno qualificativo — problema che il capitolo seguente riprenderà.

Il principio che ne segue è semplice da enunciare e potente nelle conseguenze: ogni quantità inversa può essere vista come la differenza fra due quantità dirette, in cui la maggiore è stata scambiata per la minore nell'impostazione del calcolo, e viceversa¹¹⁷. L'inversione, cioè, non è una proprietà della quantità in sé, ma il sintomo di un errore commesso nell'impostare il problema — un errore che il calcolo stesso rivela, e che si corregge scambiando i due termini, non cambiando la natura di ciò che si sta calcolando.

L'esempio con cui Carnot illustra la distinzione è il coseno di un angolo ottuso. Nel sistema in cui la formula $\cos = 1 - \sinvers$ ¹¹⁸ viene stabilita, si assume che l'angolo sia minore di un quarto di circonferenza, e dunque che il raggio sia maggiore del seno verso; ma quando l'angolo diventa ottuso, è il seno verso a superare il raggio, e la formula, per restare valida, deve essere riscritta con il segno cambiato: $\cos = \sinvers - 1$ ¹¹⁹. Il coseno dell'angolo ottuso, spiega Carnot, è dunque una quantità *inversa* — non perché porti il segno meno (il coseno di un angolo ottuso è, sintatticamente, negativo tanto quanto qualunque altro numero preceduto da quel segno), ma perché nella formula originaria le due grandezze di cui è differenza sono state scambiate. È la prova più diretta che le due nozioni non coincidono, e che confonderle — come avevano fatto, ciascuno a suo modo, sia i sostenitori del "minore di zero" sia d'Alembert con la propria teoria del "senso contrario" — è la vera fonte dell'oscurità che ha accompagnato i numeri negativi per tutto il secolo qui ricostruito.

L'ultimo passo della *Digression* è anche il più radicale e segna il punto in cui questa sezione può cedere il passo al capitolo successivo. Dopo aver isolato le quantità inverse — quelle il cui segno è semplicemente sbagliato, e che una correzione elimina — restano da considerare le negative "propriamente dette": quelle che, anche una volta corretto ogni errore di impostazione, non si lasciano

est affectée du signe $-$. Suivant la seconde, quantité négative signifie toute quantité qui se trouve affectée du signe contraire à celui qu'elle devrait avoir» (Carnot 1806, §8).

¹¹⁶Carnot 1806, §8.

¹¹⁷«Toute quantité inverse peut être considérée comme la différence de deux quantités directes dont la plus grande a été prise pour la plus petite, et réciproquement» (Carnot 1806, §8).

¹¹⁸Il seno verso (in latino *sinus versus*, talvolta reso in italiano anche come "seno versato") è una funzione trigonometrica oggi caduta in disuso, definita come $\sinvers(\theta) = 1 - \cos(\theta)$. Fu ampiamente impiegata nella trigonometria pratica — specialmente in navigazione e astronomia — fino all'Ottocento inoltrato, perché a differenza del coseno resta sempre positiva per angoli compresi tra 0° e 180° , evitando complicazioni di segno nei calcoli manuali; cadde progressivamente in disuso con la diffusione di tavole trigonometriche più complete e, in seguito, degli strumenti di calcolo meccanici ed elettronici.

¹¹⁹Carnot 1806, §10.

ricondere a una quantità assoluta. Su queste, Carnot non concede nulla. Le dichiara apertamente prive di ogni realtà e le colloca, senza esitazione, sullo stesso piano delle quantità immaginarie: «Le quantità semplicemente negative devono, a questo riguardo, essere considerate come le stesse quantità immaginarie; cioè come semplici forme algebriche, non essendo le seconde altro che le radici quadrate delle prime: se queste fossero possibili, non ci sarebbe alcuna ragione perché le altre non lo fossero; poiché ogni quantità effettiva deve avere la propria radice quadrata, e se non ce l'ha, è prova che essa stessa è una quantità assurda: le une e le altre non differiscono, propriamente parlando, che per i loro diversi gradi di absurdità»¹²⁰.

È una mossa che nessuno, in questo capitolo, aveva osato fare. Wallis aveva lasciato le radici di quantità negative fuori dalla propria retta orientata, in un piano che non sapeva descrivere; d'Alembert, chiudendo il proprio articolo, aveva tracciato un confine netto fra radici negative, soluzioni autentiche sia pure "incorrette" nel segno, e radici immaginarie, prive di ogni soluzione possibile. Carnot cancella quel confine perché nega che vi fosse mai stata, dall'inizio, una differenza di natura fra le due cose. Negativi e immaginari sono, per lui, la stessa specie di finzione, distinta solo per grado.

E tuttavia — questo è il punto che rende la *Digression* il congedo più adatto a chiudere il capitolo — Carnot non ne conclude che l'algebra debba fare a meno di queste finzioni. Ne conclude l'esatto contrario: è proprio nella capacità di maneggiare simbolicamente ciò che non esiste, per poi eliminarlo attraverso trasformazioni metodiche fino a un risultato esplicito e reale, che consiste il vero vantaggio dell'analisi sulla sintesi¹²¹. Il calcolo, scrive, «diventa significativo solo quando, in seguito alla serie di trasformazioni operate, si è giunti a un risultato esplicito» — cioè un risultato in cui ogni quantità è assoluta e ogni segno indica un'operazione davvero eseguibile¹²². Fino a quel momento, negativi e immaginari restano ospiti provvisori del calcolo — ammessi, indispensabili, ma mai fondati.

È esattamente qui che l'assestamento operativo raggiunge il proprio limite intrinseco, nella versione più lucida e autoconsapevole che questo capitolo abbia incontrato. Carnot non chiede più, come Ruffini o Reynaud, come si giustifichi la regola dei segni; chiede che cosa sia lecito maneggiare nel calcolo anche senza crederci — e risponde con una teoria compiuta dell'errore, della correzione, dell'eliminazione. Ma resta, fino all'ultimo, una teoria procedurale: il negativo continua a esistere solo come un passaggio da attraversare, non come un oggetto che possieda proprie leggi indipendenti dal risultato a cui deve infine ridursi. Perché i numeri negativi — e con essi gli immaginari, ora esplicitamente equiparati — smettano di essere finzioni da eliminare e diventino oggetti retti da

¹²⁰ «Les quantités simplement négatives doivent à cet égard être considérées comme les quantités imaginaires elles-mêmes; c'est-à-dire, comme de simples formes algébriques, les dernières n'étant que les racines carrées des premières: si celles-ci étaient possibles, il n'y aurait aucune raison pour que les autres ne le fussent pas [...] les unes et les autres ne diffèrent, à proprement parler, que par leurs différens degrés d'absurdité» (Carnot 1806, §14).

¹²¹ Carnot 1806, §15–16.

¹²² «Que le calcul ne devient significatif que lorsque par la suite des transformations opérées, on est parvenu à un résultat explicite» (Carnot 1806, §17).

leggi proprie, occorre un'algebra che si definisca non più per i suoi risultati, ma per le proprie regole di trasformazione, indipendentemente da ogni riferimento a una quantità reale sottostante. È il passo che il capitolo seguente ricostruirà.

Capitolo 3

La formalizzazione dei numeri negativi: dalla convenzione alla costruzione

Il capitolo precedente si è chiuso su una sicurezza operativa raggiunta senza che la domanda sulla natura del numero negativo avesse mai trovato risposta: la pratica del calcolo aveva reso quella domanda sempre meno urgente, mai risolta. È a questa domanda rimasta in sospeso che il presente capitolo si dedica, e lo fa seguendo un percorso che descrive una progressione precisa: dalla pretesa di dimostrare la regola dei segni per un numero dato per scontato alla necessità di costruire il numero stesso. In questo modo la convenzione — mai eliminata, ma finora ripetuta di volta in volta proprio nel punto in cui si arrivava alla regola dei segni — si concentra invece in un solo atto iniziale: la scelta di quale proprietà algebrica già nota, come la distributività, si vuole preservare nel dominio esteso. Da quella sola scelta la regola dei segni segue poi come un teorema ordinario, non più come un'eccezione da giustificare a parte.

Cauchy apre il capitolo praticando la convenzione senza mai dichiararla: separa i segni dalle quantità e dimostra per pura ispezione delle equazioni le leggi che li governano, ma non chiama mai "convenzione" ciò che sta facendo (§3.1). La "scuola del silenzio" (§3.2), da Newton a Woodhouse a Bertrand, compie il passo che a Cauchy manca: dichiara apertamente che la regola dei segni non è interamente dimostrabile, e isola con crescente precisione metodologica ciò che nella regola è arbitrario da ciò che non lo è. La via geometrica di Mourey e Faure dà a quella convenzione un corpo concreto — la rotazione nel piano — ma resta, dichiaratamente, un'interpretazione fra le altre possibili, scelta per la propria utilità e non per la propria necessità (§3.3). L'algebra simbolica di Peacock, Gregory e Hankel toglie di mezzo anche l'interpretazione: battezza la convenzione con un nome — il principio di permanenza delle forme equivalenti — e la eleva a programma metodologico esplicito, applicabile a qualunque estensione del sistema numerico (§3.4). Resta però, a quel punto, una domanda che nessuno dei tre ha ancora affrontato: se la regola è convenzione, che cosa esattamente si sta convenendo, dato che il numero negativo a cui la regola si applica non è mai stato costruito, ma solo modificato con un segno

aggiunto dall'esterno? È a questa domanda che risponde l'ultima tappa del capitolo: costruire il numero con segno da materiale che di segno non ne ha affatto, così che il suo comportamento non sia più né da dimostrare né da convenire, ma sia semplicemente conseguenza di come l'oggetto è fatto (§3.5).

3.1 Tra rigore e convenzione

Augustin-Louis Cauchy nacque a Parigi il 21 agosto 1789, poche settimane dopo la presa della Bastiglia. Il padre, Louis-François, funzionario legato alla monarchia, fu costretto a fuggire con la famiglia ad Arcueil durante il Terrore: furono anni di ristrettezze — lo stesso Cauchy ricordò poi di essersi nutrito perlopiù di riso, pane e gallette — che lasciarono nel futuro matematico un attaccamento profondo alla causa monarchica e una diffidenza altrettanto profonda verso le forme repubblicane di governo. Fu Lagrange, colpito dal suo talento precoce, a incoraggiarne la formazione: dopo gli studi classici all'École centrale du Panthéon, Cauchy entrò nel 1805 all'École polytechnique, distinguendosi immediatamente in matematica, e proseguì alla École des Ponts et Chaussées, lavorando come ingegnere ai grandi cantieri napoleonici del porto di Cherbourg, dove coltivò la matematica nei ritagli di tempo, producendo memorie che lo resero presto noto alla comunità scientifica. Nel 1821 pubblicò il *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, testo su cui si sofferma questa sezione: nato dall'insegnamento diretto agli allievi dell'École polytechnique, si proponeva di fondare il calcolo su basi rigorose — un progetto che incontrò, va detto, anche resistenza: gli stessi studenti di Cauchy protestarono contro l'introduzione dei numeri complessi nel corso, giudicandola un sapere inutile. Cattolico osservante fino all'intransigenza, tanto da schierarsi con i gesuiti contro l'Académie des Sciences, Cauchy pagò la propria fedeltà monarchica nel 1830, quando l'ascesa di Luigi Filippo lo portò a rifiutare il giuramento di fedeltà al nuovo governo: rinunciò alle proprie cattedre e si ritirò per alcuni anni in esilio volontario. Morì a Sceaux il 23 maggio 1857.

Il *Cours d'analyse* si apre, nei *Preliminari* che precedono il corpo dell'opera, con una distinzione che è già di per sé un programma: quella tra numero e quantità. Il numero, per Cauchy, resta la misura assoluta di una grandezza, in senso pienamente newtoniano; la quantità è invece il numero preceduto da un segno $+$ o $-$, e il segno funziona, scrive Cauchy, come un aggettivo rispetto a un sostantivo: modifica il significato senza intaccarne il nucleo¹. Su questa base, Cauchy costruisce un completo apparato di definizioni per le operazioni tra quantità, con un'attenzione al dettaglio che nessuno degli autori fin qui esaminati — Ruffini e Reynaud compresi — aveva mostrato. La somma di due quantità, per esempio, non è illustrata con un esempio isolato, ma definita attraverso la nozione di accrescimento e diminuzione e subito verificata su un caso numerico:

¹Cauchy 1821, pp. 2-3. Cauchy stesso rimanda qui, in nota, alle *Philosophical Transactions* del 1806 — con ogni probabilità alla *Mémoire sur les quantités imaginaires* di Adrien-Quentin Buée, a cui riconosce esplicitamente il debito per questa analogia linguistica.

date due quantità, se ne può sempre trovare una terza che, presa come accrescimento di un numero fisso se è positiva, e come diminuzione in caso contrario, conduca allo stesso risultato delle due quantità date [...] Così le due quantità -10 e $+7$ hanno per somma -3 , poiché una diminuzione di 10 unità, unita a un aumento di 7 unità, equivale a una diminuzione di 3 unità.² (...)

E, punto su cui vale la pena soffermarsi, Cauchy definisce l'ordinamento tra quantità non per successione, senza cioè far decrescere gradualmente una quantità fino a farla passare per lo zero, ma direttamente attraverso il segno della loro differenza: «le quantità positive superano sempre le quantità negative, e queste ultime vanno considerate tanto più piccole quanto più grande è il loro valore numerico»³. È una scelta che, come si vedrà in §3.3, mette Cauchy al riparo dalla critica che Carnot aveva già mosso, pochi anni prima⁴, contro l'argomento per successione: quello che fa decrescere una quantità fino a farla passare per lo zero per concludere che i negativi le siano "minori" — un argomento che Cauchy, semplicemente, non usa mai.

È a questo apparato che Cauchy stesso rimanda in apertura della Nota I, dedicata specificamente alla regola dei segni: «Abbiamo molto discusso sulla natura delle quantità positive o negative [...] Quella che abbiamo adottato [si vedano i *Preliminari*, pp. 2 e 3] ci sembra la più adatta a chiarire ogni difficoltà. La richiameremo anzitutto in poche parole. Mostreremo poi come se ne deduca la regola dei segni»⁵. La dichiarazione è programmatica: la regola dei segni non è un punto di partenza ma un punto di arrivo, qualcosa che si deve dedurre da principi posti altrove, esattamente il tipo di rigore che separa Cauchy dai suoi predecessori.

Pone allora $a = +A$, $b = -A$, da cui derivano le quattro equazioni $+a = +A$, $+b = -A$, $-a = -A$, $-b = +A$; sostituendo ad a e b , tra parentesi, i rispettivi valori così definiti, ottiene le formule

$$\begin{aligned} +(+A) &= +A, & +(-A) &= -A, \\ -(+A) &= -A, & -(-A) &= A. \end{aligned} \tag{3.1}$$

²«[...] deux quantités étant données, on pourra toujours en trouver une troisième qui, prise pour accroissement d'un nombre fixe, si elle est positive, et pour diminution dans le cas contraire, conduise au même résultat que les deux quantités données [...] Ainsi les deux quantités -10 et $+7$ ont pour somme -3 , attendu qu'une diminution de 10 unités, jointe à une augmentation de 7 unités, équivaut à une diminution de 3 unités» (Cauchy 1821, pp. 2-3).

³«les quantités positives surpassent toujours les quantités négatives, et celles-ci doivent être considérées comme d'autant plus petites que leurs valeurs numériques sont plus grandes» (Cauchy 1821, p. 3).

⁴Le *Réflexions* di Carnot sono del 1797 e la *Géométrie de position* del 1803, sono entrambe anteriori al *Cours d'analyse* ma è la critica specifica al ragionamento per successione, qui rilevante per confronto strutturale, non la priorità cronologica, a motivare il rimando.

⁵«On a beaucoup disputé sur la nature des quantités positives ou négatives, et l'on a donné à ce sujet diverses théories. Celle que nous avons adoptée [voyez les *Preliminaires*, pages 2 et 3] nous paraît la plus propre à éclaircir toutes les difficultés. Nous allons d'abord la rappeler en peu de mots. Nous montrerons ensuite comment l'on en déduit la règle des signes» (Cauchy 1821, p. 403).

Il passaggio decisivo è l'interpretazione che Cauchy dà a queste quattro identità: il segno che compare al secondo membro di ciascuna, spiega, altro non è che «il prodotto dei due segni del primo membro» — e da qui enuncia, in forma di teorema e non di definizione, la regola stessa:

Un solo sguardo alle equazioni (3.1) basta a stabilire la regola dei segni, compresa nel teorema che ora enuncio.

I Teorema. Il prodotto di due segni simili è sempre $+$ ed il prodotto di due segni opposti è sempre $-$.⁶

Cauchy non si ferma qui. Dalle stesse equazioni deduce «facilmente» altri due teoremi, entrambi per semplice osservazione, senza dimostrazione articolata: il secondo generalizza la regola a un numero qualunque di segni moltiplicati insieme, stabilendo che il prodotto è $+$ quando i segni $-$ sono in numero pari e $-$ altrimenti; il terzo afferma che il prodotto di segni resta lo stesso qualunque sia l'ordine in cui li si moltiplica⁷. È significativo ciò che manca in queste pagine, rispetto a tutto quanto si è visto finora nel Capitolo 2: nessun modello concreto, nessun esempio numerico, nessun ricorso a debiti, moti o segmenti orientati. I tre teoremi si susseguono per pura ispezione delle equazioni che li precedono: Cauchy non sente il bisogno di ancorare la regola a un'intuizione esterna.

Poche righe più avanti, Cauchy compie però il passaggio più importante per l'argomento di questa sezione. Dopo aver stabilito la regola dei segni come proprietà dei segni astratti, cioè di oggetti che si moltiplicano tra loro secondo leggi proprie dimostrate per ispezione diretta, Cauchy definisce il prodotto di due quantità, non più di due segni isolati:

Il prodotto di una prima quantità per una seconda è una terza quantità che ha per valore numerico il prodotto dei valori numerici delle altre due, e per segno il prodotto dei loro segni.⁸

La regola dei segni per le quantità, quella nel senso comune del termine, "meno per meno fa più" applicato a due grandezze concrete, non viene dunque dimostrata una seconda volta: viene definita così, importando semplicemente il Teorema I nella definizione stessa di che cosa significhi moltiplicare due quantità. La struttura di Cauchy si articola perciò su due piani distinti e separati: un piano puramente formale, dove i segni sono oggetti algebrici a sé stanti, retti da leggi di combinazione dimostrate per ispezione diretta e del tutto indipendenti da ogni quantità particolare; e un piano applicativo, dove la moltiplicazione di due quantità concrete è definita in modo da ereditare automaticamente quella legge formale. È il tipo di separazione tra elementi e struttura che Peacock,

⁶ «L'inspection seule des équations (1) suffit pour établir la règle des signes, comprise dans le théorème que je vais énoncer.

1^{er} THÉORÈME. Le produit de deux signes semblables est toujours $+$, et le produit de deux signes opposés est toujours $-$ » (Cauchy 1821, pp. 404–405).

⁷ Cauchy 1821, p. 405.

⁸ «Le produit d'une première quantité par une seconde, est une troisième quantité qui a pour valeur numérique le produit des valeurs numériques des deux autres, et pour signe le produit de leurs signes» (Cauchy 1821, pp. 411–412).

Gregory e Hankel renderanno esplicita e programmatica nelle prossime sezioni — ma che in Cauchy resta ancora implicita, incorporata in una successione di definizioni presentate come naturale sviluppo di principi "chiari", non come convenzione dichiarata.

Un'ultima osservazione, nella stessa Nota, chiude il cerchio: «Una conseguenza immediata delle definizioni precedenti è che la moltiplicazione dei segni non ha alcun rapporto con la moltiplicazione dei numeri»⁹. Segni e numeri, cioè, vivono su due piani che solo la definizione di quantità permette di ricongiungere. È il punto di equilibrio più preciso che questo capitolo incontrerà prima della rottura vera e propria: più rigoroso di Ruffini o Reynaud, che mai avevano isolato i segni come oggetti a sé; non ancora dichiaratamente convenzionale come sarà in Hankel, per cui la stessa separazione diventerà un atto esplicito di posizione, non di scoperta.

3.2 La scuola del silenzio

Non tutti gli autori che hanno affrontato la regola dei segni hanno cercato di dimostrarla. Accanto al filone — maggioritario, e fin qui l'unico incontrato in questa tesi — che tenta di ricavarla da proprietà geometriche o aritmetiche più elementari, corre un filone parallelo e per lungo tempo minoritario: fornire la regola senza tentare di dedurla, lasciandola parlare da sé. Può sembrare, a prima vista, una scelta di pigrizia teorica. È invece, con il tempo, il primo passo verso quella che si rivelerà la posizione vincente: la regola dei segni non si dimostra, si accetta — una convenzione, una regola del gioco da porre in apertura e da giustificare, se possibile, con la sua utilità, non con la sua necessità logica.

Il primo esponente di rilievo di questa corrente fu, sorprendentemente, il più autorevole matematico dell'epoca. Isaac Newton nacque a Woolsthorpe, nel Lincolnshire, il 25 dicembre 1642 (per il calendario giuliano allora in uso in Inghilterra), pochi mesi dopo la morte del padre, un agricoltore che non aveva mai imparato a leggere. Cresciuto perlopiù dalla nonna dopo che la madre era passata a seconde nozze, studiò al Trinity College di Cambridge a partire dal 1661, dove nel giro di pochi anni elaborò, negli *anni mirabiles* 1665-1666 trascorsi lontano dall'università per la peste, i fondamenti del calcolo infinitesimale, della teoria della gravitazione e dell'ottica. Nel 1669, a soli ventisei anni, successe al proprio maestro Isaac Barrow sulla cattedra lucasiana di matematica, la stessa che negli anni e nei secoli successivi sarebbe stata occupata, fra gli altri, da Robert Woodhouse, di cui si dirà tra poco, e, in tempi più recenti, da Paul Adrien Maurice Dirac e da Stephen Hawking. È da questa cattedra, tra il 1673 e il 1683, che tenne per undici anni un corso di algebra, di cui depositò le lezioni manoscritte presso la biblioteca universitaria nel 1684, adempiendo tardivamente a un obbligo statutario. Newton non ebbe mai intenzione di pubblicarle: fu il suo successore sulla cattedra, William Whiston, a darle alle stampe nel 1707 con il titolo *Arithmetica Universalis*, contro la volontà esplicita dell'autore che,

⁹ «Une conséquence immédiate des définitions qui précèdent, c'est que la multiplication des signes n'a aucun rapport avec la multiplication des nombres» (Cauchy 1821, p. 406).

secondo un aneddoto tramandato dai contemporanei, avrebbe persino valutato di acquistare l'intera tiratura per distruggerla. Newton morì a Londra il 20 marzo 1727, dopo aver presieduto per oltre vent'anni la Royal Society.

Va detto subito che Newton non ignora del tutto la questione dei numeri negativi: nel primo libro dell'*Arithmetica Universalis*, qui citata nell'edizione con il commentario di Johann Castillion¹⁰ (1761), definisce le quantità positive e negative con gli stessi modelli concreti già incontrati più volte in questa tesi: crediti contro debiti, moto in avanti contro moto all'indietro, una linea geometrica contro la sua direzione opposta¹¹. Fin qui, nulla che lo distingua dai suoi predecessori.

È quando affronta la moltiplicazione che Newton cambia registro. Non un solo esempio, non un solo modello: la regola è semplicemente enunciata.

I termini semplici algebrici si moltiplicano facendo il prodotto tra i coefficienti numerici e fra le parti letterali e stabilendo che il prodotto sia positivo se entrambi i fattori sono positivi o entrambi negativi, e negativo in caso opposto.¹²

Newton scandisce la moltiplicazione di due monomi in tre tempi distinti: il prodotto dei coefficienti numerici, quello delle parti letterali e, infine, la combinazione dei segni, introdotta con un secco «stabilendo». Non è un verbo dimostrativo: è un verbo normativo, quasi legislativo. È lo stesso Newton che, poche righe prima, aveva speso parole ed esempi per chiarire che cosa fossero le quantità negative; qui, sul punto più delicato — quello del perché la loro moltiplicazione debba comportarsi in questo modo — non sente il bisogno di spendere una sola parola. Senza voler forzare il testo, è difficile non leggersi il presentimento che la regola dei segni vada semplicemente posta, per convenzione, e giudicata poi dai risultati che produce.

Passa quasi un secolo prima che qualcuno raccolga quel presentimento e lo trasformi in un programma dichiarato.

Robert Woodhouse nacque a Norwich il 28 aprile 1773. Ammesso al Caius College di Cambridge nel 1790, si laureò nel 1795 come Senior Wrangler, il primo classificato dell'intero anno accademico in matematica, il riconoscimento

¹⁰Giovanni Francesco Melchiorre Salvemini (1708-1791) cambiò il proprio cognome in Castiglione, dal nome del paese toscano dov'era nato — la storiografia non concorda su quale: le fonti disponibili indicano variamente Castiglion Fiorentino, Castiglione della Pescaia e Castiglione del Valdarno, nessuna delle quali risulta confermata con certezza. Insegnò teologia e matematica in diverse università europee dopo la sua adesione al calvinismo. Oltre all'edizione dell'*Arithmetica Universalis*, curò la pubblicazione della corrispondenza tra Leibniz e Johann Bernoulli nel 1745.

¹¹«Quantitates vel Affirmativae sunt seu majores nihilo, vel Negativae seu nihilo minores [...] Sic in rebus humanis possessiones dici possunt bona affirmativa, debita vero bona negativa. Inque motu locali progressus dici potest motus affirmativus, & regressus motus negativus [...] Et ad eundem modum in Geometria, si linea versus plagam quamvis ducta pro affirmativa habeatur, negativa erit quae versus plagam oppositam ducitur» (Newton 1761, Sectio Prima, Caput II, pp. 3-4).

¹²«Simplices termini Algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros & species in species ac statuendo factum Affirmativum si ambo factores sint affirmativi aut ambo negativi, & Negativum si secus» (Newton 1761, Sectio Prima, Caput V, p. 21).

più prestigioso che Cambridge riservasse ai propri studenti, e si aggiudicò anche il premio Smith, destinato a giovani studiosi che si erano già distinti nella ricerca. Divenne fellow del proprio collegio nel 1798, carica che mantenne per venticinque anni, fino a dovervi rinunciare nel 1823 per potersi sposare: i fellows dei collegi cambridgesi, all'epoca, non potevano avere moglie. Nel 1803 pubblicò la propria opera più importante ai fini di questa tesi, *The Principles of Analytical Calculation*, un tentativo di fondare il calcolo differenziale su basi algebriche rigorose, criticando apertamente sia i metodi continentali di Lagrange, giudicati insufficienti dal punto di vista logico, sia l'uso del calcolo delle flussioni newtoniano, ancora diffuso a Cambridge. Fu però un'opera successiva, *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry* (1809), a valergli il giudizio più celebre: secondo George Peacock, «più di ogni altra opera contribuì a rivoluzionare gli studi matematici»¹³ in Inghilterra. Con entrambe le opere, in ogni caso, Woodhouse fu tra gli ispiratori diretti della Analytical Society, fondata nel 1812 da Peacock insieme a Charles Babbage e John Herschel — la stessa Analytical Society il cui programma di riforma dell'algebra britannica sfocherà, come si vedrà in §3.4, nell'opera dello stesso Peacock. Woodhouse divenne in seguito professore lucasiano, la stessa cattedra che era stata di Newton, e poi professore pluminiiano di astronomia, primo direttore dell'Osservatorio di Cambridge. Morì a Cambridge il 23 dicembre 1827.

Fin dalle prime pagine dei *Principles*, Woodhouse dichiara un programma che nessuno, tra gli autori fin qui esaminati, aveva formulato con altrettanta chiarezza metodologica: distinguere con precisione ciò che della regola dei segni si può dimostrare a partire da principi evidenti da ciò che è invece arbitrario o frutto di convenzione.

Poiché questa regola per il prodotto crea problemi ai principianti ed è spesso stata oggetto di discussione, ho indagato a lungo su di essa, desideroso di distinguere nella regola ciò che si può dire essere dimostrato da principi evidenti e ragionamenti stringenti, da quanto è arbitrario o frutto di convenzione, e di dimostrare perché sia desiderabile rendere tale regola generale per nostro agio.¹⁴

È un programma che presuppone già, come possibilità concettuale distinta, ciò che Newton aveva solo suggerito tra le righe, usando un verbo normativo: che una regola matematica possa essere in parte dimostrabile e in parte semplicemente conveniente e che le due cose vadano tenute separate, non confuse sotto l'unica etichetta di "dimostrazione".

Woodhouse applica questo rigore anzitutto al principio di trasposizione, quello per cui da $a - b = c$ si passa a $a = b + c$ sommando b a entrambi i

¹³ «The Plane and Spherical Trigonometry of the late Professor Woodhouse appeared in 1810, and more than any other work contributed to revolutionize the mathematical studies of this country» (Peacock 1834, p. 295).

¹⁴ «As this rule for multiplication of signs embarrasses beginners, and has been frequently made the subject of discussion, I have dwelt rather long upon it, desirous to distinguish in the rule, what may be said to be proved from evident principles and strict reasoning, from what is arbitrary or results from convention, and to shew why it is desirable on the grounds of commodiousness to make such a rule general» (Woodhouse 1803, pp. 5–6).

membri. Anche qui, avverte, occorre distinguere ciò che il principio dimostra davvero da ciò che gli si fa dire per comodità:

Se su queste due operazioni si dovesse stabilire una regola per trasportare quantità algebriche, essa non dovrebbe, in senso strettamente logico, annunciare più di quanto sia stato dimostrato: ma annuncerebbe di più, se stabilisse il cambio dei segni $+-$ alle quantità da trasferirsi da un membro dell'equazione all'altro, perché in questo modo si dedurrebbe per il suo tramite che $-c - b = -a$, proposizione incomprensibile e che non si sarebbe potuto ottenere da principi evidenti e stretta inferenza: se allora, per agio dei calcoli, si scrive questa regola, ciò è arbitrario in parte e presuppone delle convenzioni prestabilite.¹⁵

Anche la dimostrazione tradizionale di $a - (-b) = a + b$, quella che procede scrivendo $a = a + b - b$, "sottraendo" poi $-b$ per ottenere $a + b$, non regge, per Woodhouse, a un esame rigoroso: quella sottrazione, osserva, è di fatto una cancellazione, non un'operazione che segua necessariamente dal significato della parola "sottrazione" e dalla nozione che abbiamo di $-b$ ¹⁶. L'equivalenza tra le due espressioni, insomma, non è una conseguenza necessaria delle nostre nozioni di sottrazione e di quantità negativa: è, ancora una volta, qualcosa che si accetta per la sua utilità, non perché la logica lo imponga.

Come procede, allora, Woodhouse per fondare comunque la regola? Applicando a un sistema di equazioni il principio di trasposizione, accettato come punto di partenza e non come teorema da dimostrare, e verificando che il risultato ottenuto per questa via converga con quello che si otterrebbe sommando direttamente le equazioni originarie: un controllo di coerenza interna, non una dimostrazione da principi primi¹⁷. È un approccio per certi versi affine a quello di Clairaut, nel senso che nessuno dei due giustifica la regola derivandola da un'analisi della natura dei numeri negativi; ma dove Clairaut accetta la regola cercando di renderla psicologicamente digeribile, Woodhouse la accetta dichiarando esplicitamente, e con soddisfazione metodologica, che non può essere altrimenti.

Woodhouse individua però un caso, uno solo, in cui la regola dei segni per la moltiplicazione può davvero dirsi dimostrata da principi evidenti: quello dello sviluppo $(a-b)(x-y) = ax - bx - ay + by$, a condizione che $a > b$ e $x > y$ ¹⁸. Al di fuori di questo caso, la regola va postulata e la sua validità generale verificata applicando il principio di trasposizione a un sistema di equazioni scelto *ad*

¹⁵ «If on these two operations, a rule be founded for the transposition of Algebraical quantities, it ought not in logical strictness, to announce more than has been proved: but it would announce more, if it ordered quantities to be transferred, from one side of the equation to the other, changing the signs $+-$, for then by this rule there might be deduced $-c - b = -a$, an unintelligible proposition, and which from evident principles and strict inference, could never have been obtained: If then, for the sake of commodiousness in calculation, such a rule be laid down, it is partly arbitrary, and supposes some previous convention» (Woodhouse 1803, pp. 1-2).

¹⁶ Woodhouse 1803, p. 2.

¹⁷ Woodhouse 1803, p. 3.

¹⁸ Woodhouse 1803, p. 3.

hoc: un banco di prova di coerenza, non un fondamento. Woodhouse rivolge poi la propria critica anche alla dimostrazione "alla MacLaurin", che procede sviluppando $(a - a)b$: un'operazione che presuppone illecitamente $a - a = 0$, mentre la sottrazione richiede per definizione che il sottraendo sia minore del minuendo, condizione qui platealmente non soddisfatta¹⁹. E infine, con lo stesso rigore, passa in rassegna le analogie correnti per introdurre i numeri negativi: quella commerciale del debito, che giudica «semplicemente assurda»; quella del segmento orientato, che ritiene solo illustrativa e priva di forza dimostrativa — anzi, elusiva del vero problema, perché

non è per nulla evidente che, se una quantità positiva rappresenta un segmento tracciato in una direzione, una quantità negativa debba essere utilizzata per indicare un segmento nella direzione opposta.²⁰

Piuttosto, insiste Woodhouse, l'uso della linea orientata per rappresentare i numeri negativi è esso stesso una conseguenza della definizione convenzionale già adottata, non la sua giustificazione. È un rovesciamento netto rispetto a Wallis, per il quale la retta orientata era il fondamento geometrico dei numeri negativi: per Woodhouse, la retta presuppone già accettata per altra via la convenzione che pretenderebbe di fondare.

Ciò che in Woodhouse resta un programma di ricerca, rivolto a un pubblico di specialisti e argomentato pagina dopo pagina con un rigore quasi polemico, passa la generazione successiva a diventare pratica scolastica quotidiana: la stessa consapevolezza, applicata non più a un trattato ma a un manuale per studenti liceali.

Joseph Louis François Bertrand nacque a Parigi l'11 marzo 1822, figlio del medico Alexandre Bertrand, che morì quando Joseph aveva appena nove anni. La sua fu una precocità fuori dal comune anche per gli standard di questa tesi, dove di precocità se ne sono già viste — Clairaut, nel Capitolo 2, non fu da meno. A undici anni seguì già come uditore le lezioni dell'École polytechnique; tra gli undici e i diciassette ottenne due baccalaureati, una licence e un dottorato in scienze, con una tesi sulla teoria matematica dell'elettricità. Nel 1839, a diciassette anni, fu ammesso primo in assoluto al concorso d'ingresso della stessa École polytechnique che già frequentava informalmente. Formato come ingegnere delle miniere, preferì presto la ricerca e l'insegnamento: fu professore al Lycée Saint-Louis, poi di analisi all'École polytechnique, quindi maître de conférences all'École normale supérieure. Nel 1862 successe a Jean-Baptiste Biot alla cattedra di fisica matematica al Collège de France. Entrò all'Académie des Sciences nel 1856; ne divenne segretario perpetuo per le scienze matematiche nel 1874. Nel 1884 fu eletto anche all'Académie Française, un riconoscimento raro per uno scienziato. Negli anni della maturità si dedicò anche alla storia

¹⁹Woodhouse 1803, p. 2.

²⁰«that, a positive quantity representing a line drawn in one direction, a negative quantity must be used to denote a line in the opposite direction, is by no means a self-evident truth» (Woodhouse 1803, p. 8).

della scienza: scrisse su d'Alembert nel 1889, su Pascal nel 1890, e tenne alla Sorbona una conferenza su Viète nel 1897²¹. Morì a Parigi il 3 aprile 1900.

Nel *Traité d'Algèbre* — qui utilizzato nella terza edizione del 1863, curata dallo stesso Bertrand insieme a Henri Garcet — opera di taglio dichiaratamente didattico e pensata per l'insegnamento secondario, introduce le operazioni sulle quantità negative senza mai nascondere la natura di convenzione: la parola stessa, «*convention*», ricorre più volte proprio nei passaggi cruciali. Le quantità negative sono definite semplicemente come quelle precedute dal segno $-$, inteso qui come segno di sottrazione:

Questa convenzione consiste nel pensare la differenza $a - b$ come risultato dell'addizione di a con $(-b)$: $a - b = a + (-b)$. L'espressione isolata $(-b)$, che è detta numero negativo, non acquista per questo alcun significato; si dice solamente: aggiungere $(-b)$ invece di dire: sottrarre b . Si conviene ugualmente che sottrarre $(-b)$ significhi aggiungere $+b$: $a - (-b) = a + b$.²²

Tacitamente, anche Bertrand gioca sull'ambivalenza del segno $-$, che da simbolo di un'operazione (la sottrazione) scivola a indicare un tipo di quantità (quelle negative): è la stessa ambivalenza su cui Carnot, circa mezzo secolo prima, aveva costruito l'intera distinzione tra "negativo in senso proprio" e "quantità inversa". Ma dove Carnot ne fa un problema da risolvere, Bertrand ne fa una premessa da accettare: le due uguaglianze non sono dimostrate, sono poste come definizioni. La seconda, per la precisione, è conseguenza necessaria della prima, nel senso che se non la si assumesse sarebbe possibile aggiungere $(-b)$ ad a e poi sottrarre $(-b)$ dal risultato senza riottenere a , il che comprometterebbe la coerenza interna del sistema.

Resta un caso da coprire: che cosa significhi $a - b$ quando $b > a$. Bertrand non nasconde la difficoltà, anzi la dichiara apertamente fin dalla prima riga: in questo caso, scrive, «l'operazione è impossibile», impossibile secondo le regole ordinarie dell'aritmetica, per cui una sottrazione richiede che il sottraendo non superi il minuendo. È precisamente da questa impossibilità dichiarata, non aggirata, che nasce la convenzione:

Altra convenzione. Se si considera una differenza $(a - b)$, e si suppone b maggiore di a , l'operazione è impossibile; si conviene allora di considerare l'espressione $(a - b)$ come rappresentante un numero negativo uguale all'eccesso di b su a : $a - b = -(b - a)$.²³

²¹Non senza una certa ironia per questa tesi: Bertrand, che qui useremo come esempio di trattazione dichiaratamente convenzionale dei negativi, dedicherà pagine di storico della scienza proprio ai due autori — d'Alembert e Viète — il cui tormento filosofico sui numeri negativi abbiamo ricostruito nel Capitolo 2.

²²«Cette convention consiste à regarder la différence $a - b$ comme résultat de l'addition de a avec $(-b)$ [...] L'expression isolée $(-b)$, qu'on appelle nombre négatif, n'acquiert pas pour cela de signification; on dit seulement: ajouter $(-b)$ au lieu de dire: retrancher b . On convient également que retrancher $(-b)$, signifie ajouter $+b$ » (Bertrand 1863, p. 20).

²³«Autre convention. Si l'on considère une différence $(a - b)$, et que l'on suppose b plus grand que a , l'opération est impossible; on convient alors de regarder l'expression $(a - b)$ comme représentant un nombre négatif égal à l'excès de b sur a » (Bertrand 1863, p. 22).

Bertrand non si limita a enunciare la convenzione: ne offre anche una parvenza di derivazione, appoggiandosi a una regola generale di sottrazione già stabilita in precedenza, per cui, per sottrarre un polinomio da una quantità qualunque A , si sottraggono successivamente i suoi singoli termini, qualunque sia il loro segno²⁴. Indicando con d l'eccesso di b su a , così che $a - b = a - (a + d)$, Bertrand applica questa regola termine per termine: si sottrae prima a , poi d , ottenendo $a - b = a - a - d = -d = -(b - a)$. Ma è lo stesso Bertrand, subito dopo, a fermare il lettore prima che questa derivazione venga scambiata per una dimostrazione:

Osservazione. Proviamo così che è naturale porre la convenzione in questione; ma non dimostriamo la formula [3] [cioè $a - b = -(b - a)$]. Il nostro ragionamento, infatti, si fonda sull'applicazione di una regola di sottrazione, che fino a questo punto ha senso solo per sottrazioni possibili. È naturale e comodo estenderla a tutti i casi; ma ciò non la rende meno arbitraria.²⁵

È un'ammissione notevole per un manuale scolastico: Bertrand distingue esplicitamente, con le proprie parole, tra il provare che una convenzione è naturale e il dimostrarla, e riconosce che anche la sua derivazione applica una regola oltre il dominio in cui quella regola era stata giustificata, chiamando "arbitraria" esattamente questa estensione. Non è un'ingenuità sfuggita al controllo, ma una consapevolezza metodologica dichiarata: la convenzione resta convenzione anche quando la si accompagna con un calcolo che le dà l'aria di una dimostrazione.

Con Bertrand, la scuola del silenzio compie il proprio percorso completo. Newton si limita a "stabilire" la regola, senza avvertire il bisogno di spiegare perché lo fa; Woodhouse trasforma quel silenzio in un programma metodologico esplicito, isolando con precisione l'unico caso dimostrabile e dichiarando il resto convenzione; Bertrand, infine, porta quella stessa consapevolezza nell'aula scolastica, dove la parola "convenzione" smette di essere una concessione filosofica e diventa semplice prassi didattica, ripetuta senza più bisogno di giustificarsi. È un percorso che anticipa, senza ancora possedere l'apparato tecnico per dirlo in questi termini, ciò che Peacock, Gregory e Hankel renderanno esplicito e sistematico: che l'algebra, oltre un certo punto, non descrive più un mondo di quantità da comprendere, ma pone le regole di un gioco simbolico da rispettare.

²⁴ «Règle générale de soustraction. Les mêmes conventions permettent de réduire la règle de soustraction des polynomes à l'énoncé suivant: Pour retrancher un polynome d'une quantité quelconque A, il faut en retrancher successivement ses différents termes, quels que soient leurs signes» (Bertrand 1863, p. 22).

²⁵ «Remarque. Nous prouvons ainsi, qu'il est naturel de faire la convention en question; mais nous ne démontrons pas la formule [3]. Notre raisonnement, en effet, est fondé sur l'application d'une règle de soustraction (22), qui, jusqu'ici, n'a de sens que pour des soustractions possibles. Il est naturel et commode de l'étendre à tous les cas; mais cela n'en est pas moins arbitraire» (Bertrand 1863, p. 22).

3.3 La via geometrica

Prima ancora che l'algebra si dichiarasse esplicitamente una scienza di forme e non di quantità, un'altra strada, indipendente e per lungo tempo trascurata dalla storiografia, tentò di fondare i numeri negativi non attraverso la logica delle definizioni, ma attraverso la geometria del piano. È la stessa strada che Wallis aveva imboccato con la sua retta orientata, arenandosi sulle radici di quantità negative; qui, dopo oltre un secolo, quella stessa strada è ripresa e — questa volta — portata fino in fondo.

Su Charles-Victor Mourey, se pure questo sia davvero il suo nome (le fonti disponibili non vanno oltre le iniziali "C.-V." che compaiono in copertina), la storiografia non possiede alcun dato biografico verificato. L'unica traccia è l'indirizzo riportato sul frontespizio della prima edizione: Parigi, Rue des Quatre-Vents, n. 8. Una ricercatrice²⁶ dell'Università di St Andrews ha ipotizzato che potesse trattarsi di un tecnico²⁷ attivo a Parigi, ma ammette essa stessa di non poterlo identificare con certezza. Anche le date di nascita e morte che talvolta gli si attribuiscono (1791-1830) restano congetturali. Sappiamo per certo solo il titolo del suo libro: *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*, pubblicato nel 1828 e ristampato nel 1861 dallo stesso editore, a spese proprie, verosimilmente dopo la morte dell'autore, dato che la seconda edizione non riporta più alcun indirizzo. Già nel 1846 i *Nouvelles annales de mathématiques* avevano lanciato un appello pubblico per raccogliere informazioni sul suo conto, senza ottenere alcuna risposta: un mistero, a quanto pare, già ai suoi stessi contemporanei.

Mourey individua l'origine di ogni difficoltà algebrica in un punto preciso: il segno — usato per indicare la sottrazione. Per esprimere la differenza di due quantità, spiega, si scrive la più piccola a destra della più grande separate da quel segno; ma se uno dei due termini è incognito o arbitrario, l'espressione diventa semplicemente inammissibile: non si può scrivere $a - x$ perché non si sa se x sia maggiore di a , né $x - a$ per la ragione opposta. Ne trae una conclusione radicale:

Ne consegue che il segno —, considerato come esprimente la sottrazione, non può essere ammesso in Algebra. L'Algebra, dovendo occuparsi soltanto di quantità incognite o arbitrarie, non può ammettere alcuna sottrazione.²⁸

²⁶Elizabeth Lewis, autrice della voce biografica su Mourey per il *MacTutor History of Mathematics Archive* dell'Università di St Andrews (ultimo aggiornamento: febbraio 2015).

²⁷Il termine francese *mécanicien*, nell'uso ottocentesco, indicava una figura professionale distinta sia dall'*ingénieur*, titolo che richiedeva una formazione accademica specifica tipicamente alla École polytechnique o alla École centrale, sia dal semplice operaio: un tecnico esperto nella progettazione, costruzione o manutenzione di macchine e strumenti, spesso autodidatta o formato sul campo, che poteva lavorare in proprio o alle dipendenze di un'officina. Non è comunque un dato accertato per Mourey stesso: si veda oltre.

²⁸«Il suit de là que le signe —, considéré comme exprimant la soustraction, ne peut pas être admis en Algèbre. L'Algèbre, étant censée ne s'occuper que de quantités inconnues ou arbitraires, ne peut point admettre de soustraction» (Mourey 1861, n. 1, pp. 1-2).

Al posto della sottrazione, Mourey introduce la nozione di cammino (*chemin*): la linea intesa non come oggetto geometrico statico ma come un percorso "che conduce in un solo senso". Se un viaggiatore va da A a B e poi da B a C , sarà arrivato tanto lontano quanto se fosse andato direttamente da A a C , né più né meno: «Viaggio da A a B + viaggio da B a C equivale a viaggio da A a C »²⁹; cioè $AB + BC = AC$, un'identità che, a differenza della sottrazione, non ammette eccezioni, perché non descrive una differenza mascherata da addizione, ma la semplice composizione di due spostamenti successivi. Al posto di sottrarre un cammino si aggiunge il suo inverso: invece di togliere "4 leghe a sud", si aggiungono "4 leghe a nord". Ed è lo stesso Mourey a dichiarare, esplicitamente e senza indugio, la natura di questo principio fondamentale:

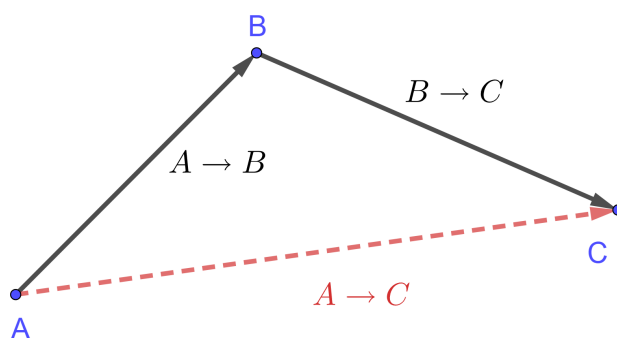


Figura 3.1: Rappresentazione della somma di due cammini, $AB + BC$, e della sua equivalenza con il cammino diretto AC .

Non bisogna trattenersi a discutere sul rigore di questo principio; per farla breve, bisogna considerarlo come una convenzione da ammettere. Si deve ammettere questa convenzione, se è utile: ora, essa è della massima utilità, poiché è l'unica che possa fornirci il modo di supplire, in Algebra, alla sottrazione.³⁰

Non è dunque un fondamento che si dimostra, ma un principio che si sceglie, e lo si sceglie in base alla sua utilità, non alla sua evidenza. Su questa base Mourey definisce positivo e negativo non come tipi di quantità dotati di natura propria, ma come pura relazione di direzione rispetto a un'unità scelta arbitrariamente: positivo è ciò che ha la stessa direzione dell'unità, negativo ciò che ha direzione opposta, una relazione, insiste, estesa «tutt'altro che ai numeri propriamente detti», tanto che i negativi risultano «altrettanto reali e palpabili quanto i positivi»³¹. Coerentemente con questa idea puramente relazionale, il

²⁹ «Voyage de A en B + voyage de B en C est équivalent à voyage de A en C » (Mourey 1861, n. 2, p. 3).

³⁰ «Il ne faut pas s'amuser à discuter sur la rigueur de ce principe; pour tirer au court, il faut le regarder comme une convention à admettre. On doit admettre cette convention, si elle est utile: or, elle est de la plus grande utilité, puisqu'elle seule peut nous fournir le moyen de suppléer, en Algèbre, à la soustraction» (Mourey 1861, n. 5, p. 5).

³¹ Mourey 1861, n. 16, pp. 12–13.

segno — stesso riceve una nuova interpretazione geometrica: applicato a un numero direttivo, equivale a farlo ruotare di due angoli retti, cioè di mezzo giro: «il segno — è dunque sinonimo del *verseur*³² 2, cioè di 2 angoli retti»³³.

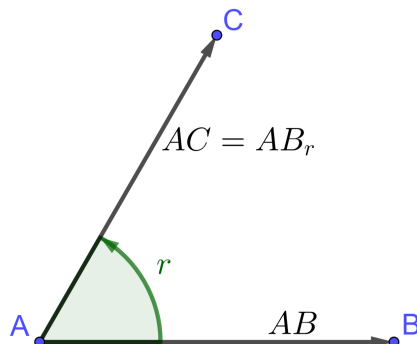


Figura 3.2: Il *verseur* r : il cammino AB , ruotato dell'angolo r attorno alla propria origine A , si sovrappone al cammino AC , di uguale lunghezza. Nella notazione di Mourey r è espresso in numero di angoli retti; il caso particolare dell'angolo piatto ($r = 2$) è mostrato nella figura successiva.

È su questa base che Mourey costruisce i propri numeri direttivi (*nombres directifs*): un numero che unisce una lunghezza a una direzione, indicata da un angolo. Se a_r indica un numero di lunghezza a ruotato dell'angolo r (misurato in angoli retti), la moltiplicazione si definisce non come nuova regola, ma come conseguenza diretta di ciò che significa moltiplicare per l'unità composta in quel modo:

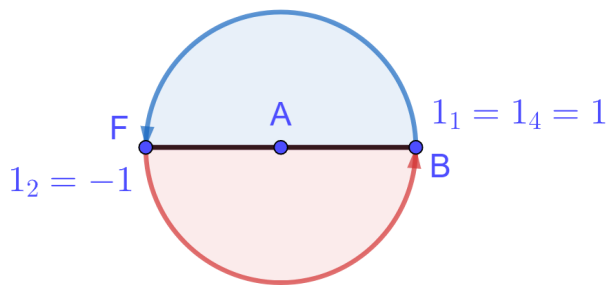


Figura 3.3: Il doppio *verseur* 2: due rotazioni successive di 2 angoli retti ciascuna riportano il cammino alla direzione di partenza, illustrando $1_2 \times 1_2 = 1_4 = 1$, cioè $-1 \times -1 = 1$.

³²Termine coniato dallo stesso Mourey: il *verseur* è l'angolo secondo cui un cammino viene "versato", cioè ruotato, per sovrapporsi a un altro.

³³«Le signe — est donc synonyme du *verseur* 2 (c'est-à-dire, 2 angles droits)» (Mourey 1861, n. 28, p. 25).

Per moltiplicare una quantità per un numero direttivo, bisogna operare sul moltiplicando, per moltiplicazione propriamente detta, per divisione propriamente detta, e per versione, nello stesso modo in cui bisognerebbe operare sull'unità per comporre il moltiplicatore [...] Dunque, in generale, per moltiplicare per b_s , bisogna moltiplicare per b , e versare per s .³⁴

Da ciò segue che $a_r \times b_s = ab_{r+s}$: moltiplicare due numeri direttivi significa moltiplicarne le lunghezze e sommarne gli angoli. La regola dei segni non è più un enigma da giustificare separatamente: è un caso particolare di questa somma, tanto ovvio quanto $2 + 2 = 4$. Mourey stesso lo mostra con un esempio che vale la pena riportare per intero, perché è la dimostrazione più diretta possibile: « $1_2 \times 1_2 = 1_4 = 1$, ossia $-1 \times -1 = 1$ »³⁵. Moltiplicare due volte per il *verseur* di due angoli retti significa ruotare complessivamente di quattro angoli retti, un giro completo, che riporta alla direzione di partenza: "meno per meno fa più" per nessun'altra ragione se non perché $2 + 2 = 4$, cioè un giro completo. E Mourey, ancora una volta, non lascia equivoci sulla natura di questa definizione:

Riguardo a questa definizione della moltiplicazione, farò la stessa osservazione che ho fatto a proposito di quella dell'addizione (n° 5): non bisogna considerarla come una verità da dimostrare, ma soltanto come una convenzione da ammettere. Si deve ammettere questa convenzione se è utile: ora, essa è molto utile, perché ne risulta, come si vedrà, che tutte le formule dell'Algebra esprimono quantità reali, e che si applicano molto vantaggiosamente alla Geometria.³⁶

È un capovolgimento che vale la pena notare esplicitamente e che Mourey stesso sottolinea richiamando l'osservazione che aveva già fatto in precedenza: gli autori analizzati nel Capitolo 2, da Agnesi a Ruffini, cercavano una definizione che fosse innanzitutto corretta, ancorata a un fatto verificabile: un debito, un moto, una lunghezza. Mourey giudica la propria costruzione dal fatto che funzioni, dalla sua utilità, non dalla sua corrispondenza a una realtà preesistente. È lo stesso passaggio dall'antico al moderno che attraverserà, in forma più sistematica, la seconda metà di questo capitolo.

Se l'opera di Mourey resta un caso isolato, non è però un caso senza eco. A poca distanza da Parigi, e quasi negli stessi anni, un altro autore ancora più sconosciuto di lui arriva, per una strada che rivendicherà come indipendente, a

³⁴ «Pour multiplier une quantité par un nombre directif, il faut opérer sur le multiplicande, par multiplication proprement dite, par division proprement dite, et par version, de la même manière qu'il faudrait opérer sur l'unité pour composer le multiplicateur [...] Donc, en général, pour multiplier par b_s , il faut multiplier par b , et verser par s » (Mourey 1861, n. 38, pp. 30–31).

³⁵ Mourey 1861, n. 38, p. 31.

³⁶ «Par rapport à cette définition de la multiplication, je ferai la même observation que j'ai faite relativement à celle de l'addition (n° 5): il ne faut pas la regarder comme une vérité à démontrer, mais seulement comme une convention à admettre. On doit admettre cette convention si elle est utile: or, elle est très-utile, car il en résulte, comme on le verra, que toutes les formules de l'Algèbre expriment des quantités réelles, et qu'elles s'appliquent très-avantageusement à la Géométrie» (Mourey 1861, n. 38, p. 31).

una conclusione sorprendentemente simile.

Di Ambroise Faure sappiamo ancora meno che di Mourey: non è stato possibile reperire date di nascita o morte certe, nemmeno approssimative. Il frontespizio del suo *Essai* lo qualifica come membro associato-corrispondente dell'Académie Royale des Sciences, Arts et Belles-Lettres di Caen, ma la stampa avviene a Gap, nelle Alte Alpi, dove Faure risulta autore anche di altre due opere didattiche, *Éléments de Géométrie* e *Leçons d'Arithmétique*, segno di un'attività di manualista provinciale, lontana dai circuiti matematici parigini³⁷.

Nella prefazione alla *Première mémoire* del 1845, Faure colloca esplicitamente il proprio lavoro in una linea di ricerca che include Buée (1806), Argand (1806) e Français (1814), mentre si limita a segnalare titolo e data di pubblicazione dell'opera di Mourey senza soffermarsi sul contenuto³⁸. Rivendica però anche, con una franchezza non scontata, un margine di indipendenza: «Mi permetterò solo di dire che ho consegnato, nel 1828, al signor Fourier, segretario dell'Institut, prima della pubblicazione dell'opera del signor Mourey, un piccolo manoscritto che racchiudeva una parte dei principi che espongo in questa prima memoria.»³⁹. Cita comunque tutti i predecessori con cura scrupolosa: «Se provo a mettere il mio granello di sabbia nell'edificio matematico, sono ben lontano dal cercare di sottrarre o distogliere a mio vantaggio nulla di ciò che appartiene a coloro che mi hanno preceduto. È per questo che li cito con cura, affinché si possano vedere i loro lavori e non mi si lasci che ciò che mi è dovuto»⁴⁰.

Il punto in cui Faure supera Mourey, più che ripeterlo, è nell'ampiezza del programma: non si limita a fondare i numeri negativi sulla rotazione ma unifica esplicitamente positivo, negativo e immaginario come tre casi particolari di un'unica operazione sugli angoli. Se i numeri negativi, scrive, hanno già dimostrato la propria utilità in geometria a partire da Descartes, ci si può chiedere se anche gli immaginari, che devono la propria esistenza a questioni altrettanto "impossibili", non possano ricevere un'interpretazione analoga⁴¹. La risposta è affermativa e generale:

Se il positivo deve prendersi a destra, per esempio, e il negativo a sinistra, l'immaginario deve prendersi tutt'intorno all'origine, cioè l'immaginario risponde a una direzione qualunque, di cui il positivo e il negativo non sono, come abbiamo detto, che due casi particolari.⁴²

Più avanti Faure formalizza questa intuizione in termini di angolo rispetto all'asse, con una precisione che Mourey stesso non aveva raggiunto in forma così compatta:

³⁷Un catalogo attribuisce a un Ambroise Faure le date 1795 e 1871 per la sua nascita e morte ma non è stato possibile confermare con certezza che si tratti dello stesso autore.

³⁸«En 1828, M. Mourey publia un écrit intitulé *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*» (Faure 1845, Préface).

³⁹«Je me permettrai seulement de dire que j'ai remis, en 1828, à M. Fourier, secrétaire de l'Institut, avant la publication de l'ouvrage de M. Mourey, un petit manuscrit qui renfermait une partie des principes que j'expose dans ce premier mémoire» (Faure 1845, Préface); grafia originale «Fourrier».

⁴⁰«Si j'essaie de mettre mon grain de sable à l'édifice mathématique, je suis bien éloigné de chercher à dérober ou à détourner à mon profit rien de ce qui appartient à ceux qui m'ont précédé. C'est pour cela que je les cite avec soin, afin qu'on puisse voir leurs travaux et ne me

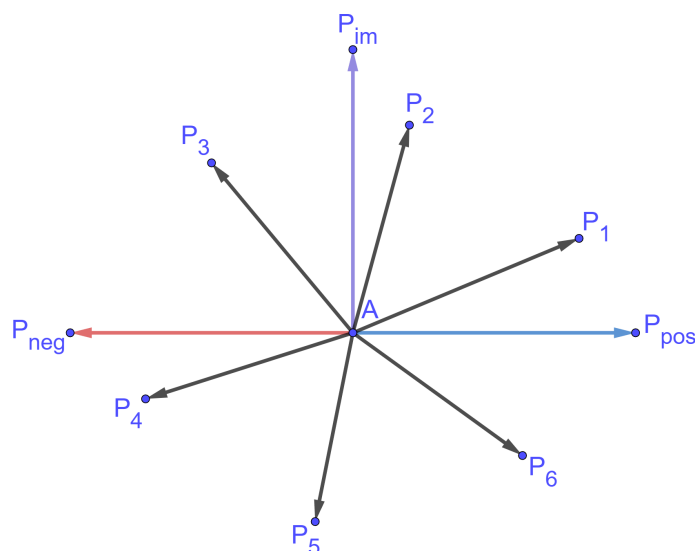


Figura 3.4: Rappresentazione dei numeri positivi (blu), negativi (rosso) e immaginari (viola): per Faure, ciascun numero è individuato da una direzione rispetto all'origine, e positivo, negativo e immaginario ne sono tre casi particolari fra un fascio di direzioni possibili.

Se il risultato è del tutto reale e positivo, l'angolo rispetto all'asse è zero. Se il risultato è negativo, l'angolo rispetto all'asse è di due angoli retti. Se il risultato è del tutto immaginario, l'angolo rispetto all'asse è un angolo retto. Se il risultato è in parte reale e in parte immaginario, l'angolo rispetto all'asse, ossia l'inclinazione, ha per tangente trigonometrica la parte immaginaria divisa per la parte reale.⁴³

Zero, un angolo retto, due angoli retti: reale positivo, immaginario puro e negativo non sono più tre categorie eterogenee da giustificare separatamente, ciascuna con la propria storia di sospetto e resistenza: sono tre valori discreti di un unico parametro continuo, l'angolo di rotazione. E quando Faure arriva, come Mourey, alla regola dei segni della moltiplicazione, la ritrova, indipendentemente e con la propria notazione, come conseguenza immediata della somma degli angoli, non come principio a sé:

laisser que ce qui m'est dû» (Faure 1845, Préface).

⁴¹Faure 1845, n. 2, p. 3.

⁴²«Si le positif doit se prendre à droite (par exemple) et le négatif à gauche, l'imaginaire doit se prendre tout autour de l'origine, c'est-à-dire que l'imaginaire répond à une direction quelconque dont le positif et le négatif ne sont, comme nous avons dit, que deux cas particuliers» (Faure 1845, n. 3, p. 3).

⁴³«Si le résultat est tout réel et positif, l'angle à l'axe est zéro. Si le résultat est négatif, l'angle à l'axe est de deux droites. Si le résultat est tout imaginaire, l'angle à l'axe est un droit. Si le résultat est en partie réel et en partie imaginaire, l'angle à l'axe ou l'inclinaison a pour tangente trigonométrique la partie imaginaire divisée par la partie réelle» (Faure 1845, n. 26, p. 11).

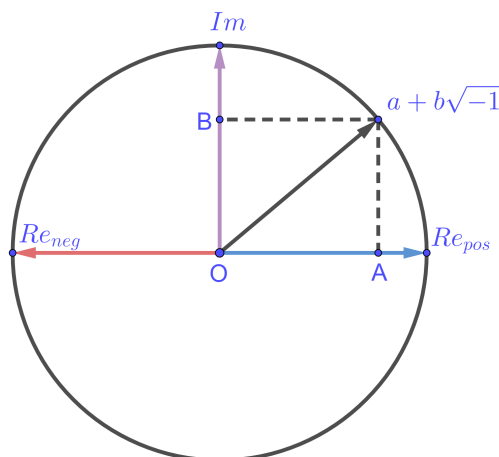


Figura 3.5: Rappresentazione dei quattro casi di Faure sul cerchio goniometrico: reale positivo (inclinazione zero), immaginario puro (un angolo retto), negativo (due angoli retti), e il caso misto $a + b\sqrt{-1}$, la cui inclinazione ha per tangente trigonometrica b/a — con la scomposizione in parte reale (OA) e parte immaginaria (OB).

La regola dei segni della moltiplicazione algebrica è un caso particolare di questo [...] Moltiplicando $+1$ per $+1$ si deve trovare la somma delle inclinazioni, cioè l'inclinazione zero, ossia $+1$. -1 ha un'inclinazione di due angoli retti: moltiplicato per $+1$, che non ha inclinazione, deve dare due retti, ossia -1 . Poi -1 per -1 deve dare le due inclinazioni, ossia quattro retti, cioè tornare sull'asse a destra, ossia $+1$.⁴⁴

È lo stesso risultato di Mourey, raggiunto per una via indipendente e con un'ambizione dichiaratamente più ampia: non solo i negativi, ma l'intero edificio dei numeri complessi unificato grazie all'operazione di rotazione.

Che due autori isolati, l'uno forse un tecnico parigino senza cattedra né allievi, l'altro un manualista di provincia associato a un'accademia periferica, siano arrivati alla stessa intuizione geometrica quasi negli stessi anni, senza che nessuno dei due trovasse ascolto tra "i matematici di grido", è forse il segno più eloquente di come questa sezione debba essere letta: non come la storia di un'idea isolata, ma come quella di una necessità concettuale che si affacciava, nello stesso momento, da più parti alla volta.

Non è solo la via geometrica, del resto, ad avvertire questa necessità. Cauchy la intravede e la richiude subito in una definizione presentata come sviluppo

⁴⁴ «La règle des signes de la multiplication algébrique est un cas particulier de ceci [...] En multipliant $+1$ par $+1$ on doit trouver la somme des inclinaisons, c'est-à-dire, l'inclinaison zéro ou $+1$. -1 a une inclinaison de deux angles droits: multiplié par $+1$, qui n'a point d'inclinaison, il doit donner deux droits ou -1 . Ensuite -1 par -1 doit donner les deux inclinaisons ou quatre droits, c'est-à-dire, revenir à l'axe à droite, ou à $+1$ » (Faure 1845, n. 33, pp. 15-16).

naturale, non come scelta dichiarata (§3.1); la scuola del silenzio la nomina apertamente, ma senza mai costruire l'apparato che dovrebbe sostenerla (§3.2); Mourey e Faure costruiscono davvero quell'apparato, in una forma completa e funzionante, eppure restano più isolati di chiunque altro, perché nessuno, nel loro tempo, seppe riconoscere in una convenzione geometrica la stessa domanda che altrove restava insoddisfatta. Aritmetica, retorica, geometria: ciascuna via, a suo modo, sente che il problema non si chiude senza una formalizzazione vera e propria. È a questo compito, non più affidato a intuizioni isolate ma perseguito come programma dichiarato, che si dedica la sezione seguente.

3.4 L'algebra simbolica

La via geometrica di Mourey e Faure aveva risolto il problema dei numeri negativi ancorandoli a un nuovo terreno, la rotazione nel piano, ma restava, in fondo, un'interpretazione: i numeri direttivi erano pur sempre resi intuitivi da un disegno, da un cammino, da un angolo. La strada che questa sezione ripercorre è più radicale e, per certi versi, più scomoda: rinunciare del tutto all'idea che l'algebra debba appoggiarsi a un'interpretazione — geometrica, contabile o cinematica — per essere legittima. Se i segni sono, come già Cauchy aveva intuito senza dichiararlo apertamente, oggetti che obbediscono a leggi proprie di combinazione, indipendenti dalla natura di ciò che modificano, allora l'algebra può essere ridefinita come scienza di quelle leggi, non come scienza delle quantità a cui tali leggi vengono applicate. È questo lo scarto che compiono, in modo sempre più esplicito, Peacock, Gregory e Hankel: dall'algebra come aritmetica generalizzata, bisognosa di un referente per essere vera, all'algebra come sistema simbolico autonomo, la cui unica condizione di validità è la coerenza interna delle proprie regole.

George Peacock nacque il 9 aprile 1791 a Thornton Hall, Denton, contea di Durham, figlio del reverendo Thomas Peacock, curato perpetuo della parrocchia locale per cinquant'anni e maestro di scuola. Entrò al Trinity College di Cambridge nel 1809 e vi si laureò nel 1813 come Second Wrangler, secondo classificato nell'intero anno accademico in matematica, alle spalle del Senior Wrangler John Herschel. Ancora studente, strinse con Herschel e con Charles Babbage un sodalizio che ebbe conseguenze durature per la matematica britannica: insieme fondarono nel 1812 la Analytical Society, il cui obiettivo dichiarato era liberare Cambridge dalla notazione di Newton in favore del calcolo differenziale continentale di Leibniz, la stessa battaglia per cui, come si è visto in §3.2, Woodhouse aveva già preparato il terreno una generazione prima. Divenne fellow del Trinity nel 1814, tutor nel 1823. Nel 1830 pubblicò il *Treatise on Algebra*, l'opera su cui si sofferma questa sezione. Divenuto professore lowndeano di astronomia nel 1837 e decano di Ely nel 1839, riscrisse l'opera durante gli anni della sua carica ecclesiastica in due volumi distinti e separati, *Arithmetical Algebra* nel 1842 e *Symbolical Algebra* nel 1845, trasformando in struttura editoriale la distinzione concettuale che aveva proposto dodici anni

prima. Tra i suoi allievi al Trinity figurarono Augustus De Morgan⁴⁵ e Arthur Cayley⁴⁶. Morì a Londra l'8 novembre 1858 e fu sepolto a Ely.

La lunga prefazione al *Treatise* del 1830 dichiara fin dalle prime righe un obiettivo che nessuno degli autori precedenti aveva formulato con altrettanta chiarezza programmatica: conferire all'algebra «il carattere di una scienza dimostrativa», rendendone i primi principi «coestensivi con le conclusioni che su di essi si fondano»⁴⁷. Il problema che Peacock individua nell'algebra corrente è precisamente quello che ha attraversato l'intero Capitolo 2: l'algebra è sempre stata considerata «una modificazione dell'Aritmetica derivante dall'uso del linguaggio simbolico», con le operazioni di una scienza trasferite all'altra «senza alcuna dichiarazione di un'estensione del loro significato e della loro applicazione»⁴⁸. È esattamente la critica implicita che questa tesi ha ricostruito attraverso Agnesi, Ruffini, Cauchy: nessuno di loro aveva mai dichiarato apertamente che stava estendendo il significato delle operazioni oltre il dominio aritmetico in cui erano nate; lo facevano, ma senza dirlo.

L'aritmetica, insiste Peacock, può essere considerata soltanto una «Scienza di Suggerimento, alla quale i principi e le operazioni dell'Algebra sono adattati, ma dalla quale non sono né limitati né determinati»⁴⁹. L'aritmetica suggerisce l'algebra, le offre esempi, intuizioni, un vocabolario, ma non può mai fondarla né vincolarla.

Peacock lo dimostra considerando l'espressione $a - (a + b)$ che è palesemente impossibile nell'aritmetica ordinaria: non si può sottrarre da a una quantità maggiore di a stesso. Ma se si sostituisce $a + b$ con un unico simbolo c , l'espressione $a - c$ appare innocua, pur essendo, insiste Peacock, ugualmente impossibile quanto $a - (a + b)$ ⁵⁰. È il simbolo stesso, generale e cieco alla propria origine, a nascondere l'impossibilità che l'espressione estesa avrebbe rivelato. Da qui la mossa decisiva:

L'ipotesi dell'esistenza indipendente dei segni $+$ e $-$ rimuove questa limitazione [...] è questa ipotesi che produce la separazione tra algebra aritmetica e algebra simbolica e che rende necessario stabilire i principi di questa scienza su una base propria: poiché l'ipotesi

⁴⁵ Augustus De Morgan (1806-1871), matematico e logico, tra i fondatori e primo presidente della London Mathematical Society; noto soprattutto per le leggi di De Morgan in logica booleana.

⁴⁶ Arthur Cayley (1821-1895), tra i matematici britannici più prolifici dell'Ottocento, pioniere dell'algebra delle matrici e della teoria dei gruppi.

⁴⁷ «[...] with a view of conferring upon Algebra the character of a demonstrative science, by making its first principles co-extensive with the conclusions which were founded upon them» (Peacock 1830, p. v).

⁴⁸ «Algebra has always been considered as merely such a modification of Arithmetic as arose from the use of symbolic language, and the operations of one science have been transferred to the other without any statement of an extension of their meaning and application» (Peacock 1830, p. vi).

⁴⁹ «Arithmetic can only be considered as a Science of Suggestion, to which the principles and operations of Algebra are adapted, but by which they are neither limited nor determined» (Peacock 1830, p. viii).

⁵⁰ «thus $a - (a + b)$ would obviously express an impossible operation in such a system of Algebra; but if $a + b$ was replaced by a single symbol c , the expression $a - c$, though equally impossible with $a - (a + b)$, would cease to express it.» (Peacock 1830, p. viii).

in questione non può risultare da alcun processo di ragionamento a partire dai principi o dalle operazioni dell'Aritmetica [...] dev'essere considerata dunque un principio indipendente, suggerito come mezzo per porre fine a una difficoltà.⁵¹

Non è più, come in Cauchy, un teorema che si dimostra a partire da premesse poste altrove: è un principio che si dichiara indipendente per definizione, perché nessun ragionamento aritmetico potrebbe mai produrlo.

Da questa separazione discende il principio per cui Peacock è oggi ricordato: la permanenza delle forme equivalenti.

Il principio della permanenza delle forme equivalenti [...] deve trarre la propria autorità dal punto di vista che ho adottato riguardo ai principi dell'Algebra e alla loro connessione con l'Aritmetica, considerata come scienza di suggerimento: poiché, in primo luogo, questo principio assume le operazioni dell'Algebra e i loro risultati come del tutto indipendenti dai valori specifici dei simboli, ed esistenti dunque come forme equivalenti per tutti i valori che tali simboli possano assumere, quando sono generali nella forma; e in secondo luogo permette di considerare le forme equivalenti dimostrate nell'algebra aritmetica, dove i simboli sono generali nella forma ma specifici nel valore, come necessariamente le stesse anche nell'algebra simbolica.⁵²

Detto in astratto, il principio rischia di suonare come una petizione di principio. Peacock lo rende invece operativo, e lo fa, significativamente, non nella prefazione ma nel corpo stesso dei due volumi in cui l'opera sarà riscritta dodici anni più tardi, dove la distinzione tra algebra aritmetica e algebra simbolica informa la struttura editoriale oltre che concettuale.

Nel primo volume, *Arithmetical Algebra* (1842), Peacock resta rigorosamente dentro i confini in cui a , b , c , d sono numeri positivi e le sottrazioni sono vincolate ($a > b$, $c > d$). Qui la regola dei segni non è affatto una convenzione: è dimostrata. Con un argomento di pura grandezza, senza calcolo simbolico, stabilisce dapprima $(a + b)c = ac + bc$ ⁵³ e poi, allo stesso modo, $(a - b)c =$

⁵¹ «The assumption however of the independent existence of the signs + and – removes this limitation [...] it is this assumption with effects the separation of arithmetical and symbolical Algebra, and which renders it necessary to establish the principles of this science upon a basis of their own: for the assumption in question can result from no process of reasoning from the principles or operations of Arithmetic [...] it must be considered therefore as an independent principle, which is suggested as a means of ending a difficulty» (Peacock 1830, pp. viii–ix).

⁵² «The principle of the permanence of equivalent forms [...] must derive its authority from the view which I have taken of the principles of Algebra and of their connection with Arithmetic, considered as a science of suggestion: for in the first place, this principle assumes the operations of Algebra and their results as altogether independent of the specific values of the symbols, and equivalent forms as existing therefore for all values such symbols may be supposed to possess, when they are general in form: and in the second place it enables us to consider the equivalent forms which are proved in arithmetical Algebra, where the symbols are general in form, though specific in value, as necessarily the same likewise in symbolical Algebra» (Peacock 1830, pp. xvii–xviii).

⁵³ Peacock 1842, Art. 45, p. 25.

$ac - bc$ ⁵⁴. Per il caso più delicato, $(a - b)(c - d)$, introduce la sostituzione $x = a - b$, sviluppa $x(c - d) = cx - dx = (a - b)c - (a - b)d$, e infine sviluppa il secondo termine cambiando i segni tra parentesi, ottenendo $ac - ad - bc + bd$ ⁵⁵. Osservando i quattro casi così ottenuti — positivo per positivo, positivo per negativo, negativo per positivo, negativo per negativo — enuncia finalmente la regola:

Il prodotto di due termini positivi o di due termini negativi è positivo: il prodotto di un termine negativo e uno positivo, o di uno positivo e uno negativo, è negativo.⁵⁶

È il punto più importante da cogliere e facilmente frainteso: dentro l'algebra aritmetica, la regola dei segni non ha bisogno del principio di permanenza. È una conseguenza delle proprietà elementari delle operazioni aritmetiche, non una convenzione, perché ogni simbolo resta ancorato a un valore numerico specifico e positivo.

Il principio interviene solo quando, nel secondo volume *Symbolical Algebra* (1845), occorre estendere la stessa regola al caso in cui i simboli diventino "generalizzati nel valore oltre che nella forma": cioè quando b può superare a , rendendo $a - b$ un'entità che l'algebra aritmetica non ammetterebbe. Qui Peacock riprende la formula già dimostrata, $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$, indicata con (1), e ne assume la permanenza per ogni valore possibile dei simboli. Da questa sola ipotesi, ponendo successivamente due dei quattro termini uguali a zero, ricava i quattro casi della regola come conseguenza necessaria:

Se supponiamo $b = 0$ e $d = 0$, il prodotto (1) diventa $(a - 0)(c - 0) = ac - a \times 0 - 0 \times c + 0 \times 0$, cioè $a \times c = ac$, eliminando i termini che coinvolgono lo zero.

Se supponiamo $b = 0$ e $c = 0$: $(a - 0)(0 - d) = a \times 0 - ad - 0 \times 0 + 0 \times d$, cioè $a \times -d = -ad$.

Se supponiamo $a = 0$ e $d = 0$: $(0 - b)(c - 0) = 0 \times c - 0 \times 0 - bc + b \times 0$, cioè $-b \times c = -bc$.

Se supponiamo infine $a = 0$ e $c = 0$: $(0 - b)(0 - d) = 0 \times 0 - 0 \times d - b \times 0 + bd$, cioè $-b \times -d = bd$.⁵⁷

Non un nuovo calcolo, ma un azzeramento mirato all'interno di un risultato già acquisito: la regola dei segni per le quantità propriamente simboliche, cioè per quelle libere di assumere qualunque valore, comprese le "impossibilità" che l'aritmetica escludeva, discende come conseguenza obbligatoria dell'aver assunto che la forma resti permanente. È qui, con questa tecnica precisa, che il principio

⁵⁴Peacock 1842, Art. 46, p. 25.

⁵⁵Peacock 1842, Art. 56, p. 29.

⁵⁶«The product of two positive or of two negative terms is positive: the product of a negative and a positive or of a positive and a negative term is negative» (Peacock 1842, Art. 57, p. 30).

⁵⁷«If we suppose $b = 0$ and $d = 0$, the product (1) in question becomes $(a - 0)(c - 0) = ac - a \times 0 - 0 \times c + 0 \times 0$, or $a \times c = ac$, obliterating the terms which involve zero. If we suppose $b = 0$ and $c = 0$, we get $(a - 0)(0 - d) = a \times 0 - ad - 0 \times 0 + 0 \times d$, or $a \times -d = -ad$. If we suppose $a = 0$ and $d = 0$, we get $(0 - b)(c - 0) = 0 \times c - 0 \times 0 - bc + b \times 0$, or $-b \times c = -bc$. If we suppose $a = 0$ and $c = 0$, we get $(0 - b)(0 - d) = 0 \times 0 - 0 \times d - b \times 0 + bd$, or $-b \times -d = bd$ » (Peacock 1845, Art. 569, pp. 17–18).

smette di essere dichiarazione filosofica e diventa strumento operativo: la linea di confine tra ciò che si dimostra e ciò che si assume per principio non potrebbe essere più netta.

Per quanto radicale, il principio di permanenza di Peacock non recide mai del tutto il legame con l'aritmetica: la chiama "scienza di suggerimento" proprio perché resta la fonte a cui l'algebra simbolica guarda per estendere le proprie forme. È un allievo della stessa Cambridge, di pochi anni più giovane, a tagliare anche quest'ultimo filo, e lo fa dichiarando esplicitamente, in apertura del proprio saggio, di muovere le proprie considerazioni dal lavoro di Peacock.

Duncan Farquharson Gregory nacque a Edimburgo nell'aprile 1813, ultimo figlio di James Gregory, professore di medicina. Perse il padre prima dei sette anni. Dopo gli studi alla Edinburgh Academy e un periodo in un collegio privato a Ginevra, dove il suo talento per la matematica fu notato per la prima volta, frequentò l'Università di Edimburgo sotto la guida del proprio mentore, il professor William Wallace. Nel 1833 si trasferì al Trinity College di Cambridge, dove si laureò nel 1837 con i più alti voti in matematica. Fu solo dopo la laurea, libero finalmente di seguire le proprie speculazioni originali, che rivolse l'attenzione alla teoria generale della combinazione dei simboli: pochi mesi più tardi compose il saggio *On the Real Nature of Symbolical Algebra*, letto il 14 maggio 1838 alla Cambridge Philosophical Society. Fu eletto fellow del Trinity nel 1840, conseguì il titolo di Master of Arts l'anno successivo e fu nominato moderator, l'esaminatore matematico principale. Nel 1841 pubblicò anche una raccolta di *Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus*. Fu in questi stessi anni, tra impegni di insegnamento e ricerca, che avvertì i primi sintomi della malattia che lo avrebbe portato alla morte: il primo attacco risale alla fine del 1842 e nella primavera del 1843 lasciò Cambridge per non farvi mai più ritorno. Morì il 23 febbraio 1844, a trent'anni compiuti da poco: il più giovane, fra i protagonisti di questo capitolo, a lasciare un lavoro ancora in pieno svolgimento. Ellis apre la propria memoria biografica proprio su questo dato e sul suo contrasto con quanto Gregory aveva già raggiunto: «l'autore delle pagine che seguono», scrive, «morì nel suo trentunesimo anno. Aveva tuttavia realizzato abbastanza non solo da giustificare grandi aspettative sui suoi progressi futuri nella scienza a cui si era principalmente dedicato, ma anche da meritare al proprio nome un posto in qualche documento permanente»⁵⁸.

On the Real Nature of Symbolical Algebra si apre con un riconoscimento esplicito di debito verso Peacock, definito da Gregory «l'unico autore in questo paese che abbia tentato di scrivere un sistema di algebra fondato sulla considerazione di principi generali»⁵⁹.

La definizione con cui Gregory apre il proprio programma è la più netta incontrata finora in questo capitolo:

⁵⁸ «The subject of the following memoir died in his thirty-first year. He had, nevertheless, accomplished enough not only to justify high expectations of his future progress in the science to which he had principally devoted himself, but also to entitle his name to a place in some permanent record» (Ellis 1865, p. xi).

⁵⁹ «Mr. Peacock is, I believe, the only writer in this country who has attempted to write a system of algebra founded on a consideration of general principles» (Gregory 1865, p. 1).

Il punto di vista da cui vorrei considerare l'algebra simbolica è che essa sia la scienza che tratta della combinazione di operazioni definite non dalla loro natura, cioè da che cosa esse siano o da che cosa facciano, ma dalle leggi di combinazione a cui sono soggette.⁶⁰

Le leggi, ammette Gregory, sono in molti casi «suggerite» — riprende deliberatamente il verbo che già era stato di Peacock — dalle leggi note delle operazioni sui numeri; ma il passo che separa l'algebra aritmetica da quella simbolica consiste proprio nel «lasciare fuori vista la natura delle operazioni che i simboli rappresentano», supponendo l'esistenza di classi di operazioni sconosciute soggette alle medesime leggi⁶¹.

Per rendere concreto il proprio programma, Gregory introduce due simboli generali F e f , «per rappresentare operazioni qualunque, la cui natura sia sconosciuta», soggette a quattro leggi di combinazione⁶²:

$$\begin{aligned} (1) \quad FF(a) &= F(a), & (2) \quad ff(a) &= F(a), \\ (3) \quad Ff(a) &= f(a), & (4) \quad fF(a) &= f(a). \end{aligned}$$

Osservando le operazioni dell'aritmetica, scrive Gregory, se ne trovano due, addizione e sottrazione, soggette esattamente a queste leggi; propone di chiamare questa classe «operazioni circolari o riproduttive»⁶³. Ma il punto decisivo arriva subito dopo, quando Gregory guarda alla geometria:

Osservando poi la geometria, troviamo due operazioni soggette alle stesse leggi. Quella corrispondente a $+$ è la rotazione di una linea, o piuttosto il trasferimento di un punto, lungo un'intera circonferenza; quella corrispondente a $-$ è il trasferimento di un punto lungo una semicirconferenza.⁶⁴

E ne trae la conclusione più radicale del saggio:

Vediamo chiaramente da ciò che non esiste alcuna analogia reale tra la natura delle operazioni $+$ e $-$ in aritmetica e in geometria, come si suppone generalmente essere il caso [...] La relazione che pure esiste non è dovuta ad alcuna identità della loro natura, ma semplicemente al fatto che esse sono combinate dalle medesime leggi.⁶⁵

⁶⁰ «The light in which I would consider symbolical algebra, is, that it is the science which treats of the combination of operations defined not by their nature, that is, by what they are or what they do, but by the laws of combination to which they are subject» (Gregory 1865, p. 2).

⁶¹ Gregory 1865, p. 2.

⁶² Gregory 1865, p. 3.

⁶³ Gregory 1865, p. 3.

⁶⁴ «Again, on looking into geometry, we find two operations which are subject to the same laws. The one corresponding to $+$ is the turning of a line, or rather transferring of a point, through a circumference; the other corresponding to $-$ is the transference of a point through a semicircumference» (Gregory 1865, p. 3).

⁶⁵ «We see clearly from this, that there is no real analogy between the nature of the operations $+$ and $-$ in arithmetic and geometry, as is generally supposed to be the case [...] The relation which does exist is due not to any identity of their nature, but to the fact of their being combined by the same laws» (Gregory 1865, pp. 3–4).

È un passaggio che merita di essere isolato con cura, perché rovescia, punto per punto, l'intuizione che ha sorretto ogni tentativo geometrico incontrato in questa tesi, da Wallis a Mourey e Faure: non è perché "meno" assomiglia a "girare di mezzo giro" che le due operazioni si comportano allo stesso modo; è perché entrambe, indipendentemente dalla propria natura specifica, obbediscono per definizione alle stesse quattro equazioni. L'aritmetica e la geometria smettono di essere l'una il modello intuitivo dell'altra: diventano due istanze accidentali di un'unica struttura formale, di cui né l'una né l'altra possiedono un titolo di priorità. Gregory aggiunge, quasi di sfuggita, che anche Peacock aveva considerato il trasferimento di proprietà, il vecchio modello del debito, come un'ulteriore istanza della stessa classe, ma se ne allontana subito perché, dice, «non vi è molto interesse ad esso legato dal punto di vista matematico»⁶⁶: un commiato quasi sprezzante nei confronti del modello che aveva dominato la scena matematica europea per secoli, da Fibonacci in avanti.

Gregory arriva fin qui, ma non oltre: mostra il fenomeno su due sole operazioni, aritmetiche e geometriche messe a confronto, senza mai dichiararlo un principio generale né usarlo per costruire qualcosa di nuovo. Tocca a un altro autore, tedesco e di una generazione più giovane, fare il passo che a Gregory manca.

Hermann Hankel nacque a Halle il 14 febbraio 1839, figlio del fisico Wilhelm Gottlieb Hankel. Studiò al Nicolai-Gymnasium di Lipsia e nel 1857 si iscrisse all'università della stessa città, dove seguì le lezioni di Moritz Drobisch, di August Ferdinand Möbius e del padre. Nel 1860 si trasferì a Göttingen, dove l'insegnamento di Riemann accese in lui l'interesse per la teoria delle funzioni; l'anno seguente fu a Berlino, allievo di Weierstrass e di Kronecker. Questo percorso itinerante fra più atenei era la consuetudine tedesca dell'epoca. Conseguì il dottorato a Lipsia nel 1862 e l'abilitazione nel 1863; ottenne la cattedra di professore straordinario a Lipsia nella primavera del 1867, ma già nell'autunno dello stesso anno si trasferì, come ordinario, a Erlangen, dove sposò Marie Dippe. Nel 1869 fu chiamato a Tubinga, dove insegnò fino alla morte, sopraggiunta il 29 agosto 1873, a soli trentaquattro anni: una scomparsa prematura che, come già per Gregory, interruppe una carriera ancora nel pieno del proprio sviluppo. Fra i suoi meriti va ricordato quello di aver contribuito a far conoscere in Germania l'opera di Hermann Grassmann, allora quasi del tutto ignorata.

Lo scarto fra la legge di combinazione e la natura dell'oggetto che la soddisfa, isolato da Gregory ma mai chiamato per nome, è ciò che Hermann Hankel, quasi trent'anni più tardi, battezza con un termine ormai canonico. La *Theorie der complexen Zahlensysteme*, pubblicata nel 1867, è in realtà solo la prima e unica parte realizzata di un progetto più ampio: in prefazione Hankel annuncia un secondo volume, dedicato alla teoria delle funzioni di variabile complessa, che avrebbe dovuto completare l'opera⁶⁷, promessa che la morte prematura, sei anni più tardi, gli impedì di mantenere.

⁶⁶Gregory 1865, p. 4.

⁶⁷«Der II. Theil dieses Werkes wird die Theorie der Functionen complexer Veränderlicher enthalten [...]» (Hankel 1867, p. ix).

Il volume si apre non con i numeri ma con le operazioni. Hankel distingue le operazioni "tetiche" (*thetische*), che si limitano a porre un risultato a partire da dati elementi, dalle operazioni "litiche" (*lytische*), che nascono per inversione delle prime⁶⁸: la sottrazione è la lisi dell'addizione, la divisione quella della moltiplicazione e, punto decisivo, il numero negativo altro non è che il segno che risolve l'equazione $x + b = c$ quando nessun numero della serie $1, 2, 3, \dots$ la soddisfa. È lo stesso movimento già incontrato più volte in questo capitolo, in Cauchy, Peacock e Gregory, ma qui, per la prima volta, è innalzato a principio generale di costruzione dell'intero sistema numerico, dagli interi ai complessi, prima ancora di sapere a quali oggetti quel sistema si applicherà.

È nel paragrafo intitolato, per l'appunto, *Princip der Permanenz formaler Gesetze* — il §.3 dell'opera — che Hankel formula la propria versione del principio che Peacock e Gregory avevano già cercato, il primo senza il rigore necessario e il secondo senza dargli un nome:

Se due forme espresse in segni generali dell'*arithmetica universalis*⁶⁹ sono uguali fra loro, esse devono restare uguali anche quando i segni cessano di designare grandezze semplici, e quindi anche le operazioni vengono a possedere un contenuto qualsiasi diverso da quello originario.⁷⁰

Nella nota storica che chiude il paragrafo, Hankel riconosce esplicitamente in Peacock il primo ad aver avvertito con decisione la necessità di una matematica formale, pur giudicandone la formulazione del 1834 troppo ristretta e priva della necessaria fondazione; dichiara di conoscere solo indirettamente i due trattati del 1842 e del 1845, e cita, come unico testo della scuola di Cambridge davvero consultato, proprio il saggio di Gregory appena discusso⁷¹: un'ammissione che chiude, con un filo diretto e documentato, l'arco che questa sezione ha costruito da Peacock a Hankel passando per Gregory.

Applicata ai numeri interi, nel §.10 dell'opera, la logica del principio di permanenza produce l'esempio più immediato e più vicino al tema di questa

⁶⁸ «Die vorstehenden Operationen nenne ich thetische im Gegensatze zu den lytischen, welche durch Umkehrung aus ihnen hervorgehen» (Hankel 1867, p. 4).

⁶⁹ Hankel dichiara esplicitamente la fonte del termine già nella *Vorrede*, alla primissima occorrenza dell'espressione: «Ich nehme dies Wort im Folgenden überall in dem durch Newton's gleichnamiges Werk bekannten Sinne» — "impiego questa parola, nel seguito, sempre nel senso reso noto dall'opera omonima di Newton" (Hankel 1867, p. vi). Il riferimento è alla *Arithmetica Universalis* (1707), già discussa in questa tesi al §3.2 (Newton 1761). Da qui anche la forma minuscola: per Hankel non si tratta di citare il titolo dell'opera, ma di adottarne il nome come termine tecnico generico per l'aritmetica generale, non più vincolata al significato concreto dei simboli.

⁷⁰ «Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der arithmetica universalis ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen» (Hankel 1867, p. 11).

⁷¹ «[...] George Peacock zu nennen. In seinem interessanten Report on Certain Branches of Analysis [...] ist das Princip der Permanenz freilich einerseits zu eng, andererseits ohne die nöthige Begründung aufgestellt. Die Werke [...] kenne ich ebensowenig [...] nur noch eine kurze Abhandlung von D. F. Gregory 'On the Real Nature of Symbolical Algebra' [...] zugänglich gewesen.» (Hankel 1867, p. 15).

tesi. Posti i tre casi $(-A)r = -Ar$, $A(-r) = -Ar$, $(-A)(-r) = Ar$, Hankel commenta, contro l'opinione allora dominante:

Non si potrà mai sottolineare abbastanza, contro un'opinione assai diffusa, che queste equazioni non possono in alcun modo essere dimostrate all'interno della matematica formale: sono convenzioni arbitrarie, adottate a vantaggio della conservazione del formalismo nel calcolo. (Se si considerano invece i numeri come rappresentanti dei punti di una retta, o, come si è detto anche più astrattamente, del progredire, allora quelle equazioni si possono certamente, come è noto, dimostrare.) Ma una volta stabilite queste convenzioni, tutte le altre leggi della moltiplicazione ne seguono per necessità.⁷²

Vale la pena isolare l'inciso fra parentesi: Hankel non nega affatto che la regola dei segni sia dimostrabile, anzi ammette esplicitamente che lo è se si accetta il modello dei numeri come punti di una retta orientata — il modello già incontrato a partire da Wallis (§2.3) e che Carnot, nella propria critica all'argomento "per successione" (§2.5), aveva giudicato inutilizzabile. Ciò che per Hankel è arbitrario non è la regola in sé, ma la sua pretesa di valere senza presupporre un simile modello: è arbitraria, cioè, proprio quella parte del calcolo che Cauchy (§3.1) aveva voluto fondare per pura ispezione delle equazioni, senza mai ricorrere a un'intuizione esterna. Il principio di permanenza non elimina dunque le vie geometriche percorse nella sezione precedente: le retrocede a interpretazioni possibili, ma non più necessarie, di una struttura che la matematica formale può ormai reggere da sola.

Guardato nel suo complesso, il percorso di questa sezione descrive una parabola precisa. Peacock dimostra la regola dei segni finché i simboli restano positivi, poi ne estende per pura ipotesi la validità a ogni valore, in virtù del principio di permanenza delle forme equivalenti. Gregory toglie di mezzo anche l'ipotesi: l'algebra simbolica non parla più di quantità ma di leggi di combinazione, e la regola smette di aver bisogno di un'interpretazione per essere vera. Hankel dà a questo movimento un nome e una portata generale, e ne trae la conseguenza più innovativa: la regola dei segni non è dimostrabile, è una convenzione, la stessa che, con altro nome, aveva già pervaso le considerazioni geometriche di Wallis e di Mourey (§3.3), qui riconosciuta come tale invece che occultata sotto un'intuizione.

Resta però una domanda che il principio di permanenza, da solo, non risolve: su che cosa, esattamente, si sta convenendo? Convenire su una legge presuppone ancora un oggetto — il numero negativo — la cui natura dovrebbe essere governata dalla legge stessa e su quella natura Peacock, Gregory e Hankel

⁷² «Es kann gegenüber einer sehr allgemein verbreiteten Ansicht nicht scharf genug hervor-gehoben werden, dass diese Gleichungen in der formalen Mathematik nimmermehr bewiesen werden können; es sind arbiträre Conventionen zu Gunsten der Erhaltung des Formalismus im Calcul. (Betrachtet man dagegen die Zahlen als Repräsentanten der Punkte einer Geraden, oder, wie man auch abstracter gesagt hat, des Fortschrittes, so kann man freilich, wie bekannt, die Gleichungen erweisen.) Sind aber diese Conventionen einmal geschlossen, so folgen daraus alle anderen Gesetze der Multiplication mit Nothwendigkeit» (Hankel 1867, p. 41).

restano in silenzio: hanno spostato il problema dal piano della dimostrazione a quello della definizione delle operazioni, ma non hanno mai smesso di trattare il numero negativo come una modificazione del numero assoluto, qualcosa a cui si aggiunge un segno dall'esterno. Resta un passo ulteriore, che la sezione seguente affronta: costruire il numero con segno da materiale privo di segno, in modo che la convenzione — mai eliminata, come si è visto, ma finora richiamata di volta in volta proprio nel punto in cui si arrivava alla regola dei segni — possa concentrarsi per intero in un solo atto: quello della costruzione dell'oggetto stesso.

3.5 La via costruttiva

Gli autori esaminati nelle sezioni precedenti hanno sempre trattato il numero negativo come un dato di partenza — un numero positivo a cui si aggiunge un segno — la cui legittimità si dimostra, si tace o si dichiara convenzione, ma la cui natura non viene mai davvero ridiscussa. Questa sezione segue invece quattro autori che tentano, ciascuno a modo proprio, il passo lasciato in sospeso finora: costruire quel numero da materiale che di segno non ne ha affatto.

Vale la pena rendere esplicita, prima di seguire ciascun autore, l'idea comune che li unisce. Si può rappresentare un numero con segno come una coppia (m, n) di numeri naturali, pensata come un residuo di m unità positive e n unità negative non ancora semplificato. La coppia $(m, 0)$ rappresenta il numero positivo m ; la coppia $(0, n)$ rappresenta il numero negativo $-n$; la coppia $(0, 0)$ rappresenta lo zero. Ma lo stesso numero può essere rappresentato da infinite coppie: due coppie (a, b) e (c, d) rappresentano lo stesso numero se, cancellando le unità opposte all'interno delle coppie, restituiscono la stessa coppia ridotta, cioè una coppia della forma $(m, 0)$ o $(0, n)$. Ad esempio, il numero positivo 3 può essere rappresentato tramite la coppia $(3, 0)$, ma anche dalla coppia $(5, 2)$ e in generale da qualunque coppia della forma $(3 + x, x)$.

È nella definizione della moltiplicazione che la costruzione per coppie mostra il proprio vantaggio. Si pone

$$(m, n) \times (m', n') := (mm' + nn', mn' + nm'),$$

cioè si sommano da un lato i prodotti dei termini "concordi" $(m \cdot m' + n \cdot n')$ e dall'altro quelli dei termini "discordi" $(m \cdot n' + n \cdot m')$. Non è una definizione arbitraria: è precisamente quella che riproduce, termine a termine, ciò che la proprietà distributiva impone sviluppando $(m - n)(m' - n')$ — è qui, in questa scelta, che la convenzione si concentra. Posta questa definizione, tutto il resto segue per pura deduzione, inclusa la regola dei segni, che resta un teorema a tutti gli effetti: non ha più bisogno, però, di essere invocata a parte con un'ipotesi o una convenzione dedicata al solo caso dei segni, perché discende automaticamente, come ogni altro caso particolare, dall'unica scelta fatta una volta per tutte. Infatti,

Positivo per positivo: $(a, 0) \times (b, 0)$ dà $mm' + nn' = ab + 0 = ab$ e $mn' + nm' = 0 + 0 = 0$; il risultato è $(ab, 0)$, cioè ab .

Positivo per negativo: $(a, 0) \times (0, b)$ dà $mm' + nn' = 0 + 0 = 0$ e $mn' + nm' = ab + 0 = ab$; il risultato è $(0, ab)$, cioè $-ab$. Il ragionamento è analogo per il prodotto negativo per positivo.

Negativo per negativo: $(0, a) \times (0, b)$ dà $mm' + nn' = 0 + ab = ab$ e $mn' + nm' = 0 + 0 = 0$; il risultato è $(ab, 0)$, cioè di nuovo ab .

La stessa regola che altrove in questo capitolo, da Cauchy a Peacock e Hankel, aveva richiesto ogni volta una dimostrazione separata, un'ipotesi o una convenzione dedicata apposta al caso dei segni, qui è un teorema come tutti gli altri che seguono dalla definizione del prodotto: non perché abbia smesso di essere una convenzione o un risultato dimostrato, ma perché, senza nessuna mossa aggiuntiva, risulta valida per ogni a e b .

Nessuno dei quattro autori che seguono userà esattamente questo lessico — "coppia", "aggregato", "quantità qualificata" designeranno, in bocca a Weierstrass, Méray e Couturat, la stessa idea vestita in tre modi diversi — ma è a questa struttura, in un modo o nell'altro, che tutti e quattro arrivano o si avvicinano.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nacque a Ostenfelde, in Vestfalia, il 31 ottobre 1815, figlio di un funzionario doganale i cui continui trasferimenti costrinsero la famiglia a cambiare casa più volte. Studiò dal 1834 al 1837 all'Università di Bonn, iscritto per volontà del padre a Scienze camerali, ma trascurò gli studi ufficiali per dedicarsi alla matematica, lasciando l'università senza laurea. Ottenne l'abilitazione all'insegnamento a Münster, dove l'incontro con Christoph Gudermann gli rivelò le funzioni ellittiche, e per quindici anni insegnò in oscuri ginnasi di provincia — a Deutsch-Krone, poi a Braunsberg — isolato dall'ambiente matematico, portando avanti in solitudine ricerche che nessuno conosceva. La svolta arrivò nel 1854, quando un articolo sulle funzioni abeliane gli valse un dottorato *honoris causa* a Königsberg e la notorietà immediata; nel 1856 fu chiamato a Berlino, dove insegnò fino alla fine della carriera. Da quel momento la sua influenza sulla matematica fu enorme, ma quasi interamente orale: Weierstrass non pubblicò quasi nulla della propria teoria delle funzioni, insegnandola solo a lezione in un ciclo di quattro corsi che ripeté più volte nell'arco di quasi trent'anni — sono proprio gli appunti di questi corsi, mai destinati alla stampa, l'unica fonte per il passaggio che segue. Morì a Berlino il 19 febbraio 1897.

Costruire il numero con segno come coppia di quantità senza segno, invece di giustificarne a posteriori il comportamento, è esattamente il passo che Weierstrass aveva già compiuto, con largo anticipo su chiunque altro si incontrerà in questa sezione, nelle lezioni berlinesi di teoria delle funzioni analitiche tenute a partire dal 1860. Prima di vedere come, una precisazione è d'obbligo, tanto più importante quanto più la si perde di vista: il suo obiettivo dichiarato non era affatto costruire i numeri con segno, né tantomeno i numeri reali — questi ultimi restano, nel suo corso, quasi un sottoprodotto — ma una nozione generale di numero complesso, capace di rispondere alla domanda che Gauss aveva lasciato aperta nel 1831 sull'esistenza di sistemi numerici con più di due

unità fondamentali — quelli che oggi si chiamano numeri ipercomplessi.⁷³ Gli interi con segno sono, in questo programma, solo il primo gradino di una scala che sale fino ai quaternioni e oltre — una ricerca importante e per certi versi sorprendente nella storiografia recente, ma che qui non seguiamo: ci fermiamo al gradino che riguarda il tema di questa tesi.

Poiché Weierstrass non scrisse mai questa parte del proprio insegnamento, ciò che segue non si basa su un testo a stampa dell'autore, ma sugli appunti dei suoi studenti — in particolare i quaderni di Hermann Amandus Schwarz, per l'anno accademico 1865-66 — così come sono stati di recente ritrascritti e commentati in uno studio storiografico che ha avuto accesso diretto a questo materiale d'archivio⁷⁴. È una situazione diversa da quella di tutti gli altri autori di questo capitolo: qui la fonte "primaria" in senso proprio è un manoscritto inedito, conservato in archivi tedeschi e svedesi; ciò che si può citare è, dichiaratamente, una fonte secondaria su un originale che nessuno ha potuto controllare di persona.

Il procedimento di Weierstrass parte dagli interi positivi, costruiti come aggregati di copie di un'unità e ; introduce poi una seconda unità e' "opposta" alla prima⁷⁵, definita dalla relazione $e + e' = e - e$ — un'unità, cioè, la cui somma con la prima produce quello che possiamo chiamare, non essendo terminologia dello stesso Weierstrass ma una nostra parafrasi per renderne intuitivo il senso, il "nulla operativo" della sottrazione. Un numero con segno diventa così un aggregato di copie di e e di e' , dove l'uguaglianza si stabilisce cancellando a coppie gli elementi opposti finché non resta un solo tipo di unità: è, punto per punto, la coppia (m, n) introdotta sopra — un aggregato con m copie di e e n copie di e' è esattamente (m, n) — raggiunta però con un trentennio di anticipo su quanto si vedrà più avanti in questa sezione, e nel linguaggio informale degli "aggregati" invece che in quello delle classi di equivalenza su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Vale la pena riportare, a questo punto, un'osservazione che gli appunti di Schwarz registrano fedelmente: introducendo l'unità opposta, lo stesso Weierstrass si sofferma sulle difficoltà che i numeri negativi sogliono creare agli studenti delle scuole secondarie⁷⁶ — un'osservazione isolata, ma non banale: perfino l'autore che qui spinge più a fondo di chiunque altro la formalizzazione del segno resta consapevole che, a scuola, il problema non è mai stato solo logico.

Sulla moltiplicazione, però, Weierstrass non procede come si è visto in apertura di sezione, cioè stipulando direttamente una formula chiusa sulla coppia. La ricava, piuttosto, imponendo che la distributività — già valida per i positivi — continui a valere nel dominio esteso:

Con questo, tutto il calcolo con i numeri positivi e negativi è fondato.

Dalla legge fondamentale $(a + b)c = ac + bc$ segue anche $(a - b)c =$

⁷³Cfr. l'abstract e l'introduzione di Schubring, Ferreira e Salazar 2026, pp. 1-2.

⁷⁴Schubring, Ferreira e Salazar 2026.

⁷⁵«Here then is introduced the unit e' , opposed to the unit e , by: $e + e' = e - e$ » (Schubring, Ferreira e Salazar 2026, p. 24).

⁷⁶«Weierstraß inserted pedagogical observations here, mentioning the difficulties which negative numbers used to provoke for learners in secondary school» (Schubring, Ferreira e Salazar 2026, p. 24).

$$ac - bc, \text{ poiché } (a - b)c + bc = ac.^{77}$$

È una mossa che non stipula la regola dei segni né la dimostra per ispezione diretta, come Cauchy (§3.1): la deriva come conseguenza necessaria del voler mantenere, sul dominio più ampio, una legge già accertata su quello più ristretto — la stessa logica di fondo del principio di permanenza che Hankel (§3.4) renderà esplicito e battezerà con un nome, e che qui, in Weierstrass, opera già, senza nome, buona un quarto di secolo prima.

Di tutto questo, come già detto, Weierstrass non rese pubblico nulla: il filo che si può seguire nei testi a stampa dell'epoca riprende quindi altrove, con un autore che dichiarò per iscritto il proprio programma, senza bisogno che qualcuno lo ricostruisse da un quaderno di appunti un secolo e mezzo più tardi.

Jules Tannery (1848-1910), sotto-direttore degli studi scientifici all'École normale supérieure, applicò lo stesso principio: ridurre tutta l'analisi a un'unica nozione di partenza, con un rigore che in Francia, negli anni '80 dell'Ottocento, pochi altri eguagliarono. Nella prefazione della sua *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* (1886) dichiarò apertamente il proprio programma:

Si può costituire interamente l'Analisi con la sola nozione di numero intero e con le nozioni relative all'addizione dei numeri interi.⁷⁸

Un programma che, portato fino in fondo, dovrebbe includere anche il numero con segno, ricostruito a partire dal solo intero naturale. Ma è lo stesso Tannery, nella medesima pagina, ad ammettere di essersi fermato prima del traguardo:

Avrei dovuto anche riprendere la teoria dei numeri positivi e negativi, teoria che non si distingue sempre dalla considerazione delle grandezze concrete, e nella quale bisogna ancora riprendere da capo le definizioni elementari. Ma tutto questo è facile [...] ⁷⁹

dichiarando facile un lavoro che non fece mai e lasciando che fosse un giudizio da prendere sulla fiducia, dato che nessuna delle costruzioni incontrate finora in questo capitolo aveva mai dimostrato che lo fosse davvero.

Non restò, però, fermo a quell'ammissione. Sei anni più tardi, nel 1892, scrivendo la prefazione a un manuale elementare del matematico Henri Padé, Tannery tornò sulla questione, non per risolverla ma per indicare, in una breve nota, dove la soluzione fosse già stata trovata: nelle lezioni berlinesi di Weierstrass, mai pubblicate, appena incontrate in apertura di questa sezione⁸⁰.

⁷⁷ «Hiermit ist das ganze Rechnen mit positiven und negativen Zahlen begründet. Aus dem Grundgesetze: $(a + b)c = ac + bc$ folgt auch $(a - b)c = ac - bc$, denn es ist $(a - b)c + bc = ac$ » (Schwarz, citato in Schubring, Ferreira e Salazar 2026, p. 24).

⁷⁸ «On peut constituer entièrement l'Analyse avec la notion de nombre entier et les notions relatives à l'addition des nombres entiers» (Tannery 1886, p. viii).

⁷⁹ «J'aurais dû aussi reprendre la théorie des nombres positifs et négatifs, théorie que l'on ne dégage pas toujours de la considération des grandeurs concrètes, et dans laquelle il faut encore reprendre à nouveau les définitions élémentaires. Mais tout cela est facile [...]» (Tannery 1886, pp. viii-ix).

⁸⁰ Il testo della nota non è stato reperito direttamente; la conosciamo così come la riporta Couturat, che se ne servì a sua volta come fonte dichiarata (Couturat 1896, p. 23, n. 1).

Prima ancora che quella nota vedesse la luce, però, un'altra strada verso lo stesso traguardo si era già aperta, per conto proprio, nel 1890.

Hugues Charles Robert Méray nacque a Chalon-sur-Saône il 12 novembre 1835. Studiò all'École normale supérieure di Parigi dal 1854 al 1857, poi insegnò per due anni al Lycée di Saint-Quentin. Lasciò quindi l'insegnamento per sette anni, ritirandosi in un piccolo villaggio nei pressi della città natale, lontano dalla vita matematica parigina. Riprese l'attività accademica nel 1866, dapprima come lettore all'Università di Lione per un anno, poi come professore di matematica all'Università di Digione, dove rimase per il resto della carriera. Nel 1869 pubblicò, nelle *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données*, la prima esposizione a stampa di una teoria aritmetica dei numeri irrazionali fondata sulle successioni convergenti di numeri razionali, anticipando, con differenze perlopiù stilistiche, la teoria che Cantor avrebbe reso celebre pochi anni più tardi. Ma il lavoro di Méray, pubblicato lontano da Parigi e mai davvero discusso negli ambienti che contavano, non ricevette il riconoscimento che avrebbe meritato, e la paternità del risultato finì per essere associata quasi soltanto al nome di Cantor. Negli ultimi anni di vita si dedicò anche alla promozione dell'esperanto nel mondo scientifico, presentando la propria proposta all'Académie des Sciences nel 1901. Morì a Digione il 2 febbraio 1911.

Nel 1890, a vent'anni di distanza dalla pubblicazione del testo sui numeri irrazionali, Méray pubblicò, con la collaborazione di Charles Riquier, un articolo sui *Nouvelles annales de mathématiques* dal titolo *Sur quelques perfectionnements dont serait susceptible l'exposition de la théorie des quantités négatives*. Il testo si apre con una diagnosi netta del problema che questa tesi ha incontrato fin dal Capitolo 2:

Una confusione troppo prematura e troppo assoluta fatta tra i segni operatori dell'addizione e della sottrazione e i segni costitutivi delle quantità positive e negative, fatta ancora tra le quantità positive e i loro valori numerici, rende i principi di questa teoria pressoché inintelligibili per i principianti.⁸¹

La soluzione che Méray e Riquier proposero appartiene a una famiglia diversa da quella di Hankel, Peacock e Gregory (§3.4), che non avevano costruito un nuovo oggetto, ma avevano stipulato o dimostrato leggi su un numero con segno che restava, in fondo, un dato di partenza mai messo in discussione. Méray, come Weierstrass poco sopra, costruisce invece l'oggetto stesso, sebbene non proprio allo stesso modo: anziché partire da una coppia di quantità assolute non ancora semplificata, parte direttamente da una quantità assoluta singola, cioè un numero senza segno, a cui attribuisce convenzionalmente una "qualità

⁸¹ «Une confusion trop prématurée et trop absolue faite entre les signes opératoires de l'addition et de la soustraction et les signes constitutionnels des quantités positives et négatives, faite encore entre les quantités positives et leurs valeurs numériques, rend les principes de cette théorie à peu près inintelligibles pour les commençants» (Méray 1890, p. 50).

fittizia", positiva o negativa.⁸² A ogni quantità assoluta diversa da zero corrispondono così due "quantità qualificate", l'una positiva e l'altra negativa; allo zero corrisponde un'unica quantità "neutra".

Su questa base, addizione e sottrazione si definiscono senza mai passare per l'aritmetica con segno: la somma di più quantità qualificate si ottiene sommando fra loro i valori assoluti delle quantità positive, sommando fra loro quelli delle quantità negative e qualificando col nome della somma maggiore l'eccesso sull'altra (un eccesso nullo dà la quantità neutra)⁸³; la sottrazione, a sua volta, è sempre possibile e univocamente determinata, perché equivale per definizione all'addizione della quantità opposta⁸⁴ — la sottrazione "impossibile" semplicemente cessa di porsi. L'ordinamento, dal canto suo, è definito attraverso il segno della differenza⁸⁵ — la stessa scelta di Cauchy in apertura del capitolo (§3.1), qui non più stipulata ma ricavata come conseguenza immediata dell'apparato.

Il punto di arrivo è la moltiplicazione: il prodotto di più quantità qualificate ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori ed è positivo se il numero dei fattori negativi è nullo o pari, negativo se è dispari, neutro se lo è anche uno solo dei fattori. Anche qui, come nella costruzione per coppie di Weierstrass e Couturat, la convenzione non scompare: si concentra nella scelta di questa definizione, l'unica — fra le estensioni possibili della moltiplicazione già nota per i valori assoluti — che preservi $|xy| = |x||y|$ anche per le quantità qualificate. Fatta quella scelta una volta per tutte, la regola dei segni non richiede più alcuna mossa aggiuntiva dedicata al caso specifico: segue, come ogni altro risultato particolare, dalla definizione stessa — resta un teorema, ma non più un'eccezione da giustificare a parte. Che "positivo" e "negativo" non siano mai stati altro che due qualità simmetriche apposte dall'esterno a un numero che, alla radice, non ne ha nessuna, è del resto ciò che rende quella scelta pressoché obbligata: non restano molti modi ragionevoli di estendere la moltiplicazione a un'etichetta che non porta con sé altra informazione se non il proprio segno. È, in sostanza, la stessa idea della coppia (m, n) vista in apertura di questa sezione, ma già ridotta alla propria forma canonica: dove Weierstrass parte da un aggregato di m copie di un'unità e n copie della sua opposta, riducendo solo in un secondo momento, Méray costruisce direttamente l'oggetto ridotto, una quantità assoluta più un'etichetta, saltando il passaggio per la coppia non semplificata.

Méray chiude l'articolo con una riflessione che vale la pena riportare per intero; è forse, in tutto questo capitolo, la formulazione più netta del problema di fondo che questa tesi affronta fin dalla prima pagina, quello della natura stessa del numero negativo:

⁸² «Nous appellerons provisoirement qualifiées des quantités absolues conventionnellement pourvues de certaines qualités factices les rendant aptes à subir les opérations également factices qui vont être successivement définies» (Méray 1890, pp. 50–51).

⁸³ Méray 1890, §16, pp. 51–52.

⁸⁴ «Deux quantités qualifiées quelconques étant données, on peut toujours en trouver une troisième et une seule dont l'addition à la seconde reproduise la première. Pour exécuter cette soustraction, il suffit d'ajouter à la première quantité l'opposée de la seconde» (Méray 1890, §17, p. 52).

⁸⁵ Méray 1890, §18, pp. 52–53.

Ma, in realtà, un numero non è una quantità positiva; e, per la notazione abituale delle quantità negative, il segno $-$ è distolto dal proprio senso operatorio soltanto per una convenzione tacita. Non si vedranno più le quantità negative come attraverso una nube purché non si dimentichi questo, e ci si ricordi anche che non esiste una teoria delle quantità negative, bensì una teoria delle quantità fittizie, tanto positive quanto negative.⁸⁶

Se Méray aveva colmato lo spazio lasciato aperto da Tannery percorrendo una via propria, restava ancora da percorrere la strada che lo stesso Tannery aveva indicato senza svilupparla: quella di Weierstrass. Fu Louis Couturat, sei anni dopo Méray, a raccoglierne l'eredità e a renderla pubblica.

Louis Couturat nacque a Parigi il 17 gennaio 1868. Dotato di un'intelligenza precoce, fu allievo brillante al liceo, interessato tanto alle letterature antiche quanto alle scienze matematiche. Nel 1887 fu ammesso secondo all'École normale supérieure, dove seguì, nell'anno accademico 1890-91, i corsi dello stesso Jules Tannery; proseguì poi gli studi con Picard e Jordan, e assistette alle lezioni di Poincaré, laureandosi in matematica nel luglio 1892. Nel 1895 ottenne una cattedra di filosofia all'Università di Tolosa; l'anno seguente, in congedo, discusse a Parigi due tesi di dottorato: quella principale, *De l'infini mathématique*, e una seconda tesi separata, in latino, sui miti platonici. Dal 1897 insegnò filosofia matematica all'Università di Caen. Divenne, negli anni successivi, una delle figure più importanti della logica francese, in corrispondenza con Bertrand Russell e promotore in Francia della notazione di Peano; dal 1900 in avanti si dedicò con crescente intensità alla causa di una lingua ausiliaria internazionale, l'Ido, fondando nel 1908 e dirigendo fino alla morte la rivista *Progreso*. Morì il 3 agosto 1914 a Ris-Orangis, investito da un'automobile che trasportava gli ordini di mobilitazione dell'esercito francese — il giorno stesso della dichiarazione di guerra tedesca alla Francia.

È a quella tesi principale che si deve la costruzione che chiude questa sezione. Il capitolo II del primo libro di *De l'infini mathématique*, intitolato «*Théorie des nombres qualifiés*», si apre con una dichiarazione di fonte che chiude con precisione filologica l'arco tracciato in queste pagine:

Per maggiore simmetria, impiegheremo il metodo di Weierstrass, indicato da Tannery, in Padé, *Premières leçons d'Algèbre élémentaire*, Prefazione, p. xii, nota.⁸⁷

Non è dunque Couturat a inventare da zero il procedimento che segue: lo eredita, come si è appena visto, dalla stessa linea aperta da Weierstrass e segnalata da Tannery, di cui era stato allievo pochi anni prima.

⁸⁶ «Mais, en réalité, un nombre n'est pas une quantité positive; et, pour la notation habituelle des quantités négatives, le signe $-$ n'est détourné de son sens opératoire que par une convention tacite. On ne verra plus les quantités négatives à travers un nuage en ne l'oubliant pas, en se souvenant aussi qu'il y a, non une théorie des quantités négatives, mais bien une théorie des quantités factices tant positives que négatives» (Méray 1890, p. 59).

⁸⁷ «Pour plus de symétrie, nous emploierons la méthode de M. Weierstrass, indiquée par M. Tannery, ap. Padé, *Premières leçons d'Algèbre élémentaire*, Préface, p. xii, note» (Couturat 1896, p. 23, n. 1).

Couturat chiama «coppia» l'insieme di due numeri aritmetici⁸⁸, cioè i razionali non negativi, disposti in un ordine determinato, e pone $(a, b) = (a', b')$ se e solo se $a + b' = b + a'$: sono la stessa coppia e la stessa equivalenza già introdotte in apertura di sezione con le lettere m, n . La somma si definisce termine a termine, $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$, e Couturat dimostra che $(0, 0)$ ne è il modulo, cioè l'elemento neutro⁸⁹. La sottrazione si riconduce interamente all'addizione tramite la coppia "simmetrica", quella con i due termini scambiati, la cui somma con la coppia di partenza dà sempre zero:

Sottrarre da una coppia un'altra coppia significa aggiungere alla prima la simmetrica della seconda.⁹⁰

La sottrazione impossibile, quindi, semplicemente non esiste più: ogni coppia ha, per costruzione, un opposto.

Sottraendo da entrambi i termini di una coppia il minore dei due, operazione che lascia la coppia invariata, ogni coppia si riduce a una delle tre forme $(a - b, 0)$, $(0, b - a)$ o $(0, 0)$: è quello che Couturat chiama "ridurre la coppia alla propria forma più semplice"⁹¹. Sono proprio queste tre forme a fondare la terminologia:

I numeri positivi, i numeri negativi e il numero neutro costituiscono l'insieme dei numeri qualificati.⁹²

La coppia ridotta $(a, 0)$ è dunque un numero positivo, quella ridotta $(0, b)$ un numero negativo, $(0, 0)$ il numero neutro; il termine non nullo della forma ridotta è il "valore assoluto" della coppia. Per abbreviare la scrittura, Couturat non ricorre subito ai segni familiari $+$ e $-$: assegna invece a ciascun numero un indice, p per i positivi e n per i negativi, scrivendo a_p per $(a, 0)$ e b_n per $(0, b)$ ⁹³, scelta che si rivela importante subito dopo, con la moltiplicazione.

Il prodotto di due coppie si definisce con la formula $(a, b) \times (a', b') := (aa' + bb', ab' + ba')$, come visto in apertura di sezione per illustrare la costruzione generale. Qui non è un esempio scelto per comodità didattica ma la definizione originale di Couturat, da cui quell'esempio è stato tratto⁹⁴. Applicata ai numeri qualificati in forma ridotta, la stessa formula dà i tre casi già visti, una volta identificati $(a, 0)$ e $(0, b)$ con a_p e b_n ⁹⁵: il prodotto ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori ed è positivo se i due fattori hanno lo stesso indice, negativo altrimenti.

Segue il passaggio più originale del capitolo. Couturat non introduce i segni $+$ e $-$ come primitivi: li ricava. Dedicava un'intera sezione a mostrare che, una volta stabilite tutte le proprietà dei numeri qualificati con la notazione a indici, gli indici p ed n si possono sostituire con i segni familiari senza perdita

⁸⁸Couturat 1896, §1-2, pp. 23-24.

⁸⁹Couturat 1896, §3-4, p. 24.

⁹⁰«Retrancher d'un couple un autre couple, c'est ajouter au premier le symétrique du second» (Couturat 1896, §5, p. 25).

⁹¹Couturat 1896, §10, pp. 27-28.

⁹²«Les nombres positifs, les nombres négatifs et le nombre neutre constituent l'ensemble des nombres qualifiés» (Couturat 1896, §10, p. 29).

⁹³Couturat 1896, §10, p. 29.

⁹⁴Couturat 1896, §9, p. 27.

⁹⁵Couturat 1896, §15, pp. 32-33.

di informazione e che la regola per sommare e sottrarre numeri con segno ne discende come conseguenza e non come punto di partenza⁹⁶. La notazione che ogni studente impara come prima cosa risulta, alla fine del capitolo, come l'ultima.

Couturat chiude con una cautela epistemologica che fa eco, quasi negli stessi termini, a quella con cui Méray aveva chiuso il proprio articolo pochi anni prima:

Ora, questa assimilazione [dei numeri aritmetici ai numeri qualificati positivi] è illegittima, a rigore, poiché i numeri aritmetici non sono più identici ai numeri positivi di quanto le operazioni additive definite per i numeri aritmetici non siano identiche alle operazioni dello stesso nome definite per i numeri qualificati.⁹⁷

Il numero positivo $(a, 0)$ e il numero aritmetico a si scrivono allo stesso modo e, per le operazioni definite su ciascuno, producono sempre risultati coincidenti e sono perciò correntemente confusi. Ma, a rigore, sono due oggetti diversi, costruiti in due modi diversi, sottoposti a operazioni tecnicamente distinte anche se dagli esiti coincidenti: la loro identificazione, per quanto comoda e ormai universale, resta un atto di convenzione, non un fatto già dato.

Weierstrass e Couturat costruiscono, a trent'anni di distanza, lo stesso oggetto di base: una coppia di quantità assolute, retta dalla stessa equivalenza e dalla stessa addizione, pur giustificando la moltiplicazione in due modi diversi: il primo per conservazione delle leggi già valide sui positivi, il secondo per stipulazione diretta sulla coppia. Méray arriva a un oggetto per certi versi affine, ma per una strada propria e indipendente: non una coppia, ma una singola quantità assoluta a cui si affianca, dall'esterno, una qualità. Tannery, che non inventa alcuna di questa famiglia di soluzioni, resta comunque il tramite grazie al quale esse restano collegate nel tempo: dichiara la lacuna nel 1886 e nel 1892, pur senza colmarla, indica ad altri dove Weierstrass l'aveva già colmata vent'anni prima.

⁹⁶Couturat 1896, §18–19, pp. 34–36.

⁹⁷«Or cette assimilation est illégitime, à la rigueur, car les nombres arithmétiques ne sont pas plus identiques aux nombres positifs que les opérations additives définies pour les nombres arithmétiques ne sont identiques aux opérations de même nom définies pour les nombres qualifiés» (Couturat 1896, §20, p. 38).

Capitolo 4

Dalla costruzione alla didattica: due manuali italiani di inizio Novecento

In questa tesi è stata sinora ricostruita l'evoluzione del concetto di numero negativo lungo un arco di oltre duemila anni: dalle quattro tradizioni antiche e medievali che, a seconda della propria concezione di numero, accettarono, rifiutarono o ignorarono le quantità negative (Capitolo 1), si è passati al progressivo consolidamento operativo che le vide affermarsi in Europa nonostante l'assenza di una teoria capace di giustificarle (Capitolo 2), fino a raggiungere la formalizzazione ottocentesca che trasformò la regola dei segni da convenzione stipulata a teorema dimostrato entro una struttura definita per via costruttiva (Capitolo 3). Il punto d'arrivo di questo percorso, la "via costruttiva" di Weierstrass, Méray, Tannery e Couturat, restò tuttavia confinato per decenni entro un circolo ristretto: appunti di lezione mai pubblicati, un articolo sulle *Nouvelles Annales de Mathématiques* (una rivista per gli aspiranti all'École polytechnique, più che un canale per la ricerca sui fondamenti), una tesi di dottorato in filosofia; nessuno di questi testi fu scritto per l'istruzione secondaria.

Questo capitolo conclusivo non pretende di stabilire se, o come, quella stessa esigenza di fondazione abbia raggiunto in generale le aule scolastiche di inizio Novecento — una domanda del genere richiederebbe un censimento della manualistica dell'epoca che va oltre l'ambito di questa tesi — ma esamina invece da vicino due casi concreti, pubblicati in Italia a pochi anni di distanza dalla tesi di Couturat e indipendenti l'uno dall'altro: gli *Elementi di Aritmetica ragionata e di Algebra* di Alfredo Capelli (Libro III, 1904) e l'*Algebra e Trigonometria* di Ettore Baroni (1907). Le pagine che seguono esaminano dapprima i due testi separatamente, in ordine cronologico, per poi metterli a confronto sui tre punti in cui il problema della fondazione si gioca davvero: la costruzione del numero, la regola dei segni e la proprietà distributiva.

4.1 Alfredo Capelli e gli *Elementi di Aritmetica ragionata e di Algebra*

Alfredo Capelli nacque a Milano il 5 agosto 1855 e morì a Napoli il 28 gennaio 1910. Si laureò a Roma nel 1877 sotto la guida di Giuseppe Battaglini, dopo aver seguito corsi di Luigi Cremona ed Eugenio Beltrami; fu poi assistente di Felice Casorati a Pavia e, durante un periodo trascorso a Berlino, seguì le lezioni di Weierstrass e di Kronecker. Divenne professore di analisi algebrica a Palermo nel 1881, succedendo a Cesare Arzelà, e passò nel 1886 alla cattedra di algebra dell'Università di Napoli, dove rimase fino alla morte. Dal 1894 diresse il *Giornale di matematiche* fondato da Battaglini e fu socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei dal 1901. Il suo nome resta legato soprattutto al teorema di Rouché-Capelli sulla compatibilità dei sistemi lineari e all'identità che porta il suo nome in teoria degli invarianti; accanto a questa produzione di ricerca pura, dedicò tuttavia più opere all'insegnamento secondario, fra cui gli *Elementi di Aritmetica ragionata e di Algebra*, il cui terzo libro è dedicato ai numeri negativi e fu pubblicato a Napoli nel 1904.

Il testo si apre dividendo gli elementi di un insieme $\bar{\Omega}$ in due classi, positivi e negativi (art. 1), e con la definizione di due aggregati *equivalenti*¹: due aggregati sono equivalenti quando si può passare dall'uno all'altro aggiungendo o togliendo coppie di elementi *controvalenti*, ossia coppie formate da un elemento positivo e uno negativo (art. 3). Ogni aggregato non equivalente all'aggregato nullo è equivalente a un aggregato composto da elementi di una sola specie (tutti positivi o tutti negativi), detto *omogeneo* (art. 15, 22); il *valore* di un aggregato — il numero intero che rappresenta — è dato dalla differenza fra il numero dei suoi elementi positivi e quello dei negativi (art. 20), rappresentata con gli stessi simboli + e – già usati per le operazioni di addizione e sottrazione dei numeri naturali (art. 23). Le prime Note ed Esercizi del libro offrono già un'interpretazione geometrica di questa equivalenza tramite segmenti orientati su una retta, cioè servendosi di un modello concreto.

Questa scelta costruttiva non è casuale: Capelli la rivendica esplicitamente dichiarando di aver dato, «seguendo l'uso comune», la precedenza all'addizione sulla moltiplicazione nell'introdurre i numeri negativi, contro l'uso degli «algebristi puri, i quali, avendo soltanto riguardo al puro meccanismo algebrico, altro non vedono nei numeri negativi che il mezzo necessario a conferire all'algoritmo della sottrazione il suo giusto grado di generalità» (Capelli 1904, Prefazione). Lo stesso «indirizzo combinatorio», precisa, era già stato impiegato nel primo libro dell'opera per i numeri naturali: la scelta di costruire per conteggio anziché per estensione di leggi non è una soluzione *ad hoc* per i numeri negativi, ma un principio metodologico perseguito con coerenza in tutta l'opera. La stessa prefazione promette anche un'applicazione concreta di questa scelta: le proposizioni combinatorie dei primi paragrafi, spiega, avrebbero fornito «la base necessaria per l'applicazione della nozione di prodotto ai problemi più elemen-

¹Con il termine *aggregato*, Capelli intende una collezione di elementi di $\bar{\Omega}$, cioè un sottoinsieme di $\bar{\Omega}$.

tari della meccanica e della fisica matematica» — una promessa che il testo mantiene alla lettera non appena ne ha l'occasione.

Prima ancora dell'addizione, il §4 stabilisce come si compongono i segni premessi a un numero già formato: $+(+\alpha) = \alpha$, $-(-\alpha) = \alpha$, mentre $+(-\alpha)$ e $-(+\alpha)$ restituiscono il contrario di α (art. 33) — un accorgimento notazionale, non ancora di calcolo, che precede la somma stessa.

Il passo decisivo arriva ai §10 e §11, dopo che i paragrafi su somma, sottrazione e disuguaglianze (§5–9) hanno consolidato le operazioni di base. Dati due aggregati $\bar{H}$ e $\bar{K}$, Capelli chiama «coppia omogenea» una coppia di elementi — uno preso da $\bar{H}$ e l'altro da $\bar{K}$ — dello stesso segno e «coppia eterogenea» una coppia di elementi di segno opposto (art. 83); dimostra quindi che la differenza tra il numero delle coppie omogenee e il numero di quelle eterogenee non dipende dalla scelta dei rappresentanti di $\bar{H}$ e $\bar{K}$ entro i loro equivalenti (art. 84) e che questa differenza è uguale al prodotto dei valori assoluti di $\bar{H}$ e $\bar{K}$, preceduta dal segno $+$ o $-$ a seconda che $\bar{H}$ e $\bar{K}$ abbiano lo stesso segno o segno contrario (art. 85–86). La buona posizione della definizione è garantita dall'art. 84. Le Note ed Esercizi del paragrafo realizzano la promessa della prefazione, interpretando $\bar{H}$ e $\bar{K}$ come cariche (masse, secondo la nomenclatura dell'epoca) elettriche concentrate in due punti: l'azione elettrostatica fra le due masse è repulsiva o attrattiva a seconda che prevalgano, nel conteggio, le coppie omogenee o eterogenee.

Il testo lascia però al lettore la verifica del teorema dell'art. 85 nel caso più semplice, quello in cui $\bar{H}$ e $\bar{K}$ siano entrambi positivi. Se $\bar{H}$ è composto da m_1 elementi positivi e m_2 negativi e $\bar{K}$ da n_1 positivi e n_2 negativi, l'ipotesi di positività garantisce che $m_1 - m_2$ e $n_1 - n_2$ siano numeri naturali e questo permette a sua volta di svolgere il calcolo all'interno dell'aritmetica dei numeri naturali in cui si ha già la proprietà distributiva. Si tratta quindi di riconoscere che

$$(m_1 n_1 + m_2 n_2) - (m_1 n_2 + m_2 n_1) = (m_1 - m_2)(n_1 - n_2)$$

e il calcolo, che Capelli stesso liquida con un rimando esplicito a un teorema sui numeri naturali («Cfr. Libro I, art. 105»), si riduce a una semplice applicazione delle regole aritmetiche. Il calcolo non richiede altro che pazienza; l'autore lo tratta come abbastanza ovvio da lasciarlo al lettore, perché la vera difficoltà, ai suoi occhi, non sta nell'identità algebrica in sé, ma nell'aver saputo trasformare un conteggio di oggetti discreti in una definizione di prodotto.

È su questo conteggio, non su una legge imposta dall'alto, che al §11 Capelli definisce il prodotto di due numeri interi a e b : la differenza fra coppie omogenee ed eterogenee formate combinando ogni elemento di un aggregato di valore a con ogni elemento di un aggregato di valore b (art. 88). La regola dei segni della moltiplicazione ne segue allora come teorema, non come premessa (art. 89–92). Le Note ed Esercizi propongono qui una seconda interpretazione geometrica, questa volta tramite aree orientate di rettangoli anziché segmenti, coerente con il fatto che a essere interpretata, ora, è la moltiplicazione e non più la somma: a ogni passo costruttivo — l'equivalenza, il conteggio, il prodotto — il testo affianca così un ancoraggio concreto e reale, dando al contempo un contesto applicativo delle nozioni affrontate.

Il §13 dimostra infine la proprietà distributiva — $(a + b)c = ac + bc$ (art. 105) — con la stessa tecnica usata per definire il prodotto: scompone a , b e c nei rispettivi elementi positivi e negativi, applica la definizione già data al §11, ed espande ac e bc per confrontarne la somma con $(a + b)c$. La distributività non è imposta come premessa: emerge come conseguenza dimostrata, con lo stesso armamentario concettuale — non un argomento nuovo — usato per definire il prodotto. E non è un caso che Capelli richiami esplicitamente, in questa dimostrazione, la stessa identità già incontrata nell'esercizio del §10 — stavolta generalizzata a quattro interi qualsivogliano, senza più alcuna restrizione di segno (cfr. la Nota 4 del §10).

4.2 Ettore Baroni e l'*Algebra e Trigonometria*

Ettore Baroni nacque a Pisa il 16 febbraio 1866 e morì a Roma il 26 ottobre 1918. Si laureò a Pisa nel 1889 e fu dapprima assistente di Ulisse Dini, pubblicando alcune note di geometria differenziale; insegnò poi in diverse scuole secondarie, prima di ottenere, dal 1901, la cattedra al Liceo Ennio Quirino Visconti di Roma. Fu fra i collaboratori coinvolti da Federico Enriques nella redazione delle *Questioni riguardanti la geometria elementare* (1900), opera collettiva rivolta alla formazione degli insegnanti. Allo stesso ambiente riformatore appartenne anche l'edizione critica degli *Elementi* di Euclide già utilizzata nel Capitolo 1, diretta dallo stesso Enriques. Baroni scrisse inoltre, con Pier Andrea Fontebasso, l'*Aritmetica pratica per le scuole secondarie inferiori*. Fu proprio negli anni trascorsi al liceo Visconti che pubblicò l'*Algebra e Trigonometria* (1907), destinata ai Licei, qui esaminata.

Baroni apre il testo definendo R_0 come la classe dei numeri interi, frazionari e dello zero, e osservando che il simbolo « $a - b$ » non rappresenta un numero di R_0 quando a è minore di b (art. 1). È qui che la costruzione prende avvio: anche in questo caso, scrive, «conserveremo il simbolo $a - b$ [...] convenendo che esso rappresenti un ente che continueremo a chiamare numero», una decisione dichiaratamente convenzionale, non dedotta (art. 2). Chiama a la *parte passiva* e b la *parte attiva* del numero $a - b$, e battezza r_0 la classe così ottenuta.

Due numeri $a - b$ e $a' - b'$ di questa classe sono uguali quando $a + b' = a' + b$ (art. 4), e Baroni dimostra esplicitamente che questa relazione soddisfa le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva (art. 5). Solo più avanti introduce la notazione che userà per il resto del libro: il numero $a - b$ con $a < b$ si scrive in forma abbreviata $-p$, dove p è il suo valore assoluto; con $a > b$, $+p$ (art. 9-10). Chiama quest'ultima la rappresentazione «abbreviata», contrapposta a quella «primitiva» di $a - b$ e avverte il lettore che d'ora in avanti userà solo la prima, salvo tornare occasionalmente alla seconda «per introdurre definizioni che sieno in accordo con definizioni già date [...] e per dimostrare più facilmente alcuni teoremi» (art. 11).

Quando Baroni definisce la somma di due numeri sulla forma primitiva — $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ (art. 23) — dimostra subito, nel corpo del testo e non come esercizio lasciato al lettore, che «sostituendo ad un termine qualunque della somma un numero uguale la somma non varia» (art. 24): la

buona posizione della definizione è un teorema a sé, con la sua dimostrazione algebrica passo passo.

Solo più avanti nello stesso capitolo, quasi in coda alla trattazione dell'addizione, il testo introduce la convenzione sui segni premessi a un numero: «converremo di rappresentare con $+a$ il numero stesso a , con $-a$ il simmetrico di a » (art. 42). Sono due righe senza alcun teorema che le accompagni, senza dimostrazione e senza alcun ritorno esplicito su questo punto quando più avanti si arriva alla moltiplicazione. È un'assenza che vale la pena registrare come tale, per il confronto che verrà: il testo tratta la composizione dei segni come semplice notazione, non come risultato da dimostrare.

Fa lo stesso per il prodotto, con la stessa struttura vista per la somma: definito $(a - b)(c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$ (art. 69), l'art. 70 dimostra che «sostituendo a un fattore del prodotto un numero uguale il prodotto non varia». Subito dopo, stabilita anche la proprietà commutativa (art. 72), l'art. 73 dimostra la proprietà distributiva della moltiplicazione — enunciata e provata come teorema a sé prima ancora di affrontare la regola dei segni. Il testo torna sulla stessa proprietà, applicata nel verso opposto (il raccogliere a fattor comune), molto più avanti, nel capitolo sulla divisione (art. 118).

Solo a questo punto il testo affronta la regola dei segni della moltiplicazione, come conseguenza diretta della definizione già data, non come premessa: il prodotto di due numeri relativi di ugual segno risulta positivo (art. 76), quello di segno differente negativo (art. 77), entrambi dimostrati sostituendo la rappresentazione primitiva dei numeri $+a$, $+b$, $-a$, $-b$ nella definizione data all'art. 69. L'art. 91 riassume il risultato nella forma familiare: il prodotto di due numeri preceduti da segni uguali è positivo, da segni differenti è negativo.

La classe R_0 include, fin dall'articolo di apertura, tanto gli interi quanto i frazionari: r_0 diventa così, da subito, il campo dei razionali con segno, non solo degli interi. Coerentemente, il Capitolo VII conduce il lettore fino alle frazioni algebriche generali, dove si arresta la porzione di testo qui esaminata. In queste pagine, in ogni caso, il testo non offre mai un'interpretazione applicativa della struttura che va costruendo: nessuna immagine geometrica, nessun rimando alla fisica, nessun ancoraggio a un modello concreto per accompagnare le definizioni pure, solo un'algebra costruita interamente sul piano simbolico.

4.3 Due manuali a confronto

I due testi analizzati risultano molto vicini nello spirito e contemporaneamente molto distanti nella forma. Entrambi gli autori affrontano il problema dell'introduzione dei numeri negativi non solo sul fronte del calcolo ma anche dal punto di vista della loro costruzione e su questo punto l'impostazione dei due autori è, per certi versi, la stessa: un aggregato di m elementi positivi e n negativi nella definizione di Capelli non è, nella sostanza, diverso dalla struttura $a - b$ definita da Baroni, entrambe equivalenti, in termini moderni, alla coppia ordinata (m, n) della costruzione di Weierstrass discussa nel capitolo precedente (§3.5). Le strade che portano i due autori alle rispettive costruzioni dei numeri negativi sono però opposte. Baroni segue un percorso analogo a quello tracciato

da Weierstrass e Couturat: definisce l'uguaglianza $a - b = a' - b'$ e dimostra esplicitamente che questa relazione gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva (Baroni 1907, art. 4-5) — lo stesso doppio passaggio, relazione di equivalenza più dimostrazione di buona definizione, che rende la regola dei segni un teorema anziché una convenzione, solo senza il lessico insiemistico che potrebbe usare un lettore di oggi. Capelli, invece, non impone alcuna legge dall'alto: costruisce un procedimento di conteggio autonomo — la differenza tra le coppie omogenee ed eterogenee (Capelli 1904, §10) — dal quale la stessa struttura emerge come conseguenza, non come premessa dedotta per analogia con i numeri già noti.

C'è una nota quasi ironica in questo. È Capelli, non Baroni, ad aver seguito personalmente le lezioni di Weierstrass a Berlino, eppure è la costruzione di Baroni ad essere più vicina nello spirito a quella del matematico tedesco. Capelli conosceva l'uomo e ne reinventò il problema per una via propria; Baroni, verosimilmente senza aver mai avuto accesso a quelle lezioni — rimaste peraltro inedite, come ricordato nel Capitolo 3 — ne ripete l'impianto quasi punto per punto.

Sulla regola di composizione dei segni — il dispositivo che permette di semplificare più segni $+$ e $-$ premessi in successione a uno stesso numero — i due autori esprimono, con le loro scelte editoriali, due giudizi opposti sulla sua importanza. Capelli le dedica un intero paragrafo a sé, il §4 dell'opera, collocato subito dopo aver introdotto i numeri interi e prima ancora dell'addizione: un teorema nominato, con la sua dimostrazione, trattato come un prerequisito da stabilire con cura prima di procedere. Baroni, al contrario, la relega a una convenzione di due righe, infilata a metà del capitolo sull'addizione, senza dimostrazione e senza più tornarci quando arriva alla moltiplicazione (Baroni 1907, art. 42).

Non è una differenza da poco. Per Capelli il modo in cui i segni si compongono fra loro è, in un certo senso, un problema logico a sé, distinto da qualunque operazione aritmetica, coerente con l'idea, dichiarata nella prefazione, che ogni passo della costruzione meriti una giustificazione esplicita prima di essere dato per acquisito. Per Baroni è solo una notazione comoda, che il lettore può assorbire senza bisogno di una dimostrazione dedicata: la vera dimostrazione, per lui, arriva dopo, quando la regola dei segni della moltiplicazione viene derivata direttamente dalla definizione di prodotto (Baroni 1907, art. 76-77, 91), senza passare da un principio intermedio sui segni presi da soli.

Sulla distributività, il confronto si allarga a tre voci, perché richiama direttamente la stessa tensione fra convenzione e costruzione che il Capitolo 3 aveva tracciato. Weierstrass (§3.5) impone la proprietà distributiva dall'alto: parte da una legge già accertata sui numeri positivi e la estende per costruzione al dominio dei numeri relativi, ricavandone come conseguenza forzata la definizione del prodotto sulle coppie. Capelli non la dimostra apertamente né la impone: la lascia emergere in silenzio, deferita al §13 dell'opera, dimostrabile nel frattempo solo attraverso un esercizio che il lettore trova al §10 (Capelli 1904, nota 4 del §10) — un'identità ristretta ai soli numeri naturali per necessità, che il testo stesso richiama e generalizza tre paragrafi più avanti proprio per fondare la proprietà distributiva sui numeri interi (Capelli 1904, §13). Baroni, infine,

non lascia nulla in sospeso: dimostra la distributività apertamente e per primo, come teorema con un proprio nome — «Legge distributiva della moltiplicazione» (Baroni 1907, art. 73) — prima ancora di affrontare la regola dei segni della moltiplicazione, e vi ritorna applicandola nel verso opposto, il raccogliere a fattor comune, molto più avanti nel capitolo sulla divisione (Baroni 1907, art. 118).

Tre autori, tre posizioni distinte sulla stessa legge — imposta, dedotta in silenzio, dimostrata apertamente — che non a caso ricalcano, in miniatura e a pochi decenni di distanza, lo stesso spettro fra convenzione e costruzione lungo cui si muove l'intero percorso della tesi.

Sul bisogno di ancorare la costruzione a un modello concreto, esterno alla pura algebra dei segni, i due testi si comportano in modo speculare. Capelli mantiene, punto per punto, un impegno preso esplicitamente in prefazione: le proposizioni combinatorie dei primi paragrafi, scrive, avrebbero fornito «la base necessaria per l'applicazione della nozione di prodotto ai problemi più elementari della meccanica e della fisica matematica» (Capelli 1904, Prefazione). Il testo offre così, in tre punti diversi della costruzione, altrettanti ancoraggi concreti: segmenti orientati su una retta per l'equivalenza degli aggregati, masse elettriche e forza elettrostatica per il conteggio di coppie omogenee ed eterogenee, aree orientate di rettangoli per il prodotto (Capelli 1904, Note ed Esercizi, §1, 10, 11). La stessa immagine non è mai ripetuta ed ogni scelta si adatta all'operazione appena introdotta. Baroni, al contrario, non offre alcuna interpretazione di questo tipo in tutta la porzione di testo qui esaminata: né geometrica, né fisica, né di altro genere. La sua è un'algebra costruita interamente sul piano simbolico, dall'inizio alla fine.

Non si tratta di un'assenza casuale o di un semplice difetto. Riflette due idee diverse di cosa serva per rendere insegnabile un'astrazione: per Capelli, che nella stessa prefazione insiste sul valore didattico oltre che scientifico della propria definizione combinatoria, l'ancoraggio concreto è parte integrante della costruzione; per Baroni, il rigore della dimostrazione — la stessa cura mostrata nel provare esplicitamente la buona posizione di ogni operazione, la stessa insistenza sulla distributività dimostrata anziché assunta — basta a sé stesso, senza bisogno di un modello che ne confermi la plausibilità dall'esterno.

4.4 Dall'antichità ai banchi di scuola

C'è un'ultima osservazione che lega i due testi appena confrontati più di ogni punto tecnico incontrato finora ed è la stessa impressione con cui si è aperta questa indagine. Sia Capelli sia Baroni scrivono in forma rigorosamente ipotetico-deduttiva — definizioni numerate, teoremi seguiti da una dimostrazione esplicita (in Baroni chiusa dal consueto «c. v. d.»), corollari che ne discendono — e in entrambi gli apparati di esercizi compaiono, accanto ai calcoli, richieste esplicite di dimostrare: «dimostrare il teorema enunciato nel numero...» in Baroni (Baroni 1907, esercizi 32-35), «verificare direttamente il teorema dell'art. 85» in Capelli (Capelli 1904, nota 4, §10). È la stessa architettura — proposizione,

dimostrazione, esercizio che ne richiede una nuova — degli *Elementi* di Euclide con cui il Capitolo 1 ha aperto l'intera indagine.

Questa eco non è soltanto stilistica: come già visto nella sua biografia (§4.2), Baroni apparteneva allo stesso circolo di riforma diretto da Federigo Enriques che aveva prodotto l'edizione critica degli *Elementi* (si veda il Capitolo 1). Non un parallelo fra due tradizioni lontane, ma una continuità diretta di persone, nello stesso decennio, attorno allo stesso obiettivo: restituire ai fondamenti dell'insegnamento secondario il rigore dimostrativo che li aveva generati.

È a questo punto, dopo aver seguito il concetto di numero negativo per oltre duemila anni, che si può guardare indietro all'intero percorso e riconoscerne la forma. Quattro tradizioni antiche concepirono, accettarono o rifiutarono le quantità negative a seconda della propria idea di numero (Capitolo 1); l'Europa le adottò poi nella pratica di calcolo molto prima di sapere come giustificarle, lasciando che la regola dei segni restasse per secoli un'affermazione efficace ma sospesa (Capitolo 2); l'Ottocento trasformò infine quella sospensione in una scelta esplicita fra convenzione e costruzione, risolvendola con la seconda (Capitolo 3). Capelli e Baroni mostrarono che questa risoluzione, per quanto raggiunta in un circolo di specialisti, poté essere reinventata — non semplicemente trasmessa — fin dentro le aule di scuola.

Il numero negativo, in altre parole, non ha mai smesso di porre a chiunque abbia dovuto insegnarlo o comprenderlo per la prima volta la stessa domanda: che cosa lo rende legittimo e non solo utile? Le risposte date a questa domanda, lungo i secoli qui ricostruiti, cambiarono più volte forma: da un rifiuto radicato nella concezione stessa di numero, a un uso pratico privo di teoria, a una costruzione dimostrata, a una pagina di manuale scolastico. Non cambiò invece l'esigenza che le generò tutte, dalla Grecia classica al banco di scuola di inizio Novecento: che un numero, per essere davvero tale, debba potersi giustificare, non soltanto usare.

Bibliografia

- Agnesi, Maria Gaetana (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*. Italiano. Vol. 2. Milano: Nella Regia-Ducal Corte.
- Arnauld, Antoine (1683). *Nouveaux élémens de géométrie*. Francese. 2^a ed. Parigi: Guillaume Desprez.
- Baroni, Ettore (1907). *Algebra e Trigonometria ad uso dei Licei secondo gli ultimi programmi*. Italiano. Vol. 1. Testo per il primo anno di liceo. Firenze: R. Bemporad & Figlio.
- Bartolozzi, Margherita e Raffaella Franci (1993). «La regola dei segni dall'enunciato di R. Descartes (1637) alla dimostrazione di C. F. Gauss (1828)». Italiano. In: *Archive for History of Exact Sciences* 45, pp. 335–374. DOI: 10.1007/BF01886631.
- Bernoulli, Nicolas (1975). «Lettera a Pierre Rémond de Montmort, 20 febbraio 1714». Latino. In: *Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3: Wahrscheinlichkeitsrechnung*. A cura di Bartel L. van der Waerden. Vol. 3. Corrispondenza K9; trad. inglese Richard J. Pulskamp, 2013. Cura editoriale di B. L. van der Waerden con la collaborazione di J. Henny e K. Kohli. Basilea: Birkhäuser, pp. 558–559.
- Bertrand, Joseph (1863). *Traité d'Algèbre. Première partie, à l'usage des classes de mathématiques élémentaires*. Francese. 3^a ed. Troisième édition, mise en harmonie avec les derniers programmes officiels par Joseph Bertrand et par Henri Garcet. Parigi: Librairie de L. Hachette et Cie.
- Bombelli, Rafael (1572). *L'Algebra, parte maggiore dell'Aritmetica, divisa in tre libri*. Italiano. Bologna: Giovanni Rossi.
- Capelli, Alfredo (1904). *Elementi di Aritmetica ragionata e di Algebra ad uso dell'istruzione secondaria. Libro III. I Numeri Negativi*. Italiano. Napoli: Libreria Scientifica ed Industriale di B. Pellerano.
- Carnot, Lazare Nicolas Marguerite (1803). *Géométrie de position*. Francese. Parigi: Duprat.
- (1806). «Digression sur la nature des quantités dites négatives». Francese. In: *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales*. Parigi: Courcier, pp. 96–111.
- Cauchy, Augustin-Louis (1821). *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Première partie: Analyse algébrique*. Francese. Parigi: Imprimerie Royale.
- Clairaut, Alexis Claude (1746). *Éléments d'algèbre*. Francese. Parigi: Les Frères Guérin, David l'aîné et Durand.

- Clairaut, Alexis Claude (1768). *Éléments d'algèbre*. Francese. 4^a ed. Parigi: Charles-Antoine Jombert.
- Confalonieri, Sara (mag. 2015). «The casus irreducibilis in Cardano's *Ars Magna* and *De Regula Aliza*». Inglese. In: *Archive for History of Exact Sciences* 69, pp. 257–289. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00407-015-0149-9>.
- Couturat, Louis (1896). *De l'infini mathématique*. Francese. Thèse pour le Doctorat présentée à la Faculté des lettres de Paris. Accompagnata da una seconda tesi, in latino, *De Platoniciis mythis* (Paris, Félix Alcan, 1896). Parigi: Félix Alcan.
- d'Alembert, Jean le Rond (1765). *Négatif*. Francese. In: *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. A cura di Denis Diderot e Jean le Rond d'Alembert. Vol. 11. Parigi, p. 72. URL: <https://enccre.academie-sciences.fr/encyclopedia/article/v11-312-0/> (visitato il giorno 03/07/2026).
- Descartes, René (1954). *The Geometry of René Descartes*. Inglese. Trad. Francese da David Eugene Smith e Marcia L. Latham. With a facsimile of the first edition. New York: Dover Publications.
- Ellis, Robert Leslie (1865). «Biographical Memoir of Duncan Farquharson Gregory, M.A., Late Fellow of Trinity College, Cambridge». Inglese. In: *The Mathematical Writings of Duncan Farquharson Gregory, M.A.* A cura di William Walton. Cambridge: Deighton, Bell, e Co., pp. xi–xxiv.
- Enriques, Federigo (1925). *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna. Libri I-IV*. Italiano. Libro Secondo per cura di Maria Teresa Zapelloni. Roma: Alberto Stock.
- Faure, Ambroise (1845). *Essai sur la théorie et l'interprétation des quantités dites imaginaires. Premier mémoire*. Francese. Parigi: Bachelier.
- Fibonacci, Leonardo Bigollo Pisano (2020). *Liber Abbaci*. Italiano. A cura di Enrico Giusti e Paolo D'Alessandro. Biblioteca di Nuncius 79. Edizione critica completa, con testo latino a fronte e traduzione italiana, con il contributo del Museo Galileo. Firenze: Leo S. Olschki.
- Gagatsis, Athanasios e Maria Alexandrou (mag. 2022). «Una revisione della ricerca sull'insegnamento e l'apprendimento dei numeri negativi: una "ricerca-azione" sull'applicazione del modello geometrico della linea dei numeri». Italiano. In: *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* 11, pp. 9–32. DOI: 10.33683/ddm.22.11.1. URL: <https://www.journals-dfa.supsi.ch/index.php/rivistaddm/article/view/152>.
- Geijsbeek, John Bart (1914). *Ancient Double-Entry Bookkeeping*. Inglese. Lucas Pacioli's Treatise reproduced and translated with reproductions, notes and abstract from Manzoni, Pietra, Mainardi, Ympyn, Stevin and Dafforne. Denver, Colorado: J. B. Geijsbeek.
- Gergonne, Joseph-Diaz (1814). «Réflexions sur le même sujet». Francese. In: *Annales de mathématiques pures et appliquées* 4, pp. 6–20. URL: https://www.numdam.org/item/AMPA_1813-1814__4__6_1/ (visitato il giorno 21/08/2026).
- Girard, Albert (1629). *Invention Nouvelle en l'Algèbre*. Francese. Consultato nella ristampa anastatica curata da D. Bierens de Haan (Leida, 1884), pa-

- gina per pagina identica all'originale; edizione priva di numerazione, citata per segnatura di fascicolo. Amsterdam: Guillaume Iansson Blaeuw.
- Gregory, Duncan Farquharson (1865). «On the Real Nature of Symbolical Algebra». Inglese. In: *The Mathematical Writings of Duncan Farquharson Gregory, M.A.* A cura di William Walton. Memoria letta il 14 maggio 1838 alla Cambridge Philosophical Society e pubblicata in *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 14 (1840), pp. 208–216; qui citata dalla raccolta postuma del 1865, che la ristampa alle pp. 1–13. Cambridge: Deighton, Bell, e Co., pp. 1–13.
- Hankel, Hermann (1867). *Theorie der complexen Zahlensysteme. Insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung*. Tedesco. Unico (I.) volume pubblicato delle previste *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*; il secondo Theil, sulla teoria delle funzioni di variabile complessa, annunciato in prefazione (p. ix), non fu mai realizzato. Lipsia: Leopold Voss.
- Heath, Thomas Little (1910). *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra*. Inglese. 2^a ed. Cambridge: Cambridge University Press.
- al-Khwarizmi, Muhammad ibn Musa (1831). *The Algebra of Mohammed ben Musa*. Inglese. A cura di Frederic Rosen. Londra: Oriental Translation Fund.
- Klein, Jacob (1968). *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Inglese. Trad. da Eva Brann. With an appendix containing Vieta's Introduction to the Analytical Art translated by J. Winfree Smith. Cambridge, Mass.: M. I. T. Press.
- La rivoluzione scientifica: i domini della conoscenza. Diffusione e primi sviluppi del calcolo infinitesimale* (n. d.). Italiano. URL: [https://www.treccani.it/enciclopedia/la-rivoluzione-scientifica-i-domini-della-conoscenza-diffusione-e-primi-sviluppi-del-calcolo-infinitesimale_\(Storia-della-Scienza\)/](https://www.treccani.it/enciclopedia/la-rivoluzione-scientifica-i-domini-della-conoscenza-diffusione-e-primi-sviluppi-del-calcolo-infinitesimale_(Storia-della-Scienza)/).
- Lacroix, Sylvestre-François (1804). *Éléments d'algèbre, à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations*. Francese. 4^a ed. Parigi: Duprat.
- Lam, Lay Yong (giu. 1994). «Jiu Zhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Art): An Overview». Inglese. In: *Archive for History of Exact Sciences* 47.1, pp. 1–51. URL: <http://www.jstor.org/stable/41133972>.
- Laplace, Pierre-Simon (1812). «Leçons de mathématiques données à l'École normale en 1795». Francese. In: *Journal de l'École Polytechnique* 2.7-8. Ristampato in *Œuvres complètes de Laplace*, t. 14, Parigi, Gauthier-Villars, 1912, pp. 10-177; la terza seduta («Sur l'algèbre») vi corrisponde alle pp. 33-42., pp. 1–172. URL: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k77603s/f39> (visitato il giorno 21/08/2026).
- Mazzone, Silvia e Clara Silvia Roero (2010). *L'epistolario di Jacopo, Vincenzo e Giordano Riccati con Ramiro Rampinelli e Maria Gaetana Agnesi, 1727-1758*. Italiano. Firenze: Museo Galileo.
- Méray, Charles (1890). «Sur quelques perfectionnements dont serait susceptible l'exposition de la théorie des quantités négatives». Francese. In: *Nouvelles annales de mathématiques* 9. 3e série. Scritto con la collaborazione di Charles Riquier, professore alla Facoltà di Scienze di Caen. Presenta-

- to come estratto delle *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, opera indicata "in preparazione", pp. 50–59.
- Mourey, C.-V. (1861). *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, dédiée aux amis de l'évidence*. Francese. 2^a ed. Seconda edizione, verosimilmente postuma; la prima edizione è del 1828. Parigi: Mallet-Bachelier.
- Newton, Isaac (1761). *Arithmetica Universalis, sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*. Latino. A cura di Johannes Castillioneus. Edizione con commentario di Johannes Castillioneus, basata sulla seconda edizione a cura di W. J. s'Gravesande (1732). Amsterdam: Marcus Michael Rey.
- Pacioli, Leonardo (1494). *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*. Italiano. Venezia: Paganino de' Paganini.
- Peacock, George (1830). *A Treatise on Algebra*. Inglese. Cambridge: J. & J.J. Deighton.
- (1834). «Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis». Inglese. In: *Report of the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science*. Londra: John Murray, pp. 185–352.
- (1842). *A Treatise on Algebra. Volume I: Arithmetical Algebra*. Inglese. Cambridge: J. & J.J. Deighton.
- (1845). *A Treatise on Algebra. Volume II: On Symbolical Algebra, and its Applications to the Geometry of Position*. Inglese. Cambridge: G. F. & J. Rivington.
- Pepe, Luigi (n. d.). *Pessuti, Gioacchino*. Italiano. URL: [https://www.treccani.it/enciclopedia/gioacchino-pessuti_\(Dizionario-Biografico\)/](https://www.treccani.it/enciclopedia/gioacchino-pessuti_(Dizionario-Biografico)/).
- Plofker, Kim (2009). *Mathematics in India*. Inglese. Princeton: Princeton University Press.
- Rashed, Roshdi (1994). *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Inglese. Vol. 156. Boston Studies in the Philosophy of Science. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Reynaud, Antoine André Louis (1859). *Éléments d'algèbre à l'usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique, à la Marine, à l'École Militaire de Saint-Cyr et à l'École Forestière*. Francese. 10^a ed. Parigi: Bachelier.
- Riccati, Vincenzo e Girolamo Saladini (1775). *Compendio d'analisi*. Italiano. Traduzione italiana, a cura di G. Saladini, delle *Institutiones analyticae* di V. Riccati e G. Saladini (Bologna, Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, 1765–1767, vol. 3). Bologna: Stamperia di S. Tommaso d'Aquino.
- Roero, Clara Silvia (2016). «Giornali, Accademie e Traduzioni: il successo europeo delle "Istituzioni Analitiche" di Maria Gaetana Agnesi». Italiano. In: *Physis. Rivista internazionale di storia della scienza* 53, pp. 17–34.
- Rosso, Riccardo (2024–2025). *Dispense del Corso di Storia della Matematica*. Il corso affrontava la storia delle equazioni algebriche.
- Ruffini, Paolo (1807). *Corso di Matematiche ad uso degli Aspiranti alla Scuola d'Artiglieria e Genio di Modena*. Italiano. Vol. 3. Modena: Società Tipografica.

- Schooten, Frans van (1695). *In Geometriam Renati Des Cartes Commentarii*. Latino. Francoforte: Knoch. URL: <https://www.digitale-sammlungen.de/en/details/bsb10008399> (visitato il giorno 21/08/2026).
- Schubring, Gert (2005). *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. Inglese. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer. DOI: <https://doi.org/10.1007/0-387-28273-4>.
- Schubring, Gert, Débora Ferreira e Michel Salazar (giu. 2026). «Analysing the number concept in Weierstraß' lecture notes: conceptions disregarded and remained unknown». Inglese. In: *Archive for History of Exact Sciences* 80. Articolo n. 17 (formato Springer "article number", senza intervallo di pagine tradizionale); i locator usati nel testo rimandano alla numerazione di pagina del PDF (1–81), non a una paginazione di volume. DOI: 10.1007/s00407-026-00369-9.
- Sesiano, Jacques (giu. 1985). «The appearance of negative solutions in mediaeval mathematics». Inglese. In: *Archive for History of Exact Sciences* 32, pp. 105–150. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00329870>.
- Stedall, Jacqueline A. (2002). *A Discourse Concerning Algebra: English Algebra to 1685*. Inglese. Oxford: Oxford University Press.
- Tanner, Rosalind Cecilia Hildegard (1980). «The Alien Realm of the Minus: Deviatory Mathematics in Cardano's Writings». Inglese. In: *Annals of Science* 37.2, pp. 159–178. DOI: <https://doi.org/10.1080/00033798000200171>.
- Tannery, Jules (1886). *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Francese. Parigi: A. Hermann.
- Viète, François (1646). «In artem analyticem isagoge». Latino. In: *Francisci Vietae Opera Mathematica*. A cura di Frans van Schooten. Leida: Ex officina Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum, pp. 1–12.
- (1983). *The Analytic Art. Nine Studies in Algebra, Geometry, and Trigonometry from the Opus Restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebrâ Novâ*. Inglese. Cur. e trad. Latino da T. Richard Witmer. Mineola, New York: Dover Publications.
- Vincenzo Riccati (n. d.). Italiano. URL: <https://matematicaitaliana.sns.it/autori/1372/>.
- Wallis, John (1656). *Arithmetica Infinitorum, sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilinearum Quadraturam, aliaque difficiliora Matheseos Problemata*. Latino. Oxford: Leon Lichfield.
- (1685). *A treatise of algebra, both historical and practical*. Inglese. Also includes additional treatises on cono-cuneus and angular sections. Londra: Printed by John Playford, for Richard Davis.
- Woodhouse, Robert (1803). *The Principles of Analytical Calculation*. Inglese. Venduto da J. Deighton, Cambridge, e da F. and C. Rivington, J. Mawman, W. H. Lunn, Londra. Cambridge: University Press.

Ringraziamenti

Il ringraziamento più grande va al professor Riccardo Rosso, che mi ha seguito con pazienza in questi due anni di tesi — da quando nel settembre 2024 gli chiesi di farmi da relatore. Lo ringrazio per il prezioso materiale fornito, per i consigli sempre puntuali, per l'aiuto nel rintracciare citazioni e cogliere collegamenti tra i molti autori analizzati. Un ringraziamento che va anche oltre l'ambito della tesi: mi ha aiutato nella ricerca di un lavoro segnalandomi scuole in cerca di supplenti di matematica e mi ha tenuto aggiornato su ogni novità riguardante il nuovo percorso di abilitazione nella turbolenta fase di transizione seguita alla riforma.

Insieme al professor Rosso voglio ringraziare la dottoressa Elisa Miragliotta, il professor Andrea Maffia, il professor Mirko Maracci e il professor Samuele Antonini, che con i loro corsi di storia, didattica e fondamenti della matematica mi hanno aiutato a coltivare l'interesse per l'ambito storico-didattico della disciplina, mostrandomi tecniche e metodologie di insegnamento tra loro molto diverse: un tesoro prezioso che porterò con me nel mio percorso futuro come docente di scuola.

Ringrazio inoltre il professor Fulvio Bisi e il professor Giulio Schimperna — che quando ero rappresentante degli studenti presiedevano rispettivamente il Consiglio Didattico e il Consiglio di Dipartimento — per aver sempre ascoltato con attenzione i dubbi di noi studenti e, ove possibile, essere sempre venuti incontro alle nostre esigenze.