

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Sui Semigruppì di Markov e Misure Invarianti

Francesco Baldini

Relatore: Carlo Orrieri

Correlatore: Francesco Carlo De Vecchi



Laurea Magistrale in Matematica

Anno Accademico 2024-2025

Contents

Introduzione	4
1 Preliminari	9
1.1 Semigrupperi di Markov	9
1.2 Misure invarianti	12
1.3 Generatore infinitesimale	16
1.4 Estensione del semigruppero	19
2 Teoria ergodica	21
2.1 Teoremi di Von Neumann	21
2.2 Insiemi invarianti	28
2.3 Misure ergodiche come elementi di $\mathcal{P}(H)$	30
2.3.1 Spazio duale	30
2.3.2 Teorema ergodico	31
2.4 Unicit� delle misure invarianti	34
2.4.1 Regolarit� e irriducibilit�	34
2.4.2 Teorema di Doob–Khas’minskii	36
3 Semigruppero di transizione	38
3.1 Caso deterministico	38
3.1.1 Teorema del flusso	38
3.2 Caso aleatorio	43
3.2.1 Propriet� di markov	43
3.2.2 Processo O.U	45
3.2.3 Caso semilineare	48
3.3 Stabilit�	49
3.4 Unicit� della misura invariante per regolarit�	53
3.5 Esistenza e unicit� di misure invarianti per monotonia	59
4 Teoria infinito-dimensionale	68
4.1 Motivazione e difficolt� strutturali	68
4.2 Semigrupperi fortemente continui	70
4.2.1 ODE in spazi di Hilbert a coefficienti lineari	74
4.3 Gaussiane infinito-dimensionali	78
4.3.1 Estensione sui $\mathcal{B}(H)$	78
4.3.2 Moto Browniano infinito-dimensionale	83
5 SDE infinito-dimensionali	87
5.1 Laplaciano	87
5.2 Equazione del calore stocastica e soluzioni mild	91
5.2.1 Semigruppero di transizione e misure invarianti	93

CONTENTS

5.3	Complementi	94
5.3.1	Il teorema di Cameron–Martin	94
5.3.2	Strong mixing per convergenza debole dei kernel	96
5.3.3	Continuità temporale	98

Introduzione

Il presente lavoro è dedicato allo studio delle misure invarianti per semigrupp di Markov associati a equazioni differenziali stocastiche in spazi di Hilbert, con particolare attenzione al caso finito-dimensionale e un'estensione introduttiva al contesto infinito-dimensionale. Il problema si colloca nell'intersezione tra teoria dei semigrupp di Markov, analisi funzionale e analisi stocastica. Per il resto della trattazione, lo spazio di riferimento sarà H spazio di Hilbert separabile.

Capitolo 1 — Struttura teorica dei semigrupp di Markov

Il primo capitolo è dedicato all'introduzione degli strumenti teorici fondamentali. Viene definito un generico semigrupp di Markov $(P_t)_{t \geq 0}$ su $B_b(H)$ e il corrispondente semigrupp aggiunto $(P_t^*)_{t \geq 0}$ agente sullo spazio delle misure di probabilità, formulazione che consente una trattazione più compatta ed efficace dei risultati successivi.

Si introducono i kernel di transizione associati al semigrupp e le proprietà di Feller e strong Feller, e viene definita la nozione di misura invariante per il semigrupp sia nella formulazione su funzioni test

$$\int_H P_t \varphi d\mu = \int_H \varphi d\mu,$$

sia nella formulazione duale

$$P_t^* \mu = \mu.$$

Sono introdotte le nozioni di misura invariante ergodica (limite delle medie temporali del semigrupp) e di misura invariante strong mixing (limite temporale del semigrupp).

Mediante la formulazione duale vengono dimostrati risultati semplici ma fondamentali, quali l'unicità della misura invariante nel caso strong mixing e criteri di convergenza dei kernel di transizione verso (l'unica) misura invariante.

Una parte essenziale del capitolo è dedicata allo studio del generatore infinitesimale L del semigrupp, definito tramite

$$L\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t \varphi - \varphi}{t},$$

e alla nozione di misura infinitesimalmente invariante, caratterizzata dalla condizione

$$\int_H L\varphi d\mu = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \text{ nel dominio di } L.$$

Si mostra che, sotto opportune ipotesi di regolarità, le nozioni di misura invariante e misura infinitesimalmente invariante coincidono. Questo risultato

di equivalenza semplifica notevolmente la ricerca di misure invarianti nel caso finito-dimensionale, poichè permette un'approccio differenziale tramite la teoria del calcolo di Ito.

Infine, assumendo l'esistenza di una misura invariante μ , il semigruppone viene esteso a un semigruppone di contrazioni su $L^2(H, \mu)$. L'invarianza della misura risulta condizione essenziale per la buona definizione dell'estensione e per lo sviluppo della teoria ergodica approfondita nel capitolo successivo.

Capitolo 2 — Teoria ergodica del semigruppone

Il secondo capitolo è dedicato allo studio delle proprietà ergodiche del semigruppone $(P_t)_{t \geq 0}$, assumendo l'esistenza di una misura invariante μ e lavorando sulla sua estensione in $L^2(H, \mu)$.

Si richiamano anzitutto i teoremi ergodici di von Neumann, sia nella versione discreta sia in quella continua, applicati al semigruppone di contrazioni indotto su $L^2(H, \mu)$. In particolare, si dimostra che le medie temporali

$$\frac{1}{T} \int_0^T P_t \varphi dt$$

convergono in $L^2(H, \mu)$ alla proiezione ortogonale di φ sul sottospazio dei punti fissi del semigruppone $\Sigma = \{\varphi \in L^2 : P_t \varphi = \varphi \text{ per ogni } t \geq 0\}$.

Sfruttando tale risultato, si mostra che la misura invariante μ è ergodica se e solo se Σ è unidimensionale, ossia costituito esclusivamente dalle funzioni costanti. Inoltre, sfruttando la densità delle indicatrici in $L^2(H, \mu)$,

$$\Sigma = \overline{\text{span}}\{1_A \mid A \subset H, P_t 1_A = 1_A \forall t \geq 0\}$$

dove gli insiemi A sono detti insiemi invarianti. Risulta naturale definire le misure ergodiche rispetto agli insiemi invarianti; in particolare, si mostra il seguente risultato fondamentale: una misura μ invariante è ergodica se e solo se ogni insieme invariante è μ -banale.

Successivamente si analizza la struttura dell'insieme Γ delle misure invarianti, considerato come sottoinsieme convesso dello spazio delle misure di probabilità dotato della topologia della convergenza debole.

Sfruttando gli argomenti precedenti, si dimostra che una misura invariante è ergodica se e solo se è un punto estremale di Γ , così da ottenere delle condizioni geometriche di ergodicità.

Questi risultati di natura prettamente teorica diventano essenziali per introdurre l'ultima sezione del capitolo, dedicata ai criteri di unicità della misura invariante e strettamente legata alla dinamica stocastica. Vengono introdotte le nozioni di regolarità e irriducibilità del semigruppone, che dal punto di vista dinamico studiano la natura dei kernel di transizione di una PDE e la presenza di eventuali insiemi assorbenti. Per finire, viene dimostrato il teorema di

CONTENTS

Doob–Khas’minskii, per cui l’irriducibilità combinata con la proprietà strong Feller implica la regolarità, da cui segue l’unicità della misura invariante.

Questo risultato risulta essenziale nel capitolo successivo per una particolare famiglia di SDE con drift dissipativo, in cui le proprietà di strong feller e regolarità possono essere dimostrate esplicitamente.

Capitolo 3 — Semigruppì di transizione

Nel terzo capitolo si passa dall’impianto teorico generale allo studio dei semigruppì di transizione associati a equazioni differenziali stocastiche in dimensione finita.

Si definisce brevemente il semigruppì di transizione deterministico associato a una ODE, per poi passare al caso aleatorio associato a una SDE. Di fondamentale importanza sono i risultati di esistenza e unicità delle soluzioni per le equazioni differenziali.

Particolare attenzione è dedicata al processo di Ornstein–Uhlenbeck, che costituisce il modello aleatorio lineare fondamentale e che verrà esteso nel capitolo 5 al caso infinito-dimensionale. Per tale processo viene dimostrato con due metodi differenti l’esistenza e unicità della misura invariante. Il primo avviene con calcolo diretto e sfrutta la convergenza dei kernel, la cui rappresentazione esplicita è possibile dalla teoria del calcolo di Ito. Il secondo metodo, sempre esplicito ma con strumenti teorici più raffinati sfrutta l’uguaglianza tra invarianza e invarianza infinitesimale, e la regolarità che garantisce unicità della misura invariante.

Successivamente viene considerato un esempio semilineare, con drift della forma $b(x) = x - x^3$, che rappresenta un modello dissipativo semi-Lipshitziano. Si analizzano le proprietà qualitative del semigruppì associato e se ne ricava esplicitamente una misura invariante.

Gli argomenti di unicità vengono trattati in una sezione dedicata, in cui viene dimostrato esplicitamente che sotto ipotesi di semi-Lipshitzianità il semigruppì di transizione è strong Feller e irriducibile. Tali proprietà, combinate con i risultati del Capitolo 2, implicano la regolarità del semigruppì e quindi l’unicità della misura invariante.

Per un quadro interpretativo più ampio, vengono citati strumenti avanzati (basati sul Teorema di Girsanov) che avrebbero dimostrato in maniera più immediata la regolarità del semigruppì.

Infine, viene presentata una dimostrazione dell’esistenza e unicità della misura invariante sotto ipotesi di stretta dissipatività del drift, passando a SDE a tempi negativi e dimostrando la convergenza debole delle soluzioni.

Capitolo 4 — semigruppı fortemente continui e gaussiane infinito-dimensionali

Il quarto capitolo fornisce gli strumenti necessari per il passaggio dal contesto finito-dimensionale al caso infinito-dimensionale.

Nella prima sezione viene sviluppata la teoria dei semigruppı fortemente continui su spazi di Banach, con particolare attenzione alla caratterizzazione dei loro generatori infinitesimali. Dopo aver richiamato la definizione di semigruppı fortemente continuo e di generatore

$$A\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t},$$

si analizzano le proprietà degli operatori che possono generare un semigruppı fortemente continuo.

Il risultato centrale è la caratterizzazione fornita da un caso particolare del teorema di Hille–Yosida, che stabilisce condizioni necessarie e sufficienti affinché un operatore lineare densamente definito e chiuso sia generatore di un semigruppı di contrazioni.

Nella seconda sezione vengono introdotte le misure gaussiane su spazi di Hilbert separabili. Si parte dalla nozione di variabile gaussiana cilindrica, definita tramite le sue proiezioni finite-dimensionali, e si procede alla caratterizzazione delle misure gaussiane a valori in H .

Viene citato in particolare il risultato fondamentale secondo cui una misura gaussiana cilindrica è effettivamente una misura di probabilità su H se e solo se il suo operatore di covarianza Q è di classe traccia, ovvero

$$\text{Tr}(Q) < \infty.$$

Nell'ultima sezione viene introdotto il moto browniano cilindrico su H , definito formalmente tramite una famiglia di moti browniani reali indipendenti lungo una base ortonormale.

Si considera quindi un operatore lineare A che ammette una base ortonormale di autovettori e si definisce il processo di convoluzione

$$W_A(t) = \int_0^t S(t-s) dW_s,$$

dove $(S(t))_{t \geq 0}$ è il semigruppı generato da A . In questo caso la convoluzione può essere espressa formalmente tramite una serie lungo la base ortonormale di autovettori, consentendo una verifica diretta della convergenza in H sotto opportune condizioni di sommabilità.

Si dimostra che il processo così definito è gaussiano a valori in H e rappresenta un caso particolare dell'integrale di Itô in dimensione infinita. Tale costruzione risulta fondamentale per l'analisi delle equazioni stocastiche alle derivate parziali trattate nel capitolo successivo.

Capitolo 5 — L'equazione del calore stocastica

L'ultimo capitolo è dedicato allo studio dell'equazione stocastica alle derivate parziali (in seguito SPDE) con operatore Laplaciano su $L^2(0, 1)$ e condizioni al bordo di Dirichlet.

Si analizzano preliminarmente le proprietà spettrali dell'operatore

$$A = \Delta$$

Si verifica che A ammette base ortonormale di autovettori, con relativi autovalori reali strettamente negativi, e che è un operatore autoaggiunto con dominio denso. In particolare, A soddisfa le ipotesi del teorema di Hille–Yosida e genera dunque un semigruppato fortemente continuo di contrazioni $(S(t))_{t \geq 0}$. Si considera quindi l'equazione stocastica

$$dX_t = AX_t dt + dW_t,$$

dove (W_t) è un moto browniano cilindrico su $L^2(0, 1)$. La soluzione viene definita in senso mild come

$$X_t = S(t)x + \int_0^t S(t-s) dW_s.$$

Grazie alla diagonalizzazione spettrale dell'operatore A , la convoluzione stocastica può essere analizzata lungo le componenti della base ortonormale, e la soluzione si riduce così a una famiglia di processi di Ornstein–Uhlenbeck indipendenti

$$dX_t^{(k)} = \lambda_k X_t^{(k)} dt + d\beta_t^{(k)},$$

le cui proprietà di sommabilità sono garantite dalla crescita degli autovalori negativi. Questo approccio consente di verificare direttamente la buona positura della soluzione e di dimostrare che la soluzione mild è l'unica soluzione della SPDE considerata.

Nella sezione successiva si costruisce il semigruppato di transizione associato al processo (X_t) e si dimostra esplicitamente l'esistenza e unicità della misura invariante. In particolare, si passa dalla famiglia di misure invarianti sulle proiezioni, poi tramite il Teorema di estensione di Kolmogorov si estende a una gaussiana cilindrica su H e si verifica (per le condizioni di sommabilità sugli autovalori di A) che è di classe traccia, ottenendo così una misura di probabilità su H .

L'ultima sezione del capitolo è dedicata ad alcuni risultati di teoria gaussiana infinita-dimensionale, tra cui il teorema di Cameron–Martin e criteri di convergenza in legge per variabili gaussiane in spazi di Hilbert. Tali strumenti consentono di fornire un'interpretazione alternativa del problema e di riformulare l'esistenza e unicità della misura invariante in termini più astratti, dimostrando la convergenza dei kernel di transizione e la regolarità del semigruppato.

Capitolo 1

1 Preliminari

1.1 Semigruppı di Markov

In questo capitolo tratteremo la teoria dei semigruppı di Markov, fornendo le definizioni fondamentali e alcuni risultati utili. In particolare, ci concentreremo sull'approccio basato sull'azione del semigruppı su funzioni test e sulla formulazione duale rispetto alle misure, che permette una descrizione piú leggera e compatta, per poi passare all'estensione del semigruppı su L^2 .

Considereremo da qui in avanti come spazio di riferimento H spazio di Hilbert separabile.

Definizione 1.1. Sia $\mathcal{B}_b(H)$ lo spazio delle funzioni reali misurabili rispetto la sigma-algebra di borel e limitate su H .

Una famiglia di operatori lineari

$$(P_t)_{t \geq 0}, \quad P_t : \mathcal{B}_b(H) \rightarrow \mathcal{B}_b(H),$$

si dice *semigruppı di Markov* se valgono le seguenti propriet .

(1) Propriet  di semigruppı.

$$P_0 = I, \quad P_{t+s} = P_t P_s \quad \text{per ogni } t, s \geq 0.$$

(2) Rappresentazione tramite kernel. Per ogni $t \geq 0$ e per ogni $x \in H$, esiste una misura di probabilit  (detta kernel di transizione) $\pi_t(x, \cdot)$ su H tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{B}_b(H)$

$$P_t \varphi(x) = \int_H \varphi(y) \pi_t(x, dy).$$

(3) Continuit  in t . Per ogni $x \in H$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{B}_b(H)$, l'applicazione

$$t \mapsto P_t \varphi(x)$$

  continua su $[0, \infty)$.

Osservazione 1.2. La linearit  degli operatori P_t , cos  come la loro limitatezza, derivano immediatamente dalla rappresentazione tramite kernel. Infatti, dalla formula

$$P_t \varphi(x) = \int_H \varphi(y) \pi_t(x, dy),$$

CAPITOLO 1. PRELIMINARI

segue che per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{B}_b(H)$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$P_t(\alpha\varphi + \beta\psi)(x) = \int_H (\alpha\varphi(y) + \beta\psi(y)) \pi_t(x, dy) = \alpha P_t\varphi(x) + \beta P_t\psi(x),$$

e quindi P_t è lineare.

Inoltre, usando che $\pi_t(x, \cdot)$ è una misura di probabilità, otteniamo la limitatezza di P_t come operatore su $\mathcal{B}_b(H)$:

$$|P_t\varphi(x)| = \left| \int_H \varphi(y) \pi_t(x, dy) \right| \leq \int_H |\varphi(y)| \pi_t(x, dy) \leq \|\varphi\|_\infty \int_H \pi_t(x, dy) = \|\varphi\|_\infty.$$

Dunque

$$\|P_t\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty,$$

cioè P_t è un operatore limitato con norma $\|P_t\| \leq 1$ (in particolare, è continuo su $B_b(H)$ dotato della norma sup).

Passiamo ora alla rappresentazione del semigruppato su $\mathcal{M}_1(H)$ spazio delle misure di probabilità su H .

Definizione 1.3. Una famiglia di operatori lineari

$$(P_t^*)_{t \geq 0}, \quad P_t^* : \mathcal{M}_1(H) \rightarrow \mathcal{M}_1(H),$$

si dice *semigruppato di Markov sulle misure* se valgono le seguenti proprietà.

(1) Proprietà di semigruppato.

$$P_0^* = I, \quad P_{t+s}^* = P_t^* P_s^* \quad \text{per ogni } t, s \geq 0.$$

(2) Rappresentazione tramite kernel. Per ogni $t \geq 0$ e ogni $\mu \in \mathcal{M}_1(H)$, esiste un kernel di probabilità $\pi_t(x, \cdot)$ su H tale che per ogni $A \in \mathcal{B}(H)$

$$(P_t^*\mu)(A) = \int_H \pi_t(x, A) \mu(dx).$$

(3) Continuità in t . Per ogni $\mu \in \mathcal{M}_1(H)$ e ogni $A \in \mathcal{B}(H)$, l'applicazione

$$t \mapsto (P_t^*\mu)(A)$$

è continua su $[0, \infty)$.

Ora mostreremo la proprietà fondamentale che lega il semigruppato di Markov associato alle funzioni test col duale sulle misure.

1.1 SEMIGRUPPI DI MARKOV

Proposizione 1.4. Siano $(P_t)_{t \geq 0}$ il semigruppato di Markov su $\mathcal{B}_b(H)$ e $(P_t^*)_{t \geq 0}$ il semigruppato duale su $\mathcal{M}_1(H)$. Allora, per ogni $\varphi \in \mathcal{B}_b(H)$ e ogni $\mu \in \mathcal{M}_1(H)$, vale la relazione fondamentale

$$\int_H (P_t \varphi)(x) \mu(dx) = \int_H \varphi(x) (P_t^* \mu)(dx), \quad \forall t \geq 0.$$

Dimostrazione. Possiamo riscrivere l'integrale di sinistra come

$$\int_H (P_t \varphi)(x) \mu(dx) = \int_H \left(\int_H \varphi(y) \pi_t(x, dy) \right) \mu(dx),$$

Applicando Fubini/Tonelli per scambiare l'ordine di integrazione, otteniamo

$$\int_H \left(\int_H \varphi(y) \pi_t(x, dy) \right) \mu(dx) = \int_H \varphi(y) \left(\int_H \pi_t(x, dy) \mu(dx) \right) = \int_H \varphi(y) (P_t^* \mu)(dy),$$

Da cui la tesi. □

Le considerazioni preliminari sullo spazio delle misure di probabilità saranno utili per le dimostrazioni successive.

La topologia che considereremo su $\mathcal{M}_1(H)$ è la *topologia della convergenza debole*, ovvero la topologia meno fine per cui una successione di misure $(\mu_n)_{n \geq 0}$ converge a μ se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_H \varphi d\mu_n = \int_H \varphi d\mu \quad \text{per ogni } \varphi \in C_b(H),$$

dove $C_b(H)$ indica lo spazio delle funzioni continue e limitate su H .

In particolare, lo spazio $\mathcal{M}_1(H)$ dotato di questa topologia è T2 (Hausdorff), e dunque ogni limite è unico.

Inoltre, essendo H separabile, anche $\mathcal{M}_1(H)$ è separabile. Di conseguenza, tutte le proprietà topologiche più comuni diventano equivalenti alla corrispondente proprietà per successioni: continuità, compattezza, chiusura, ecc.

Introduciamo ora alcune definizioni fondamentali per il semigruppato di Markov.

Definizione 1.5. Un semigruppato di Markov $(P_t)_{t \geq 0}$ su $\mathcal{B}_b(H)$ si dice *Feller* se

$$P_t(C_b(H)) \subset C_b(H) \quad \text{per ogni } t \geq 0,$$

cioè P_t manda funzioni continue e limitate in funzioni continue e limitate per ogni tempo t .

Definizione 1.6. Un semigruppato di Markov $(P_t)_{t \geq 0}$ su $\mathcal{B}_b(H)$ si dice *Strong Feller* se

$$P_t(\mathcal{B}_b(H)) \subset C_b(H) \quad \text{per ogni } t > 0,$$

cioè P_t manda funzioni limitate e misurabili in funzioni continue e limitate per ogni tempo $t > 0$.

Proposizione 1.7. *Il semigruppato di Markov $(P_t)_{t \geq 0}$ è Feller se e solo se il duale $(P_t^*)_{t \geq 0}$ è continuo nella topologia della convergenza debole su $\mathcal{M}_1(H)$.*

Dimostrazione. (\Rightarrow) Supponiamo che P_t sia Feller. Allora per ogni $\varphi \in C_b(H)$ si ha $P_t \varphi \in C_b(H)$. Per la definizione di P_t^* e della convergenza debole, se $\mu_n \rightarrow \mu$ debolmente, allora

$$\int_H \varphi(x) (P_t^* \mu_n)(dx) = \int_H (P_t \varphi)(x) \mu_n(dx) \rightarrow \int_H (P_t \varphi)(x) \mu(dx) = \int_H \varphi(x) (P_t^* \mu)(dx),$$

da cui la continuità debole di P_t^* .

(\Leftarrow) Supponiamo ora che P_t^* sia continuo nella topologia debole. Consideriamo una successione $(x_n) \subset H$ convergente a x , il che equivale alla convergenza debole delle rispettive misure di Dirac $\delta_{x_n} \rightarrow \delta_x$. Dalla continuità debole di P_t^* segue che

$$P_t^* \delta_{x_n} \rightarrow P_t^* \delta_x \quad \text{debolmente.}$$

Osserviamo ora che, se $\varphi \in C_b(H)$, allora

$$(P_t \varphi)(x_n) = \int_H \varphi(y) (P_t^* \delta_{x_n})(dy) \rightarrow \int_H \varphi(y) (P_t^* \delta_x)(dy) = (P_t \varphi)(x),$$

cioè $x_n \mapsto P_t \varphi(x_n)$ converge a $P_t \varphi(x)$. Da ciò segue che $P_t \varphi$ è continua, e quindi P_t è Feller. \square

1.2 Misure invarianti

L'argomento di principale interesse per quanto riguarda i semigruppato di Markov sono le cosiddette *misure invarianti*.

Definizione 1.8. Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ un semigruppato di Markov su $\mathcal{B}_b(H)$. Una misura di probabilità $\mu \in \mathcal{M}_1(H)$ si dice *invariante* per P_t se

$$\int_H (P_t \varphi)(x) \mu(dx) = \int_H \varphi(x) \mu(dx) \quad \text{per ogni } \varphi \in C_b(H), t \geq 0.$$

Sebbene la definizione sulle funzioni test sia intuitivamente poco fruibile, diventa subito chiara la natura delle misure invarianti tramite la seguente definizione:

Definizione 1.9. Sia $(P_t^*)_{t \geq 0}$ il semigruppato duale su $\mathcal{M}_1(H)$. Una misura di probabilità $\mu \in \mathcal{M}_1(H)$ si dice *invariante* se

$$P_t^* \mu = \mu \quad \text{per ogni } t \geq 0,$$

cioè μ è fissa per l'azione del semigruppato sulle misure di probabilità.

L'uguaglianza delle due definizioni è immediata per la proprietà fondamentale sui semigrupp di funzioni test e misure.

Definizione 1.10. Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ un semigrupp di Markov e sia μ una misura invariante. Diciamo che μ è *ergodica* se, per ogni $\varphi \in C_b(H)$ e per ogni $x \in H$, vale

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_t \varphi(x) dt = \int_H \varphi(y) \mu(dy).$$

Definizione 1.11. Sia $(P_t^*)_{t \geq 0}$ il semigrupp duale sulle misure di probabilità e sia μ una misura invariante. Diciamo che μ è *ergodica* se, per ogni $\nu \in \mathcal{M}_1(H)$, vale

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_t^* \nu dt = \mu,$$

dove il limite è preso nella topologia debole. Questo significa che una misura è ergodica se converge a questa la media temporale delle misure mappate dal semigrupp, indipendentemente dal dato iniziale.

Proposizione 1.12. *Le due definizioni sono equivalenti.*

Dimostrazione. (1) \Rightarrow (2). Supponiamo ora che la prima definizione sia vera, ovvero che per ogni $\varphi \in C_b(H)$ e per ogni $x \in H$ valga

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_t \varphi(x) dt = \int_H \varphi(y) \mu(dy).$$

Vogliamo mostrare che per ogni misura di probabilità iniziale $\nu \in \mathcal{M}_1(H)$ si ha la convergenza debole

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_t^* \nu dt = \mu.$$

Per la definizione di convergenza debole, questo equivale a dimostrare che per una generica funzione test $\varphi \in C_b(H)$ si ha:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_H \varphi(y) \left(\frac{1}{T} \int_0^T P_t^* \nu dt \right) (dy) = \int_H \varphi(y) \mu(dy).$$

Riscriviamo il membro di sinistra. Per la relazione tra il semigrupp su funzioni test e il suo duale otteniamo

$$\int_H \varphi(y) \left(\frac{1}{T} \int_0^T P_t^* \nu dt \right) (dy) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_H P_t \varphi(x) \nu(dx) \right) dt.$$

Usiamo ora Fubini:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_H P_t \varphi(x) \nu(dx) \right) dt = \int_H \left(\frac{1}{T} \int_0^T P_t \varphi(x) dt \right) \nu(dx).$$

CAPITOLO 1. PRELIMINARI

Essendo l'integranda rispetto allo spazio limitata, possiamo applicare il Teorema della Convergenza Dominata

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_H \left(\frac{1}{T} \int_0^T P_t \varphi(x) dt \right) \nu(dx) &= \int_H \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_t \varphi(x) dt \right) \nu(dx) \\ &= \int_H \left(\int_H \varphi(y) \mu(dy) \right) \nu(dx). \end{aligned}$$

Da cui

$$\left(\int_H \varphi(y) \mu(dy) \right) \int_H \nu(dx) = \int_H \varphi(y) \mu(dy),$$

Avendo mostrato questo per ogni $\varphi \in C_b(H)$, concludiamo che la media temporale converge debolmente a μ .

(2) \Rightarrow (1) Identica procedendo a ritroso, usando come misure di riferimento le delta di Dirac. \square

Abbiamo visto cosa sono le misure invarianti, ovvero i punti fissi dell'operatore semigruppato sul duale, e le misure ergodiche, sottofamiglia delle misure invarianti che rappresentano la media temporale del sottogruppo sul duale. Restano solo da definire i limiti temporali del sottogruppo.

Definizione 1.13. Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ un semigruppato di Markov e sia μ una misura invariante. Diciamo che μ è strong mixing se, per ogni $\varphi \in C_b(H)$ e per ogni $x \in H$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t \varphi(x) = \int_H \varphi(y) \mu(dy),$$

Definizione 1.14. Sia $(P_t^*)_{t \geq 0}$ il semigruppato duale sulle misure di probabilità $\mathcal{M}_1(H)$ e sia μ una misura invariante. Diciamo che μ è strong mixing se, per ogni $\nu \in \mathcal{M}_1(H)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t^* \nu = \mu, \quad (\text{debolmente})$$

Proposizione 1.15. Le due definizioni sono equivalenti.

Dimostrazione. Partiamo dalla definizione tramite funzioni test. Per ogni $\varphi \in C_b(H)$ e per ogni $x \in H$ si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t \varphi(x) = \int_H \varphi(y) \mu(dy).$$

Integrando questa identità rispetto a una misura di probabilità $\nu \in \mathcal{M}_1(H)$ otteniamo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_H P_t \varphi(x) \nu(dx) = \int_H \left(\int_H \varphi(y) \mu(dy) \right) \nu(dx) = \int_H \varphi(y) \mu(dy),$$

dove abbiamo portato il limite fuori dall'integrale grazie alla convergenza dominata, poiché $P_t\varphi(x)$ è limitata.

Tramite la dualità tra semigrupp su funzioni test e misure,

$$\int_H P_t\varphi(x) \nu(dx) = \int_H \varphi(y) (P_t^*\nu)(dy),$$

otteniamo immediatamente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_H \varphi(y) (P_t^*\nu)(dy) = \int_H \varphi(y) \mu(dy),$$

cioè $P_t^*\nu \rightarrow \mu$ nella topologia debole. Il viceversa è immediato, procedendo a ritroso e usando come misure le delta di dirac. \square

Osservazione 1.16. La condizione di strong mixing può essere vista per definizione come

$$\int_H \varphi(y) \pi_t(x, dy) \longrightarrow \int_H \varphi(y) \mu(dy), \quad t \rightarrow \infty,$$

per ogni $x \in H$ e ogni $\varphi \in C_b(H)$. In altre parole, la strong mixing corrisponde esattamente alla *convergenza debole dei kernel di transizione* verso la misura invariante μ .

Osservazione 1.17. Se una misura μ è strong mixing allora è l'unica misura invariante per il semigrupp.

Infatti se per assurdo esistesse una misura invariante $\nu \in \mathcal{M}_1(H)$ diversa da μ , allora ν sarebbe un punto fisso del semigrupp, cioè

$$P_t^*\nu = \nu \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Ma essendo μ strong mixing, per definizione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t^*\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} \nu = \mu,$$

da cui $\nu = \mu$, assurdo.

Enunciamo ora un semplice risultato riguardante l'esistenza e l'unicità delle misure invarianti per un semigrupp di Markov.

Proposizione 1.18. *Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ un semigrupp di Markov Feller su $\mathcal{B}_b(H)$ con kernel di transizione $\pi_t(x, dy)$. Supponiamo che, per ogni $x \in H$,*

$$\pi_t(x, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mu \quad \text{debolmente.}$$

Allora μ è una misura di probabilità invariante, strong mixing per il semigrupp $(P_t)_{t \geq 0}$, e inoltre è unica.

CAPITOLO 1. PRELIMINARI

Dimostrazione. Per ipotesi Feller, il semigruppoo $(P_s)_{s \geq 0}$ è continuo nella topologia debole, quindi, applicandolo alla misura $\pi_t(x, \cdot)$, otteniamo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_s^* \pi_t(x, \cdot) = P_s^* \mu.$$

Ricordando che il kernel si può scrivere come

$$\pi_t(x, \cdot) = P_t^* \delta_x,$$

possiamo riscrivere il limite precedente come

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_s^* P_t^* \delta_x.$$

Usando la proprietà di semigruppoo, cioè $P_s^* P_t^* = P_{t+s}^*$, otteniamo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{t+s}^* \delta_x = \mu.$$

Da ciò segue immediatamente

$$P_s^* \mu = \mu,$$

cioè μ è invariante. Inoltre la convergenza debole dei kernel

$$P_t^* \delta_x = \pi_t(x, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mu,$$

è proprio la definizione di *strong mixing*.

L'unicità è ovvia per l'osservazione precedente. □

1.3 Generatore infinitesimale

Introdurremo ora uno strumento che si rivelerà utile per l'analisi dei sistemi dinamici stocastici e delle relative misure invarianti: il *generatore infinitesimale* del semigruppoo.

Definizione 1.19. Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ un semigruppoo di Markov su $\mathcal{B}_b(H)$. Il *generatore infinitesimale* $L : D(L) \subset \mathcal{B}_b(H) \rightarrow \mathcal{B}_b(H)$ è definito come l'operatore tale che, per ogni $\varphi \in D(L)$, il limite

$$L\varphi := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P_t\varphi - \varphi}{t}$$

esiste nel senso della norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ definita su $\mathcal{B}_b(H)$. Più precisamente, $\varphi \in D(L)$ se esiste una funzione $f \in \mathcal{B}_b(H)$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{P_t\varphi - \varphi}{t} - f \right\|_\infty = 0,$$

nel qual caso si pone $L\varphi = f$.

L'insieme $D(L)$ di tutte le funzioni per cui il limite esiste è detto *dominio del generatore*.

1.3 GENERATORE INFINITESIMALE

Osservazione 1.20. Un insieme classico per il dominio del generatore $D(L)$ è l'insieme delle funzioni di classe C^2 limitate:

$$D := C_b^2(H) = \{\varphi \in \mathcal{B}_b(H) \mid \varphi \text{ è due volte continuamente differenziabile}\}.$$

Il generatore infinitesimale così definito può essere interpretato come la *derivata nel tempo* di $P_t\varphi(x)$ in $t = 0$:

$$L\varphi(x) = \left. \frac{d}{dt} P_t\varphi(x) \right|_{t=0}.$$

Questa interpretazione è sufficiente a garantire la buona definizione del generatore per ogni tempo $t \geq 0$, grazie alla proprietà di semigruppato:

$$P_{t+s}\varphi = P_t(P_s\varphi),$$

che permette di “traslare” il tempo e calcolare la derivata temporale in ogni istante s :

$$\left. \frac{d}{dt} P_{t+s}\varphi \right|_{t=0} = L(P_s\varphi).$$

Questa asserzione è ragionevole a patto che il semigruppato sia *chiuso nel dominio del generatore*, cioè che $P_t(D(L)) \subset D(L)$ per ogni $t \geq 0$, in modo da garantire che l'applicazione iterata del generatore sia ben definita.

Definizione 1.21. Sia $D \subset C_b(H)$. Si dice che D è *denso in senso debole o measure-determining* se, per ogni coppia di misure di probabilità μ, ν su H , vale

$$\int_H \varphi(x) \mu(dx) = \int_H \varphi(x) \nu(dx) \quad \forall \varphi \in D \quad \implies \quad \mu = \nu.$$

Proposizione 1.22. Fissati $n, d \in \mathbb{N}$, $C_b^n(\mathbb{R}^d)$ è denso in senso debole ¹.

Definizione 1.23. Una misura di probabilità $\mu \in \mathcal{M}_1(H)$ si dice *infinitesimalmente invariante* per il semigruppato $(P_t)_{t \geq 0}$ se soddisfa

$$\int_H L\varphi(x) \mu(dx) = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in D(L),$$

La ragione per cui vengono introdotti il generatore infinitesimale e le misure infinitesimalmente invarianti è che, in molti contesti, risulta complesso determinare direttamente le misure invarianti del semigruppato $(P_t)_{t \geq 0}$, mentre è spesso più semplice caratterizzare le misure infinitesimalmente invarianti. Questo fatto si rivela utile grazie alla seguente

¹Vedi Billingsley, *Convergence of Probability Measures*.

CAPITOLO 1. PRELIMINARI

Proposizione 1.24. *Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ un semigruppò di Markov tale che $P_t(D(L)) \subset D(L)$ per ogni $t \geq 0$ e tale che $D(L)$ è denso in senso debole in $C_b(H)$. Allora una misura $\mu \in \mathcal{M}_1(H)$ è invariante se e solo se è infinitesimalmente invariante.*

Dimostrazione. (\Rightarrow) Ovvvia

(\Leftarrow) Supponiamo ora che μ sia infinitesimalmente invariante:

$$\int_H L\varphi(x) \mu(dx) = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in D(L).$$

Definiamo per ogni $\varphi \in D(L)$ la funzione

$$f(t) := \int_H P_t\varphi(x) \mu(dx).$$

Allora, usando la definizione di generatore,

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_H \frac{P_{t+h}\varphi(x) - P_t\varphi(x)}{h} \mu(dx) = \int_H L(P_t\varphi)(x) \mu(dx).$$

Dove abbiamo usato il fatto che $P_t\varphi \in D(L)$ ed esiste finito (uniformemente) $L\varphi(x)$ per poter derivare sotto l'integrale. Si ha dunque $f'(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$, cioè f è costante. Quindi

$$\int_H P_t\varphi(x) \mu(dx) = f(t) = f(0) = \int_H \varphi(x) \mu(dx) \quad \forall t \geq 0, \varphi \in D(L).$$

Ora, osserviamo che, per la relazione fondamentale del semigruppò

$$\int_H \varphi(x) \mu(dx) = \int_H (P_t\varphi)(x) \mu(dx) = \int_H \varphi(x) (P_t^*\mu)(dx), \quad \forall t \geq 0, \varphi \in D(L).$$

e per definizione di densità debole implica $P_t^*\mu = \mu$, che è proprio l'invarianza. \square

1.4 Estensione del semigrupp

Lavorare su $\mathcal{B}_b(H)$ con la topologia indotta dalla norma del sup non permette di utilizzare molte proprietà strutturali tipiche degli spazi di Hilbert, come avverrebbe ad esempio lavorando in L^2 . Per questo vogliamo provare ad 'estendere' lo spazio di definizione delle funzioni test.

Proposizione 1.25. *Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ un semigrupp di Markov definito su $\mathcal{B}_b(H)$ e sia μ una misura di probabilità invariante per (P_t) , cioè $P_t^* \mu = \mu$ per ogni $t \geq 0$. Allora, per ogni $t \geq 0$, l'operatore P_t si estende (per continuità) a un operatore lineare contrattivo su $L^2(\mu, H)$ (che d'ora in poi scriveremo solo come $L^2(\mu)$):*

$$P_t : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu), \quad \|P_t f\|_{L^2(\mu)} \leq \|f\|_{L^2(\mu)} \quad \forall f \in L^2(\mu).$$

Inoltre $(P_t)_{t \geq 0}$ conserva la struttura di semigrupp su $L^2(\mu)$, ovvero $P_0 = I$ e $P_{t+s} = P_t P_s$ su $L^2(\mu)$.

Dimostrazione. Sia $f \in B_b(H)$. Per la rappresentazione tramite kernel

$$P_t f(x) = \int_H f(y) \pi_t(x, dy),$$

inoltre per la disuguaglianza di Jensen

$$(P_t f(x))^2 \leq P_t(f^2)(x).$$

Integrando rispetto a μ e usando l'invarianza di μ si ottiene

$$\int_H (P_t f(x))^2 \mu(dx) \leq \int_H P_t(f^2)(x) \mu(dx) = \int_H f^2(x) \mu(dx).$$

Quindi

$$\|P_t f\|_{L^2(\mu)} \leq \|f\|_{L^2(\mu)} \quad (\forall f \in B_b(H)).$$

Poiché $B_b(H)$ è denso in $L^2(\mu)$, l'operatore P_t si estende (per continuità, essendo lineare e limitato) a un operatore lineare contrattivo su tutto $L^2(\mu)$, cosiccome la proprietà di semigrupp e la continuità in t . \square

In particolare, si dimostra facilmente per densità e utilizzando la convergenza dominata che il semigrupp esteso su $L^2(H, \mu)$ possiede una proprietà di regolarità superiore, nota come *forte continuità*².

E' possibile estendere in modo naturale le nozioni di ergodicità e di strong mixing al contesto $L^2(\mu)$.

²per la teoria completa di semigrupp su spazi di Banach, vedi capitolo 4.

CAPITOLO 1. PRELIMINARI

Definizione 1.26. μ invariante si dice *ergodica* se per ogni $f \in L^2(\mu)$ vale

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{T} \int_0^T P_t f dt - \bar{f} \right\|_{L^2(\mu)} = 0.$$

e si dice *strong mixing* se per ogni $f \in L^2(\mu)$ vale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|P_t f - \bar{f}\|_{L^2(\mu)} = 0, \quad \text{dove } \bar{f} := \int_H f(x) \mu(dx).$$

Capitolo 2

2 Teoria ergodica

2.1 Teoremi di Von Neumann

Enunciamo ora un semplice lemma che ci risulterà utile in seguito.

Definizione 2.1. Sia H uno spazio di Hilbert e $T : H \rightarrow H$ un operatore lineare. Definiamo $T^* : H \rightarrow H$ l'operatore *aggiunto* di T l'unico operatore lineare t.c.

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Lemma 2.2. Sia $T : H \rightarrow H$ un operatore lineare contrattivo e T^* il suo aggiunto. Allora i punti fissi di T coincidono con i punti fissi di T^* :

$$Tx = x \iff T^*x = x.$$

Dimostrazione. Osserviamo intanto che se T è contrattivo, cioè $\|Tx\| \leq \|x\|$ per ogni $x \in H$, allora anche T^* è contrattivo. Infatti, per ogni $x \in H$:

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle \leq \|TT^*x\| \|x\| \leq \|T^*x\| \|x\|,$$

Dividendo per $\|T^*x\|$ (se non nullo) otteniamo

$$\|T^*x\| \leq \|x\|,$$

Sia ora $x \in H$ tale che $Tx = x$. Consideriamo

$$\|T^*x - x\|^2 = \langle T^*x - x, T^*x - x \rangle.$$

Scomponendo il prodotto scalare e usando la linearità di T^* , otteniamo

$$\|T^*x - x\|^2 = \langle T^*x, T^*x \rangle - \langle T^*x, x \rangle - \langle x, T^*x \rangle + \|x\|^2 =$$

Ricordando che

$$\langle T^*x, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

e la contrattività di T^* otteniamo

$$\|T^*x - x\|^2 \leq \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \|x\|^2 = 0.$$

Quindi

$$\|T^*x - x\|^2 = 0 \implies T^*x = x,$$

Viceversa, basta notare che l'aggiunto di T^* è proprio T e usare le stesse considerazioni sopra. \square

CAPITOLO 2. TEORIA ERGODICA

Corollario 2.3. *Nelle ipotesi sopra,*

$$H = \ker(I - T) \oplus \overline{\operatorname{Im}(I - T)}.$$

Dimostrazione. Dalla teoria degli operatori su spazi di Hilbert, per ogni operatore lineare continuo A vale

$$H = \ker(A) \oplus \overline{\operatorname{Im}(A^*)}.$$

Applicando questo a $A = I - T$ e usando che $\ker(I - T^*) = \ker(I - T)$, otteniamo la decomposizione diretta desiderata. \square

Enunciamo ora il teorema cardine della teoria ergodica.

Teorema 2.4. *(Media ergodica di von Neumann)*

Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia $T : H \rightarrow H$ un operatore lineare continuo tale che

$$\|Tf\|_H \leq \|f\|_H \quad \forall f \in H,$$

ossia T è una contrazione. Per ogni $N \in \mathbb{N}$ definiamo la media ergodica

$$M_N f := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T^k f.$$

Allora la successione $(M_N f)_{N \in \mathbb{N}}$ converge in H per ogni $f \in H$. Inoltre, il limite è la proiezione ortogonale di f sul sottospazio chiuso

$$\operatorname{Fix}(T) := \{g \in H : Tg = g\}.$$

Dimostrazione. (come notazione useremo per leggerezza gli x come elementi di H , la notazione della definizione sarà chiara quando lavoreremo con spazi di funzioni).

Osserviamo innanzitutto che, se T è una contrazione (cioè $\|T\| \leq 1$), allora ogni potenza T^n è ancora una contrazione. Infatti, per $n = 1$ la proprietà è chiara; supposto vero per $n - 1$, si ha

$$\|T^n\| = \|T \circ T^{n-1}\| \leq \|T\| \|T^{n-1}\| \leq 1 \cdot 1 = 1,$$

da cui, per induzione, $\|T^n\| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Se x è un punto fisso di T , cioè $Tx = x$, allora per ogni $k \geq 0$ si ha $T^k x = x$ e quindi

$$M_N x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T^k x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x = x.$$

Quindi la media ergodica converge trivialmente a x .

2.1 TEOREMI DI VON NEUMANN

Se invece x appartiene all'immagine di $I - T$, cioè $x = (I - T)z$ per qualche z , allora calcoliamo

$$M_N(I - T)z = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T^k(I - T)z = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (T^k z - T^{k+1} z).$$

Questa somma telescopica dà

$$M_N(I - T)z = \frac{1}{N}(z - T^N z).$$

Poiché $\|T^N z\| \leq \|z\|$ per la contrazione, il termine $\frac{1}{N}T^N z$ tende a 0 in norma quando $N \rightarrow \infty$. Ne consegue che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_N(I - T)z = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N}z - \frac{1}{N}T^N z = 0.$$

Essendo H separabile, per ogni insieme $A \subset H$, la sua chiusura \overline{A} è ottenuta aggiungendo ad A tutti i suoi punti di accumulazione.

Ne consegue che, se $y \in \overline{\text{Im}(I - T)}$, allora esiste una successione $(y_n) \subset \text{Im}(I - T)$ con $y_n \rightarrow y$, e poiché per ogni $z \in \text{Im}(I - T)$ si ha $\lim_{N \rightarrow \infty} M_N z = 0$, segue per continuità che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_N y = 0.$$

Ricordiamo inoltre che, essendo T una contrazione lineare, vale la decomposizione 2.3

$$H = \ker(I - T) \oplus \overline{\text{Im}(I - T)}.$$

Sia $x \in H$. Dalla decomposizione ortogonale

$$x = y + z, \quad y \in \ker(I - T), \quad z \in \overline{\text{Im}(I - T)}.$$

Per linearità di M_N si ha

$$M_N x = M_N y + M_N z.$$

Poiché y è punto fisso di T segue $M_N y = y$ per ogni N , mentre dall'analisi precedente si ha $\lim_{N \rightarrow \infty} M_N z = 0$ per ogni $z \in \overline{\text{Im}(I - T)}$. Dalla linearità del limite otteniamo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_N x = \lim_{N \rightarrow \infty} (M_N y + M_N z) = y + 0 = y.$$

Poiché y è la componente di x in $\ker(I - T) = \text{Fix}(T)$, il limite delle medie ergodiche è la proiezione ortogonale di x su $\text{Fix}(T)$. \square

CAPITOLO 2. TEORIA ERGODICA

Osservazione 2.5. Sia $\{M_n\}$ la successione di operatori come sopra e definiamo

$$M_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n.$$

Allora

$$M_\infty(H) = \ker(I - T).$$

Inoltre l'operatore M_∞ è lineare e continuo (lo si può ricavare esplicitamente, oppure osservando che per definizione M_∞ è operatore di proiezione su un sottospazio chiuso).

È evidente quindi la ragione per cui, nel contesto delle misure ergodiche, ha senso lavorare sull'insieme dei punti fissi (nel nostro caso in L^2) per l'operatore semigruppato (P_t) :

Definiamo

$$\Sigma := \{f \in L^2 : P_t f = f \text{ per ogni } t \geq 0\}.$$

(L'uguaglianza è da intendersi in L^2 , o equivalentemente μ -quasi ovunque). Possiamo enunciare ora l'analogo del teorema precedente ma per tempi continui.

Teorema 2.6. (*Von Neumann, medie ergodiche continue*)

Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ il semigruppato fortemente continuo³ su $L^2(H, \mu)$. Definiamo, per ogni $T > 0$ e $f \in L^2(H, \mu)$, l'operatore media

$$M_T f := \frac{1}{T} \int_0^T P_t f \, dt.$$

Allora, esiste

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|M_T f - M_\infty f\|_{L^2} = 0 \quad \text{per ogni } f \in L^2(H, \mu),$$

con $M_\infty(L^2(H, \mu))$ operatore di proiezione su Σ .

Dimostrazione. Sia $f \in L^2(H, \mu)$ e definiamo

$$M_1 f := \int_0^1 P_t f \, dt.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo

$$\int_n^{n+1} P_t f \, dt.$$

Facendo il cambio di variabile $t = n + \tau$, con $\tau \in [0, 1]$, otteniamo

$$\int_n^{n+1} P_t f \, dt = \int_0^1 P_{n+\tau} f \, d\tau.$$

³per la teoria completa di semigruppato su spazi di Banach, vedi capitolo 4.

2.1 TEOREMI DI VON NEUMANN

Applicando la proprietà di semigruppato $P_{n+\tau} = P_n P_\tau$ e usando la linearità e continuità di P_t , possiamo portare P_n fuori dall'integrale:

$$\int_n^{n+1} P_t f dt = P_n \int_0^1 P_\tau f d\tau = P_n M_1 f.$$

(La giustificazione segue per linearità e forte continuità tramite somme di Riemann).

In questo modo, ogni integrale su un intervallo unitario è scritto come un iterato di P_1 :

$$\int_n^{n+1} P_t f dt = P_1^n M_1 f.$$

Per $T > 0$, scriviamo $T = n + \delta$, con $n = [T]$ e $0 \leq \delta < 1$. Allora

$$M_T f := \frac{1}{T} \int_0^T P_t f dt = \frac{1}{T} \int_0^n P_t f dt + \frac{1}{T} \int_n^{n+\delta} P_t f dt.$$

La parte intera si può riscrivere come somma di iterati:

$$\frac{1}{T} \int_0^n P_t f dt = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} P_t f dt = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{n-1} P_1^k M_1 f.$$

La parte restante è limitata da

$$\left\| \frac{1}{T} \int_n^{n+\delta} P_t f dt \right\|_{L^2} \leq \frac{\delta}{T} \|f\|_{L^2} \leq \frac{1}{T} \|f\|_{L^2} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Dal teorema ergodico discreto di von Neumann sappiamo che la media

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_1^k M_1 f$$

converge in L^2 alla proiezione ortogonale $M_\infty M_1 f$ sullo spazio dei punti fissi di P_1 . Moltiplicando e dividendo per n e combinando la parte intera con quella frazionaria (che tende a zero), otteniamo

$$M_T f \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L^2} M_\infty M_1 f.$$

Dunque la media ergodica converge.

Mostriamo ora che è proprio la proiezione su Σ . Per farlo, dimostriamo che $M_\infty f$ è l'unico elemento di Σ tale che

$$\langle f - M_\infty f, y \rangle = 0 \quad \text{per ogni } y \in \Sigma.$$

CAPITOLO 2. TEORIA ERGODICA

Prima di tutto, si osservi che per ogni $t \geq 0$ e per ogni $f \in L^2(H, \mu)$,

$$P_t M_\infty f = M_\infty P_t f = M_\infty f.$$

Infatti per le considerazioni fatte prima,

$$P_t M_\infty f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_t P_s f ds.$$

Usando la proprietà di semigruppato $P_t P_s = P_{t+s}$, segue

$$P_t M_\infty f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_{t+s} f ds.$$

Facendo il cambio di variabile $u = t + s$, otteniamo

$$P_t M_\infty f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{T+t} P_u f du.$$

Scriviamo allora

$$\frac{1}{T} \int_t^{T+t} P_u f du = \frac{1}{T} \int_0^T P_u f du + \frac{1}{T} \int_T^{T+t} P_u f du - \frac{1}{T} \int_0^t P_u f du.$$

Poiché il semigruppato è contrattivo,

$$\left\| \frac{1}{T} \int_T^{T+t} P_u f du \right\|_{L^2} \leq \frac{t}{T} \|f\|_{L^2} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0,$$

e analogamente

$$\left\| \frac{1}{T} \int_0^t P_u f du \right\|_{L^2} \leq \frac{t}{T} \|f\|_{L^2} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Segue dunque che

$$P_t M_\infty f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_u f du = M_\infty f.$$

Quindi, per ogni $t > 0$, $M_\infty f$ è punto fisso di P_t , ovvero $M_\infty f \in \Sigma$. Osserviamo ora che, per ogni $y \in \Sigma$, vale

$$M_\infty y = y.$$

Infatti, poiché y è un punto fisso del semigruppato, si ha $P_t y = y$ per ogni $t \geq 0$, e dunque

$$M_\infty y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_t y dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y dt = y.$$

Inoltre, M_∞ è un operatore lineare, (in quanto limite di operatori lineari) e contrattivo. Infatti per ogni $f \in L^2(H, \mu)$ e per ogni $T > 0$ si ha, usando la contrattività del semigruppoo,

$$\left\| \frac{1}{T} \int_0^T P_t f dt \right\|_{L^2} \leq \frac{1}{T} \int_0^T \|P_t f\|_{L^2} dt \leq \frac{1}{T} \int_0^T \|f\|_{L^2} dt = \|f\|_{L^2}.$$

Passando al limite per $T \rightarrow \infty$, otteniamo

$$\|M_\infty f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2},$$

Essendo dunque M_∞ un operatore lineare contrattivo, vale il lemma 2.2, ovvero i punti fissi coincidono con quelli del suo aggiunto. In particolare, per ogni $y \in \Sigma$, $M_\infty^* y = y$.

Per concludere, fissiamo $y \in \Sigma$. Per ogni $f \in L^2(H, \mu)$,

$$\langle f - M_\infty f, y \rangle = \langle f, y \rangle - \langle M_\infty f, y \rangle = \langle f, y \rangle - \langle f, M_\infty^* y \rangle = \langle f, y \rangle - \langle f, y \rangle = 0.$$

Dunque M_∞ coincide con la proiezione ortogonale su Σ . □

Osservazione 2.7. Nel seguito di questa trattazione lo spazio di riferimento sarà sempre L^2 , o più in generale uno spazio di funzioni. Tuttavia, è importante osservare che questa scelta non è essenziale ai fini della dimostrazione del teorema ergodico, sia nella versione discreta che in quella continua.

Infatti, in tutta la dimostrazione non viene mai utilizzata alcuna proprietà specifica degli spazi L^p o della struttura puntuale delle funzioni, ma unicamente la struttura di spazio di Hilbert e le proprietà astratte del semigruppoo (linearità, contrattività e implicitamente continuità forte per la buona positura dell'integrale nel tempo).

Di conseguenza il teorema ergodico di von Neumann, nelle sue versioni discreta e continua, si estende senza modifiche a semigruppoo fortemente continui agenti su spazi di Hilbert generici.

Corollario 2.8. *Per ogni $f \in L^2(H, \mu)$ vale*

$$\int_H M_\infty f d\mu = \int_H f d\mu.$$

Dimostrazione. Osserviamo che la funzione costante 1 appartiene a Σ , lo spazio dei punti fissi del semigruppoo, poiché per ogni $t \geq 0$ si ha

$$P_t 1 = 1.$$

Essendo M_∞ la proiezione ortogonale su Σ , segue in particolare che

$$M_\infty 1 = 1.$$

CAPITOLO 2. TEORIA ERGODICA

Usando ora la definizione di aggiunto e il fatto che $1 \in \text{Fix}(M_\infty^*)$, otteniamo

$$\int_H M_\infty f \, d\mu = \langle M_\infty f, 1 \rangle = \langle f, M_\infty^* 1 \rangle = \langle f, 1 \rangle = \int_H f \, d\mu.$$

□

Con queste premesse, possiamo enunciare il seguente risultato di equivalenza:

Proposizione 2.9. *La misura invariante μ è ergodica se e solo se $\dim(\Sigma) = 1$.*

Dimostrazione.

(\Rightarrow) Sia $f \in \Sigma$. Se μ è ergodica allora per definizione $M_\infty(f) = \int_H f \, d\mu$.

Poiché $M_\infty(f) = f$ (essendo f punto fisso di P_t), ne segue che f è costante.

(\Leftarrow) Sapendo che M_∞ manda f in Σ , se $\dim \Sigma = 1$ allora $M_\infty(f) = c$.

Inoltre per 2.8

$$\int_H M_\infty(f) \, d\mu = \int_H f \, d\mu$$

dunque

$$c = \int_H c \, d\mu = \int_H M_\infty(f) \, d\mu = \int_H f \, d\mu$$

da cui segue la tesi. □

2.2 Insiemi invarianti

Diamo ora un' ultima caratterizzazione delle misure ergodiche, utile per i risultati di unicità che tratteremo in seguito.

Definizione 2.10. Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ un semigruppato di Markov.

Un insieme misurabile $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si dice *invariante* per $(P_t)_{t \geq 0}$ se, per ogni $t \geq 0$, la funzione indicatrice 1_A è un punto fisso del semigruppato, cioè

$$P_t 1_A = 1_A \quad \mu\text{-q.o. per ogni } t > 0.$$

Osservazione 2.11. Lavorando su H separabile, le funzioni semplici (combinazioni lineari finite di funzioni indicatrici di insiemi misurabili) sono dense in $L^2(H, \mu)$.

In particolare Σ è generato (in senso di chiusura in L^2) dalle funzioni indicatrici 1_A di insiemi invarianti, cioè

$$\Sigma = \overline{\text{span}}\{1_A \mid A \subset H, P_t 1_A = 1_A \forall t \geq 0\}.$$

In altre parole, gli insiemi invarianti del semigruppato determinano una famiglia di funzioni semplici che generano tutto lo spazio dei punti fissi.

E' ragionevole definire quindi le misure ergodiche tramite gli insiemi invarianti:

Proposizione 2.12. μ è ergodica se e solo se ogni insieme invariante è μ -banale, cioè per ogni insieme invariante $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\mu(A) \in \{0, 1\}.$$

Dimostrazione. (\Rightarrow) Supponiamo che μ sia ergodica. Allora dato A invariante, dalla proposizione 2.9

$$1_A = 0 \text{ } \mu\text{-q.o.} \quad \text{oppure} \quad 1_A = 1 \text{ } \mu\text{-q.o.},$$

ovvero

$$\mu(A) = 0 \quad \text{oppure} \quad \mu(A) = 1.$$

(\Leftarrow) Supponiamo che ogni insieme invariante A soddisfi

$$\mu(A) = 0 \quad \text{o} \quad \mu(A) = 1.$$

Per le considerazioni fatte in 2.11, ogni $f \in \Sigma$ è limite in L^2 di funzioni semplici del tipo

$$f_n = \sum_{k=1}^n c_k 1_{A_k},$$

dove ciascun A_k è un insieme invariante per ipotesi μ -banale.

Lavoriamo solo con indicatori di insiemi A_k con $\mu(A_k) = 1$, possiamo trascurare quelli di misura nulla poichè non contribuiscono alla convergenza in L^2 .

Poiché $(f_n) \rightarrow f$ in L^2 esiste una sottosuccessione (f_m) che converge quasi ovunque a f , e denotiamo B l'insieme su cui $(f_m) \rightarrow f$.

Osserviamo ora che l'intersezione di una famiglia numerabile di insiemi di misura 1 ha ancora misura 1, in particolare

$$\mu\left(\bigcap_{k>0} A_k \cap B\right) = 1.$$

Sia ora $x \in \bigcap_{k>0} A_k \cap B$. Allora avremo

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m c_k = \text{cost.}$$

Da cui $f(x) = c$ q.o. Ne segue che

$$\Sigma = \{\text{costanti}\},$$

quindi per 2.9 μ è ergodica. □

Siamo arrivati al seguente risultato fondamentale di ergodicità:

Teorema 2.13.

μ invariante è ergodica $\Leftrightarrow \Sigma$ possiede solo le costanti \Leftrightarrow ogni insieme invariante è banale.

2.3 Misure ergodiche come elementi di $\mathcal{P}(H)$

2.3.1 Spazio duale

Nella sezione precedente abbiamo lavorato nello spazio L^2 rispetto ad una misura invariante assegnata, ricavando alcuni criteri che garantiscono che tale misura μ sia anche ergodica. Tuttavia, le considerazioni svolte non chiariscono la natura delle misure ergodiche all'interno dello spazio delle misure di probabilità (dotato, come visto nel Capitolo 1, della topologia debole), né permettono di affrontare risultati di unicità delle misure invarianti.

In questa sezione analizzeremo lo spazio $\mathcal{P}(H)$ delle misure di probabilità su H , lo spazio delle misure invarianti e il ruolo che le misure ergodiche giocano in questo contesto.

Prima di tutto, definiamo $\mathcal{P}(H)$ in modo naturale come sottospazio all'interno del duale $C_b(H)^*$ tramite la mappa di dualità (per ogni misura di probabilità $\mu \in \mathcal{P}(H)$)

$$\mathcal{L}_\mu : C_b(H) \rightarrow \mathbb{R}$$

ponendo

$$\mathcal{L}_\mu(f) := \int_H f(x) d\mu(x), \quad f \in C_b(H).$$

(è immediato verificare che \mathcal{L}_μ è un funzionale lineare e limitato su $C_b(H)$, ovvero continuo). Poiché per ogni $\mu \in \mathcal{P}(H)$ si ha

$$\|\mathcal{L}_\mu\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int_H f d\mu \right| \leq 1,$$

segue che

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}(H)} \subseteq B_{C_b(H)^*},$$

dove $B_{C_b(H)^*}$ è la palla unitaria del duale.

Risulta evidente la ragione per cui tutte le considerazioni su $\mathcal{P}(H)$ si possono applicare al duale delle misure \mathcal{L}_μ : infatti, tautologicamente una successione (μ_n) è (debolmente) convergente se e solo se lo sono le rispettive (\mathcal{L}_{μ_n}) . Tutte le proprietà topologiche di $\mathcal{P}(H)$ dotato della topologia debole saranno dunque 'trasposte' in $C_b(H)^*$, come compattezza, chiusura e continuità delle mappe.

Definizione 2.14. Indichiamo con

$$\Lambda := \{ \mu \in \mathcal{P}(H) : P_t^* \mu = \mu \text{ per ogni } t \geq 0 \}$$

l'insieme delle misure invarianti per il semigruppato di Markov $(P_t)_{t \geq 0}$.

2.3 MISURE ERGODICHE COME ELEMENTI DI $\mathcal{P}(H)$

Osservazione 2.15. Lo spazio Λ è convesso (e per dualità lo sarà \mathcal{L}_Λ). Infatti, se $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{V}$ e $\lambda \in [0, 1]$, allora per ogni $t \geq 0$ vale

$$P_t^*(\lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2) = \lambda P_t^*\mu_1 + (1 - \lambda)P_t^*\mu_2 = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2.$$

Osservazione 2.16. Se P_t è Feller allora

$$\Lambda := \{\mu \in \mathcal{P}(X) : P_t^*\mu = \mu \text{ per ogni } t \geq 0\}$$

è chiuso (rispetto alla topologia debole).
Infatti, per quanto visto nel capitolo 1,

$$P_t \text{ Feller} \iff P_t^* \text{ è continuo per ogni } t \geq 0.$$

La topologia debole sulle misure è T_2 , quindi

$$\text{Fix}(P_t^*) = \{\mu \in \mathcal{P}(X) : P_t^*\mu = \mu\}$$

è chiuso. Essendo

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \text{Fix}(P_t^*)$$

è intersezione di insiemi chiusi e quindi chiuso.

2.3.2 Teorema ergodico

Lemma 2.17. *Siano $\mu, \nu \in \Lambda$ tali che μ è ergodica e $\nu \ll \mu$. Allora*

$$\mu = \nu.$$

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{B}(H)$. Indichiamo con M_∞ la *media ergodica*. Poiché μ è ergodica ho

$$M_\infty(\mathbf{1}_A) = \mu(A) \quad \mu\text{-q.o.}$$

Per ipotesi $\nu \ll \mu$, dunque l'uguaglianza precedente vale anche ν -quasi ovunque:

$$M_\infty(\mathbf{1}_A) = \mu(A) \quad \nu\text{-q.o.}$$

Poiché ν è invariante per P_t , vale

$$\int_H M_\infty(\mathbf{1}_A) d\nu = \int_H \mathbf{1}_A d\nu = \nu(A).$$

Ma $M_\infty(\mathbf{1}_A) = \mu(A)$ ν -q.o., quindi

$$\nu(A) = \int_H M_\infty(\mathbf{1}_A) d\nu = \int_H \mu(A) d\nu = \mu(A) \cdot \nu(H) = \mu(A),$$

□

CAPITOLO 2. TEORIA ERGODICA

Diamo ora una caratterizzazione delle misure ergodiche come elementi di Λ .

Definizione 2.18. Sia C un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale topologico. Un elemento $x \in C$ si dice *estremale* in C se non esistono $y, z \in C$, $y \neq z$, e $\alpha \in (0, 1)$ tali che

$$x = \alpha y + (1 - \alpha)z.$$

Teorema 2.19. $\mu \in \Lambda$ è ergodica se e solo se è un elemento estremale di Λ .

Dimostrazione. (\Rightarrow) Sia $\mu \in \Lambda$ ergodica.

Supponiamo per assurdo che μ non sia un elemento estremale di Λ . Allora esistono $\mu_1, \mu_2 \in \Lambda$ con $\mu_1 \neq \mu_2$ e $\alpha \in (0, 1)$ tali che

$$\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2.$$

Ora osserviamo che, per ogni $A \in \mathcal{B}(H)$,

$$\mu(A) = 0 \implies 0 = \alpha\mu_1(A) + (1 - \alpha)\mu_2(A) \implies \mu_1(A) = \mu_2(A) = 0,$$

quindi

$$\mu_1 \ll \mu \quad \text{e} \quad \mu_2 \ll \mu.$$

Poiché μ è ergodica e $\mu_1, \mu_2 \in \Lambda$ sono misure invarianti assolutamente continue rispetto a μ , dal lemma 2.17 segue

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu.$$

(\Leftarrow) Supponiamo per assurdo che μ estremale non sia ergodica. Costruiremo ora un suo involuppo convesso.

Per il teorema 2.13, esiste un insieme misurabile $\Gamma \in \mathcal{B}(H)$ invariante non banale, cioè

$$P_t \mathbf{1}_\Gamma = \mathbf{1}_\Gamma \text{ per ogni } t \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 < \mu(\Gamma) < 1.$$

Osserviamo che anche Γ^c è invariante (ovviamente non banale). Infatti (ricordando che $\mathbf{1}_{\Gamma^c} = 1 - \mathbf{1}_\Gamma$ e sfruttando la linearità del semigruppato per ogni $t \geq 0$):

$$P_t \mathbf{1}_{\Gamma^c} = P_t(1 - \mathbf{1}_\Gamma) = P_t 1 - P_t \mathbf{1}_\Gamma = 1 - \mathbf{1}_\Gamma = \mathbf{1}_{\Gamma^c}.$$

Definiamo ora le misure condizionate su Γ e su Γ^c come segue: per ogni $A \in \mathcal{B}(H)$ poniamo

$$\mu_\Gamma(A) := \frac{\mu(A \cap \Gamma)}{\mu(\Gamma)}, \quad \mu_{\Gamma^c}(A) := \frac{\mu(A \cap \Gamma^c)}{\mu(\Gamma^c)}.$$

Osserviamo inoltre che

$$\mu_\Gamma(\Gamma) = 1 \quad \text{e} \quad \mu_{\Gamma^c}(\Gamma^c) = 1,$$

2.3 MISURE ERGODICHE COME ELEMENTI DI $\mathcal{P}(H)$

e quindi

$$\mu_\Gamma \neq \mu \quad \text{e} \quad \mu_{\Gamma^c} \neq \mu.$$

Mostriamo ora che μ_Γ è invariante (la dimostrazione è identica per μ_{Γ^c}). Per ogni $f \in L^2(\mu)$ e per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\int_H P_t f \, d\mu_\Gamma = \frac{1}{\mu(\Gamma)} \int_H P_t f \mathbf{1}_\Gamma \, d\mu$$

Osserviamo che

$$\int_H P_t f \mathbf{1}_\Gamma \, d\mu$$

può essere interpretato come il prodotto scalare in $L^2(H, \mu)$ tra $P_t f$ e $\mathbf{1}_\Gamma$:

$$\int_H P_t f \mathbf{1}_\Gamma \, d\mu = \langle P_t f, \mathbf{1}_\Gamma \rangle_{L^2(H, \mu)}.$$

Per il lemma 2.2, poiché $\mathbf{1}_\Gamma$ è un punto fisso di P_t (ovvero $P_t \mathbf{1}_\Gamma = \mathbf{1}_\Gamma$), otteniamo

$$\langle P_t f, \mathbf{1}_\Gamma \rangle = \langle f, P_t^* \mathbf{1}_\Gamma \rangle = \langle f, \mathbf{1}_\Gamma \rangle = \int_H f \mathbf{1}_\Gamma \, d\mu.$$

Dividendo per $\mu(\Gamma)$, concludiamo che la misura condizionata μ_Γ è invariante:

$$\int_H P_t f \, d\mu_\Gamma = \int_H f \, d\mu_\Gamma.$$

Dalle osservazioni precedenti otteniamo che le due misure condizionate

$$\mu_\Gamma(A) = \frac{\mu(A \cap \Gamma)}{\mu(\Gamma)}, \quad \mu_{\Gamma^c}(A) = \frac{\mu(A \cap \Gamma^c)}{\mu(\Gamma^c)}$$

sono entrambe invarianti per il semigruppato P_t .

Inoltre, per la formula delle probabilità totali, per ogni $A \in \mathcal{B}(H)$

$$\mu(A) = \mu(\Gamma) \mu_\Gamma(A) + \mu(\Gamma^c) \mu_{\Gamma^c}(A).$$

Poiché Γ è non banale ($0 < \mu(\Gamma) < 1$), possiamo scrivere μ come combinazione convessa di due misure invarianti distinte:

$$\mu = \mu(\Gamma) \mu_\Gamma + \mu(\Gamma^c) \mu_{\Gamma^c}.$$

Dunque μ non è estrema. □

Corollario 2.20. *Se esiste una misura invariante allora è ergodica.*

Dimostrazione. Infatti, per il teorema precedente se μ è l'unica misura invariante, allora è necessariamente elemento estrema di Λ , dunque è ergodica. □

2.4 Unicità delle misure invarianti

2.4.1 Regolarità e irriducibilità

Diamo ora delle condizioni che garantiscano l'unicità delle misure invarianti.

Definizione 2.21. Un semigruppato di Markov $(P_t)_{t \geq 0}$ si dice *regolare* se, dato il kernel di transizione π_t associato a P_t , vale che per ogni $t > 0$ e per ogni $x, y \in H$,

$$\pi_t(x, \cdot) \sim \pi_t(y, \cdot),$$

dove il simbolo \sim denota l'equivalenza di misure, cioè $\pi_t(x, \cdot)$ e $\pi_t(y, \cdot)$ sono mutuamente assolutamente continue.

Osservazione 2.22. Nel contesto dei semigruppato di transizione, in cui il semigruppato associa a ogni misura iniziale la legge di un sistema dinamico al tempo t , la regolarità ha la seguente interpretazione probabilistica.

Se il semigruppato $(P_t)_{t \geq 0}$ è regolare, allora ogni evento di probabilità nulla al tempo t è indipendente dal dato iniziale, ovvero per ogni insieme misurabile A vale

$$\pi_t(x, A) = 0 \text{ per qualche } x \iff \pi_t(x, A) = 0 \text{ per ogni } x.$$

In altre parole, se esiste un insieme A per cui per un generico dato iniziale è 'certo' che l'evoluzione del sistema al tempo t transiti in A , allora sarà certo per ogni dato iniziale.

La definizione di regolarità è essenziale per la seguente

Proposizione 2.23. *Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ un semigruppato di Markov regolare, con kernel di transizione π_t . Se esiste una misura invariante μ , allora:*

1. $\mu \sim \pi_t(x, \cdot)$ per ogni $t > 0, x \in H$;
2. μ è l'unica misura invariante del semigruppato.

Dimostrazione. Sia $E \subset H$ misurabile. Osserviamo che, essendo μ invariante,

$$\mu(E) = \int_H \mathbf{1}_E d\mu = \int_H P_t \mathbf{1}_E d\mu = \int_H \pi_t(x, E) d\mu(x).$$

se $\mu(E) = 0$ allora (per positività di π_t) $\pi_t(x, E) = 0$ per qualche x . Poiché il semigruppato è regolare, $\pi_t(x, E) = 0$ per qualche x implica $\pi_t(x, E) = 0$ per ogni $x \in H$. (il viceversa è analogo).

Dunque

$$\mu \sim \pi_t(x, \cdot) \text{ per ogni } t > 0.$$

2.4 UNICITÀ DELLE MISURE INVARIANTI

Per l'unicità, supponiamo per assurdo che esista un insieme misurabile $\Gamma \subset H$ invariante ($P_t \mathbf{1}_\Gamma = \mathbf{1}_\Gamma$) tale che

$$0 < \mu(\Gamma) < 1.$$

Dunque Γ è non vuoto. Allora $\forall x \in \Gamma$

$$\pi_t(x, \Gamma) = P_t \mathbf{1}_\Gamma(x) = \mathbf{1}_\Gamma(x) = 1.$$

Essendo μ assolutamente continua rispetto a $\pi_t(x, \cdot)$, segue che

$$\mu(\Gamma) = 1,$$

Se ne deduce che μ non ammette sottoinsiemi invarianti di misura intermedia, quindi per 2.13 μ è ergodica.

Siano ora μ e ν due misure invarianti. Dal punto (1) segue che

$$\mu \sim \nu \quad \text{e sono entrambe ergodiche.}$$

Ma per il lemma 2.17, se $\mu, \nu \in \Lambda$, e $\mu \sim \nu$ con una delle due ergodica allora $\mu = \nu$. Dunque μ è l'unica misura invariante del semigruppato. \square

Definizione 2.24. Un semigruppato di Markov $(P_t)_{t \geq 0}$ su $\mathcal{B}_b(H)$ si dice *irriducibile* se per ogni $x \in H$, ogni insieme aperto non vuoto $U \subset H$ e ogni $t > 0$ vale

$$P_t \mathbf{1}_U(x) > 0.$$

Equivalentemente, per ogni $x \in H$ e ogni insieme boreliano A con interno non vuoto,

$$\pi_t(x, A) > 0.$$

Osservazione 2.25. Nel contesto dei semigruppato associati a processi stocastici, l'irriducibilità esprime il fatto che, indipendentemente dal dato iniziale x , per ogni insieme aperto non vuoto $U \subset H$ e per ogni $t > 0$, vale

$$\pi_t(x, U) > 0.$$

In altre parole, partendo da qualunque punto dello spazio degli stati, il sistema ha probabilità positiva di transitare, in un tempo finito, in un intorno arbitrariamente piccolo di qualsiasi altro punto.

Da un punto di vista dinamico, questa proprietà implica che l'evoluzione stocastica non possiede insiemi propri che siano completamente attrattivi o assorbenti nel senso probabilistico: nessuna regione dello spazio vincola le traiettorie con probabilità uno.

Il rumore impedisce quindi che il sistema resti confinato in sottoinsiemi deterministici dello spazio delle fasi.

Osservazione 2.26. Se $(P_t)_{t \geq 0}$ è irriducibile, allora per ogni $x \in H$, ogni insieme $B \subset H$ con $\pi_t(x, B) = 1$ è denso in H : infatti, se per assurdo esistesse un insieme $B \subset H$ con $\pi_t(x, B) = 1$ tale che B non sia denso, allora esiste un aperto non vuoto $A \subset H$ che non interseca B . Poiché B ha misura uno, $\pi_t(x, A) \leq \pi_t(x, H \setminus B) = 0$.

2.4.2 Teorema di Doob–Khas'minskii

Per quanto visto, la regolarità è una proprietà fondamentale a determinare l'unicità delle misure invarianti.

Enunciamo per chiudere il capitolo una condizione sufficiente che garantisce la regolarità.

Teorema 2.27. *Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ un semigruppato di Markov irriducibile e strong Feller.*

Allora il semigruppato $(P_t)_{t \geq 0}$ è regolare.

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{B}(H)$ e supponiamo che per qualche $x_0 \in H$ valga

$$\pi_t(x_0, A) = 0.$$

Fissiamo un $0 < h < t$. Per la proprietà di semigruppato

$$\pi_t(x_0, A) = \int_H \pi_h(y, A) \pi_{t-h}(x_0, dy).$$

Poiché l'integrale è nullo e $\pi_h(y, A) \geq 0$, segue che

$$\pi_h(y, A) = 0 \quad \text{per } \pi_{t-h}(x_0, \cdot)\text{-q.o.}$$

Dall'osservazione 2.26, $\pi_h(y, A) = 0$ su un insieme denso di H come funzione di y .

Poiché P_h è strong Feller, la funzione

$$y \mapsto \pi_h(y, A)$$

è continua su H , ed essendo nulla su un insieme denso, otteniamo

$$\pi_h(y, A) = 0 \quad \forall y \in H.$$

Abbiamo dunque mostrato che $\pi_h(y, A) = 0$ per ogni $y \in H$ e per ogni $h \in (0, t)$. Scegliendo in particolare $h = t/2$ e applicando la proprietà di semigruppato otteniamo

$$\pi_t(x, A) = \int_H \pi_{t/2}(y, A) \pi_{t/2}(x, dy) = \int_H 0 \pi_{t/2}(x, dy) = 0, \quad \forall x \in H.$$

Pertanto tutte le misure $\pi_t(x, \cdot)$ condividono la stessa classe di insiemi nulli, cioè il semigruppato è regolare. \square

2.4 UNICITÀ DELLE MISURE INVARIANTI

Osservazione 2.28. Nelle ipotesi della dimostrazione precedente, abbiamo ricavato implicitamente che, se

$$\pi_t(x, A) = 0 \quad \text{per qualche } x \in H,$$

allora

$$\pi_h(x, A) = 0 \quad \forall 0 < h < t,$$

cioè i kernel a tempi inferiori sono nulli sugli stessi insiemi e quindi *assolutamente continui rispetto ai tempi maggiori*.

Consideriamo ora $h > 0$ arbitrario e scriviamo la proprietà di semigruppato in forma integrale:

$$\pi_{t+h}(x, A) = \int_H \pi_t(y, A) \pi_h(x, dy).$$

Poiché, come abbiamo dimostrato, il semigruppato è regolare, nell'ipotesi in cui $\pi_t(x, A) = 0$,

$$\pi_t(y, A) = 0 \quad \forall y \in H \implies \pi_{t+h}(x, A) = 0 \quad \forall x \in H.$$

Da ciò segue che i kernel a tempi maggiori sono *assolutamente continui rispetto ai tempi minori*.

In altre parole, al variare del tempo $t > 0$ e del punto iniziale $x \in H$, tutti i kernel

$$\pi_t(x, \cdot)$$

sono equivalenti tra loro.

Questo ci permette di introdurre una nuova definizione più forte di regolarità.

Definizione 2.29. Un semigruppato di Markov $(P_t)_{t \geq 0}$ su H si dice *fortemente regolare* se, per ogni $t, s > 0$ e ogni $x, y \in H$,

$$\pi_t(x, \cdot) \sim \pi_s(y, \cdot)$$

E' superfluo specificare che la forte regolarità implica la regolarità del semigruppato.

Per concludere, facciamo un sommario dei risultati ottenuti enunciando il seguente

Teorema 2.30. *Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ un semigruppato di Markov strong Feller e irriducibile su H . Allora:*

- (i) *il semigruppato è fortemente regolare;*
- (ii) *il semigruppato ammette unica misura invariante.*

Capitolo 3

3 Semigruppato di transizione

In questo capitolo si studieranno i semigruppato di transizione associati a SDE, partendo da esempi come il processo di Ornstein-Uhlenbeck e il caso semi-lineare. Successivamente si analizzerà il ruolo della dissipatività del drift: il caso con costante $\beta < 0$ (dissipatività stretta) garantisce una condizione di monotonicità decrescente del drift, risultando più forte e assicurando l'unicità della misura invariante per convergenza delle leggi della soluzione, mentre il caso con $\beta > 0$ rappresenta una condizione più debole, che richiede strumenti aggiuntivi per lo studio della stabilità.

Per il resto del capitolo, lo spazio di riferimento sarà $H = \mathbb{R}^n$.

3.1 Caso deterministico

3.1.1 Teorema del flusso

Consideriamo il caso più semplice di sistema dinamico deterministico, dato dalla funzione $b : H \rightarrow H$ e dal seguente sistema:

$$\frac{dX(t)}{dt} = b(X(t)), \quad X(0) = x \in H.$$

E supponiamo che la soluzione $X(t, x)$ di questo sistema esista ed sia unica per ogni condizione iniziale $x \in H$ (tipicamente, questa ipotesi è soddisfatta se ad esempio b è lipshitz o localmente lipshitz più altre ipotesi di regolarità). Allora vale la relazione fondamentale del flusso:

$$X(t + s, x) = X(t, X(s, x)) \quad \forall t, s \geq 0, x \in H.$$

Infatti sia $x \in H$ fissato. Consideriamo la funzione

$$Y(t) := X(t + s, x), \quad t \geq 0.$$

Allora

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{d}{dt}X(t + s, x) = b(X(t + s, x)) = b(Y(t)),$$

con condizione iniziale $Y(0) = X(s, x)$.

Ma per ipotesi di unicità della soluzione, la soluzione del sistema

$$\frac{dY}{dt} = b(Y), \quad Y(0) = X(s, x)$$

è unica. Dunque

$$Y(t) = X(t, X(s, x)) \quad \forall t \geq 0,$$

3.1 CASO DETERMINISTICO

cioè

$$X(t + s, x) = X(t, X(s, x)).$$

Possiamo definire il semigruppato di transizione associato al sistema: sia $X(t, x)$ la soluzione di

$$\frac{dX(t)}{dt} = b(X(t)), \quad X(0) = x \in H.$$

Definizione 3.1. Il semigruppato di transizione $(P_t)_{t \geq 0}$ sulle funzioni test $\varphi \in C_b(H)$ è definito da

$$P_t \varphi(x) := \varphi(X(t, x)), \quad x \in H, t \geq 0.$$

Osservazione 3.2. Il semigruppato di transizione deterministico definito sopra è un semigruppato di Markov. Infatti si ha

$$P_{t+s} \varphi(x) := \varphi(X(t+s, x)) = \varphi(X(t, X(s, x))) = P_t(P_s \varphi)(x),$$

che è proprio la *proprietà di semigruppato*:

$$P_{t+s} = P_t P_s.$$

Inoltre, l'identità all'istante zero è ovvia:

$$P_0 \varphi(x) = \varphi(X(0, x)) = \varphi(x),$$

e la continuità in t del semigruppato segue dalla continuità della soluzione $t \mapsto X(t, x)$. Naturalmente, il kernel di transizione associato al semigruppato deterministico è dato dalle misure di Dirac concentrate lungo il flusso:

$$\pi_t(x, dy) := \delta_{X(t, x)}(dy), \quad x \in H, t \geq 0,$$

Osservazione 3.3. L'ipotesi di considerare funzioni test in $C_b(H)$ è essenziale nel caso deterministico, per garantire la continuità in t del semigruppato. Vedremo invece che, nel caso di equazioni differenziali stocastiche, sarà possibile lavorare su $B_b(H)$, poiché l'operatore di valore atteso "smussa" eventuali discontinuità delle funzioni test.

Prima di continuare con alcuni esempi di semigruppato di transizione, è utile fare alcune considerazioni sul semigruppato associato alle misure, e su cosa rappresenti materialmente in questo contesto.

Ipotizziamo di associare ai valori iniziali x del processo una distribuzione μ . Allora il processo diventa una funzione del tempo e in X_0 variabile aleatoria con legge μ .

CAPITOLO 3. SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE

Usando la definizione di semigruppò sulle misure, ovvero

$$(P_t^* \mu)(A) = \int_H \pi_t(x, A) \mu(dx),$$

si può interpretare $P_t^* \mu$ come la versione continua della formula delle probabilità totali, condizionando rispetto al valore iniziale $X_0 = x$:

$$\mathbb{P}(X_t \in A) = \int_H \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_0 = x) \mu(dx) = \int_H \pi_t(x, A) \mu(dx) = (P_t^* \mu)(A).$$

Diventa quindi chiaro il ruolo del semigruppò sulle misure: esso associa ad ogni distribuzione iniziale della variabile aleatoria X_0 la distribuzione del processo al tempo t . In particolare, si comprende immediatamente il significato della misura invariante: una misura μ è invariante se e solo se la legge di X_0 coincide con la legge di X_t per ogni $t \geq 0$.

Esempio 3.4. Consideriamo lo spazio $H = \mathbb{R}$ e la funzione

$$b(x) = x - x^3.$$

Il sistema dinamico deterministico (che per la teoria delle ODE's possiede unica soluzione forte) è dunque

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t) - X(t)^3, \quad X(0) = x \in \mathbb{R}.$$

Il semigruppò di transizione associato è

$$P_t \varphi(x) := \varphi(X(t, x)), \quad \varphi \in C_b(\mathbb{R}), \quad t \geq 0.$$

È immediato verificare che le misure di Dirac in 0, 1 e -1 sono misure invarianti per il semigruppò deterministico considerato.

Infatti, per le considerazioni fatte sopra, la legge del processo con legge iniziale δ_0 rimane δ_0 per ogni $t \geq 0$, poiché $X(t, 0) = 0$.

Analogamente, la legge iniziale δ_1 rimane δ_1 perché $X(t, 1) = 1$, e la legge iniziale δ_{-1} rimane δ_{-1} poiché $X(t, -1) = -1$.

Quindi

$$P_t^* \delta_0 = \delta_0, \quad P_t^* \delta_1 = \delta_1, \quad P_t^* \delta_{-1} = \delta_{-1}, \quad \forall t \geq 0,$$

cioè tutte e tre sono misure invarianti.

Esempio 3.5. (semigruppò di traslazione).

3.1 CASO DETERMINISTICO

Consideriamo lo spazio $H = \mathbb{R}$ e il sistema dinamico deterministico

$$\frac{dX(t)}{dt} = c, \quad X(0) = x \in \mathbb{R},$$

con costante $c \in \mathbb{R}$. La soluzione è ovvia:

$$X(t, x) = x + ct.$$

Questo non ammette misure di probabilità invarianti: infatti se esistesse una misura di probabilità μ su \mathbb{R} tale che $P_t^* \mu = \mu$ per ogni $t \geq 0$, allora per ogni intervallo I e per ogni $t \in \mathbb{R}$ si avrebbe

$$\mu(I) = \mu(I + ct)$$

Se $\mu(I) > 0$ allora $\mu(\mathbb{R}) = \infty$, e se $\mu(I) = 0$ per ogni intervallo allora $\mu \equiv 0$. Pertanto non esiste alcuna misura di probabilità non nulla e finita che sia invariante per il semigruppato di traslazione.

Tuttavia, il semigruppato ha un comportamento simil-invariante per quanto riguarda la misura di Lebesgue: per ogni $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} P_t \varphi(x) m(dx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x + ct) dx.$$

Effettuando il cambio di variabile $y = x + ct$ otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x + ct) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy,$$

da cui $P_t^* m = m$ per ogni $t \geq 0$. Quindi la misura di Lebesgue è in un certo senso (pur non essendo misura di probabilità).

Osservazione 3.6. Nel contesto deterministico, il generatore del semigruppato di transizione associato al flusso $X(t, x)$ (utilizzando la derivata della funzione composta) è

$$L\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t \varphi(x) - \varphi(x)}{t} = \langle b(x), \nabla \varphi(x) \rangle.$$

Il dominio naturale del generatore nel caso deterministico è quindi

$$D(L) = C_b^1(\mathbb{R}^d),$$

In particolare, vale il seguente (noto) risultato di regolarità: dato il sistema dinamico

$$\dot{X}(t) = b(X(t)), \quad X(0) = x,$$

CAPITOLO 3. SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE

con $b \in C^n(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ supponiamo che il problema di Cauchy ammetta soluzione forte unica per ogni dato iniziale x .

Allora, per ogni $t \geq 0$, la mappa

$$x \mapsto X(t, x)$$

è di classe C^n . È quindi chiaro che se $b \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ vale la proprietà di chiusura del semigruppato rispetto al dominio del generatore. Inoltre so che C_b^n è denso in senso debole in C_b per ogni n . Ho quindi che l'invarianza infinitesimale equivale all'invarianza del semigruppato, ovvero

$$\int L\varphi d\mu = 0 \text{ per ogni } \varphi \in D(L) \iff \int P_t\varphi d\mu = \int \varphi d\mu \text{ per ogni } t \geq 0.$$

3.2 Caso aleatorio

3.2.1 Proprietà di markov

Consideriamo ora il caso aleatorio, descritto da un'equazione differenziale stocastica. Sia dunque dato il seguente problema di Cauchy stocastico:

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \\ X_0 = x \in H, \end{cases}$$

dove B_t è un moto browniano su H e $b : H \rightarrow H$, $\sigma : H \rightarrow L(H)$ sono rispettivamente il drift e il coefficiente di diffusione.

Sotto opportune ipotesi di esistenza e unicità forte, per ogni dato iniziale x esiste unico un processo adattato X_t^x che risolve la SDE, inoltre per questa trattazione ci concentreremo sul caso in cui il coefficiente di diffusione σ è costante.

Sotto le ipotesi di esistenza ed unicità forte richiamate sopra, osserviamo che, in maniera analoga al caso deterministico, il processo soddisfa la **proprietà di Markov**, ovvero per ogni $0 \leq s < t$ e per ogni condizione iniziale x si ha

$$X(t+s, x) \stackrel{d}{=} X(t, X(s, x)),$$

dove $\stackrel{d}{=}$ denota uguaglianza in legge.

Infatti, se scriviamo la soluzione in forma integrale:

$$X(t+s, x) = x + \int_0^{t+s} b(X(r, x)) dr + \sigma B_{t+s}.$$

Scomponiamo l'integrale al tempo s :

$$X(t+s, x) = X(s, x) + \int_s^{t+s} b(X(r, x)) dr + \sigma (B_{t+s} - B_s).$$

Per la proprietà di Markov del moto browniano, il processo

$$\tilde{B}_u := B_{u+s} - B_s$$

è un moto browniano indipendente da \mathcal{F}_s . Consideriamo allora la SDE

$$Y_u = X(s, x) + \int_0^u b(Y_r) dr + \sigma \tilde{B}_u, \quad u \in [0, t].$$

Per unicità in legge della SDE, si ha

$$Y_t \stackrel{d}{=} X(t, X(s, x)).$$

CAPITOLO 3. SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE

D'altra parte, dalla scomposizione precedente,

$$X(t + s, x) = Y_t.$$

Dunque

$$X(t + s, x) \stackrel{d}{=} X(t, X(s, x)).$$

Con queste premesse, diventa chiaro quale sarà il semigruppato di transizione associato alla SDE: per ogni $\varphi \in B_b(H)$ definiamo

$$P_t\varphi(x) := \mathbb{E}[\varphi(X_t^x)],$$

dove X_t^x è la soluzione della SDE con condizione iniziale $X_0 = x$.

In maniera del tutto analoga al caso deterministico, il semigruppato così definito è un semigruppato di Markov.

In particolare, il kernel di transizione associato è naturalmente la legge del processo X_t^x , che indichiamo con $\pi_t(x, \cdot)$:

$$P_t\varphi(x) = \int_H \varphi(y) \pi_t(x, dy), \quad \forall \varphi \in B_b(H), x \in H.$$

Prima di continuare con degli esempi, facciamo delle considerazioni sul generatore del semigruppato:

il generatore infinitesimale L del semigruppato di transizione $(P_t)_{t \geq 0}$ associato alla SDE

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma dB_t$$

è definito, applicando la formula di Ito a $\varphi(X_t^x)$ per $\varphi \in C_b^2(H)$, come

$$L\varphi(x) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P_t\varphi(x) - \varphi(x)}{t} = \langle b(x), D\varphi(x) \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma\sigma^* D^2\varphi(x)),$$

dove $D\varphi$ e $D^2\varphi$ sono rispettivamente il gradiente e l'Hessiano di φ .

Inoltre, sappiamo dalla teoria delle SDE che vale un analogo della regolarità del caso deterministico. In particolare, il semigruppato di transizione

$$P_t\varphi(x) := \mathbb{E}[\varphi(X_t^x)]$$

preserva la regolarità in x che possiede il coefficiente b , ovvero se $b \in C^n(H)$ e $\varphi \in C^n(H)$, allora $P_t\varphi \in C^n(H)$.

In particolare, abbiamo quasi gratuitamente che il semigruppato è Feller e *chiuso nel dominio del generatore*, che so essere denso in senso debole (prop 1.22).

Vale dunque la prop.1.24, e quindi possiamo limitarci alla ricerca di misure infinitesimalmente invarianti.

3.2.2 Processo O.U

Esempio 3.7. Il processo di Ornstein–Uhlenbeck $(X_t)_{t \geq 0}$ su \mathbb{R} è definito come la soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

dove $\theta > 0$ e $\sigma > 0$ sono parametri fissati.

Tramite la teoria del calcolo di Ito, si dimostra facilmente che la soluzione esplicita dell'equazione (3.1) è data da

$$X_t = xe^{-\theta t} + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB_s. \quad (3.2)$$

Il semigruppato di Markov associato è definito, per ogni $f \in B_b(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, come

$$(P_t f)(x) = \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_0 = x], \quad t \geq 0.$$

Poiché X_t è una variabile aleatoria gaussiana con media

$$m_t(x) = xe^{-\theta t}$$

e varianza

$$v_t = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}),$$

il semigruppato di Markov ammette la rappresentazione integrale

$$(P_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \pi_t(x, y) dy,$$

dove il nucleo di transizione $\pi_t(x, y)$ è dato da

$$\pi_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_t}} \exp\left(-\frac{(y - xe^{-\theta t})^2}{2v_t}\right).$$

Cerchiamo ora eventuali misure invarianti: Poiché $m_t(x) \rightarrow 0$ e $v_t \rightarrow \frac{\sigma^2}{2\theta}$ quando $t \rightarrow +\infty$, si ha che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\pi_t(x, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{debolmente}} \mu, \quad (3.3)$$

dove $\mu = \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}\right)$ è la misura gaussiana centrata di varianza $\sigma^2/(2\theta)$ (In particolare, il limite debole non dipende dal punto iniziale x).

Inoltre, come visto sopra, Il semigruppato $(P_t)_{t \geq 0}$ è Feller, e applicando la Proposizione 1.18, si conclude che μ è misura invariante.

$$\mu P_t = \mu, \quad \forall t \geq 0.$$

Inoltre, poiché il limite debole in (3.3) è unico e indipendente dal punto iniziale, la misura invariante μ è unica. Pertanto, il processo di Ornstein–Uhlenbeck ammette un'unica misura invariante, che coincide con la distribuzione gaussiana centrata di varianza $\sigma^2/(2\theta)$ (la misura è *strong mixing*).

CAPITOLO 3. SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE

Osservazione 3.8. Per quanto riguarda l'esistenza di una misura invariante, avremmo potuto (per le considerazioni fatte sopra) sfruttare l'equivalenza tra invarianza e l'invarianza infinitesimale: si mostra facilmente tramite la formula di Ito che il generatore infinitesimale è

$$\mathcal{L}f(x) = -\theta x f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x), \quad f \in C_b^2(\mathbb{R}). \quad (3.4)$$

Sia μ la misura candidata all'invarianza, e ipotizziamo inizialmente sia assolutamente continua rispetto a Lebesgue, ovvero $\mu(dx) = \rho(x)dx$. ρ è una densità su \mathbb{R} , e dunque possiede tutte le proprietà tipiche, in particolare imponiamo che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho(x) = 0$ e che sia almeno C^1 .

Facciamo in modo ora che μ sia *infinitesimalmente invariante*, cioè

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}f(x) \mu(dx) = 0, \quad \forall f \in C_b^2(\mathbb{R}). \quad (3.5)$$

Sostituendo l'espressione del generatore (3.4) e integrando rispetto alla densità ρ , si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}f(x) \rho(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(-\theta x f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x) \right) \rho(x) dx.$$

Integrando per parti il termine contenente f'' e utilizzando il fatto che f è limitata, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f''(x) \rho(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f'(x) \rho'(x) dx. \quad (3.6)$$

Da cui

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) \left(-\theta x \rho(x) - \frac{\sigma^2}{2} \rho'(x) \right) dx = 0, \quad \forall f \in C_b^2(\mathbb{R}).$$

per arbitrarietà di f' segue che

$$-\theta x \rho(x) - \frac{\sigma^2}{2} \rho'(x) = 0, \quad \text{Leb. q.o. ,}$$

Si ottiene dunque l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{\sigma^2}{2} \rho'(x) + \theta x \rho(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

con dato iniziale $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$. Con semplici calcoli si ottiene

$$\rho(x) = K \exp\left(-\frac{\theta}{\sigma^2} x^2\right), \quad K > 0.$$

Imponendo la normalizzazione $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$, si ricava

$$K = \sqrt{\frac{\theta}{\pi\sigma^2}}.$$

Pertanto, la misura invariante del processo di Ornstein–Uhlenbeck è (come ci aspettavamo)

$$\mu(dx) = \sqrt{\frac{\theta}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\theta}{\sigma^2}x^2\right) dx = \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}\right).$$

Questo procedimento può risultare inizialmente ridondante, poiché nel caso del processo di Ornstein–Uhlenbeck è possibile ottenere esplicitamente la misura invariante a partire dalla rappresentazione chiusa del kernel di transizione.

Tuttavia, nella grande maggioranza dei casi, non è possibile disporre di una rappresentazione esplicita del kernel di transizione associato a un processo di diffusione.

Al contrario, una rappresentazione del generatore infinitesimale è sempre disponibile, in quanto essa dipende unicamente dai coefficienti dell'equazione differenziale stocastica che definisce il processo.

Per questo motivo, il metodo basato sull'invarianza infinitesimale risulta particolarmente utile e generalizzabile per la determinazione delle misure invarianti, come vedremo nel prossimo esempio.

Osservazione 3.9. Nelle ipotesi dell'esempio precedente, facciamo il limite $\theta \rightarrow 0$. L'equazione si riduce a

$$dX_t = \sigma dB_t,$$

cioè $X_t = x + \sigma B_t$. Il semigruppato associato sarà dunque

$$P_t\varphi(x) = \mathbb{E}[\varphi(x + \sigma B_t)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \pi_t(x, y) dy,$$

dove il kernel $\pi_t(x, \cdot)$ è una famiglia di gaussiane di media x e varianza $\sigma^2 t$.

Ne consegue che il semigruppato associato è (*fortemente*) *regolare*, e dunque se esistesse una misura invariante essa sarebbe necessariamente unica.

Supponiamo per assurdo che esista una misura invariante μ , cioè

$$\int_{\mathbb{R}} P_t\varphi(x) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mu(dx), \quad \forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}), \forall t \geq 0.$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ definiamo la misura traslata μ_a ponendo

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mu_a(dx) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x + a) \mu(dx), \quad \forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}).$$

Poichè il semigruppò del moto browniano commuta con le traslazioni, ovvero

$$P_t(\varphi(\cdot + a))(x) = (P_t\varphi)(x + a),$$

segue immediatamente che μ_a è ancora una misura invariante e dunque la misura invariante non sarà unica.

Si conclude che il moto browniano non ammette misura invariante.

3.2.3 Caso semilineare

Esempio 3.10. Consideriamo l'equazione differenziale stocastica su \mathbb{R}

$$dX_t = (X_t - X_t^3) dt + c dB_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

dove $c > 0$ e $(B_t)_{t \geq 0}$ è un moto browniano standard unidimensionale.

Il coefficiente di diffusione è costante, mentre il termine di drift

$$b(x) = x - x^3$$

è localmente lipschitz e (con semplici calcoli algebrici) soddisfa una condizione di dissipatività del tipo

$$\langle b(x) - b(y), x - y \rangle \leq \beta |x - y|^2, \quad \beta > 0.$$

Dalla teoria delle SDE sappiamo che queste condizioni garantiscono che l'equazione (3.7) ammetta soluzione forte globale unica.

Come nell'esempio precedente, il semigruppò di Markov associato $(P_t)_{t \geq 0}$ è definito, per ogni funzione limitata e misurabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, da

$$(P_t f)(x) = \mathbb{E}[f(X_t) \mid X_0 = x].$$

In generale, non è disponibile una rappresentazione esplicita del kernel di transizione associato a questo processo.

Il generatore infinitesimale $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ del semigruppò $(P_t)_{t \geq 0}$ è dato, per $f \in C_b^2(\mathbb{R})$, da

$$\mathcal{L}f(x) = (x - x^3)f'(x) + \frac{c^2}{2}f''(x). \quad (3.8)$$

Come nell'osservazione dell'esempio precedente, cerchiamo una misura invariante μ per il semigruppò $(P_t)_{t \geq 0}$, assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, della forma

$$\mu(dx) = \rho(x) dx, \quad \rho \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1.$$

La condizione di invarianza infinitesimale richiede che

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}f(x) \rho(x) dx = 0, \quad \forall f \in C_b^2(\mathbb{R}). \quad (3.9)$$

Sostituendo l'espressione del generatore (3.8), si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} \left[(x - x^3)f'(x) + \frac{c^2}{2}f''(x) \right] \rho(x) dx = 0, \quad \forall f \in C_b^2(\mathbb{R}).$$

Come visto in 3.6, vale l'uguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}} f''(x)\rho(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f'(x)\rho'(x) dx.$$

Pertanto, la condizione (3.9) diventa

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) \left[(x - x^3)\rho(x) - \frac{c^2}{2}\rho'(x) \right] dx = 0, \quad \forall f \in C_b^2(\mathbb{R}).$$

Imponiamo dunque

$$(x - x^3)\rho(x) - \frac{c^2}{2}\rho'(x) = 0. \quad \text{per quasi ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Si ottiene quindi l'equazione differenziale

$$\frac{c^2}{2}\rho'(x) = (x - x^3)\rho(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

che è facilmente risolvibile con metodi standard. Otteniamo quindi

$$\rho(x) = K \exp\left(\frac{1}{c^2}x^2 - \frac{1}{2c^2}x^4\right), \quad K > 0.$$

Poiché la funzione ρ è integrabile su \mathbb{R} , imponendo la normalizzazione si ottiene una costante K tale per cui μ sia una misura di probabilità. Pertanto, la misura

$$\mu(dx) = K \exp\left(\frac{1}{c^2}x^2 - \frac{1}{2c^2}x^4\right) dx$$

è una misura invariante per il semigruppato $(P_t)_{t \geq 0}$.

3.3 Stabilità

Prima di continuare con l'unicità della misura invariante, facciamo alcune considerazioni sul concetto di stabilità di un sistema dinamico.

Consideriamo un sistema dinamico deterministico

$$\dot{X} = b(X), \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

dove $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione liscia.

CAPITOLO 3. SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE

Un *punto fisso* è un elemento $X^* \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa

$$b(X^*) = 0.$$

Intuitivamente, se il sistema parte da X^* , rimane fermo.

Per studiare la stabilità di X^* , introduciamo una piccola perturbazione

$$\epsilon = X - X^*.$$

Linearizzando il sistema attorno a X^* otteniamo

$$\dot{\epsilon} = b(X^* + \epsilon) \approx b(X^*) + J_b(X^*)\epsilon = J_b(X^*)\epsilon,$$

dove $J_b(X^*)$ è la jacobiana di b in X^* :

$$J_b(X^*) = \left. \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right|_{X^*}.$$

Il punto fisso X^* è detto *stabile* se $J_b(X^*)$ è negativa (o analogamente, tutti gli autovalori della Jacobiana sono negativi), altrimenti è *instabile*.

La dinamica della perturbazione è quindi approssimata dall'equazione differenziale lineare

$$\dot{\epsilon} = J_b(X^*)\epsilon.$$

Le soluzioni di tale equazione sono combinazioni lineari di esponenziali del tipo

$$\epsilon(t) \sim e^{\lambda t},$$

dove λ varia tra gli autovalori della matrice $J_b(X^*)$.

Da ciò segue che:

- se tutti gli autovalori di $J_b(X^*)$ sono negativi, allora ogni perturbazione iniziale decade esponenzialmente a zero e il punto fisso è localmente stabile;
- se almeno un autovalore è positivo, esiste una perturbazione che cresce esponenzialmente nel tempo, rendendo il punto fisso instabile.

In questo senso, la stabilità è determinata dal fatto che la perturbazione si comporta, al primo ordine, come un esponenziale che converge a zero oppure esplose, a seconda del segno degli autovalori della jacobiana.

Consideriamo il sistema dinamico deterministico unidimensionale

$$\dot{x} = b(x) := x - x^3.$$

I punti fissi del sistema sono definiti come le soluzioni dell'equazione $b(x) = 0$, ovvero

$$x - x^3 = 0,$$

da cui si ottengono i tre punti di equilibrio

$$x^* \in \{-1, 0, 1\}.$$

Si verifica facilmente che i punti $x^* = \pm 1$ sono stabili, mentre il punto $x^* = 0$ risulta instabile.

Dal punto di vista dinamico, traiettorie inizializzate in un intorno di $x = 0$ si allontanano esponenzialmente dal punto di equilibrio, mentre traiettorie inizializzate in un intorno di $x = \pm 1$ convergono esponenzialmente verso tali punti fissi. Il comportamento locale del sistema è quindi fortemente dipendente dal dato iniziale.

In particolare, il punto $x = 0$ separa lo spazio delle fasi in due bacini di attrazione distinti, associati ai due attrattori $x = \pm 1$.

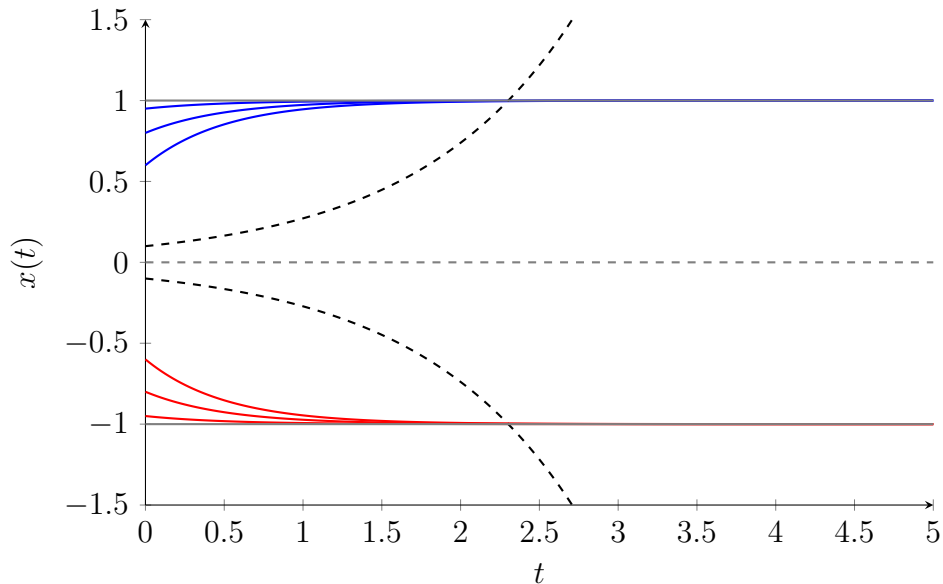


Figure 1: Evoluzione di traiettorie per il sistema $\dot{x} = x - x^3$. I punti $x = \pm 1$ sono attrattori, mentre $x = 0$ è instabile.

CAPITOLO 3. SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE

Torniamo ora al caso stocastico

$$dX_t = (X_t - X_t^3) dt + c dB_t,$$

L'introduzione del termine stocastico genera oscillazioni casuali attorno alla dinamica deterministica. Queste oscillazioni tendono a spingere le traiettorie lontano dai punti instabili, in particolare dal punto fisso $x = 0$.

Di conseguenza, indipendentemente dal dato iniziale, le traiettorie tendono euristicamente a essere attratte verso gli attrattori stabili $x = \pm 1$. Il rumore induce un effetto di *mixing* che riduce la dipendenza dal dato iniziale e facilita l'avvicinamento agli attrattori stabili, rendendo il comportamento più prevedibile in termini probabilistici rispetto al caso puramente deterministico. Queste considerazioni rendono ragionevole l'ipotesi di regolarità del semigrupp.

3.4 Unicità della misura invariante per regolarità

La seguente sezione è dedicata allo studio di semigruppı associati a SDE nella forma

$$dX_t = b(X_t) dt + DdB_t, \quad (3.10)$$

dove B_t è un moto browniano standard in \mathbb{R}^d , D è una matrice invertibile e il campo di drift $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ è localmente lipschitziano e soddisfa una condizione di dissipatività del tipo

$$\langle b(x) - b(y), x - y \rangle \leq \beta |x - y|^2, \quad \beta > 0.$$

Sotto queste ipotesi, sappiamo dalla teoria delle SDE che la soluzione dell'equazione così definita ammette esistenza e unicità forte globale. Un esempio di SDE che soddisfa queste ipotesi è proprio il caso semilineare 3.7. L'obiettivo sarà dimostrare il seguente risultato:

Teorema 3.11. *Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ il semigruppı di transizione associato alla SDE (3.10). Allora:*

- $(P_t)_{t \geq 0}$ è irriducibile;
- $(P_t)_{t \geq 0}$ è Strong Feller.

In particolare, in virtù del teorema 2.30 il semigruppı è regolare e dunque ammette unica misura invariante.

(In questa trattazione ci limiteremo alla dimostrazione nell'ipotesi $D = I$, tuttavia la dimostrazione nel caso generale è sostanzialmente identica grazie alle proprietà di scala del moto browniano).

Dimostrazione. Per cominciare, mostriamo l'irriducibilità, ovvero che fissati $T > 0$, $x, z \in \mathbb{R}^d$ e $r > 0$ si ha

$$\mathbb{P}(X_T^x \in B_r(z)) > 0.$$

Cominciamo costruendo una traiettoria deterministica con valori iniziali e finali x e z : sia $u_t \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^d)$ un cammino continuo con

$$u_0 = x, \quad u_T = z.$$

Definiamo il "controllo deterministico"

$$\rho_t := \dot{u}_t - b(u_t) \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_t = b(u_t) + \rho_t.$$

In forma integrale, il tutto può essere riscritto come

$$u_t = x + \int_0^t b(u_s) ds + \sigma_t,$$

CAPITOLO 3. SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE

con $\sigma_t = \int_0^t \rho_s ds$ e dunque appartenente a $C^0([0, T]; \mathbb{R}^d)$.
Definiamo la differenza

$$Y_t := X_t - u_t, \quad Y_0 = 0.$$

Sottraendo le equazioni integrali si ottiene

$$Y_t = \int_0^t (b(X_s) - b(u_s)) ds + (W_t - \sigma_t),$$

da cui, passando ai moduli e maggiorando il termine di rumore con il suo estremo superiore, si ha:

$$|Y_t| \leq \int_0^t |b(X_s) - b(u_s)| ds + \sup_{s \in [0, T]} |W_s - \sigma_s|.$$

Si osservi ora che la traiettoria deterministica u_t è continua su $[0, T]$, e quindi limitata. Analogamente, per ogni $\omega \in \Omega$, la traiettoria $X_t(\omega)$ della soluzione della SDE è continua su $[0, T]$ (grazie all'esistenza e unicità globale) e pertanto limitata. Ne segue che, per quasi ogni ω , esiste un compatto $K(\omega) \subset \mathbb{R}^d$ tale che

$$X_t(\omega), u_t \in K(\omega), \quad \forall t \in [0, T].$$

Dalla lipschitzianità locale di b segue quindi che esiste una costante $C_T(\omega) > 0$ tale che

$$|b(X_t(\omega)) - b(u_t)| \leq C_T(\omega) |X_t(\omega) - u_t| = C_T(\omega) |Y_t|, \quad \forall t \in [0, T].$$

Essendo $X_t(\omega)$ limitata *q.o.* in intervalli di tempo finiti, la variabile aleatoria $C_T(\omega)$ è finita *q.o.* Pertanto la stima pathwise diventa:

$$|Y_t| \leq \int_0^t C_T(\omega) |Y_s| ds + \sup_{s \in [0, T]} |W_s - \sigma_s|.$$

Applicando il Lemma di Grönwall, otteniamo

$$|Y_t| \leq \left(\sup_{t \in [0, T]} |W_t - \sigma_t| \right) e^{C_T(\omega)T}. \quad (3.11)$$

Vogliamo ora trovare una relazione tra $C_T(\omega)$ e il moto browniano: in particolare, vogliamo dimostrare che se il rumore è sufficientemente vicino al controllo σ_t , il processo X_t rimane limitato all'interno di un compatto deterministico, il che ci permetterà di controllare $C_T(\omega)$. Fissiamo un $\rho > 0$ e definiamo l'evento:

$$A_\rho := \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{t \in [0, T]} |W_t(\omega) - \sigma_t| < \rho \right\}.$$

3.4 UNICITÀ DELLA MISURA INVARIANTE PER REGOLARITÀ

Per $\omega \in A_\rho$ si ha $|W_t(\omega)| \leq |\sigma_t| + \rho \leq K$, dove $K > 0$ è una costante deterministica che dipende solo dal controllo scelto e da ρ .

Per mostrare la limitatezza di X_t su A_ρ , introduciamo la variabile traslata

$$\eta_t := X_t - W_t = x + \int_0^t b(X_s) ds.$$

Notiamo che η_t è differenziabile rispetto al tempo, con derivata $\dot{\eta}_t = b(\eta_t + W_t)$. Valutiamo la derivata della sua norma quadra:

$$\frac{d}{dt} |\eta_t|^2 = 2\langle \eta_t, \dot{\eta}_t \rangle = 2\langle \eta_t, b(\eta_t + W_t) \rangle.$$

Sfruttiamo ora la condizione di dissipatività di b , riscrivendola per $x = \eta_t + W_t$ e $y = W_t$:

$$\langle b(\eta_t + W_t) - b(W_t), \eta_t \rangle \leq \beta |\eta_t|^2.$$

Da questo otteniamo, per la disuguaglianza di Young:

$$\begin{aligned} 2\langle \eta_t, b(\eta_t + W_t) \rangle &= 2\langle \eta_t, b(\eta_t + W_t) - b(W_t) \rangle + 2\langle \eta_t, b(W_t) \rangle \\ &\leq 2\beta |\eta_t|^2 + |\eta_t|^2 + |b(W_t)|^2 \\ &= (2\beta + 1) |\eta_t|^2 + |b(W_t)|^2. \end{aligned}$$

Sull'evento A_ρ , sappiamo che $|W_t| \leq K$. Di conseguenza, per la continuità di b , esiste una costante deterministica $B_K = \max_{|x| \leq K} |b(x)|$ tale che $|b(W_t)| \leq B_K$. La disuguaglianza differenziale diventa quindi:

$$\frac{d}{dt} |\eta_t|^2 \leq (2\beta + 1) |\eta_t|^2 + B_K^2.$$

Con semplici calcoli otteniamo una limitazione globale di η_t^2 su A_ρ :

$$|\eta_t|^2 \leq e^{(2\beta+1)T} (|x|^2 + TB_K^2) =: R_\eta^2.$$

Poiché $X_t = \eta_t + W_t$, si deduce che per ogni $\omega \in A_\rho$ e per ogni $t \in [0, T]$:

$$|X_t(\omega)| \leq |\eta_t| + |W_t| \leq R_\eta + K =: R.$$

Abbiamo dimostrato dunque che $\sup_{t \in [0, T]} |X_t(\omega)| \leq R$ per ogni $\omega \in A_\rho$, ovvero che le traiettorie di X_t (insieme a quelle di u_t) non escono mai dal compatto deterministico $B_R(0)$. Essendo b localmente lipschitziana, lo è globalmente sui compatti: esiste dunque una costante deterministica $\overline{C}_T > 0$ tale che

$$C_T(\omega) \leq \overline{C}_T, \quad \forall \omega \in A_\rho.$$

A questo punto, torniamo alla nostra stima principale (3.11) valutata al tempo T :

$$|Y_T| \leq \left(\sup_{t \in [0, T]} |W_t - \sigma_t| \right) e^{C_T(\omega)T}.$$

CAPITOLO 3. SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE

Da questa disuguaglianza deduciamo la seguente inclusione di eventi:

$$\left\{ \sup_{t \in [0, T]} |W_t - \sigma_t| e^{C_T(\omega)T} < r \right\} \subset \{|Y_T| < r\}.$$

Passando alle probabilità e intersecando con l'evento A_ρ otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Y_T| < r) &\geq \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |W_t - \sigma_t| e^{C_T(\omega)T} < r\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\left\{\sup_{t \in [0, T]} |W_t - \sigma_t| e^{C_T(\omega)T} < r\right\} \cap A_\rho\right). \end{aligned}$$

Sull'evento A_ρ sappiamo che $C_T(\omega) \leq \overline{C}_T$, pertanto vale l'inclusione:

$$\left\{\sup_{t \in [0, T]} |W_t - \sigma_t| e^{\overline{C}_T T} < r\right\} \cap A_\rho \subset \left\{\sup_{t \in [0, T]} |W_t - \sigma_t| e^{C_T(\omega)T} < r\right\} \cap A_\rho.$$

Osserviamo ora che l'evento a primo membro non è altro che $A_{re^{-\overline{C}_T T}} \cap A_\rho$. Ne segue che:

$$\mathbb{P}(|Y_T| < r) \geq \mathbb{P}(A_{re^{-\overline{C}_T T}} \cap A_\rho).$$

E' evidente inoltre che $A_{re^{-\overline{C}_T T}} \cap A_\rho = A_\varepsilon$, con

$$\varepsilon := \min\left\{\rho, re^{-\overline{C}_T T}\right\} > 0,$$

Dunque

$$\mathbb{P}(|Y_T| < r) \geq \mathbb{P}(A_\varepsilon).$$

Infine, per la nota proprietà di densità del moto browniano in $C^0([0, T]; \mathbb{R}^d)$ per funzioni che partono dall'origine, la probabilità che W_t resti in un 'tubo' di raggio $\varepsilon > 0$ attorno a una curva continua σ_t è strettamente positiva, ovvero

$$\mathbb{P}(A_\varepsilon) > 0.$$

Poiché $Y_T = X_T - u_T = X_T - z$, concludiamo che:

$$\mathbb{P}(X_T \in B_r(z)) = \mathbb{P}(|Y_T| < r) \geq \mathbb{P}(A_\varepsilon) > 0.$$

Pertanto il semigruppò è irriducibile: ogni aperto ha probabilità positiva di essere raggiunto in tempo finito. \square

Osservazione 3.12. È importante sottolineare il motivo tecnico per cui, nella dimostrazione precedente, si è scelto di mantenere la costante di Lipschitz aleatoria $C_T(\omega)$ fino alla fine, valutandola in modo *pathwise*, anziché limitare il processo con una costante deterministica fin dall'inizio.

3.4 UNICITÀ DELLA MISURA INVARIANTE PER REGOLARITÀ

Se avessimo impostato il problema in modo puramente deterministico fin dal principio, avremmo ottenuto una stima del tipo

$$|Y_T| \leq \rho e^{\overline{C_T}(\rho)T},$$

dove la costante di Lipschitz $\overline{C_T}(\rho)$ dipenderebbe implicitamente da ρ . Infatti, modificando ρ cambia la limitazione sul rumore, il che modifica il raggio del compatto R in cui è confinato il processo, alterando a sua volta la costante di Lipschitz globale sul compatto. A quel punto, seguendo i passi della dimostrazione, per far sì che l'errore fosse minore di r saremmo costretti a prendere ρ sufficientemente piccolo affinché $\rho e^{\overline{C_T}(\rho)T} < r$.

Tuttavia, nulla garantisce a priori che, per $\rho \rightarrow 0$, il termine esponenziale $e^{\overline{C_T}(\rho)T}$ non cresca a un tasso tale da vanificare la decrescita di ρ . Saremmo quindi costretti ad approfondire la natura di $\overline{C_T}(\rho)$, procedimento che risulterebbe macchinoso.

L'uso della variabile aleatoria $C_T(\omega)$ permette invece di disaccoppiare i due problemi: prima si fissa un ρ macroscopico e arbitrario che serve unicamente a “congelare” lo spazio delle configurazioni all'interno di un compatto deterministico, fissando così la costante $\overline{C_T}$. Solo in un secondo momento, tramite le inclusioni insiemistiche, si valuta la probabilità dell'evento in cui il rumore si restringe in un tubo ancora più piccolo di raggio $\varepsilon \leq \rho$.

Osservazione 3.13. Sebbene venga esplicitamente utilizzata nella dimostrazione, la condizione di dissipatività non è strettamente necessaria per dimostrare l'irriducibilità. Essa serve principalmente a garantire l'esistenza e l'unicità forte globale della soluzione, assicurando che la traiettoria X_t non esploda in tempi finiti e che resti confinata in un compatto deterministico sullo spazio degli eventi A_ρ .

Per completare la dimostrazione del Teorema 3.11, resta da mostrare che il semigrupp di transizione $(P_t)_{t \geq 0}$ è *Strong Feller*.

Poiché la dimostrazione analitica completa è piuttosto tecnica e ricalca argomenti standard della teoria delle PDE's paraboliche, ne riportiamo qui solo la struttura logica (rimandiamo a Da Prato⁴ per i dettagli completi).

Traccia della dimostrazione. La dimostrazione si articola in tre passaggi:

Step 1: Stime sul gradiente tramite l'equazione di Kolmogorov.

Si supponga inizialmente che la funzione test iniziale sia molto regolare, in particolare $\varphi \in C_b^3(\mathbb{R}^d)$. Posto allora $u(t, x) = P_t \varphi(x)$, tramite la formula di Ito si dimostra che $u(t, x)$ è soluzione forte della PDE (detta backward Kolmogorov)

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{1}{2} \Delta u + \langle b(x), \nabla_x u \rangle \\ u(0, x) = \varphi(x). \end{cases}$$

⁴Da Prato, *An Introduction to Infinite-Dimensional Analysis*, 2006 - proposizione 7.19.

Per stimare $\nabla_x u$, si utilizza quello che viene definito *metodo di Bernstein*. Introducendo la funzione ausiliaria $z(t, x) = u^2(t, x) + t|\nabla_x u(t, x)|^2$, e sfruttando l'ipotesi di dissipatività del drift, un'applicazione del Lemma di Grönwall restituisce la stima:

$$|\nabla_x P_t \varphi(x)| \leq \frac{e^{\beta t}}{\sqrt{t}} \|\varphi\|_\infty, \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^d. \quad (3.12)$$

Step 2: Estensione per densità alle funzioni continue.

Poichè la stima (3.12) non dipende dalle derivate del dato iniziale φ , ma unicamente dalla sua norma uniforme, sfruttando la densità di $C_b^3(\mathbb{R}^d)$ in $C_b(\mathbb{R}^d)$ è possibile estendere il risultato a qualsiasi funzione continua e limitata $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Step 3: Estensione alle funzioni misurabili.

Fissato $t > 0$ e presi $x, y \in \mathbb{R}^d$, si considerano i kernel di transizione $\pi_t(x, \cdot)$ e si definisce la misura con segno $\zeta_{x,y} = \pi_t(x, \cdot) - \pi_t(y, \cdot)$. Data $\varphi \in B_b(\mathbb{R}^d)$, è sempre possibile trovare una successione $(\varphi_n) \subset C_b(\mathbb{R}^d)$ che converga a φ quasi ovunque rispetto a $\zeta_{x,y}$. Passando al limite sotto il segno di integrale grazie al Teorema di convergenza dominata e sfruttando la stima del gradiente ottenuta in precedenza, si ricava che per ogni $\varphi \in B_b(\mathbb{R}^d)$

$$|P_t \varphi(x) - P_t \varphi(y)| \leq \frac{e^{\beta t}}{\sqrt{t}} \|\varphi\|_\infty |x - y|.$$

Questa disuguaglianza dimostra non solo che $P_t \varphi$ è continua, ma che per ogni $t > 0$ essa è addirittura *globalmente lipschitziana*. Pertanto, il semigruppò è Strong Feller. \square

3.5 Esistenza e uncità di misure invarianti per monotonia

Consideriamo la seguente equazione differenziale stocastica in \mathbb{R}^n :

$$dX_t = b(X_t) dt + \sqrt{D} dB_t, \quad (3.13)$$

dove D è una matrice che ammette radice quadrata (partire da \sqrt{D} è un formalismo che semplificherà i calcoli), B_t è un moto browniano standard in \mathbb{R}^n e il campo di drift $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è localmente lipschitziano e soddisfa una condizione di dissipatività del tipo

$$\langle b(x) - b(y), x - y \rangle \leq -\beta |x - y|^2, \quad \beta > 0.$$

(A differenza della sezione precedente, si osservi che il drift è fortemente dissipativo o analogamente monotono decrescente).

Dalla teoria classica delle SDE segue che, sotto queste ipotesi, la soluzione esiste ed è unica globalmente.

L'obiettivo di questa sezione sarà dimostrare il seguente risultato:

Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ la soluzione della SDE 3.13 con le relative ipotesi. Allora esiste un'unica misura invariante per il semigruppato di Markov associato.

Per cominciare, facciamo alcune considerazioni preliminari.

Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo in \mathbb{R}^n che soddisfa l'SDE

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t,$$

dove B_t è un moto browniano standard in \mathbb{R}^m , $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ e sia $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 .

Allora la formula di Itô fornisce, usando notazione vettoriale e matriciale:

$$d\varphi(X_t) = \langle \nabla \varphi(X_t), b(X_t) \rangle dt + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\sigma(X_t) \sigma(X_t)^\top \nabla^2 \varphi(X_t) \right] dt + \langle \nabla \varphi(X_t), \sigma(X_t) dB_t \rangle.$$

Applichiamo ora la formula di Itô alla funzione

$$\varphi(x) = |x|^2,$$

valutata lungo il processo X_t di 3.13. Poiché $\nabla \varphi(x) = 2x$ e $\nabla^2 \varphi(x) = 2I$, si ha

$$d|X_t|^2 = 2\langle X_t, b(X_t) \rangle dt + \text{Tr}(D) dt + 2\langle X_t, \sqrt{D} dB_t \rangle.$$

Prendendo il valore atteso e scambiando il segno di derivata con quello di valore atteso otteniamo

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[|X_t|^2] = \mathbb{E}[2\langle X_t, b(X_t) \rangle] + \text{Tr}(D), \quad (3.14)$$

poiché l'integrale stocastico ha media nulla.

CAPITOLO 3. SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE

Osservazione 3.14. Lo scambio tra derivata temporale e valore atteso è giustificato poichè il processo $|X_t|^2$ è integrabile e la derivata temporale del suo valore atteso è ben definita per il teorema di convergenza dominata.

Per continuare, definiamo ora il processo che parte da un istante arbitrario.

Definizione 3.15. Per un tempo iniziale $s \geq 0$, definiamo il processo che parte da s come soluzione della SDE

$$dX(t, s, x) = b(X(t, s, x)) dt + \sqrt{D} dB_t, \quad X(s, s, x) = x.$$

Per ogni $t \geq s$, la soluzione può essere scritta in forma integrale come

$$X(t, s, x) = x + \int_s^t b(X(r, s, x)) dr + \int_s^t \sqrt{D} dB_r. \quad (3.15)$$

Consideriamo ora uno scalo temporale $h \geq 0$ e definiamo

$$X(t+h, s+h, x) = x + \int_{s+h}^{t+h} b(X(r, s+h, x)) dr + \int_{s+h}^{t+h} \sqrt{D} dB_r.$$

Facendo il cambio di variabile $u = r - h$, otteniamo

$$X(t+h, s+h, x) = x + \int_s^t b(X(u+h, s+h, x)) du + \sqrt{D} (B_{t+h} - B_{s+h}).$$

Poiché $(B_{t+h} - B_{s+h})$ ha stessa legge di $(B_t - B_s)$,

$$X(t+h, s+h, x)$$

ha stessa legge di

$$X(t, s, x).$$

In altre parole, per ogni $t \geq s$ e $h \geq 0$,

$$X(t, s, x) \stackrel{d}{=} X(t+h, s+h, x), \quad (3.16)$$

dove $\stackrel{d}{=}$ indica uguaglianza in legge.

Osservazione 3.16. L'uguaglianza in legge

$$X(t, s, x) \stackrel{d}{=} X(t+h, s+h, x)$$

è soddisfatta grazie al fatto che il termine di diffusione del moto browniano, \sqrt{D} , è costante. In generale se questa ipotesi non è rispettata non vale 3.16.

Per concludere con i preliminari, definiamo l'estensione del moto browniano per tempi negativi.

3.5 ESISTENZA E UNICITÀ DI MISURE INVARIANTI PER
MONOTONIA

Definizione 3.17. Per $t \geq 0$, siano B_t, W_t moti browniani indipendenti. Definiamo

$$\tilde{B}_t := \begin{cases} B_t, & t \geq 0, \\ W_{-t}, & t < 0. \end{cases}$$

In questo modo otteniamo un processo gaussiano su tutto l'asse reale, con incrementi indipendenti per intervalli disgiunti e distribuzione normale con media nulla e varianza pari all'ampiezza dell'intervallo.

Possiamo ora enunciare il seguente

Teorema 3.18. Sia $X(t, s, x)$ la soluzione dell'SDE a tempi negativi

$$dX_t = b(X_t) dt + \sqrt{D} d\tilde{B}_t, \quad X_s = x, \quad (3.17)$$

Allora esiste (unica) variabile aleatoria X indipendente dal dato iniziale x tale che

$$X(0, -t, x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L^2} X.$$

Per dimostrarlo, ricaviamo prima due stime necessarie al controllo della norma per la convergenza L^2 .

Lemma 3.19. Nelle ipotesi 3.18 vale la seguente stima per il momento secondo:

$$\mathbb{E}[|X_t^s(x)|^2] \leq e^{-\beta(t-s)}|x|^2 + \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{per ogni } t \geq s,$$

con $\alpha, \beta > 0$

Dimostrazione. per compattezza, riscriviamo $X_t^{(s)}(x)$ come soluzione di 3.17. Definiamo

$$y(t) := \mathbb{E}[|X_t^s(x)|^2].$$

per 3.14

$$\frac{d}{dt}y(t) = 2\mathbb{E}[\langle X_t^s(x), b(X_t^s(x)) \rangle] + \text{Tr}(D),$$

Riscriviamo ora il termine di drift sommando e sottraendo $b(0)$:

$$\mathbb{E}[\langle X_t^s(x), b(X_t^s(x)) \rangle] = \mathbb{E}[\langle X_t^s(x), b(X_t^s(x)) - b(0) \rangle] + \mathbb{E}[\langle X_t^s(x), b(0) \rangle].$$

Usando la condizione di dissipatività,

$$\langle b(x) - b(0), x \rangle \leq -\beta|x|^2,$$

segue

$$\mathbb{E}[\langle X_t^s(x), b(X_t^s(x)) - b(0) \rangle] \leq -\beta\mathbb{E}|X_t^s(x)|^2 = -\beta y(t).$$

CAPITOLO 3. SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE

Per il secondo termine, usando Cauchy-Swartz

$$\mathbb{E}[\langle b(0), X_t^s(x) \rangle] \leq |b(0)| \mathbb{E}[|X_t^s(x)|],$$

Abbiamo dunque

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}|X_t^s(x)|^2 \leq -2\beta \mathbb{E}|X_t^s(x)|^2 + |b(0)| \mathbb{E}[|X_t^s(x)|] + \text{Tr}(D).$$

Sommando e sottraendo $\frac{|b(0)|^2}{\beta}$ e usando Jensen su $-\beta \mathbb{E}|X_t^s(x)|^2 \leq -\beta(\mathbb{E}|X_t^s(x)|)^2$, possiamo completare il quadrato così da ottenere

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}|X_t^s(x)|^2 \leq -\beta \mathbb{E}|X_t^s(x)|^2 - \beta(\mathbb{E}[|X_t^s(x)|] + \frac{|b(0)|}{\beta})^2 - \frac{|b(0)|^2}{\beta} + \text{Tr}(D).$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}|X_t^s(x)|^2 \leq -\beta \mathbb{E}|X_t^s(x)|^2 + \frac{|b(0)|^2}{\beta} + \text{Tr}(D),$$

ovvero, detto $\alpha = \frac{|b(0)|^2}{\beta} + \text{Tr}(D)$, ho la disequazione differenziale con dato iniziale

$$\begin{cases} y'(t) \leq -\beta y(t) + \alpha, \\ y(s) = \mathbb{E}[|X_s^s(x)|^2] = |x|^2. \end{cases}$$

E con semplici calcoli si mostra che

$$y(t) \leq e^{-\beta(t-s)} |x|^2 + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-s)}).$$

da cui

$$y(t) \leq e^{-\beta(t-s)} |x|^2 + \frac{\alpha}{\beta}.$$

□

Lemma 3.20. *Sotto le ipotesi di 3.18, esiste $C > 0$, tale che*

$$\mathbb{E}[|X_t^s(x) - x|^2] \leq C(1 + |x|^2), \quad \text{per ogni } t \geq s.$$

Dimostrazione. dalla disuguaglianza elementare

$$|a - b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2,$$

applicata con $a = X_t^s(x)$ e $b = x$, otteniamo

$$|X_t^s(x) - x|^2 \leq 2|X_t^s(x)|^2 + 2|x|^2.$$

Prendendo il valore atteso e ricordando che è monotono,

$$\mathbb{E}[|X_t^s(x) - x|^2] \leq 2 \mathbb{E}[|X_t^s(x)|^2] + 2|x|^2.$$

3.5 ESISTENZA E UNCITÀ DI MISURE INVARIANTI PER MONOTONIA

Dal lemma 3.19, segue

$$\mathbb{E}[|X_t^s(x) - x|^2] \leq (2e^{-\beta(t-s)} + 2)|x|^2 + 2\frac{\alpha}{\beta}.$$

che in forma compatta diventa

$$\mathbb{E}[|X_t^s(x) - x|^2] \leq C(1 + |x|^2),$$

□

Possiamo passare alla dimostrazione del teorema 3.18:

Dimostrazione. Siano $p, q > 0$ con $p > q$ e fissato $x \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo le due soluzioni $X_t^{-p}(x)$ e $X_t^{-q}(x)$ della SDE, rispettivamente con dati iniziali

$$X_{-p}^{-p}(x) = x, \quad X_{-q}^{-q}(x) = x.$$

Per ogni $t \geq -q$, le soluzioni soddisfano la forma integrale

$$\begin{aligned} X_t^{-p}(x) &= X_{-q}^{-p}(x) + \int_{-q}^t b(X_r^{-p}(x)) dr + \int_{-q}^t \sqrt{D} d\tilde{B}_r, \\ X_t^{-q}(x) &= x + \int_{-q}^t b(X_r^{-q}(x)) dr + \int_{-q}^t \sqrt{D} d\tilde{B}_r. \end{aligned}$$

Definiamo ora il processo differenza

$$Z_t := X_t^{-p}(x) - X_t^{-q}(x), \quad t \geq -q.$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni integrali, otteniamo

$$Z_t = X_{-q}^{-p}(x) - x + \int_{-q}^t [b(X_r^{-p}(x)) - b(X_r^{-q}(x))] dr,$$

In particolare, il dato iniziale per Z_t al tempo $t = -q$ è

$$Z_{-q} = X_{-q}^{-p}(x) - x.$$

Derivando rispetto al tempo, otteniamo che Z_t soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} Z_t = b(X_t^{-p}(x)) - b(X_t^{-q}(x)), \quad t \geq -q,$$

con dato iniziale

$$Z_{-q} = X_{-q}^{-p}(x) - x.$$

Moltiplichiamo ora entrambi i membri dell'equazione differenziale soddisfatta da Z_t per Z_t stesso. Ricordando che

$$\frac{d}{dt} Z_t = b(X_t^{-p}(x)) - b(X_t^{-q}(x)),$$

CAPITOLO 3. SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE

otteniamo

$$\left\langle \frac{d}{dt} Z_t, Z_t \right\rangle = \langle b(X_t^{-p}(x)) - b(X_t^{-q}(x)), Z_t \rangle.$$

Osservando che

$$\left\langle \frac{d}{dt} Z_t, Z_t \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Z_t|^2,$$

segue

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Z_t|^2 = \langle b(X_t^{-p}(x)) - b(X_t^{-q}(x)), Z_t \rangle.$$

Usando ora la condizione di dissipatività del drift b , otteniamo la disuguaglianza

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Z_t|^2 \leq -\beta |Z_t|^2, \quad t \geq -q,$$

con dato iniziale

$$Z_{-q} = X_{-q}^{-p}(x) - x.$$

Dalla disuguaglianza differenziale

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Z_t|^2 \leq -\beta |Z_t|^2, \quad t \geq -q,$$

Con semplici calcoli (risolvendo l'equazione differenziale associata) si ottiene

$$|Z_t|^2 \leq e^{-2\beta(t+q)} |Z_{-q}|^2, \quad t \geq -q.$$

Passando al valore atteso segue

$$\mathbb{E}[|Z_t|^2] \leq e^{-2\beta(t+q)} \mathbb{E}[|Z_{-q}|^2].$$

Ricordando che

$$Z_{-q} = X_{-q}^{-p}(x) - x,$$

e usando la stima 3.20, si ottiene la disuguaglianza

$$\mathbb{E}[|Z_t|^2] \leq C e^{-2\beta(t+q)} (1 + |x|^2), \quad t \geq -q.$$

Per concludere, fissato $x \in \mathbb{R}^n$ consideriamo la successione

$$(X_0^{-q}(x))_{q>0}.$$

Dalle stime precedenti, per ogni $p > q > 0$, ponendo

$$Z_0 = X_0^{-p}(x) - X_0^{-q}(x),$$

si ha

$$\mathbb{E}[|Z_0|^2] = \mathbb{E}[|X_0^{-p}(x) - X_0^{-q}(x)|^2] \leq C e^{-2\beta q} (1 + |x|^2),$$

3.5 ESISTENZA E UNCITÀ DI MISURE INVARIANTI PER
MONOTONIA

Poiché $-p < -q$, facendo tendere $q \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$\mathbb{E}[|X_0^{-p}(x) - X_0^{-q}(x)|^2] \longrightarrow 0.$$

Ne segue che la successione $(X_0^{-q}(x))_{q>0}$ è di Cauchy in L^2 . Ricordando che lo spazio L^2 è completo, esiste una variabile aleatoria X tale che

$$X_0^{-q}(x) \xrightarrow[q \rightarrow \infty]{L^2} X.$$

In particolare, il limite esiste per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostriamo ora che il limite ottenuto è indipendente dal dato iniziale. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ fissati e $p > 0$. Consideriamo le due soluzioni

$$X_t^{-p}(x), \quad X_t^{-p}(y),$$

che soddisfano, per $t \geq -p$, le equazioni integrali

$$X_t^{-p}(x) = x + \int_{-p}^t b(X_r^{-p}(x)) dr + \int_{-p}^t \sqrt{D} dB_r,$$

$$X_t^{-p}(y) = y + \int_{-p}^t b(X_r^{-p}(y)) dr + \int_{-p}^t \sqrt{D} dB_r.$$

Sottraendo membro a membro, poniamo

$$Z_t := X_t^{-p}(x) - X_t^{-p}(y),$$

e otteniamo

$$Z_t = x - y + \int_{-p}^t (b(X_r^{-p}(x)) - b(X_r^{-p}(y))) dr.$$

In particolare, Z_t soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} Z_t = b(X_t^{-p}(x)) - b(X_t^{-p}(y)), \quad Z_{-p} = x - y.$$

Con calcoli identici a quelli svolti in precedenza otteniamo

$$|Z_0|^2 \leq e^{-2\beta p} |x - y|^2.$$

Passando al valore atteso,

$$\mathbb{E}[|X_0^{-p}(x) - X_0^{-p}(y)|^2] \leq e^{-2\beta p} |x - y|^2.$$

Facendo tendere $p \rightarrow +\infty$, otteniamo

$$\mathbb{E}[|X_0^{-p}(x) - X_0^{-p}(y)|^2] \longrightarrow 0.$$

CAPITOLO 3. SEMIGRUPPO DI TRANSIZIONE

Poiché abbiamo già mostrato che, per ogni dato iniziale,

$$X_0^{-p}(x) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{L^2} X(x), \quad X_0^{-p}(y) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{L^2} X(y),$$

e ricordando che in L^2 il limite della differenza coincide con la differenza dei limiti, segue che

$$X(x) = X(y) \quad \text{in } L^2.$$

Concludiamo quindi che il limite

$$X := \lim_{p \rightarrow \infty} X_0^{-p}(x)$$

esiste in L^2 ed è indipendente dal dato iniziale $x \in \mathbb{R}^n$. □

Abbiamo tutti gli strumenti per dimostrare il teorema a inizio capitolo:

Teorema 3.21. *Si consideri la SDE*

$$dX_t = b(X_t) dt + \sqrt{D} dB_t, \quad (3.18)$$

dove $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è localmente lipschitz e soddisfa la condizione di dissipatività

$$\langle b(x) - b(y), x - y \rangle \leq -\beta |x - y|^2, \quad \beta > 0,$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Allora esiste un'unica misura di probabilità invariante per il semigruppato di Markov $(P_t)_{t \geq 0}$ associato. Inoltre, la misura è strong mixing.

Dimostrazione. Ricordiamo innanzitutto che vale l'uguaglianza in legge

$$X(t, s, x) \stackrel{d}{=} X(t + h, s + h, x), \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R}.$$

In particolare, fissato $t > 0$, scegliendo $h = -s$ otteniamo

$$X(t, 0, x) \stackrel{d}{=} X(0, -t, x).$$

Dal teorema precedente sappiamo che

$$X(0, -t, x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L^2} X,$$

dove X è una variabile aleatoria indipendente dal dato iniziale x . Poiché la convergenza in L^2 implica la convergenza in legge, segue che

$$X(t, 0, x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X.$$

3.5 ESISTENZA E UNCITÀ DI MISURE INVARIANTI PER MONOTONIA

Denotiamo con μ la legge di X . Per definizione dei kernel di transizione del semigruppò di Markov $(P_t)_{t \geq 0}$, la convergenza precedente equivale a

$$\pi_t(x, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{debolmente}} \mu, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n.$$

Inoltre, il semigruppò $(P_t)_{t \geq 0}$ associato alla SDE è Feller. Pertanto, per 1.18 la convergenza debole dei kernel di transizione verso una misura μ implica che μ è l'unica misura invariante (strong mixing) del semigruppò. \square

Osservazione 3.22. Analizzando la dimostrazione, sorge spontanea la seguente domanda: non sarebbe stato possibile dimostrare direttamente che X_t converge in L^2 per $t \rightarrow \infty$, senza passare ai tempi negativi?

Il problema è che, in generale, questa convergenza non è vera. Il passaggio ai tempi negativi, cioè considerare $X_0^{-t}(x)$ per $t > 0$, permette invece di costruire un limite in L^2 indipendente dal dato iniziale e di dimostrare successivamente la convergenza in legge di X_t .

Questa convergenza in legge rappresenta la condizione più debole necessaria per garantire che la misura limite sia *strong mixing*, cioè che i kernel di transizione convergano debolmente alla misura invariante.

Capitolo 4

4 Teoria inifinito-dimensionale

4.1 Motivazione e difficoltà strutturali

In questo capitolo estendiamo la nozione di moto browniano su spazi di Hilbert arbitrari, in particolare di dimensione infinita numerabile. Questa costruzione sarà necessaria per rendere rigorosa la formulazione differenziale di equazioni differenziali alle derivate parziali con aggiunta di 'rumore bianco' aleatorio.

Sia $u(t, \xi)$ definita per $t \geq 0$ e $\xi \in [0, 1]$. Per ogni tempo fissato t , la funzione $u(t, \cdot)$ viene interpretata come un elemento dello spazio di Hilbert $L^2([0, 1])$.

Consideriamo l'evoluzione deterministica associata all'operatore di Laplace con condizioni al bordo di Dirichlet,

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t \geq 0,$$

e con dato iniziale

$$u(0, \xi) = u_0(\xi), \quad u_0 \in L^2([0, 1]).$$

In analogia con il caso delle equazioni differenziali stocastiche in dimensione finita, si vorrebbe introdurre una perturbazione aleatoria dell'evoluzione, aggiungendo un termine di rumore bianco. In forma puramente speculativa, ciò conduce a scrivere

$$du(t, \xi) = \partial_{\xi\xi} u(t, \xi) dt + dB(t, \xi), \quad \xi \in [0, 1].$$

Qui $B(t, \xi)$ rappresenta informalmente un processo stocastico che, a ogni tempo t , associa in maniera casuale una funzione (che vorremmo essere in L^2) della variabile spaziale.

Il termine $dB(t, \xi)$ non va interpretato come un differenziale classico, ma come l'incremento di un 'processo browniano' (che definiremo poi) a valori in uno spazio funzionale.

Introducendo una notazione astratta, l'equazione precedente può essere riscritta, in modo informale, in forma compatta come

$$du_t = Au_t dt + dB_t, \quad u_0 = u,$$

dove u_t è un processo stocastico a valori nello spazio di Hilbert $H = L^2([0, 1])$, A è un operatore lineare su H (associato in questo caso al Laplaciano con condizioni al bordo di Dirichlet), e B_t rappresenta un processo browniano a valori in H , il cui incremento dB_t va inteso in senso stocastico.

4.1 MOTIVAZIONE E DIFFICOLTÀ STRUTTURALI

In questa forma, l'equazione presenta una struttura del tutto analoga a quella di una equazione differenziale stocastica ordinaria. L'unica, ma sostanziale, differenza è che lo spazio di riferimento H non è più uno spazio euclideo finito-dimensionale come \mathbb{R}^n , bensì uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale.

Come esempio di difficoltà strutturale, consideriamo $H = \mathbb{R}^n$ e sia (e_1, \dots, e_n) una base ortonormale di H . Siano inoltre $(\beta_k(t))_{k=1, \dots, n}$ una famiglia di moti browniani reali indipendenti, definiti sullo stesso spazio di probabilità.

Allora, il *moto browniano standard in \mathbb{R}^n* è per definizione

$$B_t = \sum_{k=1}^n \beta_k(t) e_k.$$

Proviamo a estendere questa costruzione per definire il moto browniano in L^2 : sia $H = L^2([0, 1])$ spazio di Hilbert separabile e $(e_k)_{k \geq 1}$ una base ortonormale numerabile di H (che so esistere sempre, essendo L^2 separabile). Siano inoltre $(\beta_k(t))_{k \geq 1}$ una famiglia di moti browniani reali indipendenti, definiti sullo stesso spazio di probabilità.

Informalmente, si potrebbe definire un *moto browniano a valori in H* come

$$B_t = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) e_k.$$

Questa serie rappresenta l'espansione di B_t lungo la base ortonormale di H , associando ad ogni direzione un moto browniano reale indipendente.

Tuttavia, osserviamo subito un problema fondamentale: la norma quadratica media di B_t diverge: infatti, per ortonormalità della base

$$\mathbb{E} \|B_t\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\beta_k(t)^2] = \sum_{k=1}^{\infty} t = +\infty.$$

Di conseguenza, B_t non è realmente un elemento di H , e la serie non converge in $L^2(\Omega; H)$.

Questa costruzione, pur essendo formale, risulta quindi mal posta, o quantomeno non sufficiente.

Diventa evidente la necessità di una costruzione più sottile.

4.2 Semigruppı fortemente continui

Cominciamo con lo stretto necessario di teoria dei semigruppı che sar  utile in seguito.

Definizione 4.1. Sia X uno spazio di Banach. Una famiglia di operatori lineari e limitati (e dunque continui) $\{T_t\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ si dice *semigruppı fortemente continuo* su X se:

1. $T_0 = I$;
2. $T_{t+s} = T_t T_s$ per ogni $t, s \geq 0$;
3. per ogni $x \in X$

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T_t x - x\| = 0.$$

Osservazione 4.2. La continuit  forte implica la continuit  rispetto al tempo in norma. Infatti,

$$\|T_{t+s} x - T_t x\| \leq \|T_t\| \|T_s x - x\| \longrightarrow 0 \quad \text{per } s \downarrow 0.$$

Definizione 4.3. Si definisce il *generatore infinitesimale* del semigruppı $(T_t)_{t \geq 0}$ la coppia $(A, D(A))$, dove

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \text{ esiste in } X \right\}.$$

Per $x \in D(A)$ si pone

$$Ax := \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t}.$$

Lemma 4.4. Sia $(T_t)_{t \geq 0}$ un semigruppı fortemente continuo su X con generatore $(A, D(A))$. Allora:

1. A   lineare;
2. se $x \in D(A)$, allora $T_t x \in D(A)$ per ogni $t \geq 0$;
3. per ogni $x \in D(A)$

$$\frac{d}{dt} T_t x = AT_t x = T_t Ax;$$

4. per ogni $x \in X$ e per ogni $0 \leq a < b$ vale

$$T_b x - T_a x = A \int_a^b T_s x \, ds$$

in particolare, se $x \in D(A)$ allora

$$A \int_a^b T_s x \, ds = \int_a^b AT_s x \, ds = \int_a^b T_s Ax \, ds.$$

4.2 SEMIGRUPPI FORTEMENTE CONTINUI

Dimostrazione. **(1)** Ovvvia.

(2) Sia $x \in D(A)$ e $t \geq 0$. Per ogni $h > 0$, usando la proprietà di semigruppò,

$$\frac{T_h(T_t x) - T_t x}{h} = T_t \left(\frac{T_h x - x}{h} \right).$$

Poiché $x \in D(A)$ e T_t è continuo, passando al limite per $h \downarrow 0$ otteniamo

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{T_h(T_t x) - T_t x}{h} = T_t A x.$$

Quindi $T_t x \in D(A)$ e $A(T_t x) = T_t A x$.

(3) Immediato per il punto (2).

(4) Osserviamo anzitutto che, per ogni $t \geq 0$ e per ogni $x \in X$, vale

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} T_s x \, ds \longrightarrow T_t x \quad \text{per } \varepsilon \downarrow 0.$$

Infatti,

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} T_s x \, ds - T_t x \right\| = \left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} (T_s x - T_t x) \, ds \right\| \leq \sup_{t \leq s \leq t+\varepsilon} \|T_s x - T_t x\|,$$

che tende a zero per la continuità forte del semigruppò.

Sia ora $x \in H$ e $0 \leq a < b$. Consideriamo

$$A \left(\int_a^b T_t x \, dt \right) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(T_\varepsilon \int_a^b T_t x \, dt - \int_a^b T_t x \, dt \right).$$

Usando la proprietà di semigruppò e la linearità e continuità del semigruppò,

$$T_\varepsilon \int_a^b T_t x \, dt = \int_a^b T_\varepsilon T_t x \, dt = \int_a^b T_{t+\varepsilon} x \, dt = \int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} T_s x \, ds.$$

da cui

$$A \left(\int_a^b T_t x \, dt \right) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_b^{b+\varepsilon} T_s x \, ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} T_s x \, ds \right).$$

Per la convergenza mostrata all'inizio,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_b^{b+\varepsilon} T_s x \, ds \longrightarrow T_b x, \quad \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} T_s x \, ds \longrightarrow T_a x.$$

Quindi

$$A \left(\int_a^b T_t x \, dt \right) = T_b x - T_a x.$$

Dal punto (3) e procedendo a ritroso otteniamo la seconda e terza uguaglianza. \square

CAPITOLO 4. TEORIA INIFINITO-DIMENSIONALE

Proposizione 4.5. *Sia $(T_t)_{t \geq 0}$ un semigruppò fortemente continuo su X con generatore $(A, D(A))$. Allora:*

1. A è chiuso;
2. $D(A)$ è denso in X .

Dimostrazione. **(1)** Sia $x_n \in D(A)$ tale che

$$x_n \rightarrow x, \quad Ax_n \rightarrow y \quad \text{in } X.$$

Poiché

$$T_t x_n - x_n = \int_0^t T_s A x_n ds,$$

per continuità di T_t passando al limite si ottiene

$$T_t x - x = \int_0^t T_s y ds.$$

Dividendo per t e facendo tendere t a zero,

$$\frac{T_t x - x}{t} \rightarrow y,$$

quindi $x \in D(A)$ e $Ax = y$.

(2) Per $x \in X$ definiamo

$$x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T_s x ds.$$

come visto $x_\varepsilon \in D(A)$ e

$$\|x_\varepsilon - x\| = \left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (T_s x - x) ds \right\| \leq \sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} \|T_s x - x\| \rightarrow 0.$$

Quindi $D(A)$ è denso in X . □

Teorema 4.6. *Siano $(T_t)_{t \geq 0}$ e $(S_t)_{t \geq 0}$ due semigruppò fortemente continui su X aventi lo stesso generatore infinitesimale A .*

Allora

$$T_t = S_t \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

In particolare, il generatore infinitesimale determina univocamente il semigruppò.

4.2 SEMIGRUPPI FORTEMENTE CONTINUI

Dimostrazione. Ricordiamo il teorema fondamentale del calcolo negli spazi di Banach: se $f : [0, \infty) \rightarrow X$ è continua e derivabile in norma, allora per ogni $a < b$:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

In particolare, se $f'(t) = 0$ per ogni t , allora f è costante.

Siano $(T_t)_{t \geq 0}$ e $(S_t)_{t \geq 0}$ due semigrupperi fortemente continui con lo stesso generatore A , e sia $x \in D(A)$. Definiamo la funzione

$$f(s) := T_{t-s}S_sx, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Poiché $x \in D(A)$, sia $s \mapsto T_{t-s}$ che $s \mapsto S_sx$ sono derivabili in norma. Calcoliamo la derivata di f rispetto a s con la regola di Liebenitz per operatori lineari in spazi di Banach⁵

$$\frac{d}{ds}f(s) = -T_{t-s}AS_sx + T_{t-s}AS_sx = 0,$$

dove abbiamo usato il fatto che T_{t-s} e S_s hanno lo stesso generatore.

Quindi $f(s)$ è costante in s su $[0, t]$. Valutando agli estremi, ho

$$f(0) = T_t x, \quad f(t) = S_t x.$$

Poiché f è costante, segue che

$$T_t x = S_t x.$$

Infine, poiché $D(A)$ è denso in X e i semigrupperi sono operatori continui, per ogni $x \in X$:

$$T_t x = S_t x \quad \forall t \geq 0.$$

□

Abbiamo ottenuto che il generatore $(A, D(A))$ di un semigruppero fortemente continuo è lineare, chiuso, ha dominio denso e determina il sottogruppo univocamente. È ragionevole domandarsi allora se ogni operatore lineare chiuso e con dominio denso sia automaticamente generatore di un certo semigruppero. In generale questo non è vero, o meglio necessita di ipotesi aggiuntive; ai fini di questa trattazione, possiamo limitarci a risultati più deboli, nello specifico possiamo enunciare il fondamentale teorema di caratterizzazione dei semigrupperi fortemente continui su spazi di Hilbert separabili⁶.

⁵La dimostrazione è immediata dalla definizione di derivata in spazi di Banach per operatori lineari. Per approfondire, Klaus-Jochen Engel e Rainer Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics 194, Springer-Verlag, New York – Berlin, 1999.

⁶Questo è un caso molto particolare del teorema di Hille–Yosida. Per dimostrazioni e approfondimenti: Klaus-Jochen Engel e Rainer Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*.

Teorema 4.7. *Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ operatore lineare. Supponiamo che:*

1. $D(A)$ sia denso in H ;
2. A sia autoaggiunto;
3. A sia dissipativo, cioè

$$\langle Ax, x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in D(A).$$

Allora A genera un semigruppо fortemente continuo di contrazioni $(T_t)_{t \geq 0}$ su H , cioè:

$$\|T_t\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

In maniera puramente formale, definiamo allora

$$(e^{tA})_{t \geq 0} \quad \text{come il semigruppо generato da } A.$$

Osservazione 4.8. Questa scrittura vuole ricordare la rappresentazione

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

tuttavia tale serie non è in generale ben posta se l'operatore A non è continuo, perché la sommatoria potrebbe non convergere uniformemente.

4.2.1 ODE in spazi di Hilbert a coefficienti lineari

Sia H uno spazio di Hilbert e sia

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H$$

un operatore lineare che genera un semigruppо fortemente continuo $(T_t)_{t \geq 0}$ su H .

Consideriamo il problema di Cauchy astratto

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Osserviamo subito che se $u_0 \in D(A)$, allora la funzione

$$u(t) := T_t u_0$$

è una soluzione classica del problema, cioè

$$u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); H)$$

4.2 SEMIGRUPPI FORTEMENTE CONTINUI

e soddisfa

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad u(0) = u_0.$$

Infatti, poiché A genera un semigruppoo fortemente continuo, vale la proprietà fondamentale: per ogni $x \in D(A)$,

$$\frac{d}{dt}T_t x = AT_t x = T_t Ax.$$

Ponendo $x = u_0 \in D(A)$ otteniamo

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}T_t u_0 = AT_t u_0 = Au(t).$$

Inoltre $T_0 = I$, quindi $u(0) = u_0$.

Ciò significa che per dati iniziali nel dominio del generatore, il semigruppoo fornisce una soluzione classica alla ODE.

Il problema sorge quando $u_0 \notin D(A)$, e dunque $Au(t)$ non è a priori ben definita. Tuttavia $T_t u_0$ è sempre ben definito per ogni $u_0 \in H$, e questo suggerisce di prendere come soluzione la funzione

$$u(t) := T_t u_0,$$

anche quando $u_0 \in H$.

Definizione 4.9. Sia H uno spazio di Hilbert e sia

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H$$

un operatore lineare che genera un semigruppoo fortemente continuo $(T_t)_{t \geq 0}$ su H .

Dato $u_0 \in H$, la funzione

$$u : [0, \infty) \rightarrow H, \quad u(t) := T_t u_0,$$

si dice soluzione mild del problema di Cauchy omogeneo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Passiamo ora alla formulazione Mild nel caso di problemi non omogenei.

Definizione 4.10. Sia A il generatore di un semigruppoo fortemente continuo $(T_t)_{t \geq 0}$ su H . Dato $u_0 \in H$ e $f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty); H)$, una funzione

$$u : [0, \infty) \rightarrow H, \quad u(t) = T_t u_0 + \int_0^t T_{t-s} f(s) ds.$$

si dice soluzione mild del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

con

$$L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+; H) := \left\{ f : \mathbb{R}_+ \rightarrow H \text{ misurabile} \mid \int_0^T \|f(t)\|_H dt < \infty \forall T > 0 \right\}$$

(per garantire la buona positura dell'integrale).

Osservazione 4.11. Per il teorema 4.6, poichè il generatore determina univocamente il semigruppato, la soluzione Mild è unica.

Proposizione 4.12. *Nelle ipotesi 4.10, sia $u_0 \in D(A)$.*

Allora la soluzione mild è una soluzione classica del problema di Cauchy non omogeneo.

Dimostrazione. Poniamo

$$v(t) = T_t u_0, \quad w(t) = \int_0^t T_{t-s} f(s) ds.$$

per 4.4, $v(t), w(t) \in D(A)$ per ogni $t \geq 0$, inoltre

$$\frac{d}{dt}v(t) = AT_t u_0.$$

e applicando la regola di Leibniz per operatori lineari, si ottiene

$$\frac{d}{dt}w(t) = T_0 f(t) + \int_0^t \frac{d}{dt}T_{t-s} f(s) ds = f(t) + A \int_0^t T_{t-s} f(s) ds.$$

Sommando le due derivate si ottiene

$$\frac{d}{dt}u(t) = AT_t u_0 + A \int_0^t T_{t-s} f(s) ds + f(t) = Au(t) + f(t).$$

□

Osservazione 4.13. Diventa chiaro allora il ruolo della soluzione mild, che può essere interpretata come limite puntuale di soluzioni classiche.

Infatti, poichè per ipotesi $D(A)$ è denso in H , per ogni $u_0 \in H$ esiste una successione $(u_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tale che

$$u_0^n \rightarrow u_0 \quad \text{in } H.$$

4.2 SEMIGRUPPI FORTEMENTE CONTINUI

Inoltre, è evidente che per ogni tempo t la soluzione Mild è continua rispetto al dato iniziale. Questo implica che

$$u^n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{in } H.$$

Se inoltre il semigruppò è di contrazione, cioè

$$\|T_t\| \leq 1 \quad \text{per ogni } t \geq 0,$$

allora

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u^n(t) - u(t)\| \leq \|u_0^n - u_0\|,$$

e dunque la convergenza è uniforme su ogni intervallo compatto $[0, T]$ ⁷.

⁷In generale, si può dimostrare che ogni semigruppò fortemente continuo ammette stima uniforme nel tempo, e dunque le soluzioni convergono sempre uniformemente su ogni intervallo compatto.

4.3 Gaussianhe infinito-dimensionali

Definizione 4.14. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e H uno spazio di Hilbert separabile. Una misura di probabilità μ su H si dice *gaussiana* se, per ogni $v \in H$, la misura μ_v su \mathbb{R} definita da

$$\mu_v(A) := \mu(\{u \in H \mid \langle u, v \rangle \in A\}), \quad A \subset \mathbb{R} \text{ boreliano},$$

è una misura gaussiana reale.

Osservazione 4.15. La misura μ non è una misura di probabilità definita in senso classico, cioè dove a ogni boreliano $E \in \mathcal{B}(H)$ si associa esplicitamente un valore. È definita invece come l'unica misura di probabilità estesa (per il teorema di estensione di Kolmogorov) su H le cui proiezioni lungo tutti i vettori $v \in H$ sono gaussiane⁸.

In modo naturale, possiamo definire una variabile aleatoria gaussiana su H .

Definizione 4.16. Una variabile aleatoria $X : \Omega \rightarrow H$ si dice *gaussiana* se la misura indotta da X su H ,

$$\mu_X(E) := \mathbb{P}(X \in E), \quad E \in \mathcal{B}(H),$$

è una *misura gaussiana* nel senso definito precedentemente.

In altre parole, X è gaussiana se e solo se per ogni $v \in H$ la variabile reale

$$\langle X, v \rangle : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

è una variabile aleatoria reale gaussiana.

Osservazione 4.17. La definizione di misura (o variabile aleatoria) gaussiana in uno spazio di Hilbert separabile H è la naturale estensione della definizione classica in dimensione finita. Infatti, in \mathbb{R}^n un vettore aleatorio X è gaussiano se e solo se, per ogni $w \in \mathbb{R}^n$, la variabile aleatoria reale $\langle X, w \rangle$ è gaussiana. Nel contesto infinito dimensionale si assume dunque come definizione che una misura di probabilità su H sia gaussiana se tutte le sue proiezioni unidimensionali lungo elementi di H sono gaussiane reali.

4.3.1 Estensione sui $\mathcal{B}(H)$

Non abbiamo ancora detto nulla riguardo alla σ -algebra su cui è definita, in generale, la misura gaussiana infinito-dimensionale. In dimensione infinita, infatti, una costruzione basata sulle sole proiezioni finite-dimensionali non garantisce a priori l'esistenza di una misura di probabilità definita sulla σ -algebra boreliana dello spazio di riferimento.

A tale scopo si introduce innanzitutto la σ -algebra dei cilindri:

⁸Vedi, ad esempio, BOGACHEV, V.I., *Gaussian Measures*, American Mathematical Society, 1998.

4.3 GAUSSIANE INFINITO-DIMENSIONALI

Definizione 4.18. la σ -algebra generata dagli insiemi della forma

$$\{x \in H : (\langle x, v_1 \rangle, \dots, \langle x, v_n \rangle) \in A\},$$

con $v_1, \dots, v_n \in H$ e $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, è detta σ -algebra dei cilindri su H .

Osservazione 4.19. Tautologicamente, la misura gaussiana infinito dimensionale agisce proprio sulla σ -algebra dei cilindri di H .

Questa definisce precisamente una misura cilindrica, ma non in generale una misura di probabilità sulla σ -algebra boreliana $\mathcal{B}(H)$. Il passaggio da una misura cilindrica a una misura boreliana richiede ulteriori ipotesi di regolarità, che come vedremo nel caso gaussiano si esprimono nella classe traccia dell'operatore di covarianza.

Osservazione 4.20. Finora abbiamo definito le proiezioni cilindriche delle misure gaussiane solo lungo vettori singoli $v \in H$, ossia in dimensione uno. Questo perchè, per definizione delle gaussiane finite-dimensionali, tali misure determinano univocamente le misure gaussiane sulle proiezioni su \mathbb{R}^n per ogni $n \geq 1$. In particolare, per ogni coppia di vettori $u, v \in H$, consideriamo la misura bidimensionale $\mu_{u,v}$ come

$$\mu_{u,v}(A) := \mu(\{x \in H : (\langle x, u \rangle, \langle x, v \rangle) \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Poiché μ è cilindrica gaussiana, la misura $\mu_{u,v}$ è una gaussiana su \mathbb{R}^2 , determinata univocamente dalle sue proiezioni unidimensionali μ_u e μ_v e dalla matrice di covarianza.

Definizione 4.21. Sia μ una misura gaussiana su H . La *media* di μ è $m \in H$ tale che

$$\langle m, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} t \mu_v(dt), \quad \forall v \in H,$$

dove μ_v è la proiezione di μ lungo v .

Definizione 4.22. Sia μ una misura gaussiana su H con media m . L'*operatore di covarianza* di μ è l'operatore $Q : H \rightarrow H$ definito dalla relazione

$$\langle Qu, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (s - \langle m, u \rangle)(t - \langle m, v \rangle) d\mu_{u,v}(s, t), \quad u, v \in H,$$

dove $\mu_{u,v}$ è la proiezione bidimensionale lungo (u, v) .

Osservazione 4.23. l'operatore di covarianza $Q : H \rightarrow H$ è lineare, autoaggiunto e definito positivo (la semplice dimostrazione verrà vista nel caso di gaussiane estese su $\mathcal{B}(H)$).

Definizione 4.24. sia $Q : H \rightarrow H$ un operatore lineare e $(e_n)_{n \geq 1}$ una base ortonormale di H .

Si dice *traccia* di Q il valore (se esiste finito)

$$\text{Tr}(Q) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle Qe_n, e_n \rangle,$$

Dalla teoria sugli spazi di Hilbert sappiamo che la definizione è indipendente dalla scelta della base ortonormale.

In tal caso, Si dice che Q è di *classe traccia*.

Possiamo enunciare ora il teorema cardine della teoria Gaussiana infinito-dimensionale.

Teorema 4.25 (Minlos–Sazonov). *Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia μ misura cilindrica gaussiana su H con media m e operatore di covarianza Q . Allora μ si estende in modo unico a una misura di probabilità gaussiana su $\mathcal{B}(H)$ se e solo se Q è un operatore positivo, autoaggiunto e di classe traccia.*⁹

Osservazione 4.26. Una volta che la misura cilindrica gaussiana si è estesa a una misura di probabilità su $\mathcal{B}(H)$, gli integrali definiti su H coincidono con gli integrali rispetto alle proiezioni finite-dimensionali. Più precisamente, se $v_1, \dots, v_n \in H$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile e integrabile rispetto alla misura μ_{v_1, \dots, v_n} , allora vale

$$\int_H f(\langle x, v_1 \rangle, \dots, \langle x, v_n \rangle) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \mu_{v_1, \dots, v_n}(dy).$$

L'uguaglianza segue direttamente dalla definizione di misura sulla proiezione e dalle proprietà standard dell'integrale di Lebesgue⁹.

Ad esempio

$$\langle m, v \rangle = \int_H \langle x, v \rangle \mu(dx),$$

e

$$\langle Qu, v \rangle = \int_H \langle x - m, u \rangle \langle x - m, v \rangle \mu(dx).$$

Osservazione 4.27. Nel caso finito-dimensionale, le nozioni di media e operatore di covarianza introdotte coincidono con la media e la matrice di covarianza usuali dei vettori aleatori gaussiani. In particolare, l'operatore di covarianza Q è rappresentato dalla matrice simmetrica positiva definita da

$$Q_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

⁹Per approfondire, R. Bogachev, Gaussian Measures, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 62, American Mathematical Society, 1998.

4.3 GAUSSIANE INFINITO-DIMENSIONALI

Proposizione 4.28. *Analogamente al caso finito-dimensionale, l'operatore di covarianza $Q : H \rightarrow H$, definito da*

$$\langle Qu, v \rangle := \int_H \langle x - m, u \rangle \langle x - m, v \rangle \mu(dx), \quad u, v \in H,$$

è lineare, autoaggiunto e positivo.

Dimostrazione. Linearità. Per $u_1, u_2 \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, per linearità del prodotto scalare e dell'integrale si ha

$$\langle Q(\alpha u_1 + \beta u_2), v \rangle = \alpha \langle Qu_1, v \rangle + \beta \langle Qu_2, v \rangle,$$

da cui segue la linearità di Q .

Autoaggiuntezza. Per ogni $u, v \in H$,

$$\langle Qu, v \rangle = \int_H \langle x - m, u \rangle \langle x - m, v \rangle \mu(dx) = \langle Qv, u \rangle,$$

poiché il prodotto è simmetrico.

Positività. Per ogni $v \in H$ vale

$$\langle Qv, v \rangle = \int_H \langle x - m, v \rangle^2 \mu(dx) \geq 0,$$

□

possiamo finalmente dare la definizione di misura gaussiana su $\mathcal{B}(H)$.

Definizione 4.29. Una misura di probabilità μ su $\mathcal{B}(H)$ si dice *misura gaussiana* con media $m \in H$ e operatore di covarianza $Q : H \rightarrow H$ se è *misura gaussiana cilindrica*, dove Q è un operatore lineare, autoaggiunto, positivo e di classe traccia. In tal caso si scrive

$$\mu = \mathcal{N}(m, Q),$$

Lemma 4.30. *Sia $\mu = \mathcal{N}(m, Q)$ una misura gaussiana su $\mathcal{B}(H)$, con Q operatore di covarianza di classe traccia. Allora*

$$\text{tr}(Q) = \int_H \|x - m\|^2 \mu(dx).$$

Dimostrazione. Sia $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una base ortonormale di H . Poiché Q è di classe traccia,

$$\text{tr}(Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Qe_k, e_k \rangle.$$

CAPITOLO 4. TEORIA INIFINITO-DIMENSIONALE

Per ogni $x \in H$ vale l'identità di Parseval

$$\|x - m\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x - m, e_k \rangle^2,$$

Applicando il teorema di Tonelli (o analogamente convergenza monotona) si ottiene

$$\int_H \|x - m\|^2 \mu(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_H \langle x - m, e_k \rangle^2 \mu(dx).$$

Dalla definizione di operatore di covarianza

$$\int_H \langle x - m, e_k \rangle^2 \mu(dx) = \langle Qe_k, e_k \rangle.$$

Sommando su k si conclude

$$\int_H \|x - m\|^2 \mu(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Qe_k, e_k \rangle = \text{tr}(Q),$$

□

Osservazione 4.31. La misura gaussiana $\mathcal{N}(0, I)$ non definisce una misura di probabilità su $\mathcal{B}(H)$.

Infatti, sia $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una base ortonormale di H . Per definizione di traccia si ha

$$\text{tr}(I) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Ie_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Pertanto l'operatore identità non è di classe traccia.

Nel contesto infinito-dimensionale si perde dunque la possibilità di avere una gaussiana normalizzata.

Questo fatto è la ragione sostanziale per cui la definizione di moto browniano infinito-dimensionale richiede una modifica rispetto al caso finito-dimensionale. Infatti, in \mathbb{R}^n il moto browniano è caratterizzato dalla proprietà che, per ogni $0 \leq s < t$, l'incremento $B_t - B_s$ è una variabile aleatoria gaussiana con legge $\mathcal{N}(0, (t-s)I_{\mathbb{R}^n})$.

Tuttavia, in dimensione infinita l'operatore identità non è di classe traccia; ne segue che una gaussiana con operatore di covarianza $(t-s)I_H$ non definisce una misura di probabilità su $\mathcal{B}(H)$. Pertanto, la costruzione del moto browniano in spazi di Hilbert infinito-dimensionali non può essere ottenuta mediante una trasposizione diretta del caso finito-dimensionale, e richiede l'introduzione di operatori di covarianza opportunamente scelti.

D'ora in poi, per coerenza con la letteratura moderna il moto browniano verrà rappresentato come $W(t)$, ovvero il processo di Wiener cilindrico.

4.3.2 Moto Browniano infinito-dimensionale

Definizione 4.32. Sia $(\beta_k(t))_{k \geq 1}$ una famiglia di moti browniani reali indipendenti definiti su uno stesso spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, e $(e_k)_{k \geq 1}$ una base ortonormale di H .

Il processo

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) e_k$$

è detto moto browniano cilindrico su H . Equivalentemente, per $t > s$,

$$W(t) - W(s)$$

è una gaussiana cilindrica centrata con operatore di covarianza

$$(t - s) \text{Id.}$$

Per il teorema di Minlos (4.25) il moto browniano così definito non vive in H , poichè il suo operatore di covarianza non è di classe traccia per nessun tempo t .

Vogliamo ora comprendere come estendere il moto browniano cilindrico $W(t)$ in modo da ottenere un processo che prenda effettivamente valori in H . Per farlo, l'idea è quella di sfruttare l'effetto regolarizzante di un semigrupp fortemente continuo.

Sia $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ il generatore di un semigrupp fortemente continuo $(T_t)_{t \geq 0}$. Definiamo formalmente il processo di *convoluzione stocastica*

$$W_A(t) = \int_0^t T_{t-s} dW(s).$$

L'integrale precedente è definito rigorosamente nell'ambito della teoria dell'integrazione di Itô in dimensione infinita ¹⁰ come integrale rispetto a un moto browniano cilindrico, e produce un processo a valori in H sotto opportune ipotesi sull'operatore A .

Per questa trattazione eviteremo di sviluppare la teoria completa dell'integrazione stocastica in dimensione infinita. Ci limiteremo invece al caso in cui A sia diagonalizzabile rispetto a una base ortonormale di autovettori in H .

Definizione 4.33. Sia $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ il generatore di un semigrupp fortemente continuo $(T_t)_{t \geq 0}$, e $(e_k)_{k \geq 1}$ una base ortonormale di autovettori di A con relativi autovalori $(\lambda_k)_{k \geq 1}$.

¹⁰Vedi ad esempio G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University Press, 1992.

CAPITOLO 4. TEORIA INIFINITO-DIMENSIONALE

Definiamo il processo di *convoluzione stocastica* rispetto ad A come

$$W_A(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} d\beta_k(s) \right) e_k,$$

dove gli integrali sono integrali di Itô reali classici.

Considerazioni preliminari

Vogliamo determinare condizioni sugli autovalori (λ_k) affinché $W_A(t)$ prenda valori in H , almeno in senso $L^2(\Omega; H)$.

Poiché (e_k) è una base ortonormale di H , si ha

$$\|W_A(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} d\beta_k(s) \right|^2.$$

Passando all'aspettazione e usando convergenza monotona otteniamo

$$\mathbb{E}\|W_A(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left| \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} d\beta_k(s) \right|^2.$$

Applicando l'isometria di Itô ,

$$\mathbb{E} \left| \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} d\beta_k(s) \right|^2 = \int_0^t e^{2\lambda_k(t-s)} ds.$$

da semplici calcoli si ottiene

$$\int_0^t e^{2\lambda_k(t-s)} ds = \frac{1 - e^{2\lambda_k t}}{-2\lambda_k}.$$

Segue quindi

$$\mathbb{E}\|W_A(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{2\lambda_k t}}{-2\lambda_k}.$$

Imponiamo ora la condizione $\lambda_k \leq 0$ per ogni k , allora

$$0 \leq 1 - e^{2\lambda_k t} \leq 1,$$

da cui si ottiene la stima

$$\mathbb{E}\|W_A(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-\lambda_k}.$$

Concludiamo che delle condizioni sufficienti affinché $W_A(t)$ sia H -valutato in senso $L^2(\Omega; H)$ è che i λ_k siano tutti negativi e che la serie

4.3 GAUSSIANE INFINITO-DIMENSIONALI

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-\lambda_k}$$

sia convergente.

In particolare, sotto queste ipotesi abbiamo che, per ogni tempo fissato $t > 0$,

$$\mathbb{E}\|W_A(t)\|^2 < \infty.$$

e dunque

$$\|W_A(t, \omega)\| < \infty \quad \text{per quasi ogni } \omega \in \Omega.$$

ovvero

$$W_A(t, \omega) \in H \quad \text{per quasi ogni } \omega.$$

Il passo successivo è ricavare la legge di $W_A(t)$.

Teorema 4.34. *Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un operatore lineare che genera un semigruppoo fortemente continuo $(T_t)_{t \geq 0}$. Supponiamo che A ammetta base ortonormale di autovettori $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$, e che i relativi autovalori siano negativi e rispettino la condizione di sommabilità*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} < \infty.$$

Allora, per ogni $t \geq 0$:

1. $W_A(t)$ è una variabile aleatoria gaussiana centrata su $\mathcal{B}(H)$;
2. Per ogni $t > 0$ l'operatore di covarianza Q_t è diagonale rispetto alla base (e_k) e soddisfa

$$Q_t e_k = \left(\int_0^t e^{2\lambda_k(t-s)} ds \right) e_k.$$

Dimostrazione. **1)** Per quanto visto nelle considerazioni preliminari, $W_A(t)$ prende valori in H q.o. Per dimostrare che $W_A(t)$ è gaussiana in H , basta verificare che per ogni $x \in H$ la variabile reale

$$\langle W_A(t), x \rangle$$

è gaussiana. Poniamo

$$\xi_k(t) = \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} d\beta_k(s).$$

CAPITOLO 4. TEORIA INIFINITO-DIMENSIONALE

Allora

$$\langle W_A(t), x \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \xi_k(t).$$

Dalla teoria del calcolo di Ito, le variabili $\xi_k(t)$ sono gaussiane centrate per ipotesi indipendenti. inoltre dalle considerazioni preliminari abbiamo ricavato che $\mathbb{E}|\xi_k(t)|^2 \rightarrow 0$ con lo stesso ordine asintotico di $\frac{1}{|\lambda_k|}$.

Sia ora

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k(t)$$

Queste sono combinazioni lineari finite di gaussiane indipendenti, quindi gaussiane.

Inoltre, per la sommabilità sugli autovalori

$$\mathbb{E}|S_n - S_m|^2 = \sum_{k=m+1}^n x_k^2 \mathbb{E}|\xi_k(t)|^2 \rightarrow 0 \quad m, n \rightarrow \infty$$

Dunque la serie S_n è Cauchy, e quindi converge in $L^2(\Omega)$ a $\langle W_A(t), x \rangle$.

Poiché la classe delle variabili aleatorie gaussiane è chiusa rispetto alla convergenza in L^2 , il limite è ancora una variabile gaussiana.

Quindi $W_A(t)$ è una variabile aleatoria cilindrica gaussiana centrata in H .

2) Per definizione,

$$\langle Q_t e_k, e_j \rangle = \mathbb{E}[\xi_k(t) \xi_j(t)].$$

Per indipendenza delle coordinate:

$$\mathbb{E}[\xi_k(t) \xi_j(t)] = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ \mathbb{E}|\xi_k(t)|^2, & k = j. \end{cases}$$

Pertanto

$$Q_t e_k = \left(\int_0^t e^{2\lambda_k(t-s)} ds \right) e_k.$$

Per finire, l'operatore di covarianza Q_t soddisfa

$$\text{Tr}(Q_t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t e^{2\lambda_k(t-s)} ds < \infty,$$

in virtù della condizione

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} < \infty.$$

Pertanto Q_t è un operatore di classe traccia e per il teorema 4.25 abbiamo la tesi. \square

Capitolo 5

5 SDE infinito-dimensionali

5.1 Laplaciano

L'operatore A di riferimento in questa trattazione sarà proprio il laplaciano con condizioni al bordo di Dirichlet.

Definizione 5.1. Sia $H = L^2(0, 1)$. Si definisce l'operatore *Laplaciano con condizioni di Dirichlet* come

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H, \quad Au := u''.$$

Il *dominio* di A è

$$D(A) := \{u \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)\},$$

cioè l'insieme delle funzioni u che hanno derivate deboli¹¹ fino al secondo ordine in $L^2(0, 1)$ e che soddisfano le condizioni al bordo di Dirichlet

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Cominciamo elencando alcune semplici proprietà del laplaciano.

Lemma 5.2. *Sia $Au = u''$ il Laplaciano con condizioni al bordo di Dirichlet. Allora:*

1. A ha dominio denso in H ;
2. A è autoaggiunto, cioè $A = A^*$;
3. A è dissipativo, cioè

$$\langle Au, u \rangle \leq 0 \quad \forall u \in D(A).$$

Dimostrazione. **(1)** Le funzioni $C^\infty(0, 1)$ sono dense in $L^2(0, 1)$ e sono contenute in $D(A)$, quindi $D(A)$ è denso in H .

(2) Per $u, v \in D(A)$, usando l'integrazione per parti e $u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0$:

$$\langle Au, v \rangle = \int_0^1 u''(x)v(x) dx = \int_0^1 u(x)v''(x) dx = \langle u, Av \rangle.$$

¹¹La derivata è intesa come limite del rapporto incrementale convergente rispetto alla norma L^2 .

dunque A è autoaggiunto.

(3) Per $u \in D(A)$, sempre tramite l'integrazione per parti e per le condizioni di Dirichlet:

$$\langle Au, u \rangle = \int_0^1 u''(x)u(x) dx = - \int_0^1 |u'(x)|^2 dx \leq 0,$$

□

Osservazione 5.3. In particolare, valgono le ipotesi del teorema 4.7. Dunque, esiste un unico semigruppoo fortemente continuo di contrazioni

$$(e^{tA})_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(L^2(0, 1))$$

con generatore il Laplaciano con condizioni di Dirichlet.

Osservazione 5.4. Il Laplaciano non è limitato.

Infatti, supponiamo per assurdo che esista una costante $C > 0$ tale che

$$\|Au\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}, \quad \forall u \in D(A).$$

E' sufficiente prendere la funzione

$$u(x) := \sin(\lceil C \rceil \pi x) \in D(A),$$

e si verifica facilmente che non soddisfa la disuguaglianza.

Passiamo ora alle proprietà spettrali del Laplaciano.

Proposizione 5.5. *Sia A il Laplaciano con condizioni di Dirichlet. Allora*

1. *A ammette una base ortonormale di autovettori $(e_k)_{k \geq 1}$;*
2. *Gli autovalori corrispondenti $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ sono negativi e crescono in modulo come k^2 :*

$$\lambda_k = -(k\pi)^2, \quad k \geq 1.$$

Dimostrazione. Consideriamo l'equazione agli autovalori

$$Au = \lambda u, \quad u \in D(A),$$

cioè

$$u''(x) = \lambda u(x), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Posto $\lambda < 0$, scriviamo $\lambda = -\mu^2$ con $\mu > 0$. La soluzione è

$$u(x) = a \sin(\mu x) + b \cos(\mu x).$$

Le condizioni al bordo impongono $u(0) = 0 \implies b = 0$, e $u(1) = 0 \implies a \sin(\mu) = 0 \implies \mu = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Gli autovalori sono quindi

$$\lambda_k = -(k\pi)^2, \quad k \geq 1,$$

e gli autovettori corrispondenti

$$e_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x), \quad k \geq 1,$$

che formano una base ortonormale di $L^2(0, 1)$ con condizioni al bordo. \square

Osservazione 5.6. Rispetto alla base $\{e_k\}_{k \geq 1}$ di autovettori, il Laplaciano è diagonale.

Infatti, per ogni i, j si ha

$$\langle Ae_i, e_j \rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}.$$

In particolare, se $i \neq j$,

$$\langle Ae_i, e_j \rangle = 0.$$

Osservazione 5.7. Nella stessa base, per ogni $u \in D(A)$ si ha

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k \rangle e_k.$$

Applicando A e usando la linearità,

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k \rangle Ae_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, e_k \rangle e_k.$$

In particolare, i coefficienti di Au rispetto alla base sono dati da

$$\langle Au, e_k \rangle = \lambda_k \langle u, e_k \rangle.$$

Queste osservazioni valgono in generale per ogni operatore lineare che ammetta base ortonormale di autovettori.

La diagonalizzabilità del Laplaciano è fondamentale perchè viene ereditata dal suo semigruppato associato.

Proposizione 5.8. *Sia $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ Laplaciano, e $(T_t)_{t \geq 0}$ il semigruppato generato da A . Allora il semigruppato $(T_t)_{t \geq 0}$ è diagonale nella stessa base ortonormale di autovettori di A , o analogamente ammette stessa base ortonormale di autovettori:*

$$T_t e_k = e^{\lambda_k t} e_k, \quad \forall k \geq 1, t \geq 0.$$

CAPITOLO 5. SDE INFINITO-DIMENSIONALI

Dimostrazione. Sia fissato $k \geq 1$ e $e_k \in D(A)$. Allora per il lemma 4.4

$$\frac{d}{dt}T_t e_k = AT_t e_k = T_t A e_k = \lambda_k T_t e_k,$$

con condizione iniziale

$$T_0 e_k = e_k.$$

Questa è un'equazione differenziale in H lungo la curva $v(t) = T_t e_k$:

$$\frac{d}{dt}v(t) = \lambda_k v(t), \quad v(0) = e_k,$$

la cui unica soluzione è immedita:

$$T_t e_k = e^{\lambda_k t} e_k.$$

Dunque, per ogni $t \geq 0$, e_k è autovettore di T_t con autovalore associato $e^{\lambda_k t}$. \square

Osservazione 5.9. Il semigruppato generato dal Laplaciano con condizioni di Dirichlet è autoaggiunto. Infatti, presa la sua base ortonormale di autovettori,

$$\langle T_t e_i, e_j \rangle = e^{\lambda_i t} \langle e_i, e_j \rangle = \langle e_i, T_t e_j \rangle.$$

Per linearità e densità dello span degli autovettori, segue che

$$\langle T_t u, v \rangle = \langle u, T_t v \rangle \quad \forall u, v \in L^2(0, 1).$$

Per tutto il resto del capitolo fissiamo le seguenti ipotesi strutturali.

Sia H uno spazio di Hilbert reale separabile e sia

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H$$

il solito operatore lineare tale che:

- $D(A)$ è denso in H ;
- A è autoaggiunto;
- A è negativo;
- A ammette base ortonormale $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di autovettori con relativi autovalori negativi λ_k che rispettano la condizione $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} < \infty$.

Come visto, queste ipotesi modellizzano la struttura tipica del Laplaciano e garantiscono la buona positura del semigruppato fortemente continuo di contrazione $T(t) := e^{tA}$ generato da A e del processo di convoluzione $W_A(t)$.

5.2 Equazione del calore stocastica e soluzioni mild

Consideriamo ora l'equazione del calore stocastica lineare su H :

$$dX_t = AX_t dt + dW_t, \quad X_0 = u_0 \in H, \quad (5.1)$$

dove $(W_t)_{t \geq 0}$ è un moto browniano cilindrico su H .

Definizione 5.10. Chiamiamo *soluzione mild* dell'equazione (5.1) il processo definito da

$$X_t = T(t)u_0 + W_A(t),$$

dove

$$W_A(t) := \int_0^t T(t-s) dW_s$$

è la convoluzione stocastica associata al semigruppoo $T(t) = e^{tA}$.

In generale, lo studio dell'equazione (5.1) e delle soluzioni mild così definite richiede lo sviluppo dell'integrale di Itô in spazi di Hilbert e una teoria astratta delle SDE infinito-dimensionali lineari generate da operatori che generano un semigruppoo fortemente continuo.

Nel nostro caso, tuttavia, grazie all'ipotesi che A sia autoaggiunto e diagonalizzabile rispetto a una base ortonormale di autovettori, possiamo costruire la soluzione in modo esplicito coordinata per coordinata.

Ridefiniamo allora *soluzione mild* dell'equazione (5.1) sempre come

$$X_t = T(t)u_0 + W_A(t),$$

ma questa volta con la definizione esplicita del processo di convoluzione

$$W_A(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} d\beta_k(s) \right) e_k.$$

Osservazione 5.11. Il processo definito dalla *soluzione mild* è un processo gaussiano su H con legge

$$\pi_t = \mathcal{N}(T(t)u_0, Q_t),$$

con Q_t operatore di covarianza di $W_A(t)$.

Teorema 5.12. Per $u_0 \in H$, la soluzione mild è l'unica soluzione dell'equazione (5.1).

Dimostrazione. Scriviamo

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(t)e_k, \quad u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k, \quad W_t = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t)e_k,$$

dove $\beta_k(t)$ sono moti browniani indipendenti.
L'equazione (5.1) in forma integrale diventa

$$X_t = u_0 + \int_0^t AX_s ds + W_t.$$

Sviluppando rispetto alla base ortonormale si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(t)e_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k X_k(s)e_k ds + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t)e_k.$$

Identificando le componenti lungo ciascun e_k , otteniamo per ogni k :

$$X_k(t) = u_k + \int_0^t \lambda_k X_k(s) ds + \beta_k(t).$$

Questa è precisamente l'equazione di Ornstein–Uhlenbeck scalare, la cui soluzione è unica e nella forma

$$X_k(t) = e^{\lambda_k t} u_k + \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} d\beta_k(s),$$

Ricordando che per 5.8

$$T(t)e_k = e^{\lambda_k t} e_k \Rightarrow T(t)u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (e^{\lambda_k t} u_k) e_k$$

ho

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} (e^{\lambda_k t} u_k) e_k + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} d\beta_k(s) = T(t)u_0 + W_A(t),$$

Per unicità delle soluzioni per processi o.u. deriva l'unicità della soluzione. \square

Osservazione 5.13. Rappresentando il semigruppato generato da A nella forma

$$T(t) = e^{tA},$$

la soluzione mild dell'equazione del calore stocastica si riscrive come

$$X_t = e^{tA} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} dW_s.$$

Questa espressione mette in evidenza il legame strutturale con la soluzione del processo di Ornstein–Uhlenbeck unidimensionale

$$X_t = e^{\lambda t} x_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} d\beta(s),$$

sostituendo formalmente A con uno scalare $\lambda < 0$.

Questa analogia non è puramente formale, ma è giustificata dalla teoria generale delle equazioni differenziali stocastiche in spazi di Hilbert¹².

¹²G. Da Prato e J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University Press.

5.2.1 Semigruppato di transizione e misure invarianti

Abbiamo dimostrato che l'equazione del calore stocastica

$$dX_t = AX_t dt + dW_t, \quad X_0 = u_0 \in H,$$

ammette un'unica soluzione mild per ogni dato iniziale $u_0 \in H$. Inoltre, per ogni $t > 0$, la variabile aleatoria X_t ha legge gaussiana

$$\mathcal{L}(X_t) = \mathcal{N}(T(t)u_0, Q_t),$$

dove Q_t è l'operatore di covarianza del processo di convoluzione.

In maniera del tutto analoga al caso finito-dimensionale, possiamo dunque definire il semigruppato di transizione associato (il punto più delicato è la continuità nel tempo della soluzione mild e dunque del semigruppato, che verrà trattata nei complementi).

Definizione 5.14. per ogni $\varphi \in B_b(H)$, la famiglia $(P_t)_{t \geq 0}$ è il *semigruppato di transizione associato alla spde* con

$$P_t \varphi(x) := \mathbb{E}[\varphi(X_t^x)], \quad x \in H,$$

dove X_t^x denota la soluzione dell'equazione del calore stocastica (5.1) con dato iniziale $X_0 = x$. I kernel di transizione sono dunque

$$\pi_t(x, \cdot) = \mathcal{N}(T(t)x, Q_t), \quad x \in H, t > 0,$$

Teorema 5.15. *Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ il semigruppato di transizione associato alla SPDE lineare. Allora esiste un'unica misura di probabilità μ su $\mathcal{B}(H)$ invariante per P_t . Inoltre, μ è Gaussiana centrata con operatore di covarianza diagonale*

$$Qe_k = \frac{-1}{2\lambda_k} e_k, \quad k \geq 1,$$

Dimostrazione. Sia μ una misura invariante per P_t . Allora, per ogni $n \geq 1$, la legge marginale di μ sulle coordinate $(\langle \cdot, e_1 \rangle, \dots, \langle \cdot, e_n \rangle)$ deve essere invariante per il semigruppato finito-dimensionale generato dai processi O-U scalari

$$dX_k(t) = \lambda_k X_k(t) dt + d\beta_k(t), \quad k = 1, \dots, n.$$

Ricordando l'esempio 3.7, per ogni k il processo O-U scalare ha un'unica misura invariante centrata Gaussiana

$$\mathcal{N}\left(0, -\frac{1}{2\lambda_k}\right),$$

inoltre, le coordinate sono indipendenti per indipendenza dei moti Browniani $\beta_k(t)$ che generano i processi. Dunque le leggi marginali finite-dimensionali sono univocamente determinate dalle leggi uno-dimensionali dei $X_k(t)$.

Per il *Teorema di estensione di Kolmogorov* esiste quindi un' unica misura cilindrica μ su H che ha come proiezioni le misure invarianti dei processi O-U sulle coordinate.

Con un argomento analogo alla dimostrazione del teorema 4.34, si dimostra che μ è una misura Gaussiana cilindrica su H e che il suo operatore di covarianza Q è diagonale rispetto alla base (e_k) , con:

$$Qe_k = \frac{-1}{2\lambda_k} e_k, \quad k \geq 1.$$

Poiché per ipotesi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} < \infty$, Q è di classe traccia e dunque la misura invariante esiste unica, ed è Gaussiana su $\mathcal{B}(H)$:

$$\mu = \mathcal{N}(0, Q).$$

□

5.3 Complementi

Abbiamo dunque dimostrato che il semigruppò associato all'equazione del calore stocastica ammette un'unica misura invariante, ovvero una gaussiana centrata $\mathcal{N}(0, Q)$.

Il risultato è stato ottenuto mediante una costruzione esplicita, riducendo il problema infinito-dimensionale ad una famiglia numerabile di processi di Ornstein–Uhlenbeck indipendenti lungo una base ortonormale di autovettori del generatore.

Esistono tuttavia metodi più generali che consentono di ottenere risultati analoghi di esistenza e unicità della misura invariante senza ricorrere alla diagonalizzazione esplicita del generatore.

Tali approcci si basano, ad esempio, su proprietà di regolarizzazione del semigruppò, su criteri di ergodicità, oppure su risultati di convergenza asintotica delle leggi infinito-dimensionali.

Inoltre, nel capitolo precedente non è stato discusso in modo esplicito il problema della continuità temporale del semigruppò, né si è affrontata una possibile estensione del quadro trattato al caso del Laplaciano in dimensione spaziale superiore.

In questa sezione raccogliamo alcuni complementi, con l'obiettivo di evidenziare sia strumenti alternativi per lo studio delle misure invarianti, sia alcune generalizzazioni naturali del modello considerato.

5.3.1 Il teorema di Cameron–Martin

In dimensione finita, tutte le misure gaussiane non degeneri sono equivalenti, poichè equivalenti alla misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n .

In dimensione infinita la situazione cambia radicalmente, poichè sotto tale ipotesi non può essere definita una misura di Lebesgue.

Il risultato che descrive precisamente quando due gaussiane con la stessa covarianza sono equivalenti è il seguente

Teorema 5.16 (Cameron–Martin). *Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia Q un operatore autoaggiunto, positivo e di classe traccia su H . Siano X e Y variabili aleatorie H -valutate tali che*

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(m_1, Q), \quad \mathcal{L}(Y) = \mathcal{N}(m_2, Q).$$

Allora le leggi di X e Y sono equivalenti se e solo se

$$m_1 - m_2 \in \text{Im}(Q^{1/2}).$$

Lo spazio $\text{Im}(Q^{1/2})$ è detto spazio di Cameron–Martin associato alla misura gaussiana $\mathcal{N}(0, Q)$.

Questo teorema risulta essenziale per dimostrare la regolarità del semigruppato del calore.

Proposizione 5.17. *Il semigruppato del calore stocastico $(P_t)_{t \geq 0}$ è regolare (quindi ammette unica misura invariante).*

Dimostrazione. Fissato $t > 0$, sappiamo che

$$\pi_t(x, \cdot) = \mathcal{N}(T(t)x, Q_t), \quad \pi_t(y, \cdot) = \mathcal{N}(T(t)y, Q_t),$$

Per il teorema di Cameron–Martin sono equivalenti se e solo se

$$T(t)(x - y) \in \text{Im}(Q_t^{1/2}).$$

Poniamo $h := x - y$ e lavoriamo nella base ortonormale (e_k) di autovettori del generatore A . Come visto, (prop. 5.8)

$$T(t)e_k = e^{\lambda_k t} e_k.$$

e per il teorema 4.34

$$Q_t e_k = \left(\int_0^t e^{2\lambda_k s} ds \right) e_k = \frac{1 - e^{2\lambda_k t}}{-2\lambda_k} e_k,$$

e quindi

$$Q_t^{1/2} e_k = \sqrt{\frac{1 - e^{2\lambda_k t}}{-2\lambda_k}} e_k.$$

Cerchiamo $\sum_{k=1}^{\infty} z_k e_k$ tale che

$$Q_t^{1/2} z = T(t)h,$$

cioè

$$\sqrt{\frac{1 - e^{2\lambda_k t}}{-2\lambda_k}} z_k = e^{\lambda_k t} h_k.$$

Da cui

$$z_k = \sqrt{\frac{-2\lambda_k}{1 - e^{2\lambda_k t}}} e^{\lambda_k t} h_k.$$

Utilizzando la condizione di sommabilità $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-\lambda_k} < \infty$ sugli autovalori, si verifica facilmente che $z \in H$, ovvero che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2\lambda_k e^{2\lambda_k t}}{1 - e^{2\lambda_k t}} |h_k|^2 < \infty$$

Abbiamo ottenuto che per ogni tempo $t > 0$ i kernel di transizione sono equivalenti al variare del dato iniziale, ovvero il semigruppò è regolare. Per finire, in virtù della proposizione 2.23 ammette unica misura invariante. \square

5.3.2 Strong mixing per convergenza debole dei kernel

Nel caso finito-dimensionale vale il seguente noto criterio di convergenza per le misure gaussiane: una successione $\mathcal{N}(m_n, Q_n)$, di misure gaussiane su \mathbb{R}^d converge debolmente a $\mathcal{N}(m, Q)$ se e solo se

$$m_n \rightarrow m \quad \text{in } \mathbb{R}^d, \quad Q_n \rightarrow Q \quad \text{in } \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Infatti, in dimensione finita la convergenza dei parametri implica la convergenza delle funzioni caratteristiche

$$\exp(i\langle m_n, \xi \rangle - \frac{1}{2}\langle Q_n \xi, \xi \rangle),$$

e quindi la convergenza debole delle misure.

Vale la pena osservare che in dimensione finita tutte le norme sono equivalenti, dunque la convergenza degli operatori di covarianza può essere interpretata indifferentemente come convergenza uniforme degli operatori, o componente per componente delle relative matrici di covarianza associate.

Nel caso infinito-dimensionale la situazione è più delicata, come riassunto dal seguente

Teorema 5.18. *Sia H uno spazio di Hilbert separabile. Siano*

$$\mu_n = \mathcal{N}(m_n, Q_n), \quad \mu = \mathcal{N}(m, Q),$$

misure gaussiane su H , con Q_n e Q operatori autoaggiunti, positivi e di classe traccia.

Allora

$$\mu_n \rightarrow \mu$$

(debolmente in H) se e solo se:

1. $m_n \rightarrow m$ in H ;
2. $\|Q_n - Q\|_{\mathcal{L}(H)} \rightarrow 0$;
3. $\text{Tr}(Q_n) \rightarrow \text{Tr}(Q)$.

Utilizziamo il teorema appena enunciato per dimostrare la seguente

Proposizione 5.19. Sia $(P_t)_{t \geq 0}$ il semigruppato del calore stocastico e $(\pi_t(x, \cdot))_{t \geq 0}$ i relativi kernel di transizione. Sia

$$\mu = \mathcal{N}(0, -\frac{1}{2}A^{-1})$$

Allora, per ogni $x \in H$,

$$\pi_t(x, \cdot) \rightarrow \mu \quad \text{per } t \rightarrow \infty.$$

Dimostrazione. Fissiamo $t > 0$. Prima di tutto, osserviamo che l'operatore di covarianza Q_t ammette la rappresentazione operatoriale

$$Q_t = -\frac{1}{2}A^{-1}(I - T(2t)).$$

Infatti, lavorando nella base ortonormale (e_k) di autovettori di A , abbiamo

$$Q_t e_k = \left(\int_0^t e^{2\lambda_k s} ds \right) e_k = \frac{1 - e^{2\lambda_k t}}{-2\lambda_k} e_k.$$

D'altra parte, essendo tutto diagonalizzabile rispetto alla base ortonormale (e_k) ,

$$-\frac{1}{2}A^{-1}(I - T(2t))e_k = -\frac{1}{2}(-\lambda_k)^{-1}(1 - e^{2\lambda_k t})e_k = \frac{1 - e^{2\lambda_k t}}{-2\lambda_k} e_k.$$

Le due espressioni coincidono su una base, quindi

$$Q_t = -\frac{1}{2}A^{-1}(I - T(2t)).$$

Utilizziamo ora il teorema 5.18 per dimostrare la convergenza dei kernel: ricordiamo che

$$\pi_t(x, \cdot) = \mathcal{N}(T(t)x, Q_t), \quad x \in H, t > 0,$$

CAPITOLO 5. SDE INFINITO-DIMENSIONALI

passando dalla solita rappresentazione sulle proiezioni degli autovettori, si ricava facilmente che

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty,$$

ed in particolare convergono le medie per ogni dato iniziale.

Passiamo ora alla convergenza degli operatori di covarianza: dalla rappresentazione precedente, posto $Q = -\frac{1}{2}A^{-1}$, si ha

$$\|Q_t - Q\|_{\mathcal{L}(H)} = \|\frac{1}{2}A^{-1}T(2t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|\frac{1}{2}A^{-1}\| \|T(2t)\| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

Infine, per quanto riguarda la traccia

$$\mathrm{Tr}(Q_t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{2\lambda_k t}}{-2\lambda_k} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-2\lambda_k} = \mathrm{Tr}(Q).$$

Sono rispettate tutte le ipotesi, e dunque

$$\mathcal{N}(T(t)x, Q_t) \rightarrow \mathcal{N}(0, Q).$$

□

Lemma 5.20. *Il semigruppato del calore stocastico $(P_t)_{t \geq 0}$ è Feller.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che X_t^x è continuo rispetto a x . Infatti, per $x, y \in H$,

$$\|X_t^x - X_t^y\| = \|T(t)x + W_A(t) - (T(t)y + W_A(t))\| = \|T(t)(x - y)\| \leq \|x - y\|,$$

poichè $T(t)$ è contrattivo.

Dunque, per ogni $\varphi \in C_b(H)$, la composizione $\varphi(X_t^x)$ è continua e limitata. Infine, per convergenza dominata

$$P_t \varphi(x_n) = \mathbb{E}[\varphi(X_t^{x_n})] \rightarrow \mathbb{E}[\varphi(X_t^x)] = P_t \varphi(x),$$

□

Per concludere, utilizzando la proposizione 1.18, abbiamo quasi gratuitamente che il semigruppato ha unica misura invariante, in particolare strong mixing.

5.3.3 Continuità temporale

Nella costruzione del semigruppato di Markov associato all'equazione del calore stocastica abbiamo implicitamente utilizzato il fatto che la soluzione mild sia continua nel tempo.

Seguendo il solito approccio per proiezioni sulle coordinate spettrali, ciascuna componente è un processo di Ornstein–Uhlenbeck unidimensionale, e quindi continua nel tempo.

Per verificare la continuità in H , osserviamo anzitutto che per definizione il semigruppato generato da A è fortemente continuo, e dunque possiamo preoccuparci solamente della continuità per il processo di convoluzione.

Inoltre,

$$\mathbb{E}\|W_A(t) - W_A(s)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}|W_A^k(t) - W_A^k(s)|^2. \quad (5.2)$$

Per ogni k fissato, la continuità del processo di Ornstein–Uhlenbeck implica

$$\mathbb{E}|W_A^k(t) - W_A^k(s)|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{quando } s \rightarrow t.$$

Per la consueta condizione di sommabilità $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} < \infty$, che garantisce che il processo prenda valori in H e quindi la convergenza della serie (5.2) per ogni $t, s > 0$, concludiamo che

$$\mathbb{E}\|W_A(t) - W_A(s)\|^2 \longrightarrow 0.$$

Ne segue che $W_A(t)$ è continuo in $L^2(\Omega; H)$ e quindi anche la soluzione mild X_t è continua nel tempo.

E' evidente che questo argomento sfrutta pesantemente la diagonalizzazione dell'operatore A . In un contesto più generale, la continuità della convoluzione stocastica si può caratterizzare tramite condizioni integrali sulla traccia dell'operatore di covarianza.

References

- [1] K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics 194, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [2] G. Da Prato, *An Introduction to Infinite-Dimensional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [3] G. Da Prato and J. Zabczyk, *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Second Edition, Cambridge University Press, 2014.
- [4] S. Cerrai, *Second Order PDEs in Finite and Infinite Dimension*, Lecture Notes in Mathematics 1762, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [5] V. I. Bogachev, *Gaussian Measures*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 62, American Mathematical Society, 1998.