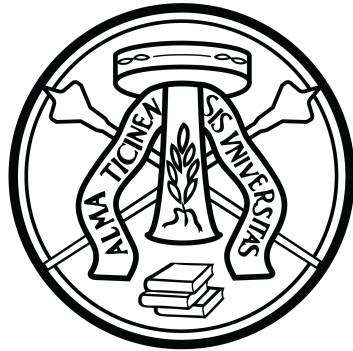


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA



UNIVERSITÀ
DI PAVIA

Γ -convergenza per energie coesive in spazi BV

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Relatore:
Prof. Matteo Negri

Tesi di Laurea di:
Riccardo Bazzarini
Matricola 549154

Anno Accademico 2024-2025

Abstract

In this thesis, we investigate the Γ -convergence of discrete functionals to a sharp cohesive fracture energy. In particular, we study a family of discrete energy functionals defined on one-dimensional finite element spaces with a non-uniform mesh. These functionals, which couple the displacement field with the damage variable, represent a phase-field model. We analyze the asymptotic behavior of the discrete functionals as the mesh size h and the internal length ϵ_h tend to zero. We require that $h = o(\epsilon_h)$.

Our main result proves that the discrete model Γ -converges to a functional defined on the space BV of functions of bounded variation. We show that the Γ -limit energy is the sum of three terms: a bulk elastic energy, a Cantor part and a cohesive energy concentrated at the jump set of the displacement. The contribution of this work is the generalization of the Γ -convergence result presented in [\[MNVD26\]](#). Specifically, we consider a non-uniform mesh, a general decreasing and Lipschitz continuous degradation function a , an even density function f with quadratic-linear behavior and we remove the non-interpenetration condition. These changes are useful to extend the proof of the main theorem to the two-dimensional anti-plane setting, as a future development.

The main result of this work is summarized in the following theorem:

Theorem: *Let $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be a decreasing and Lipschitz continuous function such that $a(0) = 1$, $a(1) = 0$ and $a(x) > 0$ for every $x \neq 1$. Let $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ be the even extension of the function $\phi_a : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, where*

$$\phi_a(s) = \min \left\{ a(z)\sigma_c s + G_c z^2, z \in [0, 1] \right\} \quad \text{for } s \geq 0.$$

Then, the function ϕ_a is concave, $\phi(0) = 0$,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi(s)}{s} = \sigma_c \quad \text{and} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \phi(s) = G_c.$$

Furthermore, let I be an open and bounded interval and let $\tilde{\mathcal{F}}_h : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$ be defined as

$$\tilde{\mathcal{F}}_h(u_h, d_h) = \begin{cases} \int_I f(u'_h, a_h(d_h)) dx + \frac{G_c}{2} \int_I \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d'_h|^2 dx & \text{if } u_h, d_h \in \mathbb{P}_h^1, \\ & \|u_h\|_\infty \leq K, d_h \in [0, 1], \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where

$$f(s, r) = \begin{cases} \frac{1}{2} E_0 s^2 & \text{if } |s| \leq r \frac{\sigma_c}{E_0}, \\ r \sigma_c |s| - r^2 \frac{\sigma_c^2}{2E_0} & \text{if } |s| > r \frac{\sigma_c}{E_0}, \end{cases}$$

and

$$a_h(d_h)(x) = \frac{1}{|e_h|} \int_{e_h} a(d_h(t)) dt, \quad \text{if } x \in e_h \in \mathcal{T}_h.$$

Let $\tilde{\mathcal{F}} : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$ be defined as

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, d) = \begin{cases} \mathcal{F}(u) & \text{if } u \in BV(I), d = 0 \text{ a.e. in } I, \|u\|_\infty \leq K \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where

$$\mathcal{F}(u) = \int_I f(u', 1) dx + \sigma_c |D^c u|(I) + \sum_{J_u} \phi(\llbracket u \rrbracket).$$

Then, $\tilde{\mathcal{F}}_h$ Γ -converges to $\tilde{\mathcal{F}}$ as $h \rightarrow 0$.

The work is organized as follows. In Chapter 1, we provide an overview of BV and SBV spaces in one dimension. Next, we define the notion of Γ -convergence and we prove some of its properties. Chapter 2 is dedicated to the detailed proof of the main Γ -convergence theorem. Finally, by varying the degradation function a , we give some examples of cohesive energies to which we can apply the theorem, including Dugdale's cohesive energy.

Introduzione

La modellizzazione matematica dei fenomeni di frattura nei materiali rappresenta un tema di ricerca di grande interesse nell'ambito delle applicazioni del Calcolo delle Variazioni.

L'obiettivo di questa tesi è dimostrare un risultato di Γ -convergenza per un'energia coesiva di frattura, definita nello spazio delle funzioni a variazione limitata in una dimensione. In particolare, studiamo il comportamento asintotico, nel senso della Γ -convergenza, di una famiglia di funzionali discreti, definiti su uno spazio di elementi finiti, quando la taglia h della mesh tende a 0. Questi funzionali rappresentano un modello *phase-field* per l'approssimazione numerica della frattura nei materiali quasi-fragili (come ad esempio rocce e calcestruzzo). I modelli *phase-field* approssimano una frattura (cioè una discontinuità della variabile spostamento u) regolarizzandola e introducendo una variabile continua di danno d_h a valori in $[0, 1]$, tale che $d_h = 0$ indica il materiale integro e $d_h = 1$ indica la frattura.

Consideriamo il seguente problema: una barra unidimensionale, che corrisponde al dominio $I = (-L, L)$. Introduciamo il funzionale discreto dell'energia $F_h : \mathbb{P}_h^1 \times \mathbb{P}_h^0 \times \mathbb{P}_h^1 \rightarrow [0, +\infty)$, definito come

$$F_h(u_h, \eta_h, d_h) = \int_I \frac{1}{2} E_0 |u'_h - \eta_h|^2 dx + \int_I a(d_h) \sigma_c |\eta_h| dx + \frac{G_c}{2} \int_I \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d'_h|^2 dx,$$

dove u_h è la variabile spostamento, d_h è la variabile danno, η_h rappresenta una variabile "plastica" (per la risposta inelastica del materiale) e $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è una funzione lipschitziana e decrescente tale che $a(0) = 1$, $a(1) = 0$ e $a(x) > 0$ per ogni $x \neq 1$. Definiamo $\mathcal{F}_h : \mathbb{P}_h^1 \times \mathbb{P}_h^1 \rightarrow [0, +\infty)$ come

$$\mathcal{F}_h(u_h, d_h) = \min\{F_h(u_h, \eta_h, d_h) : \eta_h \in \mathbb{P}_h^0\} \quad \text{per ogni } u_h, d_h \in \mathbb{P}_h^1.$$

Otteniamo che

$$\mathcal{F}_h(u_h, d_h) = \int_I f(u'_h, a_h(d_h)) dx + \frac{G_c}{2} \int_I \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d'_h|^2 dx,$$

dove

$$f(s, r) = \begin{cases} \frac{1}{2} E_0 s^2 & \text{se } |s| \leq r \frac{\sigma_c}{E_0}, \\ r \sigma_c |s| - r^2 \frac{\sigma_c^2}{2E_0} & \text{se } |s| > r \frac{\sigma_c}{E_0}, \end{cases}$$

e

$$a_h(d_h)(x) = \frac{1}{|e_h|} \int_{e_h} a(d_h(t)) dt, \quad \text{se } x \in e_h \in \mathcal{T}_h.$$

Estendiamo il funzionale \mathcal{F}_h allo spazio $L^1(I) \times L^1(I)$, definendo $\tilde{\mathcal{F}}_h : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow$

$[0, +\infty]$ come

$$\tilde{\mathcal{F}}_h(u_h, d_h) = \begin{cases} \mathcal{F}_h(u_h, d_h) & \text{se } u_h, d_h \in \mathbb{P}_h^1, \|u_h\|_\infty \leq K, d_h \in [0, 1], \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In questa tesi studiamo la Γ -convergenza dei funzionali $\tilde{\mathcal{F}}_h$ quando $h \rightarrow 0$. Per fare questo, assumiamo che $h = o(\epsilon_h)$. In particolare, dimostriamo che il Γ -limite è un'energia coesiva definita nello spazio $BV(I)$.

Il lavoro di tesi è suddiviso come segue.

Il Capitolo 1 è dedicato ai preliminari, cioè lo spazio BV delle funzioni a variazione limitata ([AFP00]) e la Γ -convergenza ([B98]).

Nella prima parte del capitolo, studiamo la struttura dello spazio $BV(a, b)$, con (a, b) intervallo aperto e limitato. Diciamo che una funzione u , integrabile secondo Lebesgue, è a variazione limitata quando la sua derivata distribuzionale Du è una misura boreliana, reale e completa, cioè $Du \in \mathcal{M}_b(a, b)$. Questo è equivalente alla seguente condizione sulla variazione di u : $V(u, (a, b)) < +\infty$, dove $V(u, (a, b)) = \sup \left\{ \int_a^b u \phi' dx : \phi \in C_c^1(a, b), \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\}$. In particolare, per una funzione BV vale che $V(u, (a, b)) = |Du|(a, b)$. A differenza degli spazi di Sobolev, le funzioni a variazione limitata possono ammettere dei punti di discontinuità: indichiamo con J_u l'insieme di tali punti. Inoltre, lo spazio $(BV(a, b), \|\cdot\|_{BV(a, b)})$, dove $\|u\|_{BV(a, b)} = \|u\|_{L^1(a, b)} + \|Du\|_{\mathcal{M}_b(a, b)}$ per ogni $u \in BV(a, b)$, è uno spazio di Banach. Diciamo che $u_n \in BV(a, b)$ converge debolmente* a $u \in BV(a, b)$ quando $u_n \rightarrow u$ in $L^1(a, b)$ e $Du_n \xrightarrow{*} Du$ in $\mathcal{M}_b(a, b)$. Per il Teorema di compattezza, ogni successione u_n limitata in $BV(a, b)$ ammette una sottosuccessione debolmente* convergente. Definiamo la variazione puntuale $pV(u, (a, b))$

come $pV(u, (a, b)) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| : n \geq 2, a < t_1 < \dots < t_n < b \right\}$.

Per il Teorema di Decomposizione di Jordan, una funzione ha variazione puntuale finita se e solo se si può rappresentare come differenza di due funzioni monotone crescenti e limitate. Lo spazio $BV(a, b)$ gode anche della seguente proprietà: per ogni funzione u a variazione limitata, esiste un "buon rappresentante", cioè una funzione $v \in BV(a, b)$ tale che $u = v$ q.o. in (a, b) , $V(u, (a, b)) = pV(v, (a, b))$, v è continua in $(a, b) \setminus J_u$ e v è derivabile q.o. in (a, b) , dove la derivata q.o. v' rappresenta la densità di Du rispetto alla misura di Lebesgue \mathcal{L}^1 . In particolare, esistono un rappresentante di u continuo da destra e un rappresentante di u continuo da sinistra. Identifichiamo sempre una funzione a variazione limitata con un suo buon rappresentante. La derivata distribuzionale Du si decompone in modo unico come $Du = u'dx + D^c u + \sum_{x \in J_u} \llbracket u(x) \rrbracket \delta_x$, dove $D^c u$ è la parte cantoriana di Du e $\llbracket u(x) \rrbracket := u(x^+) - u(x^-)$. In base a questa decomposizione, definiamo lo spazio $SBV(a, b)$ delle funzioni speciali a variazione limitata, cioè lo spazio delle funzioni $u \in BV(a, b)$ tali che $D^c u = 0$. Infine, enunciamo il risultato di compattezza in $SBV(a, b)$: sia $u_n \in SBV(a, b)$ tale che:

- u_n è limitata in $BV(a, b)$;

- u'_n è equi-integrabile;
- esiste $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ tale che $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi(t)}{t} = +\infty$ e $\sup_n \sum_{J_{u_n}} \psi(|\llbracket u_n \rrbracket|) < +\infty$;

allora, esiste una sottosuccessione u_{n_k} ed esiste $u \in SBV(a, b)$ tale che $u_{n_k} \rightarrow u$ in $L^1(a, b)$, $u'_{n_k} \xrightarrow{*} u'$ in $\mathcal{M}_b(a, b)$ e $D^j u_{n_k} \xrightarrow{*} D^j u$ in $\mathcal{M}_b(a, b)$.

Nella seconda parte del capitolo, definiamo la Γ -convergenza per funzionali definiti in uno spazio metrico X . Dati $F_n, F : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$, diciamo che F_n Γ -converge a F quando per ogni $u \in X$ valgono le seguenti proprietà:

- 1) (disuguaglianza del lim inf) per ogni $u_n \in X$ tale che $u_n \rightarrow u$ in X , $F(u) \leq \liminf_n F_n(u_n)$;
- 2) (recovery sequence) esiste $u_n \in X$ tale che $u_n \rightarrow u$ in X e $F(u) \geq \limsup_n F_n(u_n)$.

In particolare, F_n Γ -converge a F se e solo se per ogni $u \in X$, $F(u) = \Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) = \Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u)$, dove $\Gamma\text{-lim sup}_n F_n$ e $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n$ sono funzionali semicontinui inferiormente, definiti come

$$\Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) = \inf \left\{ \liminf_n F_n(u_n) : u_n \in X, u_n \rightarrow u \right\} \quad \text{per ogni } u \in X,$$

$$\Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) = \inf \left\{ \limsup_n F_n(u_n) : u_n \in X, u_n \rightarrow u \right\}, \quad \text{per ogni } u \in X.$$

Inoltre, dimostriamo il Teorema Fondamentale della Γ -convergenza ed altre proprietà, come il Teorema di Compattezza della Γ -convergenza in spazi metrici separabili e la Proprietà di Urysohn.

Teorema (Teorema fondamentale della Γ -convergenza): *Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano $F_n, F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tali che F_n Γ -converge ad F per $n \rightarrow \infty$ ed esiste $K \subset X$ compatto tale che*

$$\inf_X F_n = \inf_K F_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Allora, esiste $\min_X F$ e

$$\min_X F = \liminf_n \min_X F_n.$$

Inoltre, se $u_n \in X$ è una successione convergente e tale che $\lim_n F_n(u_n) = \liminf_X F_n$, allora u_n converge ad un punto di minimo di F .

Concludiamo il primo capitolo con la dimostrazione del risultato di approssimazione di Ambrosio-Tortorelli, che studia la Γ -convergenza, per $\epsilon \rightarrow 0^+$, di funzionali $F_\epsilon : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$, definiti come

$$F_\epsilon(u, v) = \frac{E_0}{2} \int_I \psi(v) |u'|^2 dx + \frac{G_\epsilon}{2} \int_I \frac{1}{\epsilon} V(v) + \epsilon |v'|^2 dx \quad \text{se } u, v \in H^1(I), 0 \leq v \leq 1,$$

e $F_\epsilon(u, v) = +\infty$ altrimenti, dove $V : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ è una funzione continua che si annulla solo nel punto 0 e $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ è una funzione decrescente, semicontinua

inferiormente e tale che $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = 0$ e $\psi(t) > 0$ per ogni $t \neq 1$. Il Γ -limite di tali F_ϵ è l'energia fragile $F : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$, definita come

$$F(u, v) = \frac{E_0}{2} \int_I |u'|^2 dx + 2G_c c_V \# J_u \quad \text{se } u \in SBV(I), v = 0 \text{ q.o. in } I,$$

e $F(u, v) = +\infty$ altrimenti, dove $c_V = \int_0^1 \sqrt{V(s)} ds$.

Il Capitolo 2 è dedicato alla dimostrazione del risultato principale della tesi:

Teorema: *Sia $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funzione lipschitziana e decrescente tale che $a(0) = 1$, $a(1) = 0$ e $a(x) > 0$ per ogni $x \neq 1$. Sia $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ l'estensione pari della funzione $\phi_a : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, dove*

$$\phi_a(s) = \min \left\{ a(z)\sigma_c s + G_c z^2, z \in [0, 1] \right\} \quad \text{per } s \geq 0.$$

Allora, la funzione ϕ_a è concava, $\phi(0) = 0$ e tale che

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi(s)}{s} = \sigma_c \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \phi(s) = G_c.$$

Inoltre, sia I un intervallo aperto e limitato e siano $\tilde{\mathcal{F}}_h : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$ definiti come

$$\tilde{\mathcal{F}}_h(u_h, d_h) = \begin{cases} \int_I f(u'_h, a_h(d_h)) dx + \frac{G_c}{2} \int_I \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d'_h|^2 dx & \text{se } u_h, d_h \in \mathbb{P}_h^1, \\ & \|u_h\|_\infty \leq K, d_h \in [0, 1], \\ +\infty & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove $h = o(\epsilon_h)$ e

$$f(s, r) = \begin{cases} \frac{1}{2} E_0 s^2 & \text{se } |s| \leq r \frac{\sigma_c}{E_0}, \\ r \sigma_c |s| - r^2 \frac{\sigma_c^2}{2E_0} & \text{se } |s| > r \frac{\sigma_c}{E_0}, \end{cases}$$

e

$$a_h(d_h)(x) = \frac{1}{|e_h|} \int_{e_h} a(d_h(t)) dt, \quad \text{se } x \in e_h \in \mathcal{T}_h.$$

Sia $\tilde{\mathcal{F}} : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$ definito come

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, d) = \begin{cases} \mathcal{F}(u) & \text{se } u \in BV(I), d = 0 \text{ q.o. in } I, \|u\|_\infty \leq K \\ +\infty & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove

$$\mathcal{F}(u) = \int_I f(u', 1) dx + \sigma_c |D^c u|(I) + \sum_{J_u} \phi(|\llbracket u \rrbracket|).$$

Allora, $\tilde{\mathcal{F}}_h$ Γ -converge ad $\tilde{\mathcal{F}}$ per $h \rightarrow 0$.

La dimostrazione del teorema è suddivisa in due parti principali: la disuguaglianza del Γ -lim sup e la disuguaglianza del Γ -lim inf. Nello specifico, generalizziamo le dimostrazioni svolte in [\[MNVD26\]](#):

- modificando la definizione del funzionale energia discreta F_h ;
- rimuovendo il vincolo di non compenetrazione per la variabile spostamento u ;
- considerando una mesh non-uniforme, una generica funzione di degradazione a lipschitziana e decrescente e una densità di energia f pari.

Per la disuguaglianza del lim sup utilizziamo il seguente risultato di densità in $BV(I)$:

Proposizione: *Sia $u \in BV(I)$. Allora, esiste una successione $u_k \in U = \{v \in SBV(I) \cap W^{2,\infty}(I \setminus J_v) : \#J_v < +\infty\}$ tale che $u_k \rightarrow u$ in $L^1(I)$ e*

$$\limsup_k \mathcal{F}(u_k) \leq \mathcal{F}(u).$$

Inoltre, per la disuguaglianza del lim inf, utilizziamo alcune proprietà della densità di energia f (Proposizione [2.2.2](#) e Proposizione [2.2.3](#)) e introduciamo il funzionale ausiliario $\mathcal{G} : L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$, definito da

$$\mathcal{G}(u) = \int_I f(u', 1) dx + \sum_{J_u} \phi(|\llbracket u \rrbracket|) \quad \text{se } u \in SBV(I),$$

e $\mathcal{G}(u) = +\infty$ altrimenti. In particolare, dimostriamo che il suo involucro semicontinuo inferiore $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{F}$ (Proposizione [2.3.1](#)), cioè,

$$\bar{\mathcal{G}}(u) = \mathcal{F}(u) = \int_I f(u', 1) dx + \sigma_c |D^c u|(I) + \sum_{J_u} \phi(|\llbracket u \rrbracket|) \quad \text{se } u \in BV(I),$$

e $\bar{\mathcal{G}}(u) = \mathcal{F}(u) = +\infty$ altrove. La formula generale di $\bar{\mathcal{G}}$ ([2.25](#)) è stata dimostrata in [\[BBBF96\]](#). Concludiamo la tesi con alcuni esempi di energie coesive alle quali si può applicare il risultato principale di Γ -convergenza, tra le quali rientra l'energia coesiva di Dugdale.

Indice

1 Preliminari	12
1.1 Funzioni a variazione limitata	12
1.2 Γ -convergenza	29
1.2.1 Approssimazione di Ambrosio Tortorelli	43
2 Γ-convergenza per il modello 1D	55
2.1 Disuguaglianza del Γ -lim sup per il modello 1D.	58
2.2 Disuguaglianza del Γ -lim inf per il modello 1D.	67
2.3 Semicontinuità inferiore del Γ -limite	82
2.4 Generalizzazioni	87

Capitolo 1

Preliminari

Nel primo capitolo introduciamo i prerequisiti che verranno utilizzati nel seguito: lo spazio BV delle funzioni a variazione limitata e la Γ -convergenza. In particolare, studiamo la struttura dello spazio delle funzioni a variazione limitata in una dimensione.

1.1 Funzioni a variazione limitata

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Consideriamo l'intervallo (a, b) ed indichiamo con $\mathcal{M}_b(a, b)$ l'insieme delle misure $\mu : \mathcal{M}_b(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ boreliane, reali e complete su (a, b) . Definiamo lo spazio $BV(a, b)$ delle funzioni a variazione limitata.

Definizione 1.1.1. Sia $u \in L^1(a, b)$. Diciamo che u è una funzione a variazione limitata se la sua derivata distribuzionale $Du \in \mathcal{M}_b(a, b)$, cioè

$$\int_a^b \phi \, dDu = - \int_a^b u \phi' \, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b).$$

Osserviamo che la definizione precedente vale anche per ogni $\phi \in C_c^1(a, b)$, grazie ad un argomento di densità. Inoltre, lo spazio di Sobolev $W^{1,1}(a, b) \subsetneq BV(a, b)$. Infatti, se $u \in W^{1,1}(a, b)$ allora $Du = u' \in L^1(a, b) \hookrightarrow \mathcal{M}_b(a, b)$, associando ad u' la misura $u' \mathcal{L}^1$. D'altra parte, la funzione H di Heaviside è una funzione a variazione limitata su $(-1, 1)$ (ad esempio) che non appartiene a $W^{1,1}(-1, 1)$, in quanto la sua derivata distribuzionale è la delta di Dirac δ_0 concentrata in zero. Diamo il concetto di variazione di una funzione e qualche sua proprietà.

Definizione 1.1.2. Sia $u \in L^1_{loc}(a, b)$. La variazione $V(u, (a, b))$ di u in (a, b) è definita come

$$V(u, (a, b)) = \sup \left\{ \int_a^b u \phi' \, dx : \phi \in C_c^1(a, b), \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Osservazione 1.1.1. 1) La mappa $u \mapsto V(u, (a, b))$ è semicontinua inferiormente rispetto alla topologia di L^1_{loc} , cioè se $u_n \rightarrow u$ in L^1_{loc} , i.e. $u_n \rightarrow u$ in $L^1(K)$ per ogni K

compatto di (a, b) , allora

$$V(u, (a, b)) \leq \liminf_n V(u_n, (a, b)).$$

Infatti, per ogni $\phi \in C_c^1(a, b)$, la mappa $v \mapsto \int_a^b v\phi' dx$ è continua rispetto alla topologia di $L_{loc}^1(a, b)$: se $v_n \rightarrow v$ in $L_{loc}^1(a, b)$ allora $v_n \rightarrow v$ in $L^1(\text{supp}(\phi))$ e quindi

$$\int_a^b v_n \phi' dx = \int_{\text{supp}(\phi)} v_n \phi' dx \rightarrow \int_{\text{supp}(\phi)} v \phi' dx = \int_a^b v \phi' dx.$$

Da questo segue che $V(\cdot, (a, b))$ è semicontinua inferiormente rispetto alla topologia di $L_{loc}^1(a, b)$. Infatti, per ogni ϕ ammissibile nella definizione di variazione, si ha che

$$\int_a^b u \phi' dx = \lim_n \int_a^b u_n \phi' dx \leq \liminf_n V(u_n, (a, b)),$$

da cui, passando al sup sulle $\phi \in C_c^1(a, b)$ tali che $\|\phi\|_\infty \leq 1$, si ottiene la tesi.

2) Se $u, v \in L_{loc}^1(a, b)$ e $u = v$ q.o. in (a, b) allora $V(u, (a, b)) = V(v, (a, b))$.

Proposizione 1.1.1. *Sia $u \in L^1(a, b)$. Allora, $u \in BV(a, b)$ se e solo se $V(u, (a, b)) < \infty$. Inoltre, in questo caso, si ha che $V(u, (a, b)) = |Du|(a, b)$ e la mappa $u \mapsto V(u, (a, b))$ è semicontinua inferiormente rispetto alla topologia di L_{loc}^1 .*

Dimostrazione. Sia $u \in BV(a, b)$. Per ogni $\phi \in C_c^1(a, b)$, $\|\phi\|_\infty \leq 1$ si ha che

$$\int_a^b u \phi' dx = - \int_a^b \phi dDu \leq \|\phi\|_\infty |Du|(a, b) \leq |Du|(a, b),$$

quindi $V(u, (a, b)) \leq |Du|(a, b) < \infty$. Viceversa, sia $u \in L^1(a, b)$ tale che $V(u, (a, b)) < \infty$. La mappa

$$\tilde{L} : \phi \in C_c^1 \mapsto \int_a^b u \phi' dx$$

definisce un funzionale lineare e continuo su $(C_c^1(a, b), \|\cdot\|_\infty)$. Infatti,

$$\sup_{\substack{\phi \in C_c^1(a, b) \\ \|\phi\|_\infty \leq 1}} \int_a^b u \phi' dx = V(u, (a, b)) < \infty.$$

Per il Teorema di Hahn-Banach, esiste un'estensione lineare e continua $L : C_0(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ di \tilde{L} tale che $\|L\|_{(C_0(a, b))'} = V(u, (a, b))$. Osserviamo che tale estensione è anche unica per la densità di $C_c^1(a, b)$ in $C_0(a, b)$ rispetto alla norma infinito. Per il Teorema di Riesz

di rappresentazione del duale di $C_0(a, b)$, esiste un'unica misura $\mu \in \mathcal{M}_b(a, b)$ tale che

$$L(\phi) = \int_a^b \phi \, d\mu \quad \forall \phi \in C_0(a, b)$$

e $\|L\|_{C_0'} = \|\mu\|_{\mathcal{M}(a,b)} = |\mu|(a, b)$. Infine, poichè L è estensione di \tilde{L} , per ogni $\phi \in C_c^1(a, b)$ si ha che

$$\int_a^b \phi \, d\mu = \int_a^b u \phi' \, dx$$

da cui otteniamo che $Du = -\mu \in \mathcal{M}_b(a, b)$, cioè $u \in BV(a, b)$. \square

Osservazione 1.1.2. Dalla Proposizione precedente otteniamo la seguente proprietà. Sia $u \in L^1(a, b)$ e $u_n \in L_{loc}^1(a, b)$ tale che $\sup_n V(u_n, (a, b)) < \infty$ e $u_n \rightarrow u$ in $L_{loc}^1(a, b)$, allora $u \in BV(a, b)$.

Definizione 1.1.3. Sia $u \in BV(a, b)$, la norma $BV(a, b)$ di u è definita come

$$\|u\|_{BV(a,b)} = \|u\|_{L^1(a,b)} + \|Du\|_{\mathcal{M}_b(a,b)} = \int_a^b |u| \, dx + |Du|(a, b).$$

Dimostriamo che lo spazio $BV(a, b)$ dotato della norma $\|\cdot\|_{BV(a,b)}$ è uno spazio di Banach. Consideriamo l'operatore lineare

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : BV(a, b) &\rightarrow L^1(a, b) \times \mathcal{M}_b(a, b) \\ u &\mapsto (u, Du), \end{aligned}$$

dove, per ogni $(u, \mu) \in L^1(a, b) \times \mathcal{M}_b(a, b)$ definiamo

$$\|(u, \mu)\|_{L^1(a,b) \times \mathcal{M}_b(a,b)} = \|u\|_{L^1(a,b)} + \|\mu\|_{\mathcal{M}_b(a,b)}.$$

Per l'operatore \mathcal{L} valgono le seguenti proprietà:

- \mathcal{L} è iniettivo. Infatti, per ogni $u, v \in BV(a, b)$ tali che $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v)$ si ha, in particolare, che $u = v$ in $L^1(a, b)$, cioè che $u = v$ q.o. in (a, b) .
- \mathcal{L} non è suriettivo. Consideriamo $(f, \mathcal{L}^1) \in L^1(a, b) \times \mathcal{M}_b(a, b)$, dove f è la funzione tale che $f(x) = 1$ per ogni $x \in (a, b)$ ed \mathcal{L}^1 è la misura di Lebesgue unidimensionale. Allora, non esiste alcuna $u \in BV(a, b)$ tale che $\mathcal{L}(u) = (f, \mathcal{L}^1)$. Infatti, se per assurdo esistesse una tale $u \in BV(a, b)$, allora $u = f$ e quindi Du sarebbe la misura nulla, che è diversa da \mathcal{L}^1 . Quindi $\mathcal{L}(u) \neq (f, \mathcal{L}^1)$, da cui otteniamo l'assurdo.
- \mathcal{L} è un'isometria tra $BV(a, b)$ ed $\mathcal{L}(BV(a, b))$. Infatti per ogni $u \in BV(a, b)$ si ha che $\|\mathcal{L}(u)\|_{L^1(a,b) \times \mathcal{M}_b(a,b)} = \|(u, Du)\|_{L^1(a,b) \times \mathcal{M}_b(a,b)} = \|u\|_{L^1(a,b)} + \|Du\|_{\mathcal{M}_b(a,b)} = \|u\|_{BV(a,b)}$.

- $\mathcal{L}(BV(a, b))$ è un sottospazio fortemente chiuso di $L^1(a, b) \times \mathcal{M}_b(a, b)$, cioè per ogni successione $(u_n, Du_n) \in \mathcal{L}(BV(a, b))$ e per ogni $(u, \mu) \in L^1(a, b) \times \mathcal{M}_b(a, b)$ tali che

$$(u_n, Du_n) \longrightarrow (u, \mu) \quad \text{in } L^1(a, b) \times \mathcal{M}_b(a, b), \quad (1.1)$$

si ha che $(u, \mu) \in \mathcal{L}(BV(a, b))$, ovvero che $u \in BV(a, b)$ e $\mu = Du$. Infatti, per definizione della norma $\|\cdot\|_{L^1(a, b) \times \mathcal{M}_b(a, b)}$, da [1.1](#) abbiamo che $u_n \longrightarrow u$ in $L^1(a, b)$ e $Du_n \longrightarrow \mu$ in $\mathcal{M}_b(a, b)$. Grazie a queste convergenze, possiamo passare al limite per $n \rightarrow \infty$ nella seguente uguaglianza

$$\int_a^b u_n \phi' dx = - \int_a^b \phi dDu_n \quad \forall \phi \in C_c^\infty(a, b)$$

ed otteniamo che

$$\int_a^b u \phi' dx = - \int_a^b \phi d\mu \quad \forall \phi \in C_c^\infty(a, b),$$

cioè che $Du = \mu$.

Inoltre, osserviamo che lo spazio $(L^1(a, b) \times \mathcal{M}_b(a, b), \|\cdot\|_{L^1(a, b) \times \mathcal{M}_b(a, b)})$ è uno spazio di Banach. Da questo, otteniamo che $(BV(a, b), \|\cdot\|_{BV(a, b)})$ è uno spazio di Banach. Infatti, $BV(a, b)$ è isometricamente isomorfo ad $\mathcal{L}(BV(a, b))$, che è uno spazio di Banach, in quanto è un sottospazio chiuso di $(L^1(a, b) \times \mathcal{M}_b(a, b), \|\cdot\|_{L^1(a, b) \times \mathcal{M}_b(a, b)})$.

Introduciamo le definizioni di convergenza debole* e di convergenza stretta in $BV(a, b)$.

Definizione 1.1.4. Siano $u, u_n \in BV(a, b)$. Diciamo che u_n converge debolmente* ad u in $BV(a, b)$ se $u_n \longrightarrow u$ in $L^1(a, b)$ e $Du_n \overset{*}{\rightharpoonup} Du$ in $\mathcal{M}_b(a, b)$, cioè

$$\int_a^b \phi dDu_n \longrightarrow \int_a^b \phi dDu \quad \forall \phi \in C_0(a, b).$$

Proposizione 1.1.2. Siano $u, u_n \in BV(a, b)$. Allora $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $BV(a, b)$ se e solo se u_n è limitata in $BV(a, b)$ e $u_n \longrightarrow u$ in $L^1(a, b)$.

Dimostrazione. Siano $u_n, u \in BV(a, b)$ tali che $\sup_n \|u_n\|_{BV(a, b)} < \infty$ e $u_n \longrightarrow u$ in $L^1(a, b)$. In particolare, la successione Du_n è limitata in $\mathcal{M}_b(a, b)$ e quindi, per il Teorema di Banach-Alaoglu e la separabilità di $C_0(a, b)$, esistono una sottosuccessione Du_{n_k} ed una misura $\mu \in \mathcal{M}_b(a, b)$ tali che $Du_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}_b(a, b)$. Poichè $u_{n_k} \longrightarrow u$ in $L^1(a, b)$, possiamo passare al limite nell'uguaglianza

$$\int_a^b u_{n_k} \phi' dx = - \int_a^b \phi dDu_{n_k} \quad \forall \phi \in C_c^\infty(a, b)$$

ed otteniamo che

$$\int_a^b u \phi' dx = - \int_a^b \phi d\mu \quad \forall \phi \in C_c^\infty(a, b),$$

cioè che $Du = \mu$. Grazie alla proprietà di Uryshon, concludiamo che tutta la successione $Du_n \xrightarrow{*} Du$. Il viceversa segue dalla limitatezza di un successione debolmente* convergente. \square

Osservazione 1.1.3. Sia $u_n \in BV(a, b)$ tale che $\sup_n \|u_n\|_{BV(a, b)} < \infty$ e $u_n \rightarrow u$ in $L^1(a, b)$, allora $u \in BV(a, b)$ e $u_n \xrightarrow{*} u$ in $BV(a, b)$. Per dimostrare che $u \in BV(a, b)$ utilizziamo la limitatezza di u_n in $BV(a, b)$ e la semicontinuità della variazione.

Teorema 1.1.3. *Sia $u_n \in BV(a, b)$ una successione limitata in $BV(a, b)$, cioè $\sup_n \|u_n\|_{BV(a, b)} < +\infty$. Allora, esiste una sottosuccessione u_{n_k} ed esiste $u \in BV(a, b)$ tale che*

$$u_{n_k} \xrightarrow{*} u \quad \text{debolmente* in } BV(a, b) \text{ per } k \rightarrow +\infty.$$

Definizione 1.1.5. Siano $u, u_n \in BV(a, b)$. Diciamo che u_n converge strettamente ad u in $BV(a, b)$ se $u_n \rightarrow u$ in $L^1(a, b)$ e $|Du_n|(a, b) \rightarrow |Du|(a, b)$ per $n \rightarrow +\infty$.

Osserviamo che, grazie alla proposizione precedente, la convergenza stretta di una successione implica la convergenza debole*. Il viceversa non è vero. Ad esempio, la successione u_n , definita da $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, converge debolmente* in $BV(a, b)$ a 0 ma non converge strettamente perchè $|Du_n|(0, 2\pi) = 4$ per ogni n . Inoltre, la funzione $d : BV(a, b) \times BV(a, b) \rightarrow [0, \infty)$ definita da

$$d(u, v) = \int_a^b |u - v| dx + ||Du|(a, b) - |Dv|(a, b)|$$

è una distanza che induce la convergenza stretta. Osserviamo che d è una distanza. Infatti, per ogni $u, v, z \in BV(a, b)$ valgono le seguenti proprietà:

- $d(u, v) \geq 0$ e $d(u, v) = 0$ se e solo se $u = v$. Infatti, se $d(u, v) = 0$, allora $\|u - v\|_{L^1(a, b)} = 0$, da cui $u = v$ q.o. in (a, b) .
- (simmetria) $d(u, v) = d(v, u)$. Segue dalla simmetria della norma $\|\cdot\|_{L^1(a, b)}$ e del modulo $|\cdot|$.
- (disuguaglianza triangolare) $d(u, v) \leq d(u, z) + d(z, v)$. Segue dal fatto che

$$\|u - v\|_{L^1(a, b)} \leq \|u - z\|_{L^1(a, b)} + \|z - v\|_{L^1(a, b)}$$

e

$$\begin{aligned} & | |Du|(a, b) - |Dz|(a, b) + |Dz|(a, b) - |Dv|(a, b) | \leq \\ & | |Du|(a, b) - |Dz|(a, b) | + | |Dz|(a, b) - |Dv|(a, b) |. \end{aligned}$$

I prossimi risultati sono specifici per funzioni a variazione limitata di una variabile. In particolare, introduciamo il concetto di variazione puntuale e dimostriamo che nella classe di \mathcal{L}^1 -equivalenza di una funzione $BV(a, b)$ esiste un rappresentante con buone proprietà di continuità e di derivabilità, la cui variazione puntuale coincide con la variazione introdotta precedentemente.

Definizione 1.1.6. Sia $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, la variazione puntuale $pV(u, (a, b))$ di u in (a, b) è definita come

$$pV(u, (a, b)) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| : n \geq 2, \quad a < t_1 < \dots < t_n < b \right\}.$$

Osservazione 1.1.4. 1) Con lo stesso ragionamento utilizzato per la variazione $V(\cdot, (a, b))$, si dimostra che la variazione puntuale $pV(\cdot, (a, b))$ è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza puntuale, cioè se $u_m \rightarrow u$ puntualmente per $m \rightarrow \infty$, allora $pV(u, (a, b)) \leq \liminf_m pV(u_m, (a, b))$. Infatti, per ogni $\{t_i\}_{i=1}^n$ tale che $a < t_1 < \dots < t_n < b$, la funzione

$$v \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} |v(t_{i+1}) - v(t_i)|$$

è continua rispetto alla convergenza puntuale: se $v_m \rightarrow v$ puntualmente, allora, in particolare, $v_m(t_i) \rightarrow v(t_i)$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e quindi, usando la continuità della funzione modulo,

$$\sum_{i=1}^{n-1} |v_m(t_{i+1}) - v_m(t_i)| \rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} |v(t_{i+1}) - v(t_i)| \quad \text{per } m \rightarrow \infty.$$

Da questo segue che $pV(\cdot, (a, b))$ è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza puntuale. Infatti, per ogni $\{t_i\}_{i=1}^n$ ammissibile nella definizione di variazione puntuale, si ha che

$$\sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| = \lim_m \sum_{i=1}^{n-1} |u_m(t_{i+1}) - u_m(t_i)| \leq \liminf_m pV(u_m, (a, b)),$$

da cui, passando al sup su $\{t_i\}_{i=1}^n$ tale che $a < t_1 < \dots < t_n < b$, otteniamo la tesi.

2) Se $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è a variazione puntuale finita, allora u è limitata. Infatti, fissato

$y \in (a, b)$, per ogni $x \in (a, b)$ si ha che

$$|u(x)| \leq |u(x) - u(y)| + |u(y)| \leq pV(u, (a, b)) + |u(y)|.$$

In particolare, $pV(u, (a, b)) + |u(y)|$ è una costante di limitatezza di u .

3) Se $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ monotona e limitata, allora la sua variazione puntuale è finita ed, in particolare, $pV(u, (a, b)) = |u(b_-) - u(a_+)|$. Inoltre, ogni funzione con variazione puntuale finita si può rappresentare come differenza di due funzioni crescenti e limitate. Infatti, vale il seguente teorema di rappresentazione.

Teorema 1.1.4 (Decomposizione di Jordan). *Sia $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, allora u ha variazione puntuale finita se e solo se esistono due funzioni $u_1, u_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ monotone crescenti e limitate tali che $u = u_1 - u_2$.*

Dimostrazione. Sia $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $pV(u, (a, b)) < \infty$. Consideriamo le funzioni $u_1, u_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definite come

$$u_1(x) = \sup \left\{ u(t_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(t_{i+1}) - u(t_i))^+ : n \geq 2, a < t_1 < \dots < t_n = x \right\}$$

$$u_2(x) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (u(t_{i+1}) - u(t_i))^- : n \geq 2, a < t_1 < \dots < t_n = x \right\},$$

dove, dato $y \in \mathbb{R}$ poniamo $y^+ = \max\{y, 0\}$ ed $y^- = \max\{-y, 0\}$. Dalla definizione segue che u_1 ed u_2 sono monotone crescenti e, poichè $pV(u, (a, b)) < \infty$, u_1 ed u_2 sono limitate. Osserviamo che per provare quest'ultima proprietà utilizziamo anche il punto 2 dell'Osservazione [1.1.4](#). Inoltre, per ogni $x \in (a, b)$ e per ogni $\{t_i\}_{i=1}^n$ tale che $a < t_1 < \dots < t_n = x$, si ha che

$$\begin{aligned} & u(t_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(t_{i+1}) - u(t_i))^+ - \sum_{i=1}^{n-1} (u(t_{i+1}) - u(t_i))^- \\ &= u(t_1) + \sum_{i=1}^{n-1} u(t_{i+1}) - u(t_i) = u(x), \end{aligned}$$

da cui otteniamo che $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$, cioè la tesi. Infatti, per ogni $x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \sup \left\{ u(t_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(t_{i+1}) - u(t_i))^+ : n \geq 2, a < t_1 < \dots < t_n = x \right\} \\ &= \sup \left\{ u(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (u(t_{i+1}) - u(t_i))^- : n \geq 2, a < t_1 < \dots < t_n = x \right\} \\ &= u(x) + u_2(x). \end{aligned}$$

Viceversa, se $u = u_1 - u_2$, con u_1 ed u_2 monotone crescenti e limitate,

$$pV(u, (a, b)) \leq pV(u_1, (a, b)) + pV(u_2, (a, b)) < \infty$$

per il punto 3 dell'Osservazione [1.1.4](#). □

Definizione 1.1.7. Sia $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, la variazione essenziale $eV(u, (a, b))$ di u in (a, b) è definita come

$$eV(u, (a, b)) = \inf \left\{ pV(v, (a, b)) : u = v \mathcal{L}^1 \text{ q.o. in } (a, b) \right\}.$$

Proposizione 1.1.5. Sia $u \in L^1_{loc}(a, b)$. Allora, l'inf della definizione precedente è raggiunto, cioè è un min, ed inoltre $eV(u, (a, b)) = V(u, (a, b))$.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $V(u, (a, b)) \leq eV(u, (a, b))$, cioè che $V(u, (a, b)) \leq pV(v, (a, b))$ per ogni funzione v tale che $v = u$ q.o. in (a, b) . Possiamo supporre che $pV(v, (a, b)) < \infty$. Per ogni $k \geq 1$ consideriamo la funzione v_k , definita da

$$v_k(t) = \sum_{i=-n_k}^{n_k-1} v(y_i^k) \chi_{(x_i^k, x_{i+1}^k]}(t),$$

dove $\{x_i^k\}_{i=-n_k}^{n_k}$ è una collezione di punti tale che

$$x_{-n_k}^k = a, \quad x_{n_k}^k = b, \quad 0 < x_{i+1}^k - x_i^k \leq 1/k \quad \forall i \in \mathbb{Z} \cap [-n_k + 1, n_k - 2]$$

$$x_{-n_k+1}^k \downarrow a, \quad x_{n_k-1}^k \uparrow b \quad \text{e} \quad y_i^k \in (x_i^k, x_{i+1}^k).$$

Per tale funzione v_k valgono le seguenti proprietà:

- $v_k \rightarrow v$ in $L^1_{loc}(a, b)$. Infatti, poichè $v = v_1 - v_2$ con v_1 e v_2 funzioni monotone crescenti e limitate, per ogni $K \subset (a, b)$ compatto si ha che

$$\begin{aligned} \int_K |v(x) - v_k(x)| dx &= \int_K \left| v(x) - \sum_{i=-n_k}^{n_k-1} v(y_i^k) \chi_{(x_i^k, x_{i+1}^k]}(x) \right| dx \\ &\leq \sum_{i=-n_k}^{n_k-1} \int_{K \cap (x_i^k, x_{i+1}^k]} |v(x) - v(y_i^k)| dx \\ &\leq \sum_{i=-n_k}^{n_k-1} \int_{K \cap (x_i^k, x_{i+1}^k]} |v_1(x) - v_1(y_i^k)| + |v_2(x) - v_2(y_i^k)| dx \\ &\leq \sum_{i: K \cap (x_i^k, x_{i+1}^k] \neq \emptyset} |v_1(x_{i+1}^k) - v_1(x_i^k)| \frac{1}{k} + \sum_{i: K \cap (x_i^k, x_{i+1}^k] \neq \emptyset} |v_2(x_{i+1}^k) - v_2(x_i^k)| \frac{1}{k} \\ &\leq pV(v_1, (a, b)) \frac{1}{k} + pV(v_2, (a, b)) \frac{1}{k} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

- $V(v_k, (a, b)) \leq pV(v, (a, b))$. Infatti, per ogni $\phi \in C_c^1(a, b)$, $\|\phi\|_\infty \leq 1$, ragionando come nel punto precedente, si ha che

$$\begin{aligned}
\int_a^b v_k \phi' dx &= \sum_{i=-n_k}^{n_k-1} v(y_i^k) \int_a^b \phi' \chi_{(x_i^k, x_{i+1}^k]}(x) dx \\
&= \sum_{i=-n_k}^{n_k-1} v(y_i^k) (\phi(x_{i+1}^k) - \phi(x_i^k)) \stackrel{(\phi(a) = \phi(b) = 0)}{=} \sum_{i=-n_k}^{n_k-2} (v(y_i^k) - v(y_{i+1}^k)) \phi(x_{i+1}^k) \\
&\leq \sum_{i=-n_k}^{n_k-1} |v_k(y_{i+1}^k) - v_k(y_i^k)| \leq pV(v, (a, b)).
\end{aligned}$$

Per la semicontinuità inferiore della variazione rispetto alla topologia di L_{loc}^1 e le proprietà precedenti, otteniamo che:

$$V(u, (a, b)) = V(v, (a, b)) \leq \liminf_k V(v_k, (a, b)) \leq pV(v, (a, b)),$$

da cui abbiamo la prima disuguaglianza. Per dimostrare che $eV(u, (a, b)) \leq V(u, (a, b))$ supponiamo, per semplicità, che $u \in L^1(a, b)$ e che $V(u, (a, b)) < \infty$ (il risultato vale anche per funzioni di $L_{loc}^1(a, b)$). Grazie alla [Proposizione 1.1.1](#), $u \in BV(a, b)$ e $V(u, (a, b)) = |Du|(a, b)$. Consideriamo la funzione $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $w(t) = Du((a, t))$. La derivata distribuzionale $Dw = Du$, infatti

$$\begin{aligned}
\int_a^b w(x) \phi'(x) dx &= \int_a^b \phi'(x) \left(\int_a^x dDu(y) \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_y^b \phi'(x) dx \right) dDu(y) = - \int_a^b \phi(y) dDu(y)
\end{aligned}$$

per ogni $\phi \in \mathcal{D}(a, b)$, quindi $D(u - w) = Du - Du = 0$. Da questo otteniamo che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$u(t) = c + w(t) = c + Du((a, t)) \quad \text{per q.o. } t \in (a, b).$$

Inoltre, per ogni collezione di punti $a < t_1 < \dots < t_n < b$ si ha che

$$\sum_{i=1}^{n-1} |w(t_{i+1}) - w(t_i)| = \sum_{i=1}^{n-1} |Du([t_i, t_{i+1}))| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |Du|([t_i, t_{i+1})) \leq |Du|(a, b),$$

quindi

$$eV(u, (a, b)) \leq pV(c + w, (a, b)) = pV(w, (a, b)) \leq V(u, (a, b)),$$

da cui abbiamo anche la seconda disuguaglianza. Infine, osserviamo w è un elemento nella classe di \mathcal{L}^1 equivalenza di u che realizza l'inf nella definizione di variazione essenziale. \square

Abbiamo visto che se $u \in BV(a, b)$, allora $V(u, (a, b)) = |Du|(a, b) < \infty$. Inoltre, dalla proposizione precedente, esiste $\bar{u} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $u = \bar{u}$ q.o. in (a, b) e

$$pV(\bar{u}, (a, b)) = eV(u, (a, b)) = V(u, (a, b)).$$

Chiamiamo “buon rappresentate” di u ogni funzione con questa proprietà. Il prossimo teorema fornisce una caratterizzazione dei buoni rappresentanti di una funzione $BV(a, b)$.

Teorema 1.1.6 (Buoni rappresentanti). *Sia $u \in BV(a, b)$. Sia $A = \{t \in (a, b) : Du(\{t\}) \neq 0\}$ l'insieme degli atomi di Du . Allora valgono le seguenti:*

1) *Esiste un'unica costante $c \in \mathbb{R}$ tale che u^l ed u^r , definite da*

$$u^l(t) = c + Du((a, t)), \quad u^r(t) = c + Du((a, t]), \quad t \in (a, b)$$

sono buoni rappresentanti di u . u^l è continua da sinistra e u^r è continua da destra. Inoltre, $\bar{u} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è un buon rappresentante di u se e solo se per ogni $t \in (a, b)$ esiste $\theta_t \in [0, 1]$ tale che

$$\bar{u}(t) = \theta_t u^l(t) + (1 - \theta_t) u^r(t). \quad (1.2)$$

2) *Se $\bar{u} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è un buon rappresentante, \bar{u} è continuo in $(a, b) \setminus A$ ed ha discontinuità di tipo salto in ogni punto di A . In particolare*

$$\lim_{s \rightarrow t^-} \bar{u}(s) = \bar{u}(t_-) = u^l(t) = u^r(t_-), \quad \bar{u}(t_+) = u^r(t) = u^l(t_+), \quad t \in A.$$

3) *Se $\bar{u} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è un buon rappresentante, \bar{u} è derivabile \mathcal{L}^1 -q.o. in (a, b) e la derivata q.o. di \bar{u} coincide con la densità di Du rispetto alla misura di Lebesgue \mathcal{L}^1 .*

Dimostrazione. 1) Dalla dimostrazione del teorema precedente, abbiamo che u^l è un buon rappresentante di u . Inoltre, u^l è continua da sinistra, infatti

$$\lim_{s \rightarrow t^-} |u^l(t) - u^l(s)| = \lim_{s \rightarrow t^-} |Du([s, t])| \leq \lim_{s \rightarrow t^-} |Du|([s, t]) = 0$$

per la proprietà di continuità di una misura positiva. In modo analogo si dimostra che anche u^r è un buon rappresentante e che u^r è continua da destra. Dimostriamo che se $\bar{u} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa [1.2](#), allora \bar{u} è un buon rappresentante di u . Per una tale \bar{u} e per

ogni $\{t_i\}_{i=1}^n$ tali che $a < t_1 < \dots < t_n < b$, si ha che

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} |\bar{u}(t_{i+1}) - \bar{u}(t_i)| \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} |\theta_{t_{i+1}} u^l(t_{i+1}) + (1 - \theta_{t_{i+1}}) u^r(t_{i+1}) - \theta_{t_i} u^l(t_i) - (1 - \theta_{t_i}) u^r(t_i)| \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} |(1 - \theta'_{t_{i+1}}) u^l(t_{i+1}) + \theta'_{t_{i+1}} u^r(t_{i+1}) - (1 - \theta'_{t_i}) u^l(t_i) - \theta'_{t_i} u^r(t_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} |u^l(t_{i+1}) - u^l(t_i)| + \sum_{i=1}^{n-1} |u^l(t_{i+1}) - u^r(t_{i+1})| + \sum_{i=1}^{n-1} |u^l(t_i) - u^r(t_i)|.
\end{aligned}$$

Per definizione, $u^l(t_{i+1}) - u^l(t_i) = Du([t_i, t_{i+1}))$ ed $u^r(t) - u^l(t) = Du(\{t\})$, quindi, passando al sup su tutte le collezioni di punti, otteniamo che

$$pV(\bar{u}, (a, b)) \leq |Du|(a, b) + 2|Du|(A) < \infty.$$

Questo ci dice che \bar{u} è differenza di funzioni monotone e, quindi, ammette i limiti destro e sinistro in ogni punto di (a, b) . In particolare, vale che

$$\bar{u}(t_-) = u^l(t_-) = u^l(t), \quad \bar{u}(t_+) = u^r(t_+) = u^r(t), \quad \forall t \in (a, b),$$

da cui i punti di continuità di \bar{u} coincidono con l'insieme $(a, b) \setminus A$. Grazie alla seguente proposizione :

Proposizione 1.1.7. *Sia $\bar{u} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con variazione puntuale finita, allora $pV(\bar{u}, (a, b))$ è uguale a*

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |\bar{u}(t_{i+1}) - \bar{u}(t_i)| : n \geq 2, \quad a < t_1 < \dots < t_n < b \text{ punti di continuità} \right\}$$

se e solo se \bar{u} soddisfa [1.2](#).

possiamo ripetere la stima precedente con $\{t_i\}_{i=1}^n$ punti di continuità di \bar{u} e quindi concludiamo che $pV(\bar{u}, (a, b)) \leq |Du|(a, b) = V(u, (a, b)) = eV(u, (a, b))$, cioè, che \bar{u} è un buon rappresentante.

Viceversa, dimostriamo che ogni buon rappresentante \bar{u} soddisfa [1.2](#). Consideriamo la funzione degli intervalli $pV(\bar{u}, \cdot) : J \subset (a, b) \mapsto pV(\bar{u}, J)$ e le sue seguenti proprietà (che si provano direttamente dalla definizione di variazione puntuale):

- (inner regularity) $pV(\bar{u}, J) = \sup \left\{ pV(\bar{u}, J') : J' \subset\subset J \right\}$,

- (superadditività) Se $J \supset \bigcup_{i=1}^n J_i$, $J_i \cap J_k = \emptyset$ quando $i \neq k$, allora

$$pV(\bar{u}, J) \geq \sum_{i=1}^n pV(\bar{u}, J_i).$$

Grazie a queste proprietà, riusciamo a dimostrare che \bar{u} è un buon rappresentante su ogni intervallo $(c, d) \subset (a, b)$, cioè che $pV(\bar{u}, (c, d)) \leq V(u, (c, d))$. Infatti, poichè A è al più numerabile e $V(\bar{u}, \cdot)$ è inner regular, possiamo supporre che $c, d \notin A$. Allora, vale che

$$\begin{aligned} pV(\bar{u}, (c, d)) &\leq pV(\bar{u}, (a, b)) - pV(\bar{u}, (a, c)) - pV(\bar{u}, (c, d)) \\ &\leq pV(\bar{u}, (a, b)) - |Du|(a, c) - |Du|(d, b) \\ &\leq |Du|(a, b) - |Du|(a, c) - |Du|(d, b) = |Du|((c, d)). \end{aligned}$$

(nella prima disuguaglianza abbiamo usato la superadditività; nella seconda disuguaglianza, grazie alla proposizione precedente, abbiamo usato che $|Du|(c, d) = V(u, (c, d)) = eV(u, (c, d)) \leq pV(\bar{u}, (c, d))$).

Poichè \bar{u} è un buon rappresentante di u , \bar{u} ha variazione puntuale finita, quindi si può rappresentare come differenza di due funzioni monotone crescenti. Da questo fatto, ricordando che u^l ed u^r sono continue da sinistra e da destra rispettivamente, seguono le seguenti uguaglianze:

$$\bar{u}(t_-) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_{t-r}^t \bar{u}(s) ds = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_{t-r}^t u^l(s) ds = u^l(t), \quad t \in (a, b), \quad (1.3)$$

$$\bar{u}(t_+) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_t^{t+r} \bar{u}(s) ds = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_t^{t+r} u^r(s) ds = u^r(t), \quad t \in (a, b). \quad (1.4)$$

Sia $t \in (a, b)$. Passando al limite per $r \rightarrow 0^+$ in

$$|\bar{u}(t-r) - \bar{u}(t)| + |\bar{u}(t) - \bar{u}(t+r)| \leq pV(\bar{u}, (t-r, t+r)) = |Du|(t-r, t+r)$$

otteniamo che

$$|u^l(t) - \bar{u}(t)| + |\bar{u}(t) - u^r(t)| \leq |Du|(\{t\}) = |u^l(t) - u^r(t)|.$$

Poichè, per disuguaglianza triangolare, vale anche la disuguaglianza opposta, si ha $|u^l(t) - \bar{u}(t)| + |\bar{u}(t) - u^r(t)| = |u^l(t) - u^r(t)|$ e da questa otteniamo [1.2](#).

2) Segue dai calcoli fatti nel punto 1).

3) Per Teorema di Radon-Nikodym applicato a Du , esistono $f \in L^1(a, b)$ e $D^s u$ misura singolare rispetto ad \mathcal{L}^1 tali che $Du = f\mathcal{L}^1 + D^s u$.

Dimostriamo che u^l è derivabile in ogni punto di Lebesgue di f (cioè, $t \in (a, b)$ tale che $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_{t-r}^{t+r} |f(s) - f(t)| ds = 0$) tale che $|D^s u|((t-r, t+r)) = o(r)$. Poichè $f \in L^1(a, b)$, q.o. $t \in (a, b)$ è un punto di Lebesgue di f ; Inoltre, per \mathcal{L}^1 -q.o. $t \in (a, b)$,

dal Teorema di Derivazione di Besicovitch applicato a $|D^s u|$ rispetto ad \mathcal{L}^1 , vale che

$$0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|D^s u|(t-r, t+r)}{\mathcal{L}^1(t-r, t+r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|D^s u|(t-r, t+r)}{2r}.$$

Quindi per q.o. $t \in (a, b)$ vale la proprietà richiesta. Chiamiamo \mathcal{F} l'insieme di tali punti ed osserviamo che $A \not\subset \mathcal{F}$. Per ogni $t \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} (u^l)'_+(t) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{u^l(t+r) - u^l(t)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{Du([t, t+r])}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f\mathcal{L}^1([t, t+r])}{r} + \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{D^s([t, t+r])}{r} = f(t). \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che per ogni $t \in \mathcal{F}$ si ha che $(u^l)'_-(t) = f(t)$. Da questo segue la derivabilità in \mathcal{F} di ogni buon rappresentante \bar{u} . \square

Dimostrazione (Proposizione 1.1.7). Sia $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con variazione puntuale finita e che soddisfa 1.2. Indichiamo con $pV_c(u, (a, b))$ la quantità

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| : n \geq 2, a < t_1 < \dots < t_n < b \text{ punti di continuità} \right\}$$

e dimostriamo che $pV(u, (a, b)) \leq pV_c(u, (a, b))$. Nel Teorema 1.1.6, abbiamo dimostrato che una tale u soddisfa

$$u(t_-) = u^l(t) \quad \text{e} \quad u(t_+) = u^r(t) \quad \forall t \in (a, b), \quad (1.5)$$

e che, quindi, i punti di continuità di u coincidono con l'insieme $(a, b) \setminus A$. Sia $\{t_i\}_{i=1}^n$ una collezione di punti ammissibile nella definizione di $pV(u, (a, b))$ e supponiamo che esista $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che t_j è un punto di discontinuità di u . Possiamo supporre che $j \neq 1, n$ e che un tale j sia unico. Infatti, se $\{t_i\}_{i=1}^n$ contiene più punti di discontinuità di u , possiamo ripetere il ragionamento seguente per ogni punto di discontinuità.

Sia $\varepsilon > 0$. Da 1.5, esistono $s_1, s_2 \in (a, b)$ tali che $t_{j-1} < s_1 < t_j < s_2 < t_{j+1}$ e

$$|u^l(t_j) - u(s_1)| \leq \varepsilon, \quad |u^r(t_j) - u(s_2)| \leq \varepsilon.$$

In particolare, osserviamo che possiamo scegliere s_1, s_2 punti di continuità di u . Valgono le seguenti disugualianze:

$$\begin{aligned} |u(t_j) - u(t_{j-1})| &= |\theta_{t_j} u^l(t_j) + (1 - \theta_{t_j}) u^r(t_j) - (\theta_{t_j} u(t_{j-1}) + (1 - \theta_{t_j}) u(t_{j-1}))| \\ &\leq \theta_{t_j} |u^l(t_j) - u(t_{j-1})| + (1 - \theta_{t_j}) |u^r(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &\leq \theta_{t_j} (|u^l(t_j) - u(s_1)| + |u(s_1) - u(t_{j-1})|) \\ &\quad + (1 - \theta_{t_j}) (|u^r(t_j) - u(s_2)| + |u(s_2) - u(s_1)| + |u(s_1) - u(t_{j-1})|) \\ &= |u(s_1) - u(t_{j-1})| + (1 - \theta_{t_j}) |u(s_2) - u(s_1)| + \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|u(t_{j+1}) - u(t_j)| &= |\theta_{t_j} u^l(t_j) + (1 - \theta_{t_j}) u^r(t_j) - (\theta_{t_j} u(t_{i+1}) + (1 - \theta_{t_j}) u(t_{j+1}))| \\
&\leq \theta_{t_j} |u^l(t_j) - u(t_{j+1})| + (1 - \theta_{t_j}) |u^r(t_j) - u(t_{j+1})| \\
&\leq \theta_{t_j} (|u^l(t_j) - u(s_1)| + |u(s_1) - u(s_2)| + |u(s_2) - u(t_{j+1})|) \\
&\quad + (1 - \theta_{t_j}) (|u^r(t_j) - u(s_2)| + |u(s_2) - u(t_{j+1})|) \\
&= |u(t_{j+1}) - u(s_2)| + \theta_{t_j} |u(s_2) - u(s_1)| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Allora,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j-1, j}}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| + |u(s_1) - u(t_{j-1})| \\
&\quad + |u(s_2) - u(s_1)| + |u(t_{j+1}) - u(s_2)| + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Poichè la collezione di punti $a < t_1 < \dots < t_{j-1} < s_1 < s_2 < t_{j+1} < \dots < t_n < b$ è costituita da soli punti di continuità di u , abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| \leq pV_c(u, (a, b)) + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Quindi, fissata $\{t_i\}_{i=1}^n$ ammissibile nella definizione di $pV(u, (a, b))$ si ha che

$$\sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| \leq pV_c(u, (a, b)),$$

da cui, passando al sup su $\{t_i\}_{i=1}^n$, abbiamo che $pV(u, (a, b)) \leq pV_c(u, (a, b))$. Per definizione, $pV_c(u, (a, b)) \leq pV(u, (a, b))$, quindi otteniamo la tesi. Il viceversa si dimostra come nella seconda parte della dimostrazione del Teorema [1.1.6](#). \square

Osservazione 1.1.5. Il Teorema [1.1.6](#) può essere applicato alle funzioni monotone crescenti e limitate. Infatti, con conti analoghi a quelli fatti nella dimostrazione (primo punto, seconda implicazione, [1.3](#)) riusciamo a dimostrare che ogni funzione monotona è un buon rappresentante della sua classe di equivalenza. In particolare, i punti di discontinuità di u coincidono gli atomi di Du . Da questo, abbiamo il seguente corollario.

Corollario 1.1.8. *Sia $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora u è derivabile q.o. in (a, b) e*

$$|u(b_-) - u(a_+)| \geq \int_a^b |u'(t)| dt + \sum_{t \in \Gamma_u} |u(t_+) - u(t_-)|,$$

dove Γ_u è l'insieme dei punti di discontinuità di u .

Osservazione 1.1.6 (Decomposizione della derivata distribuzionale). Sia $u \in BV(a, b)$ e sia $Du \in \mathcal{M}_b(a, b)$ la sua derivata distribuzionale. Vale che

$$Du = D^a u + D^j u + D^c u, \quad (1.6)$$

con $D^a u$ assolutamente continua rispetto ad \mathcal{L}^1 , $D^j u$ la parte puramente atomica di Du (“jump part”) e $D^c u$ singolare rispetto ad \mathcal{L}^1 e senza atomi (“parte cantoriana”). Infatti, grazie al Teorema di Radon-Nikodym, esistono $f \in L^1(a, b)$ e $D^s u$ una misura singolare rispetto ad \mathcal{L}^1 tale che

$$Du = f\mathcal{L}^1 + D^s u = D^a u + D^s u.$$

Inoltre, dal Teorema [1.1.6](#), abbiamo che $f = \bar{u}'$, dove \bar{u} è un buon rappresentante di u . Dato A l'insieme degli atomi di Du , possiamo definire

$$D^j u = D^s u \llcorner A, \quad D^c u = D^s u \llcorner ((a, b) \setminus A),$$

dove $D^s u \llcorner A(B) = D^s u(A \cap B)$. La decomposizione è unica e, poichè $D^a u$, $D^j u$ e $D^c u$ sono mutuamente singolari,

$$|Du| = |D^a u| + |D^j u| + |D^c u|.$$

Dal Teorema di Derivazione di Besicovitch, vale anche che $D^s u = Du \llcorner S$, dove

$$S = \left\{ x \in (a, b) : \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{|Du|((x-r, x+r))}{r} = \infty \right\},$$

quindi possiamo definire $D^a u$, $D^j u$ e $D^c u$ come

$$\begin{aligned} D^a u &= Du \llcorner ((a, b) \setminus S), \\ D^j u &= D^s u \llcorner A = Du \llcorner A, \quad D^c u = D^s u \llcorner ((a, b) \setminus A) = Du \llcorner (S \setminus A). \end{aligned}$$

Diciamo che $u \in BV(a, b)$ è una funzione di salto se $Du = D^j u$ e che u è una funzione cantoriana se $Du = D^c u$.

Il seguente teorema fornisce una decomposizione tipica delle funzioni $BV(a, b)$.

Teorema 1.1.9. *Sia $u \in BV(a, b)$, allora u si può rappresentare come*

$$u = u^a + u^j + u^c, \quad (1.7)$$

dove $u^a \in W^{1,1}(a, b)$, u^j è una funzione di salto ed u^c è una funzione di Cantor. u^a , u^j

ed u^c sono uniche a meno di costante. Inoltre,

$$\begin{aligned} |Du|((a, b)) &= |Du^a|((a, b)) + |Du^j|((a, b)) + |Du^c|((a, b)) = \dots \\ &\dots = \int_a^b |\bar{u}'(t)| dt + \sum_{t \in A} |\bar{u}(t_+) - \bar{u}(t_-)| + |Du^c|((a, b)), \end{aligned}$$

dove $\bar{u} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è un buon rappresentante di u .

Teorema 1.1.10 (Chain Rule). Siano $u \in BV(a, b)$ e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana, allora

$$\phi(u) \in BV(a, b) \quad e \quad |D\phi(u)| \leq Lip(\phi)|Du|.$$

Inoltre, se $\phi \in C^1(\mathbb{R}) \cap Lip(\mathbb{R})$, allora

$$D\phi(u) = \phi'(\bar{u})(D^a u + D^c u) + \sum_{t \in A} (\phi(\bar{u}(t_+)) - \phi(\bar{u}(t_-)))\delta_t, \quad (1.8)$$

dove \bar{u} è un buon rappresentante di u , A è l'insieme degli atomi di Du e δ_t è la delta di Dirac concentrata in t .

Osservazione 1.1.7. I risultati e le definizioni introdotti fino alla Definizione [1.1.5](#) valgono, con le opportune modifiche, anche nel caso di funzioni a variazioni limitata su $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto. Riportiamo le definizioni di funzione a variazione limitata e di variazione per funzioni scalari di più variabili.

Definizione 1.1.8. Sia $u \in L^1(\Omega)$. Diciamo che u è una funzione a variazione limitata su Ω se la sua derivata distribuzionale i -esima $D_i u \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ per ogni $i = 1, \dots, N$, cioè

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi dD_i u \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

In questo caso indichiamo con $\nabla(u) = Du = (D_1 u, \dots, D_N(u)) \in \mathcal{M}_b(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Definizione 1.1.9. Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, la variazione $V(u, \Omega)$ di u in Ω è definita come

$$V(u, \Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\phi) dx : \phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \|\phi\|_{\infty} \leq 1 \right\}.$$

Osservazione 1.1.8 (Sezioni 1-dimensionali di una funzione BV). Lo studio della spazio $BV(a, b)$ è fondamentale perchè molte proprietà delle funzioni $BV(\Omega)$ possono essere recuperate dalle loro restrizioni lungo sezioni unidimensionali. Questo è utile per ridurre problemi in un dominio N -dimensionale a problemi in un dominio 1-dimensionale. Introduciamo allora le sezioni.

Siano $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ e $\Pi_{\xi} = \{y \in \mathbb{R}^N : \langle y, \xi \rangle = 0\}$ l'iperpiano ortogonale a ξ . Sia $E \subset \mathbb{R}^N$,

per ogni $y \in \Pi_\xi$ consideriamo l'insieme

$$E_{\xi,y} = \{t \in \mathbb{R} : y + t\xi \in E\} \subset \mathbb{R}.$$

Data $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, consideriamo la funzione $u_{\xi,y} : \Omega_{\xi,y} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$u_{\xi,y}(t) = u(y + t\xi).$$

Si dimostra che se $u \in BV(\Omega)$, allora $u_{\xi,y} \in BV(\Omega_{\xi,y})$ per \mathcal{H}^{N-1} -q.o. $y \in \Pi_\xi$ e

$$\langle Du(B), \xi \rangle = \int_{\Pi_\xi} Du_{\xi,y}(B_{\xi,y}) d\mathcal{H}^{N-1}(y),$$

da cui abbiamo il seguente teorema.

Teorema 1.1.11. *Siano $u \in BV(\Omega)$ e $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$, allora*

$$\langle D^k u(B), \xi \rangle = \int_{\Pi_\xi} D^k u_{\xi,y}(B_{\xi,y}) d\mathcal{H}^{N-1}(y),$$

dove $k = a, j, c$.

Definiamo lo spazio $SBV(a, b)$ delle funzioni speciali a variazione limitata in una dimensione.

Definizione 1.1.10. Sia $u \in L^1(a, b)$. Diciamo che u è una funzione speciale a variazione limitata se

$$u \in BV(a, b) \quad \text{e} \quad D^c u = 0,$$

dove $D^c u$ è la parte cantoriana di Du .

Osservazione 1.1.9. Dalla definizione abbiamo che $u \in SBV(a, b)$ se e solo se $u \in BV(a, b)$ e

$$Du = \bar{u}' \mathcal{L}^1 + \sum_{t \in A} (\bar{u}(t_+) - \bar{u}(t_-)) \delta_t,$$

dove \bar{u} è un buon rappresentante di u e A è l'insieme degli atomi di Du . Infatti, dall'Osservazione [1.1.6](#), se $u \in BV(a, b)$

$$\begin{aligned} Du &= D^a u + D^j u + D^c u \\ &= \bar{u}' \mathcal{L}^1 + \sum_{t \in A} (\bar{u}(t_+) - \bar{u}(t_-)) \delta_t + D^c u. \end{aligned}$$

Teorema 1.1.12 (Teorema di compattezza in SBV). Sia $u_n \in SBV(a, b)$ una successione di funzioni speciali a variazione limitata tale che valgono le seguenti proprietà:

1) u_n è limitata in $BV(a, b)$, cioè

$$\sup_n \|u_n\|_{BV(a,b)} < +\infty,$$

2) la successione \bar{u}'_n , dove \bar{u}_n è un buon rappresentante di u_n , è equi-integrabile, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \int_B |\bar{u}'_n(s)| ds < \varepsilon \quad \forall n \text{ e } \forall B \subset (a, b) : \mathcal{L}^1(B) < \delta,$$

3) esiste una funzione $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ tale che $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi(t)}{t} = +\infty$ e

$$\sup_n \sum_{t \in A_n} \psi(|\bar{u}_n(t_+) - \bar{u}_n(t_-)|) < +\infty,$$

dove A_n è l'insieme degli atomi di Du_n .

Allora, esiste una sottosuccessione u_{n_k} ed esiste $u \in SBV(a, b)$ tale che

$$u_{n_k} \rightarrow u \quad \text{per } k \rightarrow \infty \quad \text{in } L^1(a, b).$$

Inoltre, vale che

$$\begin{aligned} D^a u_{n_k} &\xrightarrow{*} D^a u \quad \text{debolmente } * \text{ in } \mathcal{M}_b(a, b) \quad \text{e} \\ D^j u_{n_k} &\xrightarrow{*} D^j u \quad \text{debolmente } * \text{ in } \mathcal{M}_b(a, b). \end{aligned}$$

Osservazione 1.1.10. Nel seguito identificheremo una funzione $u \in BV(a, b)$ con un suo buon rappresentante.

1.2 Γ -convergenza

Sia (X, d) uno spazio metrico. Introduciamo la definizione di Γ -convergenza e dimostriamo alcune delle sue proprietà.

Definizione 1.2.1. Siano $F_n, F : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Diciamo che F_n Γ -converge ad F se per ogni $u \in X$ valgono le seguenti proprietà:

1) (disuguaglianza del lim inf) per ogni $u_n \in X$ tale che u_n converge ad u in X

$$F(u) \leq \liminf_n F_n(u_n); \tag{1.9}$$

2) (recovery sequence) esiste $u_n \in X$ tale che u_n converge ad u in X e

$$F(u) \geq \limsup_n F_n(u_n), \tag{1.10}$$

oppure, equivalentemente,

$$F(u) = \lim_n F_n(u_n). \quad (1.11)$$

La funzione F è detta Γ -limite di F_n (rispetto a d) e scriviamo $F = \Gamma\text{-}\lim_n F_n$.

Osservazione 1.2.1. Dalla definizione precedente segue che se F_n Γ -converge ad F , allora ogni sua sottosuccessione F_{n_k} Γ -converge ad F per $k \rightarrow \infty$. Infatti, per ogni $u \in X$ valgono la disuguaglianza del \liminf e l'esistenza di una recovery sequence:

- Sia $u_k \in X$ tale che $u_k \rightarrow u$ in X per $k \rightarrow \infty$. Definiamo la successione u_n come

$$u_n = \begin{cases} u_k & \text{se esiste } k \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = n_k, \\ u & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ed osserviamo che $u_n \rightarrow u$ in X . Allora, da (1.9) e dal fatto che u_k è una sottosuccessione di u_n , abbiamo che

$$F(u) \leq \liminf_n F_n(u_n) \leq \liminf_k F_{n_k}(u_k),$$

cioè la disuguaglianza del \liminf .

- Sia $u_n \in X$ una recovery sequence (di u) per F_n , allora u_{n_k} è una recovery sequence per F_{n_k} . Infatti, $u_{n_k} \rightarrow u$ in X e

$$F(u) \geq \limsup_n F_n(u_n) \geq \limsup_k F_{n_k}(u_{n_k}).$$

Osservazione 1.2.2 (Stabilità sotto perturbazioni continue). Un'ulteriore conseguenza della definizione di Γ -convergenza è la seguente proprietà: se F_n Γ -converge ad F e $G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione continua, allora $F_n + G \xrightarrow{\Gamma} F + G$ per $n \rightarrow \infty$. Dimostriamo che per ogni $u \in X$ vale la disuguaglianza del \liminf ed esiste un recovery sequence. Sia $u_n \in X$ una successione convergente ad u in X . Da (1.9) e dalla continuità di G , otteniamo che

$$F(u) + G(u) \leq \liminf_n F_n(u_n) + \lim_n G(u_n) = \liminf_n (F_n + G)(u_n).$$

Inoltre, se u_n una recovery sequence per F_n , allora u_n è una recovery sequence anche per $F_n + G$. Infatti,

$$F(u) + G(u) \geq \limsup_n F_n(u_n) + \lim_n G(u_n) = \limsup_n (F_n + G)(u_n).$$

Il seguente teorema dimostra l'esistenza di punti di minimo del Γ -limite F di una successione di funzioni F_n equidebolmente coercive. Inoltre, in questo caso, il valore minimo di F è caratterizzato come limite della successione $\inf_X F_n$.

Teorema 1.2.1 (Teorema fondamentale della Γ -convergenza). Sia (X, d) uno spazio metrico. Siano $F_n, F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tali che F_n Γ -converge ad F per $n \rightarrow \infty$ ed esiste $K \subset X$ compatto tale che

$$\inf_X F_n = \inf_K F_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Allora, esiste $\min_X F$ e

$$\min_X F = \lim_n \inf_X F_n. \quad (1.12)$$

Inoltre, se $u_n \in X$ è una successione convergente e tale che $\lim_n F_n(u_n) = \lim_n \inf_X F_n$, allora u_n converge ad un punto di minimo di F .

Dimostrazione. Consideriamo una successione $u_n \in K$ tale che

$$\lim_n \inf F_n(u_n) = \lim_n \inf_X \inf F_n.$$

Osserviamo che una tale successione esiste. Infatti, per ogni n tale che $\inf_X F_n \in \mathbb{R}$, possiamo definire $u_n \in K$ tale che

$$\inf_K F_n = \inf_X F_n \leq F_n(u_n) \leq \inf_X F_n + \frac{1}{n}.$$

Se $\inf_X F_n = +\infty$, definiamo $u_n \in K$ qualsiasi, mentre se $\inf_X F_n = -\infty$ definiamo $u_n \in K$ tale che $F_n(u_n) \leq -n$.

Esiste u_{n_k} una sottosuccessione di u_n tale che

$$\lim_k F_{n_k}(u_{n_k}) = \lim_n \inf F_n(u_n) = \lim_n \inf_X \inf F_n.$$

Inoltre, per la compattezza di K , estraendo eventualmente un'ulteriore sottosuccessione, possiamo supporre anche che esiste $u \in K$ tale che

$$u_{n_k} \longrightarrow u \quad \text{in } X \quad \text{per } k \rightarrow \infty.$$

Per l'Osservazione 1.2.1, $F_{n_k} \xrightarrow{\Gamma} F$ per $k \rightarrow \infty$ e quindi, dalla disuguaglianza del \liminf , abbiamo che

$$\inf_X F \leq F(u) \leq \lim_k \inf F_{n_k}(u_{n_k}) = \lim_n \inf_X \inf F_n.$$

Poichè $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ per $n \rightarrow \infty$, per ogni $v \in X$, da (1.10), esiste una recovery sequence $v_n \in X$. Allora,

$$\lim_n \sup_X \inf F_n \leq \lim_n \sup F_n(v_n) \leq F(v),$$

da cui, passando all'inf su $v \in X$, abbiamo che

$$\limsup_n \inf_X F_n \leq \inf_{v \in X} F(v).$$

Concludiamo che

$$\inf_X F \leq F(u) \leq \liminf_n \inf_X F_n \leq \limsup_n \inf_X F_n \leq \inf_X F,$$

da cui otteniamo che $F(u) = \inf_X F$, cioè che u è un punto di minimo di F , e $\min_X F = F(u) = \lim_n \inf_X F_n$. Infine, se u_n è una successione convergente e tale che $\lim_n F_n(u_n) = \lim_n \inf_X F_n$, ripercorrendo i passaggi precedenti dimostriamo che il limite di tale successione è un punto di minimo di F . \square

Introduciamo le definizioni di Γ -limite inferiore e di Γ -limite superiore.

Definizione 1.2.2. Sia $F_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e sia $u \in X$. Definiamo il Γ -limite inferiore di F_n in u ed il Γ -limite superiore di F_n in u come

$$\Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) = \inf \left\{ \liminf_n F_n(u_n) : u_n \in X, u_n \rightarrow u \right\}, \quad (1.13)$$

$$\Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) = \inf \left\{ \limsup_n F_n(u_n) : u_n \in X, u_n \rightarrow u \right\}. \quad (1.14)$$

Se $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) = \Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u)$, allora chiamiamo tale valore comune Γ -limite di F_n in u e scriviamo $\Gamma\text{-lim}_n F_n(u)$.

Osservazione 1.2.3. Per ogni $u \in X$, gli inf nella definizione precedente sono dei minimi, cioè

$$\begin{aligned} \Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) &= \min \left\{ \liminf_n F_n(u_n) : u_n \in X, u_n \rightarrow u \right\}, \\ \Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) &= \min \left\{ \limsup_n F_n(u_n) : u_n \in X, u_n \rightarrow u \right\}. \end{aligned}$$

Supponiamo che $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) = l \in \mathbb{R}$ e dimostriamo che esiste $v_n \in X$ convergente ad u tale che $\liminf_n F_n(v_n) = l$. Costruiamo tale successione per induzione.

Sia $k = 1$. Da [\(1.13\)](#), esiste $u_n^1 \in X$ tale che $u_n^1 \rightarrow u$ per $n \rightarrow \infty$ e

$$l \leq \liminf_n F_n(u_n^1) < l + 1.$$

Poichè $F_n(u_n^1)$ è “frequentemente minore di $l + 1$ ”, esiste $n(1) \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che

$$d(u, u_{n(1)}^1) < 1 \quad \text{e} \quad F_{n(1)}(u_{n(1)}^1) < l + 1.$$

Procedendo in questo modo, per ogni $k \geq 2$ esiste $u_n^k \in X$ tale che $u_n^k \rightarrow u$ per $n \rightarrow \infty$

e

$$l \leq \liminf_n F_n(u_n^k) < l + \frac{1}{k},$$

da cui otteniamo l'esistenza di $n(k) \in \mathbb{N}$ tale che $n(k) > n(k-1)$ e

$$d(u, u_{n(k)}^k) < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad F_{n(k)}(u_{n(k)}^k) < l + \frac{1}{k}.$$

Definiamo la successione v_n come

$$v_n = \begin{cases} u_{n(k)}^k & \text{se esiste } k \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = n(k), \\ u & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo che $v_n \rightarrow u$ in X e

$$l \leq \liminf_n F_n(v_n) \leq \liminf_k F_{n(k)}(u_{n(k)}^k) \leq \liminf_k \left(l + \frac{1}{k} \right) = l,$$

da cui otteniamo che v_n è la successione cercata. Osserviamo che se $l = +\infty$, per ogni $u_n \in X$ tale che $u_n \rightarrow u$ per $n \rightarrow \infty$ vale che $\liminf_n F_n(u_n) = +\infty$. Invece, se $l = -\infty$, si può ripetere il ragionamento precedente in questo modo: per ogni $k \geq 2$ esiste $u_n^k \in X$ tale che $u_n^k \rightarrow u$ per $n \rightarrow \infty$ e

$$\liminf_n F_n(u_n^k) < -k,$$

da cui otteniamo l'esistenza di $n(k) > n(k-1)$ tale che

$$d(u, u_{n(k)}^k) < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad F_{n(k)}(u_{n(k)}^k) < -k.$$

Consideriamo il Γ -lim sup $F_n(u)$. Supponiamo che Γ -lim sup $F_n(u) = L \in \mathbb{R}$ e dimostriamo che esiste $v_n \in X$ convergente ad u tale che $\limsup_n F_n(v_n) = L$.

Sia $k = 1$. Da (1.14), esiste $u_n^1 \in X$ tale che $u_n^1 \rightarrow u$ per $n \rightarrow \infty$ e

$$L \leq \limsup_n F_n(u_n^1) < L + 1.$$

Poichè $F_n(u_n^1)$ è “definitivamente minore di $L + 1$ ”, esiste $n(1) \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che per ogni $n \geq n(1)$

$$d(u, u_n^1) < 1 \quad \text{e} \quad F_n(u_n^1) < L + 1.$$

Procedendo in questo modo, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $u_n^k \in X$ tale che $u_n^k \rightarrow u$ per $n \rightarrow \infty$ e

$$L \leq \limsup_n F_n(u_n^k) < L + \frac{1}{k},$$

da cui otteniamo l'esistenza di $n(k) \in \mathbb{N}$ tale che $n(k) > n(k-1)$ e tale che per ogni $n \geq n(k)$

$$d(u, u_n^k) < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad F_n(u_n^k) < L + \frac{1}{k}.$$

Definiamo la successione v_n come

$$v_n = \begin{cases} u_n^1 & \text{se } n < n(2) \\ u_n^k & \text{se } n(k) \leq n < n(k+1), \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Abbiamo che $v_n \rightarrow u$ in X e

$$L \leq \limsup_n F_n(v_n) \leq \limsup_k \left(L + \frac{1}{k} \right) = L,$$

da cui otteniamo che v_n è la successione cercata. Osserviamo che se $L = +\infty$, per ogni $u_n \in X$ tale che $u_n \rightarrow u$ per $n \rightarrow \infty$ vale che $\limsup_n F_n(u_n) = +\infty$. Invece, se $L = -\infty$, adattiamo il ragionamento precedente in questo modo: per ogni $k \geq 2$ esiste $u_n^k \in X$ tale che $u_n^k \rightarrow u$ per $n \rightarrow \infty$ e

$$\limsup_n F_n(u_n^k) < -k,$$

da cui otteniamo l'esistenza di $n(k) > n(k-1)$ tale che per ogni $n \geq n(k)$

$$d(u, u_n^k) < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad F_n(u_n^k) < -k.$$

La seguente proposizione fornisce una caratterizzazione puntuale del Γ -limite di una successione F_n .

Proposizione 1.2.2. *Siano $F_n, F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora, F_n Γ -converge ad F se e solo se*

$$F(u) = \Gamma\text{-}\lim_n F_n(u) \quad \text{per ogni } u \in X.$$

Dimostrazione. Siano $F_n, F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tali che $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ per $n \rightarrow \infty$ e sia $u \in X$. Dalla disuguaglianza del \liminf (1.9), otteniamo che $F(u) \leq \Gamma\text{-}\liminf_n F_n(u)$. Da (1.10), esiste una recovery sequence u_n , quindi $\Gamma\text{-}\limsup_n F_n(u) \leq \limsup_n F_n(u_n) \leq F(u)$. Allora,

$$F(u) \leq \Gamma\text{-}\liminf_n F_n(u) \leq \Gamma\text{-}\limsup_n F_n(u) \leq F(u)$$

da cui otteniamo che $F(u) = \Gamma\text{-}\lim_n F_n(u)$.

Viceversa, siano $F_n, F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tali che per ogni $u \in X$, $F(u) = \Gamma\text{-}\liminf_n F_n(u) = \Gamma\text{-}\limsup_n F_n(u)$. Allora, F_n Γ -converge ad F . Infatti, per ogni $u \in X$ valgono le seguenti proprietà:

- (disuguaglianza del lim inf) per ogni $u_n \in X$ convergente ad u , da (1.13), $F(u) \leq \liminf_n F_n(u_n)$,
- (recovery sequence) per l'Osservazione 1.2.3, $F(u) = \min \{ \limsup_n F_n(u_n) : u_n \in X, u_n \rightarrow u \}$, quindi esiste $u_n \in X$ convergente ad u e tale che $F(u) = \limsup_n F_n(u_n)$.

□

Valgono le seguenti caratterizzazioni topologiche del Γ -lim inf $_n F_n$ e del Γ -lim sup $_n F_n$.

Proposizione 1.2.3. Sia $F_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora per ogni $u \in X$

$$\begin{aligned}\Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) &= \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \liminf_n \inf_{v \in U} F_n(v), \\ \Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) &= \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \limsup_n \inf_{v \in U} F_n(v),\end{aligned}$$

dove $\mathcal{N}(u)$ è un sistema fondamentale di intorni di u .

Prima di dimostrare le proprietà di semicontinuità inferiore del Γ -limite inferiore e del Γ -limite superiore, richiamiamo la definizione di involucro semicontinuo inferiore.

Definizione 1.2.3. Sia $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Definiamo l'involucro semicontinuo inferiore, o rilassato, $\overline{F} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ come

$$\begin{aligned}\overline{F}(u) &= \sup \{ f(u) \mid f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ semicontinua inferiormente, } f \leq F \} \\ &= \inf \left\{ \liminf_n F(u_n) : u_n \rightarrow u \text{ per } n \rightarrow \infty \right\}.\end{aligned}$$

Proposizione 1.2.4. Sia $F_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora, $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $\Gamma\text{-lim sup}_n F_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sono funzioni semicontinue inferiormente. Inoltre, per ogni $u \in X$ vale che

$$\begin{aligned}\Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) &= \Gamma\text{-lim inf}_n \overline{F_n}(u), \\ \Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) &= \Gamma\text{-lim sup}_n \overline{F_n}(u)\end{aligned}$$

Dimostrazione. Metodo 1) Dimostriamo che $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n$ è una funzione semicontinua inferiormente ragionando come nell'Osservazione 1.2.3. Siano $u_m, u \in X$ tali che $u_m \rightarrow u$ per $m \rightarrow \infty$. Poniamo $l_m = \Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u_m)$ per ogni m e dimostriamo che

$$\Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) \leq \liminf_m l_m.$$

Supponiamo che $l_m \in \mathbb{R}$ per ogni m .

Sia $m = 1$. Per definizione di l_1 , esiste una successione $v_n^1 \in X$ che converge ad u_1 per $n \rightarrow \infty$ e tale che $\liminf_n F_n(v_n^1) < l_1 + 1$. Allora, esiste $n(1) \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(u_1, v_{n(1)}^1) < 1 \quad \text{e} \quad F_{n(1)}(v_{n(1)}^1) < l_1 + 1.$$

Analogamente, per ogni $m \geq 2$, esiste una successione $v_n^m \in X$ che converge ad u_m per $n \rightarrow \infty$ e tale che $\liminf_n F_n(v_n^m) < l_m + \frac{1}{m}$. Allora, esiste $n(m) \in \mathbb{N}$ tale che $n(m) > n(m-1)$ e

$$d(u_m, v_{n(m)}^m) < \frac{1}{m} \quad \text{e} \quad F_{n(m)}(v_{n(m)}^m) < l_m + \frac{1}{m}.$$

Definiamo la successione v_n come

$$v_n = \begin{cases} u_{n(m)}^m & \text{se esiste } m \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = n(m), \\ u & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ed osserviamo che $v_n \rightarrow u$. Allora abbiamo che

$$\begin{aligned} \Gamma\text{-}\liminf_n F_n(u) &\leq \liminf_n F_n(v_n) \leq \liminf_m F_{n(m)}(u_{n(m)}^m) \\ &\leq \liminf_m \left(l_m + \frac{1}{m} \right) = \liminf_m l_m, \end{aligned}$$

cioè abbiamo la tesi. Allo stesso modo, adattando la seconda parte della dimostrazione fatta nell'Osservazione [1.2.3](#), si dimostra che $\Gamma\text{-}\limsup_n F_n$ è semicontinua inferiormente.

Dimostriamo che $\Gamma\text{-}\liminf_n F_n = \Gamma\text{-}\liminf_n \overline{F}_n$. Poichè $\overline{F}_n \leq F_n$, vale che

$$\Gamma\text{-}\liminf_n F_n \geq \Gamma\text{-}\liminf_n \overline{F}_n.$$

Dimostriamo che vale la disuguaglianza opposta utilizzando un ragionamento analogo a quello precedente. Sia $u \in X$. Dall'Osservazione [1.2.3](#), esiste una successione u_n convergente ad u e tale che

$$\liminf_n \overline{F}_n(u_n) = \Gamma\text{-}\liminf_n \overline{F}_n(u).$$

Supponiamo che $\overline{F}_n(u_n) \in \mathbb{R}$ per ogni n .

Sia $n = 1$. Per definizione di $\overline{F}_1(u_1)$ esiste una successione u_k^1 convergente ad u_1 per $k \rightarrow \infty$ e tale che

$$\liminf_k F_1(u_k^1) < \overline{F}_1(u_1) + 1.$$

Da questo, esiste $k(1) \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(u_1, u_{k(1)}^1) < 1 \quad \text{e} \quad F_1(u_{k(1)}^1) < \overline{F}_1(u_1) + 1.$$

Analogamente, per ogni $n \geq 2$, esiste una successione u_k^n convergente ad u_n per $k \rightarrow \infty$ e tale che

$$\liminf_k F_n(u_k^n) < \overline{F}_n(u_n) + \frac{1}{n}.$$

Da questo, esiste $k(n) \in \mathbb{N}$ tale che $k(n) > k(n-1)$ e

$$d(u_n, u_{k(n)}^n) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad F_n(u_{k(n)}^n) < \overline{F_n}(u_n) + \frac{1}{n}.$$

Definiamo la successione $v_n = u_{k(n)}^n$ ed osserviamo che $v_n \rightarrow u$ per $n \rightarrow \infty$. Allora,

$$\begin{aligned} \Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) &\leq \liminf_n F_n(v_n) \leq \liminf_n \left(\overline{F_n}(u_n) + \frac{1}{n} \right) \\ &= \liminf_n \overline{F_n}(u_n) = \Gamma\text{-lim inf}_n \overline{F_n}(u), \end{aligned}$$

da cui abbiamo la tesi. Analogamente, si dimostra che $\Gamma\text{-lim sup}_n F_n = \Gamma\text{-lim sup}_n \overline{F_n}$.

Metodo 2) Utilizziamo le caratterizzazioni topologiche del $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n$ e dell'involuppo semicontinuo inferiore. In particolare, data $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, per ogni $u \in X$,

$$\overline{F}(u) = \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \inf_{v \in U} F(v).$$

Dimostriamo che $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n = \overline{\Gamma\text{-lim inf}_n F_n}$. Per definizione di involuppo semicontinuo inferiore, $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n \geq \overline{\Gamma\text{-lim inf}_n F_n}$. Inoltre, per ogni $u \in X$,

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma\text{-lim inf}_n F_n}(u) &= \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \inf_{v \in U} \Gamma\text{-lim inf}_n F_n(v) \\ &= \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \inf_{v \in U} \sup_{V \in \mathcal{N}(v)} \liminf_n \inf_{z \in V} F_n(z) \\ &\geq \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \inf_{v \in U} \sup_{V \in \mathcal{N}(v), V \subset U} \liminf_n \inf_{z \in U} F_n(z) \\ &= \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \liminf_n \inf_{z \in U} F_n(z) = \Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u). \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che $\Gamma\text{-lim sup}_n F_n$ è una funzione semicontinua inferiormente. Dimostriamo che $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n = \Gamma\text{-lim inf}_n \overline{F_n}$. Per ogni $u \in X$ vale che

$$\begin{aligned} \Gamma\text{-lim inf}_n \overline{F_n}(u) &= \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \liminf_n \inf_{v \in U} \overline{F_n}(v) \\ &= \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \liminf_n \inf_{v \in U} \sup_{V \in \mathcal{N}(v)} \inf_{z \in V} F_n(z) \\ &\geq \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \liminf_n \inf_{v \in U} \sup_{V \in \mathcal{N}(v), V \subset U} \inf_{z \in U} F_n(z) \\ &= \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \liminf_n \inf_{z \in U} F_n(z) = \Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u). \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che $\Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) = \Gamma\text{-lim sup}_n \overline{F_n}(u)$ per ogni $u \in X$. \square

Osservazione 1.2.4 (Densità per il lim sup). La semicontinuità inferiore del $\Gamma\text{-lim sup}_n F_n$

è utile per stimare il Γ -lim sup $_n F_n$. Consideriamo $d' : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ una distanza, tale che per ogni $u_n, u \in X$

$$\text{se } d'(u_n, u) \longrightarrow 0, \text{ allora } d(u_n, u) \longrightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

Sia $D \subset X$ un sottoinsieme denso rispetto a d' e sia $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione continua rispetto alla topologia di d . Supponiamo che

$$\Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) \leq F(u) \quad \text{per ogni } u \in D. \quad (1.15)$$

Allora,

$$\Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) \leq F(u) \quad \text{per ogni } u \in X.$$

Infatti, per ogni $u \in X$ esiste una successione $u_m \in D$ tale che u_m converge ad u rispetto a d' . Allora, poichè u_m converge ad u rispetto a d , dalla semicontinuità inferiore del Γ -lim sup $_n F_n$ e da (1.15), abbiamo che

$$\Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) \leq \liminf_m \left(\Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u_m) \right) \leq \liminf_m F(u_m) = F(u).$$

Possiamo utilizzare la densità dell'insieme D anche nel modo seguente. Definiamo la funzione $F_\infty : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ come

$$F_\infty(u) = \begin{cases} F(u) & \text{se } u \in D \\ +\infty & \text{se } u \in X \setminus D. \end{cases}$$

Osserviamo che $F(u) = \overline{F}_\infty(u)$ per ogni $u \in X$, dove \overline{F}_∞ è il rilassato di F_∞ . Infatti, poichè F è continua (quindi, in particolare, F è semicontinua inferiormente) ed $F \leq F_\infty$, vale che $F \leq \overline{F}_\infty$. D'altra parte, per ogni $u \in X$ esiste una successione $u_n \in D$ tale che $u_n \rightarrow u$ per $n \rightarrow \infty$, quindi, per la continuità di F e la definizione di F_∞ ,

$$\begin{aligned} F(u) &= \lim_n F(u_n) = \lim_n F_\infty(u_n) \geq \inf \left\{ \liminf_n F_\infty(u_n) : u_n \longrightarrow u \text{ per } n \rightarrow \infty \right\} \\ &= \overline{F}_\infty(u). \end{aligned}$$

Da (1.15),

$$\Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) \leq F_\infty(u) \quad \text{per ogni } u \in X,$$

da cui, per la semicontinuità inferiore del Γ -lim sup $_n F_n$, otteniamo che

$$\Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) \leq \overline{F}_\infty(u) = F(u) \quad \text{per ogni } u \in X.$$

Corollario 1.2.5. *Siano $F_n, F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Valgono le seguenti:*

- 1) *Se $F_n = F$ per ogni n , allora F_n Γ -converge all'involuppo semicontinuo inferiore \overline{F} ;*
- 2) *Se $F_n \downarrow F$, allora F_n Γ -converge a \overline{F} ;*
- 3) *Se $F_n \leq F_{n+1}$ per ogni n , allora F_n Γ -converge a $\sup_n \overline{F_n}$. In particolare, se F_n è semicontinua inferiormente per ogni n , allora F_n Γ -converge a $\sup_n F_n$.*
- 4) *Se X è uno spazio vettoriale topologico, F_n Γ -converge ad F e F_n è convessa per ogni n , allora F è convessa.*

Dimostrazione. Osserviamo che vale la seguente proprietà: se F_n converge ad F puntualmente, allora

$$\Gamma\text{-}\limsup_n F_n(u) \leq F(u) \quad \text{per ogni } u \in X. \quad (1.16)$$

Infatti, scegliendo la successione $u_n = u$ per ogni n , otteniamo che

$$\begin{aligned} \Gamma\text{-}\limsup_n F_n(u) &= \inf \left\{ \limsup_n F_n(u_n) : u_n \in X, u_n \rightarrow u \right\} \\ &\leq \limsup_n F_n(u) = F(u). \end{aligned}$$

Inoltre, vale anche che

$$\Gamma\text{-}\limsup_n F_n(u) \leq \overline{F}(u) \quad \text{per ogni } u \in X. \quad (1.17)$$

Infatti, $\Gamma\text{-}\limsup_n F_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione semicontinua inferiormente e tale che $\Gamma\text{-}\limsup_n F_n \leq F$.

1) Sia $F_n = F$ per ogni n e sia $u \in X$. Dimostriamo che $\overline{F}(u) = \Gamma\text{-}\lim_n F_n(u)$. Per definizione di \overline{F} ,

$$\begin{aligned} \overline{F}(u) &= \inf \left\{ \liminf_n F(u_n) : u_n \rightarrow u \text{ per } n \rightarrow \infty \right\} \\ &= \inf \left\{ \liminf_n F_n(u_n) : u_n \rightarrow u \text{ per } n \rightarrow \infty \right\} = \Gamma\text{-}\liminf_n F_n(u). \end{aligned}$$

Poichè F_n converge puntualmente ad F , per (1.17), abbiamo che $\overline{F}(u) \geq \Gamma\text{-}\limsup_n F_n(u)$. Quindi,

$$\overline{F}(u) = \Gamma\text{-}\liminf_n F_n(u) \leq \Gamma\text{-}\limsup_n F_n(u) \leq \overline{F}(u),$$

da cui otteniamo che $\overline{F}(u) = \Gamma\text{-}\lim_n F_n(u)$.

2) Sia F_n tale che $F_n \downarrow F$ e sia $u \in X$. Poichè $F \leq F_n$ per ogni n , abbiamo che

$$\begin{aligned}\overline{F}(u) &= \inf \left\{ \liminf_n F(u_n) : u_n \longrightarrow u \text{ per } n \rightarrow \infty \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \liminf_n F_n(u_n) : u_n \longrightarrow u \text{ per } n \rightarrow \infty \right\} = \Gamma\text{-}\liminf_n F_n(u).\end{aligned}$$

D'altra parte, F_n converge puntualmente ad F e quindi, da (1.17), $\Gamma\text{-}\limsup_n F_n(u) \leq \overline{F}(u)$. Concludiamo come nel punto precedente.

3) Osserviamo che se $F_n \leq F_{n+1}$, allora $\overline{F}_n \leq \overline{F_{n+1}}$. Infatti,

$$\overline{F}_n \leq F_n \leq F_{n+1}$$

e \overline{F}_n è semicontinua inferiormente. In particolare, \overline{F}_n converge puntualmente a $\sup_n \overline{F}_n$. Allora, da (1.16),

$$\Gamma\text{-}\limsup_n F_n = \Gamma\text{-}\limsup_n \overline{F}_n \leq \sup_n \overline{F}_n.$$

Inoltre, per ogni $u \in X$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$, dal fatto che $F_k \leq F_n$ per ogni $n \geq k$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\overline{F}_k(u) &= \inf \left\{ \liminf_n F_k(u_n) : u_n \longrightarrow u \text{ per } n \rightarrow \infty \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \liminf_n F_n(u_n) : u_n \longrightarrow u \text{ per } n \rightarrow \infty \right\} \\ &= \Gamma\text{-}\liminf_n F_n(u).\end{aligned}$$

Passando al sup su $k \in \mathbb{N}$, troviamo che $\sup_n \overline{F}_n \leq \Gamma\text{-}\liminf_n F_n$, da cui concludiamo che $\Gamma\text{-}\lim_n F_n = \sup_n \overline{F}_n$.

4) Siano $u, v \in X$ e $\lambda \in (0, 1)$. Da (1.10), esistono u_n recovery sequence per u e v_n recovery sequence per v . Osserviamo che $\lambda u_n + (1 - \lambda)v_n \longrightarrow \lambda u + (1 - \lambda)v$ per $n \rightarrow \infty$. Allora, da (1.9) e dalla convessità di F_n abbiamo che

$$\begin{aligned}F(\lambda u + (1 - \lambda)v) &\leq \liminf_n F_n(\lambda u_n + (1 - \lambda)v_n) \leq \limsup_n F_n(\lambda u_n + (1 - \lambda)v_n) \\ &\leq \limsup_n (\lambda F_n(u_n) + (1 - \lambda)F_n(v_n)) \\ &\leq \lambda \limsup_n F_n(u_n) + (1 - \lambda) \limsup_n F_n(v_n) \\ &\leq \lambda F(u) + (1 - \lambda)F(v).\end{aligned}$$

Questo dimostra che F è convessa. □

Dimostriamo il risultato di compattezza della Γ -convergenza e la proprietà di Uryshon.

Teorema 1.2.6 (Compattezza della Γ -convergenza). Sia (X, d) uno spazio metrico separabile. Sia $F_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora, esiste una sottosuccessione F_{n_k} ed esiste $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tali che F_{n_k} Γ -converge ad F per $k \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Sia $\{u_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset X$ numerabile e denso. Allora, l'insieme

$$\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}} := \{B_{\frac{1}{m}}(x_l) : l \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$$

è una base di intorni per la topologia di X . Costruiamo la sottosuccessione F_{n_k} con un argomento diagonale.

Sia $j = 1$. Consideriamo il $\liminf_n \inf_{V_1} F_n$. Allora, esiste una successione n_k^1 tale che

$$\exists \liminf_k \inf_{V_1} F_{n_k^1} = \liminf_n \inf_{V_1} F_n.$$

Sia $j = 2$. Consideriamo il $\liminf_k \inf_{V_2} F_{n_k^1}$. Allora, esiste una sottosuccessione n_k^2 di n_k^1 tale che

$$\exists \liminf_k \inf_{V_2} F_{n_k^2} = \liminf_k \inf_{V_2} F_{n_k^1}.$$

Procedendo in questo modo, per ogni $j \in \mathbb{N}$, $j > 2$, esiste una sottosuccessione n_k^j di n_k^{j-1} tale che

$$\exists \liminf_k \inf_{V_j} F_{n_k^j} = \liminf_k \inf_{V_j} F_{n_k^{j-1}}.$$

Utilizziamo un argomento diagonale e consideriamo la sottosuccessione $F_{n_k^k}$. Allora, per ogni $j \in \mathbb{N}$,

$$\exists \liminf_k \inf_{V_j} F_{n_k^k}. \quad (1.18)$$

Sia $u \in X$. Dimostriamo che $\Gamma\text{-}\liminf_k F_{n_k^k}(u) = \Gamma\text{-}\limsup_k F_{n_k^k}(u)$. Consideriamo il sistema fondamentale di intorni di u dato da $\mathcal{N}(u) = \{U \in \{V_j\}_{j \in \mathbb{N}} : u \in U\}$. Allora, da (1.18),

$$\begin{aligned} \Gamma\text{-}\liminf_k F_{n_k^k}(u) &= \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \liminf_k \inf_U F_{n_k^k} \\ &= \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \liminf_k F_{n_k^k} \\ &= \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \limsup_k \inf_U F_{n_k^k} = \Gamma\text{-}\limsup_k F_{n_k^k}(u). \end{aligned}$$

Quindi, ponendo $n_k = n_k^k$, la sottosuccessione F_{n_k} risulta Γ -convergente ad $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dove

$$F(u) = \Gamma\text{-}\lim_k F_{n_k^k}(u).$$

□

Teorema 1.2.7 (Proprietà di Urysohn). Siano $F_n, F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora, $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ se e solo se per ogni sottosuccessione F_{n_k} esiste un'ulteriore sottosuccessione $F_{n_{k_j}}$ tale che $F_{n_{k_j}} \xrightarrow{\Gamma} F$ per $j \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Siano $F_n, F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tali che per ogni F_{n_k} esiste $F_{n_{k_j}}$ tale che $F_{n_{k_j}} \xrightarrow{\Gamma} F$ per $j \rightarrow \infty$. Osserviamo che per ogni $u \in X$,

$$\begin{aligned} \Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) &\leq \Gamma\text{-lim inf}_k F_{n_k}(u) \leq \Gamma\text{-lim inf}_j F_{n_{k_j}}(u) = F(u) \\ &= \Gamma\text{-lim sup}_j F_{n_{k_j}}(u) \leq \Gamma\text{-lim sup}_k F_{n_k}(u) \leq \Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u). \end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che F_n non Γ -converge ad F , cioè supponiamo che esiste $u \in X$ tale che $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) < \Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u)$. Allora, abbiamo che $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) < F(u)$ oppure che $F(u) < \Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u)$.

- Sia $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) < F(u)$. Da [\(1.13\)](#), esiste una successione u_n convergente ad u e tale che $\liminf_n F_n(u_n) < F(u)$. Consideriamo una sottosuccessione $F_{n_k}(u_{n_k})$ tale che $\lim_k F_{n_k}(u_{n_k}) = \liminf_n F_n(u_n)$ e sia n_{k_j} la sottosuccessione di n_k data dall'ipotesi. Allora,

$$\begin{aligned} F(u) &> \liminf_n F_n(u_n) \geq \lim_k F_{n_k}(u_{n_k}) = \lim_j F_{n_{k_j}}(u_{n_{k_j}}) \\ &= \liminf_j F_{n_{k_j}}(u_{n_{k_j}}) \geq \Gamma\text{-lim inf}_j F_{n_{k_j}}(u) = F(u), \end{aligned}$$

da cui otteniamo un assurdo.

- Sia $F(u) < \Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) = \sup_{U \in \mathcal{N}(u)} \limsup_n \inf_U F_n$. Allora, esiste $U \in \mathcal{N}(u)$ tale che $F(u) < \limsup_n \inf_U F_n$. Consideriamo una sottosuccessione tale che $\lim_k \inf_U F_{n_k} = \limsup_n \inf_U F_n$ e sia n_{k_j} la sottosuccessione di n_k data dall'ipotesi. Allora,

$$\begin{aligned} F(u) &< \limsup_n \inf_U F_n = \liminf_k \inf_U F_{n_k} = \liminf_j \inf_U F_{n_{k_j}} \\ &= \limsup_j \inf_U F_{n_{k_j}} \leq \Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u) = F(u), \end{aligned}$$

da cui otteniamo l'assurdo.

Quindi, per ogni $u \in X$, abbiamo che $\Gamma\text{-lim inf}_n F_n(u) = F(u) = \Gamma\text{-lim sup}_n F_n(u)$.

Il viceversa è stato dimostrato nell'Osservazione [1.2.1](#). □

Estendiamo la definizione di Γ -convergenza al caso di una famiglia di funzionali F_ε dipendenti da un parametro reale.

Definizione 1.2.4. Siano $F_\varepsilon, F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che F_ε Γ -converge ad F per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ se per ogni successione positiva ε_n tale che $\varepsilon_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, la successione F_{ε_n}

Γ -converge ad F per $n \rightarrow \infty$. Equivalentemente, F_ε Γ -converge ad F per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ se per ogni $u \in X$ valgono le seguenti proprietà:

- 1) (disuguaglianza del \liminf) per ogni successione $\varepsilon_n \downarrow 0$ e per ogni $u_n \in X$ convergente ad u in X

$$F(u) \leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n); \quad (1.19)$$

- 2) (esistenza di una recovery sequence) per ogni $\eta > 0$ esiste una famiglia $u_\varepsilon \in X$ convergente ad u per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e tale che

$$F(u) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon) - \eta. \quad (1.20)$$

Osservazione 1.2.5 (Densità per il \limsup). Consideriamo una famiglia di funzionali $F_\varepsilon : L^1(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ e definiamo

$$F''(u) = \Gamma\text{-}\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u) \quad \text{per ogni } u \in L^1(\Omega).$$

Possiamo stimare F'' con un funzionale $F : L^1(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ ragionando come nell'Osservazione [1.2.4](#). In particolare, procediamo come segue:

1. Definiamo $D \subset L^1(\Omega)$ un sottoinsieme denso in $\text{dom}F = \{ u \in L^1(\Omega) : F(u) < +\infty \}$, cioè, per ogni $u \in L^1(\Omega)$ tale che $F(u) < \infty$ esiste una successione $u_m \in D$ tale che

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{in } L^1(\Omega), \text{ per } m \rightarrow \infty.$$

Supponiamo inoltre che $\lim_m F(u_m) = F(u)$.

2. Dimostriamo che $F''(u) \leq F(u)$ per ogni $u \in D$.

Allora, per ogni $u \in L^1(\Omega)$ tale che $F(u) < +\infty$ vale che $F''(u) \leq F(u)$. Infatti, per ogni $u \in \text{dom}F$ esiste $u_m \in D$ convergente ad u in $L^1(\Omega)$ e quindi, dalla semicontinuità inferiore di F'' , abbiamo che

$$F''(u) \leq \liminf_m F''(u_m) \leq \liminf_m F(u_m) = F(u).$$

Da questo otteniamo che $F''(u) \leq F(u)$ per ogni $u \in L^1(\Omega)$.

1.2.1 Approssimazione di Ambrosio Tortorelli

Sia $V : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua che si annulla solo nel punto 0 e sia $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione decrescente, semicontinua inferiormente e tale che $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = 0$ e $\psi(t) > 0$ per ogni $t \neq 1$. Siano $E_0, G_c > 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$

consideriamo il funzionale $F_\varepsilon : L^1(a, b) \times L^1(a, b) \rightarrow [0, +\infty]$, definito come

$$F_\varepsilon(u, v) = \begin{cases} \frac{E_0}{2} \int_a^b \psi(v) |u'|^2 dt + \frac{G_c}{2} \int_a^b \left(\frac{1}{\varepsilon} V(v) + \varepsilon |v'|^2 \right) dt & \text{se } u, v \in H^1(a, b) \\ & \text{e } 0 \leq v \leq 1 \text{ q.o.} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Teorema 1.2.8. *Siano $V, \psi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ e $F_\varepsilon : L^1(a, b) \times L^1(a, b) \rightarrow [0, +\infty]$ come sopra. Sia $F : L^1(a, b) \times L^1(a, b) \rightarrow [0, +\infty]$ definito come*

$$F(u, v) = \begin{cases} \frac{E_0}{2} \int_a^b |u'|^2 dt + 2 G_c c_V \#(S(u)) & \text{se } u \in SBV(a, b) \\ & \text{e } v = 0 \text{ q.o.} \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove

$$c_V = \int_0^1 \sqrt{V(s)} ds.$$

Allora, F_ε Γ -converge a F per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Dimostrazione. Utilizziamo la seguente notazione: se $I \subset (a, b)$ aperto, definiamo $F_\varepsilon(u, v, I)$ e $F(u, v, I)$ come

$$F_\varepsilon(u, v, I) = \begin{cases} \frac{E_0}{2} \int_I \psi(v) |u'|^2 dt + \frac{G_c}{2} \int_I \left(\frac{1}{\varepsilon} V(v) + \varepsilon |v'|^2 \right) dt & \text{se } u, v \in H^1(a, b) \\ & \text{e } 0 \leq v \leq 1 \text{ q.o.} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

e

$$F(u, v, I) = \begin{cases} \frac{E_0}{2} \int_I |u'|^2 dt + 2 G_c c_V \#(S(u) \cap I) & \text{se } u \in SBV(a, b) \\ & \text{e } v = 0 \text{ q.o.} \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

Dimostriamo la disuguaglianza del lim inf. Sia $\varepsilon_n \downarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Siano $u, v \in L^1(a, b)$, $u_n, v_n \in L^1(a, b)$ tali che $u_n \rightarrow u$ in $L^1(a, b)$ e $v_n \rightarrow v$ in $L^1(a, b)$ (cioè,

$(u_n, v_n) \longrightarrow (u, v)$ in $L^1(a, b) \times L^1(a, b)$). Passando a sottosuccessioni, possiamo supporre che $u_n \longrightarrow u$ q.o. in (a, b) , $v_n \longrightarrow v$ q.o. in (a, b) e che

$$\exists \lim_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n) < \infty. \quad (1.21)$$

In particolare, esiste $c \geq 0$ tale che $F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n) \leq c$ per ogni n e quindi, $(u_n, v_n) \in \text{dom} F_{\varepsilon_n}$ per ogni n .

Osserviamo che $v = 0$ q.o. in (a, b) , altrimenti $\lim_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n) = +\infty$. Supponiamo che per assurdo esista $E \subset (a, b)$ misurabile tale che $\mathcal{L}^1(E) > 0$ e $v(t) \neq 0$ per ogni $t \in E$. Allora, per il Teorema di convergenza dominata abbiamo che

$$\lim_n \int_E V(v_n(t)) dt = \int_E V(v(t)) dt > 0,$$

da cui,

$$\lim_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n) \geq \lim_n \frac{G_c}{2\varepsilon_n} \int_E V(v_n(t)) dt = +\infty.$$

Quindi otteniamo l'assurdo. Verifichiamo che valgono le ipotesi del Teorema di convergenza dominata. Poichè $V : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ è continua e si annulla solo nel punto 0, $V(v_n(t))$ converge a $V(v(t)) > 0$ per q.o. $t \in E$. Inoltre, per ogni n , $|V(v_n(t))| \leq M$ per ogni $t \in E$, dove M è il valore massimo di V in $[0, 1]$.

1) Dimostriamo che $\#(S(u)) < \infty$ e che

$$2 G_c c_V \#(S(u) \cap I) \leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I), \quad (1.22)$$

per ogni $I \subset (a, b)$ aperto. Se $S(u) = \emptyset$ la disuguaglianza è verificata. Sia allora $S(u) \neq \emptyset$ e siano $\{t_1, \dots, t_N\} \subset S(u)$, con $N \in \mathbb{N}$. Consideriamo $\{I_i\}_{i=1}^N$ intervalli disgiunti tali che $I_i = (a_i, b_i) \subset (a, b)$ e $t_i \in I_i$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Proviamo che

$$2 G_c c_V \leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I_i) \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (1.23)$$

Fissiamo $i \in \{1, \dots, N\}$ e consideriamo da subito una sottosuccessione di $F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I_i)$ tale che $\liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I_i) = \lim_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I_i)$. Sia $I'_i = (a'_i, b'_i) \subset (a, b)$ tale che $t_i \in I'_i \subset I_i$ e sia $m_i = \liminf_n \inf_{I'_i} \psi(v_n)$. Se $m_i > 0$, abbiamo che

$$\frac{E_0}{2} \int_{I'_i} |u'_n|^2 dt \leq \frac{E_0}{2} \frac{2}{m_i} \int_{I'_i} \psi(v_n) |u'_n|^2 dt \leq \frac{E_0 c}{m_i}, \quad (1.24)$$

definitivamente per $n \rightarrow \infty$. Infatti, poichè $\liminf_n \inf_{I'_i} \psi(v_n) > \frac{m_i}{2}$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

per ogni $n \geq \bar{n}$, $\inf_{I'_i} \psi(v_n) > \frac{m_i}{2}$ da cui $\frac{2\psi(v_n)}{m_i} \geq 1$ in I'_i .

Allora, vale che u_n è limitata in $H^1(I'_i)$. Infatti:

- da [1.24](#), u'_n è limitata in $L^2(I'_i)$,
- dalla disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger e dal fatto che $u_n \rightarrow u$ in $L^1(a, b)$, segue che u_n è limitata in $L^2(I'_i)$. Infatti,

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{L^2(I'_i)}^2 &= \left\| u_n - \frac{1}{b'_i - a'_i} \int_{a'_i}^{b'_i} u_n(s) ds + \frac{1}{b'_i - a'_i} \int_{a'_i}^{b'_i} u_n(s) ds \right\|_{L^2(I'_i)}^2 \\
&= \int_{a'_i}^{b'_i} \left(u_n(x) - \frac{1}{b'_i - a'_i} \int_{a'_i}^{b'_i} u_n(s) ds + \frac{1}{b'_i - a'_i} \int_{a'_i}^{b'_i} u_n(s) ds \right)^2 dx \\
&\leq 2 \int_{a'_i}^{b'_i} \left(u_n(x) - \frac{1}{b'_i - a'_i} \int_{a'_i}^{b'_i} u_n(s) ds \right)^2 dx + 2(b'_i - a'_i) \left(\frac{1}{b'_i - a'_i} \int_{a'_i}^{b'_i} u_n(s) ds \right)^2 \\
&\leq 2C_P \|u'_n\|_{L^2(I'_i)}^2 + \frac{2}{b'_i - a'_i} C^2,
\end{aligned}$$

dove C_P è la costante di Poincarè-Wirtinger e $C \geq 0$ è tale che $\sup_n \|u_n\|_{L^1(a, b)} \leq C$.

Quindi, esiste una sottosuccessione (che non rinominiamo) tale che $u_n \rightharpoonup u$ in $H^1(I'_i)$. Allora, poichè $u \in H^1(I'_i)$, $S(u) \cap I'_i = \emptyset$. Questo è assurdo per definizione di I'_i . Necessariamente $m_i = 0$. Passando ad un'ulteriore sottosuccessione, possiamo supporre anche che

$$0 = m_i = \liminf_n \int_{I'_i} \psi(v_n).$$

Allora, esiste una successione $s_n^i \in I'_i$ tale che $v_n(s_n^i) \rightarrow 1$. Infatti, per ogni n possiamo definire $s_n^i \in I'_i$ tale che $\inf_{I'_i} \psi(v_n) \leq \psi(v_n(s_n^i)) \leq \inf_{I'_i} \psi(v_n) + \frac{1}{n}$ ed usare le ipotesi su ψ . Poichè v_n converge a 0 q.o. in (a, b) , esistono $r_i, r'_i \in I_i$ tali che $r_i < s_n^i < r'_i$ per ogni n e tali che $v_n(r_i) \rightarrow 0$, $v_n(r'_i) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Per il Lemma [1.2.9](#),

$$\begin{aligned}
\liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I_i) &\geq \liminf_n G_c \int_{I_i} \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} V(v_n) + \frac{\varepsilon_n}{2} |v'_n|^2 \right) dt \\
&\geq G_c \liminf_n \left(\int_{r_i}^{s_n^i} \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} V(v_n) + \frac{\varepsilon_n}{2} |v'_n|^2 \right) dt + \int_{s_n^i}^{r'_i} \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} V(v_n) + \frac{\varepsilon_n}{2} |v'_n|^2 \right) dt \right) \\
&\geq G_c \liminf_n \int_{r_i}^{s_n^i} \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} V(v_n) + \frac{\varepsilon_n}{2} |v'_n|^2 \right) dt + G_c \liminf_n \int_{s_n^i}^{r'_i} \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} V(v_n) + \frac{\varepsilon_n}{2} |v'_n|^2 \right) dt \\
&\geq G_c \int_0^1 \sqrt{V(s)} ds + G_c \int_0^1 \sqrt{V(s)} ds = 2 G_c c_V,
\end{aligned}$$

da cui otteniamo [1.23](#). Con gli stessi passaggi, otteniamo anche che se $I \subset (a, b)$ aperto tale che $\{t_1, \dots, t_N\} \subset S(u) \cap I$,

$$2 G_c c_V N \leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I).$$

Da questo, per l'arbitrarietà di N , otteniamo [1.22](#).

2) Consideriamo $I = (c, d) \subset (a, b)$ tale che $I \cap S(u) = \emptyset$. Dimostriamo che $u \in H^1(I)$ e

$$\frac{E_0}{2} \int_I |u'|^2 dt \leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I). \quad (1.25)$$

Consideriamo una sottosuccessione (che non rinominiamo) tale che $\liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I) = \lim_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I)$. Sia $N \in \mathbb{N}$. Per ogni $k = 1, \dots, N$ poniamo

$$I_N^k = \left(c + \frac{k-1}{N}(d-c), c + \frac{k}{N}(d-c) \right).$$

Passando ad una sottosuccessione con un argomento diagonale, possiamo supporre che

$$\exists \limsup_n \int_{I_N^k} v_n \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall k = 1, \dots, N.$$

Siano $0 < z < 1$ ed $N \in \mathbb{N}$. Consideriamo l'insieme

$$J_N^z = \left\{ k \in \{1, \dots, N\} : \limsup_n \int_{I_N^k} v_n \geq z \right\}.$$

Osserviamo che per il Lemma [1.2.9](#),

$$\#(J_N^z) \leq c \left(\int_0^z \sqrt{V(s)} ds \right)^{-1} G_c^{-1},$$

indipendentemente da N . Infatti, per ogni $k \in J_N^z$ possiamo definire $s_n^k \in I_N^k$ tale che $\lim_n v_n(s_n^k) \geq z$ ed $s_n^k \in I_N^k$ tale che $\lim_n v_n(s_n^k) = 0$. Allora,

$$\begin{aligned} c &\geq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I) \geq G_c \liminf_n \int_I \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} V(v_n) + \frac{\varepsilon_n}{2} |v_n'|^2 \right) dt \\ &\geq G_c \liminf_n \left(\sum_{k=1}^{\#(J_N^z)} \left| \int_{s_n^k}^{s_n^{k+1}} \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} V(v_n) + \frac{\varepsilon_n}{2} |v_n'|^2 \right) dt \right| \right) \\ &\geq G_c \sum_{k=1}^{\#(J_N^z)} \liminf_n \left(\left| \int_{s_n^k}^{s_n^{k+1}} \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} V(v_n) + \frac{\varepsilon_n}{2} |v_n'|^2 \right) dt \right| \right) \\ &\geq G_c \sum_{k=1}^{\#(J_N^z)} \left(\int_0^z \sqrt{V(s)} ds \right) = G_c \#(J_N^z) \left(\int_0^z \sqrt{V(s)} ds \right). \end{aligned}$$

Quindi, supponiamo che $J_N^z = \{k_i : i = 1, \dots, L\}$ per ogni N . Inoltre, poichè $(\frac{k_i}{N})_N$ è una successione limitata per ogni $i = 1, \dots, L$, passando a sottosuccessioni, possiamo supporre che $(\frac{k_i}{N})_N$ sia convergente per ogni i . In particolare, da questo segue che $c + \frac{k_i}{N}(d - c) \rightarrow t_i$, per $t_i \in [c, d]$ e per $N \rightarrow \infty$. Sia $S = \{t_1, \dots, t_L\}$ e sia $\eta > 0$. Allora, per N sufficientemente grande, abbiamo che

$$I_N^{k_i} \subset S + [-\eta, \eta] \quad \forall i = 1, \dots, L.$$

(Infatti, dato $\eta > 0$, $\exists \bar{N}_i \in \mathbb{N}$ tale che $|c + \frac{k_i}{N}(d - c) - t_i| \leq \frac{\eta}{2}$ per ogni $N \geq \bar{N}_i$. Sia $\bar{N} = \max_{i=1, \dots, L} \bar{N}_i$. Scegliamo $N \geq \bar{N}$ tale che $\frac{1}{N} \leq \frac{\eta}{2}$. Allora, abbiamo che $I_N^{k_i} \subset S + [-\eta, \eta] \quad \forall i = 1, \dots, L$.) Quindi,

$$\begin{aligned} \liminf_n \psi(z) \int_{I \setminus (S + [-\eta, \eta])} \frac{E_0}{2} |u'_n(t)|^2 dt &\leq \frac{E_0}{2} \liminf_n \sum_{k \notin J_N^z} \psi(z) \int_{I_N^k} |u'_n(t)|^2 dt \\ &\leq \frac{E_0}{2} \liminf_n \sum_{k \notin J_N^z} \int_{I_N^k} \psi(v_n(t)) |u'_n(t)|^2 dt \\ &\leq \frac{E_0}{2} \liminf_n \int_I \psi(v_n(t)) |u'_n(t)|^2 dt \\ &\leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I) < +\infty. \end{aligned}$$

(Nella seconda disuguaglianza abbiamo usato l'ipotesi che ψ è decrescente e la definizione di J_N^z . In particolare, per ogni $k \notin J_N^z$, $\lim_n \sup_{I_N^k} v_n < z$, quindi definitivamente per $n \rightarrow \infty$ abbiamo che $\psi(v_n(t)) > \psi(z)$.) Esiste una sottosuccessione u_{n_k} tale che

$$\begin{aligned} \lim_k \psi(z) \int_{I \setminus (S + [-\eta, \eta])} \frac{E_0}{2} |u'_{n_k}(t)|^2 dt &= \liminf_n \psi(z) \int_{I \setminus (S + [-\eta, \eta])} \frac{E_0}{2} |u'_n(t)|^2 dt \\ &\leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I) < +\infty, \end{aligned}$$

da cui, ragionando come in precedenza con la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger, otteniamo che (esiste una sottosuccessione di u_{n_k} tale che) $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in $H^1(I \setminus (S + [-\eta, \eta]))$. Allora, $u \in H^1(I \setminus (S + [-\eta, \eta]))$ e, poichè $u'_{n_k} \rightharpoonup u'$ in $L^2(I \setminus (S + [-\eta, \eta]))$, dalla semicontinuità inferiore della norma L^2 sotto la convergenza debole, abbiamo che

$$\psi(z) \int_{I \setminus (S + [-\eta, \eta])} \frac{E_0}{2} |u'(t)|^2 dt \leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I).$$

Per l'arbitrarietà di η , la stima precedente è indipendente da η , quindi otteniamo $u \in H^1(I \setminus S)$. Poichè $S(u) \cap I = \emptyset$, $u \in H^1(I)$. Inoltre, vale [1.25](#). Infatti, sia $z_k = \frac{1}{k}$, allora per ogni k vale che

$$\psi(z_k) \int_I \frac{E_0}{2} |u'(t)|^2 dt \leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I).$$

Prendendo il \sup_k , abbiamo che

$$\psi(0) \int_I \frac{E_0}{2} |u'(t)|^2 dt = \int_I \frac{E_0}{2} |u'(t)|^2 dt \leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I).$$

Dai passaggi 1) e 2), concludiamo che $u \in SBV(a, b)$ e che vale la disuguaglianza del \liminf . Infatti, per ogni $\eta > 0$ definiamo $I_\eta^0 = (a, b) \setminus (S(u) + [-\eta, \eta])$ e $I_\eta^1 = (a, b) \cap (S(u) + (-\eta, \eta))$. Da [1.22](#) e [1.25](#),

$$\begin{aligned} \int_{I_\eta^0} \frac{E_0}{2} |u'|^2 dt + 2 G_c c_V \#(S(u) \cap I_\eta^1) &= \int_{I_\eta^0} \frac{E_0}{2} |u'|^2 dt + 2 G_c c_V \#(S(u)) \\ &\leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I_\eta^0) + \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n, I_\eta^1) \\ &\leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n). \end{aligned}$$

Per $\eta \rightarrow 0$, otteniamo

$$F(u, v) \leq \liminf_n F_{\varepsilon_n}(u_n, v_n).$$

Il fatto che $u \in SBV(a, b)$ segue dalla seguente osservazione. Supponiamo che $(a, b) = (-1, 1)$, $S(u) = \{0\}$ e $u \in H^1(-1, 0) \cap H^1(0, 1)$. In particolare, $u_1(0) \neq u_2(0)$, dove $u_1(0) := \lim_{t \rightarrow 0^-} u(t) = u|_{(-1, 0)}(0)$ ed $u_2(0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = u|_{(0, 1)}(0)$ ($u \in AC(-1, 0)$ e $u \in AC(1, 0)$). Allora, $u \in SBV(-1, 1)$. Infatti, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(-1, 1)$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u \varphi' dx &= \int_{-1}^0 u \varphi' dx + \int_0^1 u \varphi' dx \\ &= - \int_{-1}^0 u' \varphi dx + u_1(0) \varphi(0) - \int_0^1 u' \varphi dx - u_2(0) \varphi(0) \\ &= - \int_{-1}^1 u' \varphi dx + \varphi(0) (u_1(0) - u_2(0)), \end{aligned}$$

dove u' è la derivata q.o. di u in $(-1, 1)$. Da questo abbiamo che la derivata debole di u è $Du = u' \mathcal{L}^1 + (u_2(0) - u_1(0)) \delta_0$. Per l'osservazione [1.1.9](#), $u \in SBV(-1, 1)$.

Dimostriamo che per ogni $(u, v_0) \in L^1(a, b) \times L^1(a, b)$ esiste una recovery sequence. Osserviamo che, per definizione di F , possiamo restringerci al caso in cui $(a, b) = (-1, 1)$, $v_0 = 0$ q.o., $u \in SBV(-1, 1)$, $S(u) = \{0\}$ ed $u' \in L^2(-1, 1)$ (possiamo supporre che u sia un buon rappresentante della sua classe di equivalenza, quindi u' rappresenta la derivata di Du rispetto ad \mathcal{L}^1 , cioè la derivata q.o. di u (Teorema [1.1.6](#))). Sia $\xi_\varepsilon = o(\varepsilon)$, con $\xi_\varepsilon > 0$ per ogni ε , e consideriamo $u_\varepsilon \in H^1(-1, 1)$ tale che

$$u_\varepsilon(t) = u(t) \quad \forall t \in (-1, 1) : |t| > \xi_\varepsilon.$$

Possiamo definire una tale u_ε come

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u|_{(-1, -\xi_\varepsilon)}(t) & \text{se } t \in (-1, -\xi_\varepsilon) \\ u|_{(\xi_\varepsilon, 1)}(t) & \text{se } t \in (\xi_\varepsilon, 1) \\ u_1(t) := u(-\xi_\varepsilon) + \frac{u(\xi_\varepsilon) - u(-\xi_\varepsilon)}{2\xi_\varepsilon}(t + \xi_\varepsilon) & \text{altrimenti in } (-1, 1). \end{cases}$$

Infatti $u_\varepsilon \in H^1(-1, 1)$, perchè

$$\begin{aligned} u|_{(-1, -\xi_\varepsilon)} &\in H^1(-1, -\xi_\varepsilon), & u_1 &\in H^1(-\xi_\varepsilon, \xi_\varepsilon), & u|_{(\xi_\varepsilon, 1)} &\in H^1(\xi_\varepsilon, 1), \\ u|_{(-1, -\xi_\varepsilon)}(-\xi_\varepsilon) &= u(-\xi_\varepsilon) = u_1(-\xi_\varepsilon), & u|_{(\xi_\varepsilon, 1)}(\xi_\varepsilon) &= u(\xi_\varepsilon) = u_1(\xi_\varepsilon). \end{aligned}$$

(Osserviamo che $u|_{(-1, -\xi_\varepsilon)} \in H^1(-1, -\xi_\varepsilon)$. Poniamo $f = u|_{(-1, -\xi_\varepsilon)}$. Allora, $f \in L^1(-1, -\xi_\varepsilon)$ e sua la derivata debole $Df = u'|_{(-1, -\xi_\varepsilon)} \in L^2(-1, -\xi_\varepsilon)$. Poichè $f \in W^{1,1}(-1, -\xi_\varepsilon) = AC(-1, -\xi_\varepsilon)$ ed ha la derivata debole in $L^2(-1, -\xi_\varepsilon)$, $f \in H^1(-1, -\xi_\varepsilon)$. Analogamente dimostriamo che $u|_{(\xi_\varepsilon, 1)} \in H^1(\xi_\varepsilon, 1)$.)

Per il Teorema di convergenza dominata, $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1(-1, 1)$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Fissiamo $\eta > 0$. Siano $T > 0$ e $v \in H^1(0, T)$ tale che $v(0) = 1$, $v(T) = 0$ e

$$\int_0^T (V(v) + |v'|^2) dt \leq 2c_V + \eta. \quad (1.26)$$

L'esistenza di una tale v segue dal Lemma [1.2.10](#). Definiamo $v_\varepsilon : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$v_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq \xi_\varepsilon \\ v\left(\frac{|t| - \xi_\varepsilon}{\varepsilon}\right) & \text{se } \xi_\varepsilon < |t| < \xi_\varepsilon + \varepsilon T \\ 0 & \text{se } |t| \geq \xi_\varepsilon + \varepsilon T \end{cases}$$

Ragionando come sopra, otteniamo che $v_\varepsilon \in H^1(-1, 1)$. Inoltre, per il Teorema di convergenza dominata, $v_\varepsilon \rightarrow v_0$ in $L^1(-1, 1)$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Per tali u_ε e v_ε vale che

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) &= \frac{E_0}{2} \int_{-1}^1 \psi(v_\varepsilon) |u'_\varepsilon|^2 dt + \frac{G_c}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\varepsilon} V(v_\varepsilon) + \varepsilon |v'_\varepsilon|^2 \right) dt \\ &= \frac{E_0}{2} \int_{-1}^1 \psi(v_\varepsilon) |u'|^2 dt + \frac{G_c}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\varepsilon} V(v_\varepsilon) + \varepsilon |v'_\varepsilon|^2 \right) dt \\ &\leq \frac{E_0}{2} \int_{-1}^1 |u'|^2 dt + \frac{G_c}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\varepsilon} V(v_\varepsilon) + \varepsilon |v'_\varepsilon|^2 \right) dt \end{aligned}$$

Inoltre, dalla definizione di v_ε , utilizzando il cambio di variabile $\frac{t - \xi_\varepsilon}{\varepsilon} = s$, otteniamo

che

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\varepsilon} V(v_\varepsilon(t)) + \varepsilon |v'_\varepsilon(t)|^2 \right) dt = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{\varepsilon} V(v_\varepsilon(t)) + \varepsilon |v'_\varepsilon(t)|^2 \right) dt \\
& = 2V(1) \frac{\xi_\varepsilon}{\varepsilon} + 2 \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi_\varepsilon + \varepsilon T} \frac{1}{\varepsilon} V \left(v \left(\frac{t - \xi_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right) dt + 2 \int_{\xi_\varepsilon}^{\xi_\varepsilon + \varepsilon T} \varepsilon \left| v' \left(\frac{t - \xi_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\varepsilon} \right|^2 dt \\
& = 2V(1) \frac{\xi_\varepsilon}{\varepsilon} + 2 \int_0^T (V(v(s)) + |v'(s)|^2) ds.
\end{aligned}$$

Per [1.26](#),

$$2 \int_0^T (V(v) + |v'|^2) dt \leq 4c_V + 2\eta,$$

quindi,

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq \frac{E_0}{2} \int_{-1}^1 |u'|^2 dt + G_c V(1) \frac{\xi_\varepsilon}{\varepsilon} + 2 G_c c_V + G_c \eta,$$

da cui,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq \frac{E_0}{2} \int_{-1}^1 |u'|^2 dt + 2G_c c_V + G_c \eta,$$

cioè $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ è una recovery sequence per (u, v_0) . □

Lemma 1.2.9. *Siano $V : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua e $v_n \in H^1(a, b)$ una successione tale che $0 \leq v_n \leq 1$ q.o. per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siano $\varepsilon_n \downarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, $t_n^1, t_n^2 \in (a, b)$ e $z_1, z_2 \in [0, 1]$ tali che $v_n(t_n^1) \rightarrow z_1$ e $v_n(t_n^2) \rightarrow z_2$ per $n \rightarrow \infty$. Allora,*

$$\begin{aligned}
& \liminf_n \int_a^b \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} V(v_n) + \frac{\varepsilon_n}{2} |v'_n|^2 \right) dt \\
& \geq \liminf_n \left| \int_{t_n^1}^{t_n^2} \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} V(v_n) + \frac{\varepsilon_n}{2} |v'_n|^2 \right) dt \right| \geq \left| \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{V(t)} dt \right|.
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che $t_n^1 \leq t_n^2$. Definiamo

$$t_n = \frac{t_n^1 + t_n^2}{2}, \quad T_n = \frac{t_n^2 - t_n^1}{2\varepsilon_n},$$

ed $u_n : (-T_n, T_n) \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$u_n(s) = v_n(t_n + \varepsilon_n s).$$

Con il cambio di variabile $t = t_n + \varepsilon_n s$, cioè $s = \frac{t - t_n}{\varepsilon_n}$, otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_{t_n^1}^{t_n^2} V(v_n(t)) dt &= \varepsilon_n \int_{-T_n}^{T_n} V(u_n(s)) ds, \\ \int_{t_n^1}^{t_n^2} |v_n'(t)|^2 dt &= \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{-T_n}^{T_n} |u_n'(s)|^2 ds,\end{aligned}$$

da cui,

$$\int_{t_n^1}^{t_n^2} \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} V(v_n(t)) + \frac{\varepsilon_n}{2} |v_n'(t)|^2 \right) dt = \int_{-T_n}^{T_n} \left(\frac{1}{2} V(u_n(s)) + \frac{1}{2} |u_n'(s)|^2 \right) ds.$$

Definiamo la funzione $\Phi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ come

$$\Phi(z) = \int_0^z \sqrt{V(s)} ds.$$

Per disuguaglianza di Young,

$$\frac{1}{2} V(u_n(s)) + \frac{1}{2} |u_n'(s)|^2 \geq \sqrt{V(u_n(s))} |u_n'(s)| = |(\Phi \circ u_n)'(s)| \quad \text{q.o.},$$

da cui, osservando che $u_n(T_n) = v_n(t_n^2)$ e $u_n(-T_n) = v_n(t_n^1)$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_{-T_n}^{T_n} \left(\frac{1}{2} V(u_n(s)) + \frac{1}{2} |u_n'(s)|^2 \right) ds &\geq \int_{-T_n}^{T_n} |(\Phi \circ u_n)'(s)| ds \\ &\geq \left| \int_{-T_n}^{T_n} (\Phi \circ u_n)'(s) ds \right| = |\Phi(v_n(t_n^2)) - \Phi(v_n(t_n^1))| = \left| \int_{v_n(t_n^1)}^{v_n(t_n^2)} \sqrt{V(s)} ds \right|.\end{aligned}$$

Dalle disuguaglianze precedenti e dal Teorema di convergenza dominata, otteniamo che

$$\begin{aligned}\liminf_n \int_{t_n^1}^{t_n^2} \left(\frac{1}{2\varepsilon_n} V(v_n(t)) + \frac{\varepsilon_n}{2} |v_n'(t)|^2 \right) dt &\geq \liminf_n \left| \int_{v_n(t_n^1)}^{v_n(t_n^2)} \sqrt{V(t)} dt \right| \\ &= \left| \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{V(t)} dt \right|,\end{aligned}$$

cioè la tesi. □

Lemma 1.2.10. *Siano $\eta > 0$ e $V : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua che si annulla solo nel punto 0. Allora, esistono $T > 0$ ed una funzione $v \in H^1(0, T)$ tale che $v(0) = 1$, $v(T) = 0$ e*

$$\int_0^T (V(v) + |v'|^2) dt \leq 2c_V + \eta, \quad (1.27)$$

dove $c_V = \int_0^1 \sqrt{V(s)} ds$.

Dimostrazione. Poniamo

$$I(z) = \inf_{T \geq 0} \inf \left\{ \int_0^T \left(\frac{1}{2}V(u) + \frac{1}{2}|u'|^2 \right) dt : u \in H^1(0, T), u(0) = 1, u(T) = z, \right. \\ \left. 0 \leq u \leq 1 \right\},$$

per ogni $z \in [0, 1]$ e

$$\tilde{c} = \liminf_{z \rightarrow 0} I(z).$$

Dalla dimostrazione del Lemma [1.2.9](#), per ogni $T \geq 0$, per ogni $z \in [0, 1]$ e per ogni $u \in H^1(0, T)$ tale che $u(0) = 1$ e $u(T) = z$, vale che

$$\int_0^T \left(\frac{1}{2}V(u) + \frac{1}{2}|u'|^2 \right) dt \geq \int_z^1 \sqrt{V(s)} ds = \Phi(1) - \Phi(z),$$

da cui otteniamo che

$$\tilde{c} \geq \liminf_{z \rightarrow 0} \left(\Phi(1) - \Phi(z) \right) = \Phi(1) = c_V.$$

Sia $\eta > 0$. Allora, per definizione di \tilde{c} , esistono $T_\eta > 0$ e $v_\eta \in H^1(0, T_\eta)$ tali che

$$v_\eta(0) = 1, \quad 0 < v_\eta(T_\eta) \leq \eta \quad \text{e} \quad \int_0^{T_\eta} \left(\frac{1}{2}V(v_\eta) + \frac{1}{2}|v_\eta'|^2 \right) dt < \tilde{c} + \eta.$$

Estendiamo v_η , definendo $\tilde{v}_\eta : [0, T_\eta + \eta] \rightarrow [0, 1]$ come

$$\tilde{v}_\eta(t) = \begin{cases} v_\eta(t) & \text{se } t \in [0, T_\eta] \\ \max \{0, v_\eta(T_\eta) - t + T_\eta\} & \text{se } t \in (T_\eta, T_\eta + \eta]. \end{cases}$$

Osserviamo che $\tilde{v}_\eta \in H^1(0, T_\eta + \eta)$ e che $\tilde{v}_\eta(T_\eta + \eta) = 0$, infatti

$$v_\eta(T_\eta) - T_\eta - \eta + T_\eta = v_\eta(T_\eta) - \eta \leq 0,$$

da cui $\max \{0, v_\eta(T_\eta) - T_\eta - \eta + T_\eta\} = 0$. Inoltre, vale che

$$\int_0^{T_\eta + \eta} \left(\frac{1}{2}V(\tilde{v}_\eta) + \frac{1}{2}|\tilde{v}_\eta'|^2 \right) dt = \int_0^{T_\eta} \left(\frac{1}{2}V(v_\eta) + \frac{1}{2}|v_\eta'|^2 \right) dt + \int_{T_\eta}^{T_\eta + \eta} \left(\frac{1}{2}V(\tilde{v}_\eta) + \frac{1}{2}|\tilde{v}_\eta'|^2 \right) dt \\ < \tilde{c} + \eta + \frac{1}{2}M\eta + \frac{1}{2}\eta = \tilde{c} + c\eta,$$

dove $M = \max_{x \in [0, 1]} V(x)$ e $c = \frac{1}{2}M + \frac{3}{2}$. Dimostriamo che $\tilde{c} = c_V$ ed osserviamo che da

questo otteniamo la tesi. Sia $v \in H_{loc}^1(-\infty, 0)$ una soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} v' = \sqrt{V(v)} \\ v(0) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} v(t) = 0. \end{cases}$$

e definiamo $u \in H_{loc}^1(0, +\infty)$ come $u(t) = v(-t)$ per ogni $t \geq 0$. Per tale v vale che

$$\frac{1}{2}V(v) + \frac{1}{2}|v'|^2 = \sqrt{V(v)}|v'| = \sqrt{V(v)}v' = (\Phi \circ v)'.$$

Allora, da questo e dalla dimostrazione del Lemma [1.2.9](#), abbiamo che

$$\begin{aligned} c_V = \Phi(1) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\Phi(1) - \Phi(v(-T)) \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^0 \left(\frac{1}{2}V(v) + \frac{1}{2}|v'|^2 \right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \left(\frac{1}{2}V(u) + \frac{1}{2}|u'|^2 \right) dt \geq \tilde{c}. \end{aligned}$$

Poichè vale anche la disuguaglianza opposta, otteniamo che $c_V = \tilde{c}$. □

Capitolo 2

Γ -convergenza per il modello 1D.

Consideriamo il dominio $I = [-L, L]$ ed una mesh $\mathcal{T}_h = \{e_h^j, j = 1, \dots, N_h\}$ su I , dove $e_h^j = [x_h^{j-1}, x_h^j]$ è l'elemento j -esimo ed i nodi $\{x_h^i\}_{i=0}^{N_h}$ sono tali che $-L = x_h^0 < x_h^1 < \dots < x_h^{N_h-1} < x_h^{N_h} = L$ e

$$0 < |e_h^j| := x_h^j - x_h^{j-1} \leq h \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, N_h.$$

Indichiamo con \mathbb{P}_h^1 lo spazio dei polinomi lineari a tratti su \mathcal{T}_h e con \mathbb{P}_h^0 lo spazio dei polinomi costanti a tratti su \mathcal{T}_h . Sia $\epsilon_h > 0$ una successione tale che $\epsilon_h \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$ ed assumiamo che $h = o(\epsilon_h)$. Definiamo il funzionale discreto $F_h : \mathbb{P}_h^1 \times \mathbb{P}_h^0 \times \mathbb{P}_h^1 \rightarrow [0, +\infty)$ come

$$F_h(u_h, \eta_h, d_h) = \int_I \frac{1}{2} E_0 |u_h' - \eta_h|^2 dx + \int_I a(d_h) \sigma_c |\eta_h| dx + \frac{G_c}{2} \int_I \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d_h'|^2 dx,$$

dove u_h è la variabile spostamento, d_h è la variabile danno nel materiale, η_h rappresenta una variabile "plastica" e $a(d) = (1 - d)^2$. Per ogni $d_h \in \mathbb{P}_h^1$ introduciamo $a_h(d_h) \in \mathbb{P}_h^0$, tale che

$$a_h(d_h)(x) = \frac{1}{|e_h^j|} \int_{e_h^j} a(d_h(t)) dt, \quad \text{se } x \in e_h^j, j \in \{1, \dots, N_h\}.$$

Definiamo il funzionale $\mathcal{F}_h : \mathbb{P}_h^1 \times \mathbb{P}_h^1 \rightarrow [0, +\infty)$, dipendente solo da u_h e d_h , come

$$\mathcal{F}_h(u_h, d_h) = \min \{ F_h(u_h, \eta_h, d_h) : \eta_h \in \mathbb{P}_h^0 \}. \quad (2.1)$$

Poichè $\eta_h \in \mathbb{P}_h^0$, la minimizzazione precedente può essere fatta elemento per elemento. Quindi, per ogni $u_h, d_h \in \mathbb{P}_h^1$ vale che

$$\mathcal{F}_h(u_h, d_h) = \int_I f(u_h', a_h(d_h)) dx + \frac{G_c}{2} \int_I \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d_h'|^2 dx, \quad (2.2)$$

dove $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è definita come

$$\begin{aligned} f(s, r) &= \min \left\{ \frac{1}{2} E_0 (s - \eta)^2 + r \sigma_c |\eta| : \eta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} E_0 s^2 & \text{se } |s| \leq r \frac{\sigma_c}{E_0}, \\ r \sigma_c |s| - r^2 \frac{\sigma_c^2}{2E_0} & \text{se } |s| > r \frac{\sigma_c}{E_0}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Infatti, dato $e_h \in \mathcal{T}_h$ un generico elemento della mesh, per ogni $\eta \in \mathbb{R}$ vale che

$$\begin{aligned} & \int_{e_h} \frac{1}{2} E_0 |u'_h - \eta|^2 dx + \int_{e_h} a(d_h) \sigma_c |\eta| dx \\ &= \int_{e_h} \frac{1}{2} E_0 |u'_h - \eta|^2 dx + \int_{e_h} \left(\frac{1}{|e_h|} \int_{e_h} a(d_h) dt \right) \sigma_c |\eta| dx \\ &= \int_{e_h} \frac{1}{2} E_0 |u'_h - \eta|^2 dx + \int_{e_h} a_h(d_h)(x) \sigma_c |\eta| dx, \end{aligned}$$

Osservando che $u'_h, a_h(d_h) \in \mathbb{P}_h^0$, otteniamo che

$$\min \left\{ \int_{e_h} \frac{1}{2} E_0 |u'_h - \eta|^2 dx + \int_{e_h} a_h(d_h) \sigma_c |\eta| dx, \eta \in \mathbb{R} \right\} = \int_{e_h} f(u'_h, a_h(d_h)) dx.$$

Estendiamo il funzionale \mathcal{F}_h allo spazio $L^1(I) \times L^1(I)$, definendo $\tilde{\mathcal{F}}_h : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$ come

$$\tilde{\mathcal{F}}_h(u_h, d_h) = \begin{cases} \mathcal{F}_h(u_h, d_h) & \text{se } u_h, d_h \in \mathbb{P}_h^1, \|u_h\|_\infty \leq K, d_h \in [0, 1], \\ +\infty & \text{altrove.} \end{cases} \quad (2.4)$$

In questo capitolo studiamo il Γ -limite di $\tilde{\mathcal{F}}_h$ per $h \rightarrow 0$. In particolare, dimostriamo il seguente teorema.

Teorema 2.0.1. *Siano $\tilde{\mathcal{F}}_h : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$ come sopra e $K > 0$. Sia $\tilde{\mathcal{F}} : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$ definito come*

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, d) = \begin{cases} \mathcal{F}(u) & \text{se } u \in BV(I), d = 0 \text{ q.o. in } I, \|u\|_\infty \leq K \\ +\infty & \text{altrove,} \end{cases} \quad (2.5)$$

dove

$$\mathcal{F}(u) = \int_I W(u') dx + \sigma_c |D^c u|(I) + \sum_{J_u} \phi(|\llbracket u \rrbracket|),$$

con $W, \phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ definite come

$$W(s) = f(s, 1), \quad \phi(s) = \frac{G_c \sigma_c |s|}{G_c + \sigma_c |s|}. \quad (2.6)$$

Allora, $\tilde{\mathcal{F}}_h$ Γ -converge ad $\tilde{\mathcal{F}}$ per $h \rightarrow 0$.

Osservazione 2.0.1. La funzione $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è crescente e concava. Inoltre, $\phi'_+(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi(s)}{s} = \sigma_c$ e $\lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s) = G_c$.

Prima di dimostrare la disuguaglianza del Γ -lim inf e del Γ -lim sup, introduciamo il problema di profilo ottimo: dato $j > 0$, cerchiamo

$$z_j = \operatorname{argmin} \left\{ J_j(z) = a(z(0))\sigma_c j + G_c \int_{\mathbb{R}_+} z^2 + |z'|^2 dx : z \in H^1(\mathbb{R}_+, [0, 1]) \right\}.$$

Per risolvere questo problema, consideriamo prima $z_0 \in [0, 1]$ fissato e

$$z_* = \operatorname{argmin} \left\{ \mathcal{K}(z) = \int_{\mathbb{R}_+} z^2 + |z'|^2 dx : z \in H^1(\mathbb{R}_+, [0, 1]), z(0) = z_0 \right\}.$$

Il problema di minimo precedente ammette un'unica soluzione e dalle Equazioni di Eulero-Lagrange,

$$\int_{\mathbb{R}_+} z'_* \varphi' + z_* \varphi dx = \int_{\mathbb{R}_+} (-z''_* + z_*) \varphi dx = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+),$$

otteniamo che $z''_* = z_*$, cioè $z_*(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}_+$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Poichè $z_* \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $c_1 = 0$; poichè $z_*(0) = z_0$, $c_2 = z_0$. Quindi, abbiamo che $z_*(x) = z_0 e^{-x}$. Inoltre,

$$\mathcal{K}(z_*) = 2z_0^2 \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2x} dx = z_0^2.$$

Allora, la soluzione z_j del problema di profilo ottimo è data da $z_j(x) = z_j(0)e^{-x}$, dove

$$z_j(0) \in \operatorname{argmin} \left\{ a(z_0)\sigma_c j + G_c z_0^2, z_0 \in [0, 1] \right\}$$

Poichè $a(z_0)\sigma_c j + G_c z_0^2 = (G_c + \sigma_c j)z_0^2 - 2z_0\sigma_c j + \sigma_c j$, troviamo che

$$z_j(0) = \frac{\sigma_c j}{G_c + \sigma_c j} \in [0, 1],$$

da cui

$$z_j(x) = \frac{\sigma_c j}{G_c + \sigma_c j} e^{-x}, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}_+.$$

Infine, poniamo

$$\phi(j) = J_j(z_j) = \frac{G_c \sigma_c j}{G_c + \sigma_c j}.$$

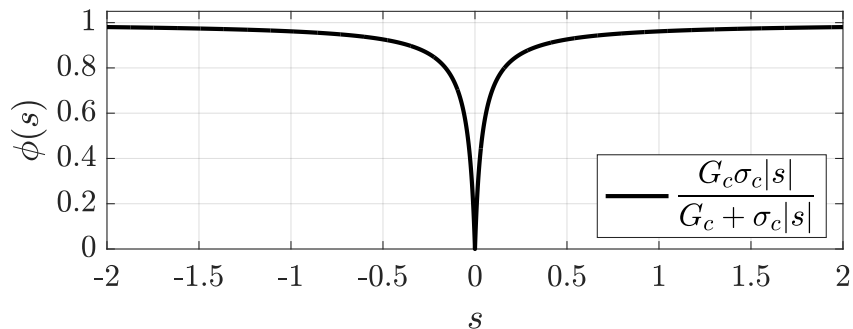


Figura 2.1: Grafico della funzione ϕ , dove $\phi(s) = \frac{G_c \sigma_c |s|}{G_c + \sigma_c |s|}$, con dati $G_c = 1$ e $\sigma_c = 25$.

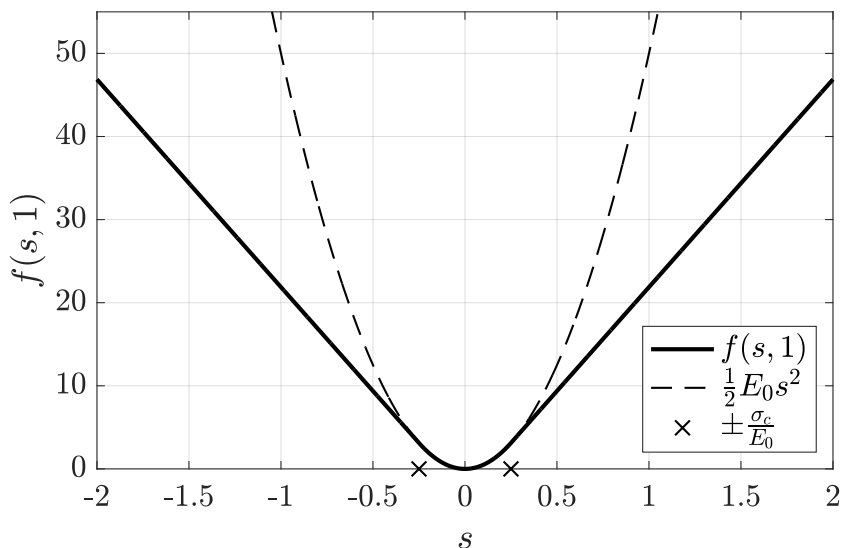


Figura 2.2: Grafico della funzione $s \mapsto f(s, 1)$, con dati $E_0 = 100$, $G_c = 1$ e $\sigma_c = 25$.

2.1 Disuguaglianza del Γ -lim sup per il modello 1D.

Proposizione 2.1.1. *Sia $u \in BV(I)$, tale che $\|u\|_\infty \leq K$. Allora, esistono $u_h, d_h \in \mathbb{P}_h^1 \subset H^1(I)$ tali che $(u_h, d_h) \rightarrow (u, 0)$ in $L^1(I) \times L^1(I)$ per $h \rightarrow 0$ e*

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}_h(u_h, d_h) \leq \mathcal{F}(u).$$

Dimostrazione. Per il risultato di densità enunciato nella Proposizione [2.1.2](#) e per l'Osservazione [1.2.4](#), possiamo dimostrare la disuguaglianza del Γ -lim sup in due casi principali: 1) u è una funzione di puro salto, 2) $u \in W^{2,\infty}(I)$.

1. Consideriamo $u \in BV(I)$ una funzione di puro salto tale che $J_u = \{0\}$ ed u è costante in $[-L, 0)$ ed in $(0, L]$. Supponiamo anche che u sia continua da sinistra. Sia \bar{e}_h l'elemento di \mathcal{T}_h che contiene il salto, cioè, $0 \in \bar{e}_h = [x_h^{j-1}, x_h^j]$, con $j \in \{1, \dots, N_h\}$. Definiamo $u_h \in \mathbb{P}_h^1$ come l'interpolata lineare a tratti di u sulla mesh \mathcal{T}_h . Osserviamo che $u_h' = 0$ in $I \setminus \bar{e}_h$ e $u_h' = \frac{[[u]]}{|\bar{e}_h|}$ in \bar{e}_h . Inoltre, per il Teorema di convergenza dominata, $u_h \rightarrow u$ in $L^1(I)$ per $h \rightarrow 0$.

Consideriamo il problema di profilo ottimo con dato $[[u]]$ e sia $z_{[[u]]}$ la sua soluzione. Abbiamo dimostrato che

$$z_{[[u]]}(x) = e^{-x} \frac{\sigma_c [[u]]}{G_c + \sigma_c [[u]]} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}_+.$$

Per definizione di $z_{[[u]]}$, vale che

$$\phi([[u]]) = J_{[[u]]}(z_{[[u]])} \leq J_{[[u]]}(z) = a(z(0))\sigma_c [[u]] + G_c \int_{\mathbb{R}_+} z^2 + |z'|^2 dx$$

per ogni $z \in H^1(\mathbb{R}_+, [0, 1])$. Fissiamo $\eta > 0$. Allora, esistono $T_\eta > 0$ e $z_\eta \in W^{1,\infty}(0, T_\eta)$ tale che $z_\eta(0) = z_{[[u]]}(0)$, $z_\eta(T_\eta) = 0$ e

$$a(z_\eta(0))\sigma_c [[u]] + G_c \int_0^{T_\eta} z_\eta^2 + |z_\eta'|^2 dx \leq \phi([[u]]) + \eta.$$

Infatti, poichè $\lim_{x \rightarrow +\infty} z_{[[u]]}(x) = 0$, esiste $T > 0$ tale che $z_{[[u]]}(T) < \eta' = \frac{\eta}{2G_c} < 1$. Allora, possiamo definire z_η come

$$z_\eta(x) = \begin{cases} z_{[[u]]}(x) & \text{se } x \in [0, T], \\ \max\{0, z_{[[u]]}(T) - x + T\} & \text{se } x \in (T, T_\eta := T + \eta']. \end{cases}$$

Osserviamo che $z_\eta \in W^{1,\infty}(0, T_\eta)$, $z_\eta(0) = z_{[[u]]}(0)$ e $z_\eta(T_\eta) = 0$. Infatti,

$$\max\{0, z_{[[u]]}(T) - T - \eta' + T\} = \max\{0, z_{[[u]]}(T) - \eta'\} = 0.$$

In particolare, per tale z_η abbiamo che

$$\begin{aligned} & a(z_\eta(0))\sigma_c [[u]] + G_c \int_0^{T_\eta} z_\eta^2 + |z_\eta'|^2 dx \\ &= a(z_{[[u]]}(0))\sigma_c [[u]] + G_c \int_0^T z_{[[u]]}^2 + |z_{[[u]]}'|^2 dx + G_c \int_T^{T_\eta} z_\eta^2 + |z_\eta'|^2 dx \\ &\leq a(z_{[[u]]}(0))\sigma_c [[u]] + G_c \int_{\mathbb{R}_+} z_{[[u]]}^2 + |z_{[[u]]}'|^2 dx + 2 G_c \eta' \leq \phi([[u]]) + \eta. \end{aligned}$$

Con un abuso di notazione, indichiamo con $z_\eta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ l'estensione nulla e pari di z_η . Consideriamo la mesh $\mathcal{T}_{h/\epsilon_h}$ su $[-L/\epsilon_h, L/\epsilon_h]$, ottenuta riscaldando \mathcal{T}_h per il fattore $1/\epsilon_h$. Per h sufficientemente piccolo vale che $|L/\epsilon_h| > T_\eta$. Poichè $h = o(\epsilon_h)$, la mesh-size di $\mathcal{T}_{h/\epsilon_h}$ è $\frac{1}{\epsilon_h} \max_{j \in \{1, \dots, N_h\}} |e_h^j| \leq h/\epsilon_h \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$. Sia z_h l'interpolata lineare a tratti di z_η , definita sulla mesh $\mathcal{T}_{h/\epsilon_h}$. Allora, grazie alla teoria degli Elementi Finiti, abbiamo che $z_h \rightarrow z_\eta$ in $H^1(\mathbb{R})$. Poichè $\|z_h\|_{H^1(\mathbb{R})} \rightarrow \|z_\eta\|_{H^1(\mathbb{R})}$ per $h \rightarrow 0$, abbiamo che

$$\frac{G_c}{2} \int_{-L/\epsilon_h}^{L/\epsilon_h} z_h^2 + |z_h'|^2 dx \rightarrow \frac{G_c}{2} \int_{-T_\eta}^{T_\eta} z_\eta^2 + |z_\eta'|^2 dx = G_c \int_0^{T_\eta} z_\eta^2 + |z_\eta'|^2 dx,$$

per $h \rightarrow 0$. Inoltre,

$$\frac{\epsilon_h}{|\bar{e}_h|} \int_{x_h^{j-1}/\epsilon_h}^{x_h^j/\epsilon_h} a(z_h(x)) dx \rightarrow a(z_\eta(0)) = a\left(\frac{\sigma_c \|\llbracket u \rrbracket\|}{G_c + \sigma_c \|\llbracket u \rrbracket\|}\right) \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

(Infatti, per ogni h , per il Teorema della media integrale, esiste $\bar{x}_h \in [x_h^{j-1}/\epsilon_h, x_h^j/\epsilon_h]$ tale che $\frac{\epsilon_h}{|\bar{e}_h|} \int_{x_h^{j-1}/\epsilon_h}^{x_h^j/\epsilon_h} a(z_h(x)) dx = a(z_h(\bar{x}_h))$. Poichè $z_h(\bar{x}_h) \rightarrow z_\eta(0)$ per $h \rightarrow 0$ ed a è continua, otteniamo che $a(z_h(\bar{x}_h)) \rightarrow a(z_\eta(0))$.) Quindi, definitivamente per $h \rightarrow 0$ vale che

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon_h}{|\bar{e}_h|} \int_{x_h^{j-1}/\epsilon_h}^{x_h^j/\epsilon_h} a(z_h(x)) \sigma_c \|\llbracket u \rrbracket\| dx + \frac{G_c}{2} \int_{-L/\epsilon_h}^{L/\epsilon_h} z_h^2 + |z_h'|^2 dx \\ & \leq a(z_\eta(0)) \sigma_c \|\llbracket u \rrbracket\| + G_c \int_0^{T_\eta} z_\eta^2 + |z_\eta'|^2 dx + \eta \leq \phi(\|\llbracket u \rrbracket\|) + 2\eta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Definiamo $d_h \in \mathbb{P}_h^1$ come

$$d_h(x) = z_h\left(\frac{x}{\epsilon_h}\right) \quad \text{per ogni } x \in I.$$

Per il Teorema di convergenza dominata, $d_h \rightarrow 0$ in $L^1(I)$ per $h \rightarrow 0$. Per definizione di f (2.3),

$$f(u_h', a_h(d_h)) = \begin{cases} 0 & \text{in } I \setminus \bar{e}_h, \\ f\left(\frac{\|\llbracket u \rrbracket\|}{|\bar{e}_h|}, a_h(d_h)|_{\bar{e}_h}\right) & \text{in } \bar{e}_h. \end{cases}$$

In particolare, definitivamente per $h \rightarrow 0$ vale che $\frac{\|\llbracket u \rrbracket\|}{|\bar{e}_h|} > a_h(d_h)|_{\bar{e}_h} \frac{\sigma_c}{E_0}$ (osserviamo che $a_h(d_h)|_{\bar{e}_h} \in [0, 1]$), quindi

$$f(u_h', a_h(d_h)) = \begin{cases} 0 & \text{in } I \setminus \bar{e}_h, \\ a_h(d_h) \sigma_c \frac{\|\llbracket u \rrbracket\|}{|\bar{e}_h|} - (a_h(d_h))^2 \frac{\sigma_c^2}{2E_0} & \text{in } \bar{e}_h. \end{cases}$$

Allora, grazie al cambio di variabile $\frac{x}{\epsilon_h} = t$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_h(u_h, d_h) &= \int_{\bar{e}_h} f(u'_h, a_h(d_h)) \, dx + \frac{G_c}{2} \int_I \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d'_h|^2 \, dx = \\
&= \sigma_c |\llbracket u \rrbracket| \frac{1}{|\bar{e}_h|} \int_{x_h^{j-1}}^{x_h^j} a(d_h(x)) \, dx - |\bar{e}_h| \frac{\sigma_c^2}{2E_0} (a_h(d_h)|_{\bar{e}_h})^2 \\
&\quad + \frac{G_c}{2} \int_{-L}^L \frac{1}{\epsilon_h} z_h^2 \left(\frac{x}{\epsilon_h} \right) + \epsilon_h \left| z'_h \left(\frac{x}{\epsilon_h} \right) \frac{1}{\epsilon_h} \right|^2 \, dx \\
&\leq \sigma_c |\llbracket u \rrbracket| \frac{1}{|\bar{e}_h|} \int_{x_h^{j-1}}^{x_h^j} a(z_h \left(\frac{x}{\epsilon_h} \right)) \, dx + \frac{G_c}{2} \int_{-L/\epsilon_h}^{L/\epsilon_h} z_h^2 + |z'_h|^2 \, dt \\
&= \sigma_c |\llbracket u \rrbracket| \frac{\epsilon_h}{|\bar{e}_h|} \int_{x_h^{j-1}/\epsilon_h}^{x_h^j/\epsilon_h} a(z_h) \, dt + \frac{G_c}{2} \int_{-L/\epsilon_h}^{L/\epsilon_h} z_h^2 + |z'_h|^2 \, dt.
\end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza precedente e da [2.7](#), definitivamente per $h \rightarrow 0$ vale che

$$\mathcal{F}_h(u_h, d_h) \leq \frac{\epsilon_h}{|\bar{e}_h|} \int_{x_h^{j-1}/\epsilon_h}^{x_h^j/\epsilon_h} a(z_h) \sigma_c |\llbracket u \rrbracket| \, dx + \frac{G_c}{2} \int_{-L/\epsilon_h}^{L/\epsilon_h} z_h^2 + |z'_h|^2 \, dx \leq \phi(|\llbracket u \rrbracket|) + 2\eta.$$

Quindi,

$$\limsup_h \mathcal{F}_h(u_h, d_h) \leq \phi(|\llbracket u \rrbracket|) + 2\eta.$$

Per l'arbitrarietà di η , otteniamo che

$$\Gamma\text{-lim sup}_h \tilde{\mathcal{F}}_h(u, 0) \leq \phi(|\llbracket u \rrbracket|) = \mathcal{F}(u).$$

2. Supponiamo che $u \in W^{2,\infty}(I)$. Siano u_h l'interpolata lineare a tratti di u su \mathcal{T}_h e $d_h = 0$ (osserviamo che $a_h(d_h) = 1$). Allora, dalla teoria degli Elementi Finiti,

$$\|u - u_h\|_{W^{1,\infty}(I)} \leq h \|u\|_{W^{2,\infty}(I)}.$$

In particolare, u'_h converge uniformemente ad u' in I per $h \rightarrow 0$. Poichè la funzione $s \mapsto f(s, 1)$ è uniformemente continua, $f(u'_h, 1) \rightarrow f(u', 1)$ uniformemente in I per $h \rightarrow 0$. Allora,

$$\mathcal{F}_h(u_h, d_h) = \int_I f(u'_h, 1) \, dx \longrightarrow \int_I f(u', 1) \, dx = \mathcal{F}(u).$$

3. Dimostriamo che per ogni $u \in SBV(I) \cap W^{2,\infty}(I \setminus J_u)$ con $J_u = \{0\}$, vale la disuguaglianza del $\Gamma\text{-lim sup}_h \tilde{\mathcal{F}}_h$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ consideriamo la funzione $u_k : I \rightarrow \mathbb{R}$

definita da

$$u_k(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in I \setminus \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right), \\ u\left(-\frac{1}{k}\right) & \text{se } x \in \left[-\frac{1}{k}, 0\right], \\ u\left(\frac{1}{k}\right) & \text{se } x \in \left(0, \frac{1}{k}\right]. \end{cases}$$

Se dimostriamo che

$$\Gamma\text{-lim sup}_h \tilde{\mathcal{F}}_h(u_k, 0) \leq \mathcal{F}(u_k),$$

otteniamo la tesi. Infatti, poichè $u_k \rightarrow u$ in $L^1(I)$ (per il Teorema di convergenza dominata), dalla semicontinuità inferiore del $\Gamma\text{-lim sup}_h \tilde{\mathcal{F}}_h$, otteniamo che

$$\begin{aligned} \Gamma\text{-lim sup}_h \tilde{\mathcal{F}}_h(u, 0) &\leq \liminf_k \left(\Gamma\text{-lim sup}_h \tilde{\mathcal{F}}_h(u_k, 0) \right) \leq \liminf_k \mathcal{F}(u_k) \\ &= \liminf_k \left(\int_I f(u'_k, 1) \, dx + \phi\left(\left|u\left(\frac{1}{k}\right) - u\left(-\frac{1}{k}\right)\right|\right) \right) \\ &= \int_I f(u', 1) \, dx + \phi\left(\|u(0)\|\right) = \mathcal{F}(u). \end{aligned}$$

Quindi, dato $k \in \mathbb{N}$, proviamo che esiste $(u_h^k, d_h^k) \in \mathbb{P}_h^1 \times \mathbb{P}_h^1$ tale che $(u_h^k, d_h^k) \rightarrow (u_k, 0)$ in $L^1(I) \times L^1(I)$ per $h \rightarrow 0$ e

$$\limsup_h \mathcal{F}_h(u_h^k, d_h^k) \leq \mathcal{F}(u_k).$$

Fissiamo $\eta > 0$. Consideriamo inizialmente la mesh \mathcal{T}'_h , ottenuta aggiungendo i punti $\frac{1}{k}$ e $-\frac{1}{k}$ all'insieme dei nodi di \mathcal{T}_h . Indichiamo con $\mathbb{P}_{\mathcal{T}'_h}^1$ lo spazio dei polinomi lineari a tratti su \mathcal{T}'_h . Siano $v_h^k \in \mathbb{P}_{\mathcal{T}'_h}^1$ l'interpolata lineare a tratti di u_k su \mathcal{T}'_h e

$$l_h^k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in I \setminus \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right), \\ d_h^k(x) & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove d_h^k è definito su $\mathcal{T}'_h|_{\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]}$ come nel passo **1**. Osserviamo che, per h sufficientemente piccolo, $l_h^k \in \mathbb{P}_{\mathcal{T}'_h}^1$. Inoltre, $(v_h^k, l_h^k) \rightarrow (u_k, 0)$ in $L^1(I) \times L^1(I)$ per $h \rightarrow 0$. Utilizzando i

passi **1** e **2**, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
& \limsup_h \mathcal{F}_h(v_h^k, l_h^k; \mathcal{T}_h') = \limsup_h \left(\int_I f((v_h^k)', a_h(l_h^k)) \, dx + \frac{G_c}{2} \int_I \frac{1}{\epsilon_h} (l_h^k)^2 + \epsilon_h |(l_h^k)'|^2 \, dx \right) \\
&= \limsup_h \left(\int_{-L}^{-\frac{1}{k}} f((v_h^k)', 1) \, dx + \mathcal{F}_h(v_h^k, l_h^k, [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]; \mathcal{T}_h') + \int_{\frac{1}{k}}^L f((v_h^k)', 1) \, dx \right) \\
&\leq \limsup_h \left(\int_{-L}^{-\frac{1}{k}} f((v_h^k)', 1) \, dx \right) + \limsup_h \mathcal{F}_h(v_h^k, l_h^k, [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]; \mathcal{T}_h') \\
&+ \limsup_h \left(\int_{\frac{1}{k}}^L f((v_h^k)', 1) \, dx \right) \\
&\leq \int_{-L}^{-\frac{1}{k}} f(u_k', 1) \, dx + \phi \left(\left| u\left(\frac{1}{k}\right) - u\left(-\frac{1}{k}\right) \right| \right) + \eta + \int_{\frac{1}{k}}^L f(u_k', 1) \, dx = \mathcal{F}(u_k) + \eta.
\end{aligned}$$

Consideriamo la mesh \mathcal{T}_h ed osserviamo che i punti $-\frac{1}{k}$ ed $\frac{1}{k}$ non appartengono necessariamente all'insieme dei nodi. In particolare, esistono due elementi $\tilde{e}_{h,1} = [t_h^1, t_h^2]$, $\tilde{e}_{h,2} = [t_h^3, t_h^4] \in \mathcal{T}_h$ tali che $-\frac{1}{k} \in \tilde{e}_{h,1}$ e $\frac{1}{k} \in \tilde{e}_{h,2}$. Inoltre, per definizione di \mathcal{T}_h' , gli intervalli $[t_h^1, -\frac{1}{k}]$, $[-\frac{1}{k}, t_h^2]$, $[t_h^3, \frac{1}{k}]$, $[\frac{1}{k}, t_h^4] \in \mathcal{T}_h'$ e

$$\mathcal{T}_h \setminus \{\tilde{e}_{h,1}, \tilde{e}_{h,2}\} = \mathcal{T}_h' \setminus \left\{ [t_h^1, -\frac{1}{k}], [-\frac{1}{k}, t_h^2], [t_h^3, \frac{1}{k}], [\frac{1}{k}, t_h^4] \right\}.$$

Siano $u_h^k \in \mathbb{P}_h^1$ l'interpolata lineare a tratti di u_k su \mathcal{T}_h e $d_h^k \in \mathbb{P}_h^1$ definiti come nel passo **1** ed osserviamo che $(u_h^k, d_h^k) \rightarrow (u_k, 0)$ in $L^1(I) \times L^1(I)$ per $h \rightarrow 0$. Dimostriamo che

$$|\mathcal{F}_h(u_h^k, d_h^k) - \mathcal{F}_h(v_h^k, l_h^k; \mathcal{T}_h')| \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

Questo implica che

$$\limsup_h \mathcal{F}_h(u_h^k, d_h^k) \leq \mathcal{F}(u_k) + \eta,$$

cioè la tesi. Definitivamente per $h \rightarrow 0$, vale che $d_h^k = l_h^k = 0$ su $\tilde{e}_{h,1}$ e $\tilde{e}_{h,2}$, cioè,

$$|\mathcal{F}_h(u_h^k, d_h^k) - \mathcal{F}_h(v_h^k, l_h^k; \mathcal{T}_h')| = \left| \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{e}_{h,i}} f((u_h^k)', 1) - f((v_h^k)', 1) \, dx \right|,$$

quindi, proviamo che

$$\left| \int_{\tilde{e}_{h,1}} f((u_h^k)', 1) - f((v_h^k)', 1) \, dx \right| \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

In modo analogo dimostriamo che anche $\left| \int_{\tilde{e}_{h,2}} f((u_h^k)', 1) - f((v_h^k)', 1) \, dx \right| \rightarrow 0$.

Per definizione di u_h^k e di v_h^k vale che

$$\begin{aligned}
u_h^k(x) &= u(t_h^1) + \frac{u(-\frac{1}{k}) - u(t_h^1)}{t_h^2 - t_h^1}(x - t_h^1), \quad \forall x \in \tilde{e}_{h,1}, \\
(u_h^k)'(x) &= \frac{u(-\frac{1}{k}) - u(t_h^1)}{t_h^2 - t_h^1}, \quad \forall x \in \tilde{e}_{h,1}, \\
v_h^k(x) &= \begin{cases} u(t_h^1) + \frac{u(-\frac{1}{k}) - u(t_h^1)}{-\frac{1}{k} - t_h^1}(x - t_h^1) & \text{se } x \in [t_h^1, -\frac{1}{k}], \\ u(-\frac{1}{k}) & \text{se } x \in (-\frac{1}{k}, t_h^2], \end{cases} \\
(v_h^k)'(x) &= \begin{cases} \frac{u(-\frac{1}{k}) - u(t_h^1)}{-\frac{1}{k} - t_h^1} & \text{se } x \in [t_h^1, -\frac{1}{k}], \\ 0 & \text{se } x \in (-\frac{1}{k}, t_h^2]. \end{cases}
\end{aligned}$$

Allora, poichè la funzione $s \mapsto f(s, 1)$ è lipschitziana (indichiamo con $c_L \geq 0$ la costante di lipschitzianità), abbiamo che

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\tilde{e}_{h,1}} f((u_h^k)', 1) - f((v_h^k)', 1) \, dx \right| \leq \int_{\tilde{e}_{h,1}} |f((u_h^k)', 1) - f((v_h^k)', 1)| \, dx \\
& \leq c_L \int_{\tilde{e}_{h,1}} |(u_h^k)'(x) - (v_h^k)'(x)| \, dx \\
& = c_L \int_{t_h^1}^{-\frac{1}{k}} \left| \frac{u(-\frac{1}{k}) - u(t_h^1)}{t_h^2 - t_h^1} - \frac{u(-\frac{1}{k}) - u(t_h^1)}{-\frac{1}{k} - t_h^1} \right| \, dx + c_L \int_{-\frac{1}{k}}^{t_h^2} \left| \frac{u(-\frac{1}{k}) - u(t_h^1)}{t_h^2 - t_h^1} \right| \, dx \\
& = c_L |u(-\frac{1}{k}) - u(t_h^1)| \left(\left| \frac{-\frac{1}{k} - t_h^2}{(t_h^2 - t_h^1)(-\frac{1}{k} - t_h^1)} \right| (-\frac{1}{k} - t_h^1) + \left| \frac{t_h^2 + \frac{1}{k}}{t_h^2 - t_h^1} \right| \right) \\
& \leq 2c_L |u(-\frac{1}{k}) - u(t_h^1)| \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

□

Proposizione 2.1.2 (Densità). *Sia $u \in BV(I)$. Allora, esiste una successione $u_k \in U = \{v \in SBV(I) \cap W^{2,\infty}(I \setminus J_v) : \#J_v < +\infty\}$ tale che $u_k \rightarrow u$ in $L^1(I)$ e*

$$\limsup_k \mathcal{F}(u_k) \leq \mathcal{F}(u).$$

Dimostrazione. Per il Teorema [1.1.9](#), esistono uniche (a meno di costanti additive) $u_a \in W^{1,1}(I)$, u_c una funzione cantoriana ed u_j una funzione di puro salto tali che

$$u = u_a + u_c + u_j.$$

In particolare, per ogni $x \in I$,

$$u_a(x) = u(-L^+) + \int_{-L}^x u' dt, \quad u_c(x) = D^c u((-L, x)), \quad u_j(x) = \sum_{J_u \cap (-L, x]} \llbracket u \rrbracket.$$

Dimostriamo che esistono $u_{a,k}$, $u_{c,k}$, $u_{j,k}$ tali che $u_{a,k} \rightarrow u_a$ in $L^1(I)$, $u_{c,k} \rightarrow u_c$ in $L^1(I)$, $u_{j,k} \rightarrow u_j$ in $L^1(I)$ per $k \rightarrow \infty$ e $u_{a,k} + u_{c,k} + u_{j,k} \in U$, dove U è definito come nell'enunciato.

u_j) Per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo l'insieme J_u^k dei punti di salto di u con ampiezza maggiore di $\frac{1}{k}$:

$$J_u^k = \left\{ x \in (-L, L) : \llbracket u(x) \rrbracket > \frac{1}{k} \right\}.$$

Osserviamo che $\#J_u^k < +\infty$, infatti, poichè $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è crescente,

$$+\infty > \mathcal{F}(u) \geq \sum_{J_u^k} \phi(\llbracket u \rrbracket) \geq \#J_u^k \phi\left(\frac{1}{k}\right).$$

Sia $u_{j,k} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$u_{j,k}(x) = \sum_{J_u^k \cap (-L, x]} \llbracket u \rrbracket.$$

Per ogni $x \in I$ vale che

$$|u_j(x) - u_{j,k}(x)| = \left| \sum_{J_u \cap (-L, x]} \llbracket u \rrbracket - \sum_{J_u^k \cap (-L, x]} \llbracket u \rrbracket \right| \leq \sum_{(J_u \setminus J_u^k) \cap (-L, x]} \llbracket u \rrbracket,$$

da cui, poichè $u \in BV(I)$ e $|D^j u|(I) = \sum_{J_u} \llbracket u \rrbracket < +\infty$,

$$\|u_j - u_{j,k}\|_{L^1(I)} \leq |I| \sum_{J_u \setminus J_u^k} \llbracket u \rrbracket \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty.$$

u_c) Per ogni $k \in \mathbb{N}$ consideriamo $\{x_{i,k}\}_{i=0}^{k+1}$ la suddivisione uniforme di $[-L, L]$, dove

$$x_{i,k} = -L + i \frac{2L}{k+1}, \quad i = 0, \dots, k+1.$$

Possiamo supporre che $\{x_{i,k}\}_{i=0}^{k+1} \cap J_u^k = \emptyset$. Infatti, se esiste $j \in \{1, \dots, k\}$ tale che $x_{j,k} \in J_u^k$, definiamo

$$\tilde{x}_{j,k} \in \left(\left(x_{j,k} - \frac{L}{k+1}, x_{j,k} + \frac{L}{k+1} \right) \setminus J_u^k \right) \neq \emptyset,$$

perchè $\#J_u^k < +\infty$. Inoltre, poniamo $\tilde{x}_{i,k} = x_{i,k}$ se $x_{i,k} \notin J_u^k$. La nuova suddivisione $\{\tilde{x}_{i,k}\}_{i=0}^{k+1}$ è tale che $\{\tilde{x}_{i,k}\}_{i=0}^{k+1} \cap J_u^k = \emptyset$ e

$$\max_{i=1,\dots,k+1} \tilde{x}_{i,k} - \tilde{x}_{i-1,k} \leq \frac{4L}{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty.$$

Definiamo $u_{c,k} : I \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$u_{c,k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-L, x_{1,k}] \\ u_c(x_{i+1,k}) & \text{se } x \in (x_{i,k}, x_{i+1,k}] \quad \text{per } i = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Abbiamo che $u_{c,k} \rightarrow u_c$ in $L^1(I)$ per $k \rightarrow \infty$. Infatti, la funzione u_c è continua su $[-L, L]$ (segue dal fatto che $D^c u(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in I$ e dalle proprietà di continuità delle misure), quindi è uniformemente continua, cioè

$$\forall \eta > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in [-L, L] \text{ tali che } |x - y| < \delta \implies |u_c(x) - u_c(y)| < \eta.$$

Allora, dato $\eta > 0$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{4L}{k+1} < \delta$, abbiamo che $|u_c(x) - u_{c,k}(x)| < \eta$ per ogni $x \in [-L, L]$. Quindi, $\|u_{c,k} - u_c\|_{L^1(I)} \leq 2L\eta$. Inoltre, poichè $\phi(s) \leq \sigma_c s$ per ogni $s \geq 0$, vale che,

$$\begin{aligned} \sum_{J_{u_{c,k}}} \phi(\|u_{c,k}\|) &\leq \sigma_c \left(|u_c(x_{2,k})| + \sum_{i=2}^k |u_c(x_{i+1,k}) - u_c(x_{i,k})| \right) \\ &\leq \sigma_c \left(|D^c u|((-L, x_{2,k})) + \sum_{i=2}^k |D^c u|([x_{i,k}, x_{i+1,k})) \right) = \sigma_c |D^c u|(I). \end{aligned}$$

u_a) Consideriamo $\tilde{u}_a \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ un prolungamento di $u_a \in W^{1,1}(I)$. Poichè $W^{1,1}(\mathbb{R}) = W_0^{1,1}(\mathbb{R}) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})}}$, esiste una successione $\tilde{\varphi}_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\tilde{\varphi}_k \rightarrow \tilde{u}_a$ in $W^{1,1}(\mathbb{R})$ per $k \rightarrow \infty$. In particolare, $\varphi_k := \tilde{\varphi}_k|_I \in W^{2,\infty}(I)$ e $\varphi_k \rightarrow u_a$ in $W^{1,1}(I)$ per $k \rightarrow \infty$. Inoltre,

$$\int_I f(\varphi'_k, 1) dx \rightarrow \int_I f(u'_a, 1) dx = \int_I f(u', 1) dx. \quad (2.8)$$

Infatti, poichè la funzione $s \mapsto f(s, 1)$ è lipschitziana (con costante di lipschitz $c_L \geq 0$),

$$\left| \int_I f(\varphi'_k, 1) - f(u'_a, 1) dx \right| \leq c_L \int_I |\varphi'_k - u'_a| dx \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty.$$

Poniamo $u_{a,k} = \varphi_k$.

Definiamo $u_k = u_{a,k} + u_{c,k} + u_{j,k}$. Tale $u_k \in SBV(I) \cap W^{2,\infty}(I \setminus J_k)$, dove J_k è l'insieme dei salti di u_k :

$$J_k = J_u^k \sqcup J_{u_{c,k}},$$

con $\#J_k \leq \#J_u^k + k$. In particolare, $Du_k = u'_{a,k} + \sum_{t \in J_k} \llbracket u_k(t) \rrbracket \delta_t$ e $\llbracket u_k \rrbracket = \llbracket u_{j,k} \rrbracket + \llbracket u_{c,k} \rrbracket$. Inoltre, $u_k \rightarrow u$ in $L^1(I)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale che

$$\mathcal{F}(u_k) = \int_I f(u'_{a,k}, 1) dx + \sum_{J_k} \phi(\llbracket u_k \rrbracket) = \int_I f(\varphi'_k, 1) dx + \sum_{J_k} \phi(\llbracket u_k \rrbracket)$$

e

$$\sum_{J_k} \phi(\llbracket u_k \rrbracket) = \sum_{J_u^k} \phi(\llbracket u \rrbracket) + \sum_{J_{u_{c,k}}} \phi(\llbracket u_{c,k} \rrbracket) \leq \sum_{J_u} \phi(\llbracket u \rrbracket) + \sigma_c |D^c u|(I).$$

Allora, da [2.8](#),

$$\limsup_k \mathcal{F}(u_k) \leq \int_I f(u', 1) dx + \sigma_c |D^c u|(I) + \sum_{J_u} \phi(\llbracket u \rrbracket) = \mathcal{F}(u).$$

□

2.2 Disuguaglianza del Γ -lim inf per il modello 1D.

Proposizione 2.2.1. *Sia $(u_h, d_h) \in L^1(I) \times L^1(I)$ tale che $(u_h, d_h) \rightarrow (u, d)$ in $L^1(I) \times L^1(I)$ per $h \rightarrow 0$ e $\liminf_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}_h(u_h, d_h) < +\infty$. Allora $u \in BV(I)$, $\|u\|_\infty \leq K$, $d = 0$ q.o. in I e*

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}_h(u_h, d_h).$$

Dimostrazione. La dimostrazione è suddivisa in diversi passaggi.

1. Nel primo step dimostriamo le proprietà delle funzioni limite u e d . Poichè $(u_h, d_h) \rightarrow (u, d)$ in $L^1(I) \times L^1(I)$ per $h \rightarrow 0$, esiste una sottosuccessione di (u_h, d_h) (che non rinominiamo) tale che $u_h \rightarrow u$ q.o., $d_h \rightarrow d$ q.o. e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}_h(u_h, d_h) = \liminf_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}_h(u_h, d_h) < +\infty.$$

In particolare, esiste $C > 0$ tale che $\sup_h \mathcal{F}_h(u_h, d_h) \leq C$. Allora, per ogni $h > 0$, $(u_h, d_h) \in \text{dom} \mathcal{F}_h$, cioè, $u_h, d_h \in \mathbb{P}_h^1$, $\|u_h\|_\infty \leq K$ e $d_h \in [0, 1]$. Per ogni $h > 0$ vale che

$$C \geq \mathcal{F}_h(u_h, d_h) \geq \frac{G_c}{2} \frac{1}{\epsilon_h} \int_I |d_h|^2 dx,$$

da cui $\|d_h\|_{L^2(I)} \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$. Poichè $\|d_h\|_{L^1(I)} \leq |I|^{1/2} \|d_h\|_{L^2(I)}$, passando al limite per $h \rightarrow 0$, otteniamo $0 = \lim_{h \rightarrow 0} \|d_h\|_{L^1(I)} = \|d\|_{L^1(I)}$, cioè $d = 0$ q.o.. Inoltre, $\|u\|_\infty \leq K$ perchè $u_h \rightarrow u$ q.o. per $h \rightarrow 0$ e $\|u_h\|_\infty \leq K$ per ogni h . Dimostriamo che $u \in BV(I)$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ introduciamo un insieme $X^m = \{x_i^m\}_{i=0}^{m+1}$ di punti tali che $x_0^m = -L$, $x_{m+1}^m = L$, $x_0^m < x_1^m < \dots < x_m^m < x_{m+1}^m$ e

- $d_h(x_i^m) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$ e per ogni $i = 1, \dots, m$;

- $\sup_{i=0,\dots,m} |I_i^m| \rightarrow 0$ per $m \rightarrow \infty$, dove $I_i^m = [x_i^m, x_{i+1}^m]$.

Per ogni $i = 1, \dots, m$ esiste un elemento $e_{i,h}^m \in \mathcal{T}_h$ tale che $x_i^m \in e_{i,h}^m$. Poichè $d_h \in \mathbb{P}_h^1$, esiste almeno un nodo $x_{i,h}^m$ di $e_{i,h}^m$ tale che $0 \leq d_h(x_{i,h}^m) \leq d_h(x_i^m)$. Poniamo $x_{0,h}^m = -L$, $x_{m+1,h}^m = L$ e $I_{i,h}^m = [x_{i,h}^m, x_{i+1,h}^m]$ per ogni $i = 0, \dots, m$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, dalla prima proprietà di X^m , esiste $h_m > 0$ tale che $d_h(x_{i,h}^m) \leq d_h(x_i^m) < 1/4$ per ogni $h < h_m$ e per ogni $i = 1, \dots, m$. Dimostriamo che esiste $N > 0$ tale che per ogni $m \in \mathbb{N}$ e per ogni $h < h_m$,

$$N_h^m := \#\{I_{i,h}^m : \sup_{I_{i,h}^m} d_h > 1/2\} < N.$$

Consideriamo $m \in \mathbb{N}$, $h < h_m$ ed $i \in \{0, \dots, m\}$ tale che $\sup_{I_{i,h}^m} d_h > 1/2$. Poichè $h < h_m$, $\inf_{I_{i,h}^m} d_h < 1/4$. Allora, dal fatto che $d_h \in C^0(I_{i,h}^m)$, esiste un intervallo $[x_1, x_2] \subset I_{i,h}^m$ tale che (rinominando eventualmente gli indici) $d_h(x_1) = 1/4$ e $d_h(x_2) = 1/2$. Utilizzando il cambio di variabile $y = \frac{x - x_1}{\epsilon_h}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} & \frac{G_c}{2} \int_{I_{i,h}^m} \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2(x) + \epsilon_h |d_h'(x)|^2 dx \geq \frac{G_c}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2(x) + \epsilon_h |d_h'(x)|^2 dx \\ & = \frac{G_c}{2} \int_0^{\frac{x_2-x_1}{\epsilon_h}} \left(\frac{1}{\epsilon_h} d_h^2(y\epsilon_h + x_1) + \epsilon_h \left| \frac{1}{\epsilon_h} (d_h(y\epsilon_h + x_1))' \right|^2 \right) \epsilon_h dy \\ & = \frac{G_c}{2} \int_0^{\frac{x_2-x_1}{\epsilon_h}} d_h^2(y\epsilon_h + x_1) + |(d_h(y\epsilon_h + x_1))'|^2 dy \\ & \geq \frac{G_c}{2} \left| \int_0^{\frac{x_2-x_1}{\epsilon_h}} 2d_h(y\epsilon_h + x_1) \cdot (d_h(y\epsilon_h + x_1))' dy \right| = \frac{G_c}{2} \left| [d_h^2(y\epsilon_h + x_1)]_{y=0}^{y=\frac{x_2-x_1}{\epsilon_h}} \right| \\ & = \frac{G_c}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = \frac{G_c}{2} \left(\frac{3}{16} \right) > \frac{G_c}{16}. \end{aligned}$$

Sommando sugli indici $i \in \{0, \dots, m\}$ tali che $\sup_{I_{i,h}^m} d_h > 1/2$, otteniamo che

$$C > \frac{G_c}{16} N_h^m,$$

quindi poniamo $N = \frac{16}{G_c} C$. Sia $I_h^m = \bigcup \{I_{i,h}^m : \sup_{I_{i,h}^m} d_h > 1/2\}$. Per ogni $h < h_m$ definiamo la funzione u_h^m come

$$u_h^m(x) = \begin{cases} u_h(x) & I \setminus I_h^m, \\ u_h(x_{i,h}^m) + (u_h(x_{i+1,h}^m) - u_h(x_{i,h}^m)) \chi_{[\hat{x}_i, x_{i+1,h}^m]} & I_{i,h}^m \subset I_h^m, \end{cases}$$

dove $\hat{x}_i \in (x_{i,h}^m, x_{i+1,h}^m)$. Osserviamo che $u_h^m \in BV(I)$. In particolare,

$$Du_h^m = u_h' \chi_{I \setminus I_h^m} + \sum_{i=1}^{N_h^m} (u_h(x_{i+1,h}^m) - u_h(x_{i,h}^m)) \delta_{\hat{x}_i}.$$

Dimostriamo che la successione $(u_h^m)_h$ è limitata in $BV(I)$. In $I \setminus I_h^m$ abbiamo che $u_h^m = u_h$ e $\|d_h\|_\infty \leq 1/2$, quindi $a_h(d_h) \geq a(1/2) = 1/4$, perchè a è decrescente in $[0, 1]$ e $d_h \in [0, 1]$. Poichè $f(s, \cdot)$ è crescente e $f(\cdot, 1/4)$ è convessa, otteniamo che

$$C \geq \int_{I \setminus I_h^m} f(u_h', a_h(d_h)) \, dx \geq \int_{I \setminus I_h^m} f(u_h', \frac{1}{4}) \, dx \geq \int_{I \setminus I_h^m} \frac{1}{4} \sigma_c |u_h'| - \frac{1}{16} \frac{\sigma_c^2}{2E_0} \, dx,$$

cioè, $|Du_h^m|(I \setminus I_h^m) = \int_{I \setminus I_h^m} |u_h'| \, dx \leq C'$, dove C' è indipendente da h e da m . Inoltre,

$$|Du_h^m|(I_h^m) = \sum_{i=1}^{N_h^m} |[[u_h^m(\hat{x}_i)]]| = \sum_{i=1}^{N_h^m} |u_h(x_{i+1,h}^m) - u_h(x_{i,h}^m)| \leq 2NK.$$

Quindi, $\|Du_h^m\|_{\mathcal{M}_b(I)} = |Du_h^m|(I) \leq C' + 2NK =: \tilde{C}$ (indipendentemente da h e da m). Osserviamo anche che $\|u_h^m\|_{L^1(I)} \leq |I|K$. Allora, per il Teorema [1.1.3](#), esiste una sottosuccessione (che non rinominiamo) ed esiste $u^m \in BV(I)$ tale che u_h^m converge ad u^m debolmente* in $BV(I)$ per $h \rightarrow 0$. Abbiamo che $u^m = u$ in $I \setminus \lim_{h \rightarrow 0} I_h^m =: I \setminus I^m$ [1](#). Infatti, poichè $u_h \rightarrow u$ in $L^1(I)$ ed $u_h^m \rightarrow u^m$ in $L^1(I)$, con $u, u^m \in L^\infty(I)$, otteniamo che

$$\begin{aligned} u_h \chi_{I \setminus I_h^m} &\rightarrow u \chi_{I \setminus I^m} \quad \text{in } L^1(I), \text{ per } h \rightarrow 0, \\ u_h^m \chi_{I \setminus I_h^m} &= u_h \chi_{I \setminus I_h^m} \rightarrow u^m \chi_{I \setminus I^m} \quad \text{in } L^1(I), \text{ per } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

perchè,

$$\begin{aligned} \|u_h \chi_{I \setminus I_h^m} - u \chi_{I \setminus I^m}\|_{L^1(I)} &= \|u_h \chi_{I \setminus I_h^m} - u \chi_{I \setminus I^m} + u \chi_{I \setminus I_h^m} - u \chi_{I \setminus I_h^m}\|_{L^1(I)} \\ &\leq \|u_h - u\|_{L^1(I)} + K \|\chi_{I \setminus I_h^m} - \chi_{I \setminus I^m}\|_{L^1(I)} \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0, \\ \|u_h^m \chi_{I \setminus I_h^m} - u^m \chi_{I \setminus I^m}\|_{L^1(I)} &= \|u_h^m \chi_{I \setminus I_h^m} - u^m \chi_{I \setminus I^m} + u^m \chi_{I \setminus I_h^m} - u^m \chi_{I \setminus I_h^m}\|_{L^1(I)} \\ &\leq \|u_h^m - u^m\|_{L^1(I)} + \|u^m\|_\infty \|\chi_{I \setminus I_h^m} - \chi_{I \setminus I^m}\|_{L^1(I)} \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dall'unicità del limite in $L^1(I)$ concludiamo che $u = u^m$ in $I \setminus I^m$. Inoltre, dalla semicontinuità inferiore della norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_b(I)}$ sotto la convergenza debole* in $\mathcal{M}_b(I)$, otteniamo che

$$\|Du\|_{\mathcal{M}_b(I \setminus I^m)} = |Du|(I \setminus I^m) \leq |Du^m|(I) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \|Du_h^m\|_{\mathcal{M}_b(I)} \leq \tilde{C}.$$

¹Osserviamo che passando a sottosuccessioni $\exists \lim_{h \rightarrow 0} I_h^m$ nel senso della distanza di Hausdorff. Procediamo come nel Teorema [1.2.8](#); estraendo una sottosuccessione, possiamo supporre che il numero di intervalli che compongono I_h^m sia uguale a $n < N$ per ogni h , cioè $I_h^m = \bigcup_{i=1}^n [a_{i,h}^m, b_{i,h}^m]$; Inoltre, applicando il Teorema di Bolzano-Weierstrass alle successioni $(a_{i,h}^m)_h$ e $(b_{i,h}^m)_h$, abbiamo che, estraendo ulteriormente delle sottosuccessioni, $a_{i,h}^m \rightarrow a_i^m$ e $b_{i,h}^m \rightarrow b_i^m$ per $h \rightarrow 0$ (oppure utilizziamo il fatto che $a_{i,h}^m = x_{i,h}^m$ con $|x_{i,h}^m - x_i^m| \leq h$). Quindi, $I^m = \bigcup_{i=1}^n [a_i^m, b_i^m]$.

e

$$\|u\|_{BV(I \setminus I^m)} \leq \|u\|_{L^1(I)} + \tilde{C}.$$

Poichè $\sup_{i=0, \dots, m} |I_i^m| \rightarrow 0$ per $m \rightarrow \infty$, allora $I \setminus I^m \rightarrow I \setminus \bigcup_{j=1}^n \{x_j\}$ per $m \rightarrow \infty$, dove $n < N$. Dimostriamo che $u \in BV(I \setminus \bigcup_{j=1}^n \{x_j\})$. Per ogni $\phi \in C_c^1(I \setminus \bigcup_{j=1}^n \{x_j\})$ tale che $\|\phi\|_\infty \leq 1$, esiste $m \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che $\phi \in C_c^1(I \setminus I^m)$, quindi,

$$\int_{I \setminus \bigcup_{j=1}^n \{x_j\}} u \phi' dx = \int_{I \setminus I^m} u \phi' dx \leq V(u, I \setminus I^m) = |Du|(I \setminus I^m) \leq \tilde{C},$$

da cui $V(u, I \setminus \bigcup_{j=1}^n \{x_j\}) \leq \tilde{C}$. Concludiamo che $u \in BV(I \setminus \bigcup_{j=1}^n \{x_j\})$ grazie alla Proposizione [1.1.1](#). In particolare,

$$\|u\|_{BV(I \setminus \bigcup_{j=1}^n \{x_j\})} \leq \|u\|_{L^1(I)} + \tilde{C}.$$

Infine, per la finitezza di $\bigcup_{j=1}^n \{x_j\}$ ed il fatto che $\|u\|_\infty < \infty$, abbiamo che $u \in BV(I)$. Infatti $u \in L^1(I)$ e $Du = Du_\perp \left(I \setminus \bigcup_{j=1}^n \{x_j\} \right) + \sum_{j=1}^n \llbracket u(x_j) \rrbracket \delta_{x_j}$, dove $\llbracket u(x_j) \rrbracket$ può essere uguale a 0 per qualche j .

2. Nel secondo step dimostriamo che

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}_h(u_h, d_h).$$

Utilizziamo la seguente notazione: se $I' \subset I$, poniamo

$$\mathcal{F}_h(u_h, d_h, I') = \int_{I'} f(u'_h, a_h(d_h)) dx + \frac{G_c}{2} \int_{I'} \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d'_h|^2 dx.$$

Inoltre, per ogni $e_h \in \mathcal{T}_h$ indichiamo con $f(u'_h, a_h(d_h), e_h)$ la restrizione di $f(u'_h, a_h(d_h))$ all'elemento e_h .

In un intorno dei punti di salto. Per $t > 0$, consideriamo l'insieme

$$J_u^t = \{x \in J_u : \llbracket u(x) \rrbracket \geq t\}.$$

Poichè $u \in BV(I)$, $N^t = \#J_u^t < +\infty$. Infatti, $+\infty > |D^j u|(I) = \sum_{J_u} \llbracket u \rrbracket \geq \sum_{J_u^t} \llbracket u \rrbracket \geq \sum_{J_u^t} t = tN^t$. Sia $\delta > 0$. Definiamo l'insieme

$$J_u^{t, \delta} = \{x \in I : \text{dist}(x, J_u^t) \leq \delta\}.$$

Per δ sufficientemente piccolo, l'insieme $J_u^{t, \delta}$ è un'unione finita di intervalli disgiunti, cioè

$J_u^{t,\delta} = \bigsqcup_{x \in J_u^t} [x - \delta, x + \delta]$. Poichè

$$\mathcal{F}_h(u_h, d_h) \geq \sum_{x \in J_u^t} \mathcal{F}_h(u_h, d_h, [x - \delta, x + \delta]),$$

consideriamo un singolo $x_0 \in J_u^t$. Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che $x_0 = 0$. Poichè $d_h \rightarrow 0$ q.o. e $u_h \rightarrow u$ q.o., esiste $\delta > 0$ tale che $d_h(\pm\delta) \rightarrow 0$ e $u_h(\pm\delta) \rightarrow u(\pm\delta)$ per $h \rightarrow 0$. Poniamo $x^\pm := \pm\delta$. Siano $e_h^\pm \in \mathcal{T}_h$ gli elementi della mesh tali che $x^\pm \in e_h^\pm$ ed indichiamo con x_h^+ il nodo sinistro dell'elemento e_h^+ e con x_h^- il nodo destro dell'elemento e_h^- . Osserviamo che per ogni elemento $e_h = [x_h^l, x_h^r] \in \mathcal{T}_h$ vale che $d_h(x_h^r) - d_h(x_h^l) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$. Infatti,

$$\begin{aligned} C \geq \mathcal{F}_h(u_h, d_h, e_h) &\geq \frac{G_c}{2} \int_{e_h} \epsilon_h |d_h'|^2 dx = \frac{G_c}{2} \epsilon_h \int_{e_h} \left| \frac{d_h(x_h^r) - d_h(x_h^l)}{|e_h|} \right|^2 dx \\ &= \frac{G_c}{2} \epsilon_h \frac{|d_h(x_h^r) - d_h(x_h^l)|^2}{|e_h|^2} |e_h| = \frac{G_c}{2} \frac{\epsilon_h}{|e_h|} |d_h(x_h^r) - d_h(x_h^l)|^2 \\ &\geq \frac{G_c}{2} \frac{\epsilon_h}{h} |d_h(x_h^r) - d_h(x_h^l)|^2, \end{aligned}$$

cioè,

$$\frac{h}{\epsilon_h} \frac{2}{G_c} C \geq |d_h(x_h^r) - d_h(x_h^l)|^2. \quad (2.9)$$

Poichè $h = o(\epsilon_h)$ per $h \rightarrow 0$, segue che $d_h(x_h^r) - d_h(x_h^l) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$. In particolare, consideriamo gli elementi $e_h^\pm = [x_h^{l,\pm}, x_h^{r,\pm}]$. Poichè $d_h(x^\pm) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$, abbiamo che $d_h(x_h^\pm) \rightarrow 0$ e $a_h(d_h)|_{e_h^\pm} \rightarrow 1$ per $h \rightarrow 0$. Infatti, $|d_h(x_h^\pm) - d_h(x^\pm)| \leq |d_h(x_h^{r,\pm}) - d_h(x_h^{l,\pm})| \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$, da cui $|d_h(x_h^\pm)| \leq |d_h(x_h^\pm) - d_h(x^\pm)| + |d_h(x^\pm)| \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$. Inoltre, per il Teorema della media integrale, $a_h(d_h)|_{e_h^\pm} = \frac{1}{|e_h^\pm|} \int_{e_h^\pm} a(d_h(t)) dt = a(d_h(t_h^\pm))$, con $t_h^\pm \in e_h^\pm$. Poichè $d_h(t_h^\pm) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$ ed a è una funzione continua, otteniamo che $a(d_h(t_h^\pm)) \rightarrow 1$ per $h \rightarrow 0$.

Definiamo $I_h = [x_h^-, x_h^+]$ e $J_h = \{e_h \in \mathcal{T}_h : e_h \subset I_h\}$. Siano $a_h(\hat{d}_h) = \min\{a_h(d_h)|_{e_h} : e_h \in J_h\}$ ed $\hat{e}_h \in J_h$ un elemento tale che $a_h(\hat{d}_h) = a_h(d_h)|_{\hat{e}_h}$. Indichiamo con $J_h^\# = \{e_h \in J_h : |u_h'|_{e_h}| \geq a_h(\hat{d}_h) \frac{\sigma_c}{E_0}\}$ e con $I_h^\# = \bigcup_{e_h \in J_h^\#} e_h$. Definiamo la funzione \bar{u}_h' come

$$\bar{u}_h' = \begin{cases} u_h' & \text{in } I_h \setminus (I_h^\# \cup \hat{e}_h), \\ a_h(\hat{d}_h) \frac{\sigma_c}{E_0} \text{sign}(u_h') & \text{in } I_h^\# \setminus \hat{e}_h, \\ \frac{1}{|\hat{e}_h|} \left(\sum_{J_h^\# \cup \{\hat{e}_h\}} |e_h| u_h' - \sum_{J_h^\# \setminus \{\hat{e}_h\}} |e_h| \bar{u}_h' \right) & \text{in } \hat{e}_h, \end{cases} \quad (2.10)$$

e la funzione \bar{u}_h come

$$\bar{u}_h(x) = u_h(x_h^-) + \int_{x_h^-}^x \bar{u}'_h(r) \, dr, \quad x \in I_h.$$

Osserviamo che $|\bar{u}'_h| \leq |u'_h|$, $|\bar{u}'_h| \leq a_h(\hat{d}_h) \frac{\sigma_c}{E_0}$ in $I_h \setminus \hat{e}_h$ e che $\bar{u}_h(x_h^+) = u_h(x_h^+)$. Infatti,

$$\begin{aligned} \bar{u}_h(x_h^+) &= u_h(x_h^-) + \int_{x_h^-}^{x_h^+} \bar{u}'_h(r) \, dr = u_h(x_h^-) + \sum_{J_h \setminus (J_h^\# \cup \{\hat{e}_h\})} |e_h| u'_h \\ &\quad + \sum_{J_h^\# \setminus \{\hat{e}_h\}} |e_h| \bar{u}'_h + |\hat{e}_h| \frac{1}{|\hat{e}_h|} \left(\sum_{J_h^\# \cup \{\hat{e}_h\}} |e_h| u'_h - \sum_{J_h^\# \setminus \{\hat{e}_h\}} |e_h| \bar{u}'_h \right) \\ &= u_h(x_h^-) + \sum_{J_h \setminus (J_h^\# \cup \{\hat{e}_h\})} |e_h| u'_h + \sum_{J_h^\# \cup \{\hat{e}_h\}} |e_h| u'_h \\ &= u_h(x_h^-) + \int_{x_h^-}^{x_h^+} u'_h(r) \, dr = u_h(x_h^+). \end{aligned}$$

Allora,

$$\begin{aligned} |u_h(x_h^+) - u_h(x_h^-)| &\leq \int_{x_h^-}^{x_h^+} |\bar{u}'_h| \, dx = \int_{I_h \setminus \hat{e}_h} |\bar{u}'_h| \, dx + \int_{\hat{e}_h} |\bar{u}'_h| \, dx \\ &\leq a_h(\hat{d}_h) \frac{\sigma_c}{E_0} 2\delta + |\hat{e}_h| |\bar{u}'_h|_{\hat{e}_h} \leq \frac{2\sigma_c}{E_0} \delta + |\hat{e}_h| |\bar{u}'_h|_{\hat{e}_h}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Per definizione di \bar{u}'_h vale che

$$\int_{I_h \setminus (I_h^\# \cup \hat{e}_h)} f(\bar{u}'_h, a_h(d_h)) \, dx = \int_{I_h \setminus (I_h^\# \cup \hat{e}_h)} f(u'_h, a_h(d_h)) \, dx.$$

Inoltre, dal Lemma [2.2.2](#), segue che

$$\begin{aligned} \int_{I_h^\# \cup \hat{e}_h} f(u'_h, a_h(d_h)) \, dx &= \sum_{e_h \in (J_h^\# \cup \{\hat{e}_h\})} |e_h| f(u'_h, a_h(d_h), e_h) \\ &\geq \left(\sum_{e_h \in (J_h^\# \setminus \{\hat{e}_h\})} |e_h| f(\bar{u}'_h, a_h(d_h), e_h) \right) + |\hat{e}_h| f(\bar{u}'_h, a_h(\hat{d}_h), \hat{e}_h) \\ &= \int_{I_h^\# \setminus \hat{e}_h} f(\bar{u}'_h, a_h(d_h)) \, dx + \int_{\hat{e}_h} f(\bar{u}'_h, a_h(\hat{d}_h)) \, dx. \end{aligned}$$

Dalla convessità di $f(\cdot, r)$ per ogni $r \geq 0$ (2.3),

$$\begin{aligned} \int_{\hat{e}_h} f(\bar{u}'_h, a_h(\hat{d}_h)) dx &\geq \int_{\hat{e}_h} a_h(\hat{d}_h) \sigma_c |\bar{u}'_h| dx - \int_{\hat{e}_h} a_h(\hat{d}_h)^2 \frac{\sigma_c^2}{2E_0} dx \\ &= |\hat{e}_h| a_h(\hat{d}_h) \sigma_c |\bar{u}'_h|_{\hat{e}_h} - |\hat{e}_h| a_h(\hat{d}_h)^2 \frac{\sigma_c^2}{2E_0} \\ &= a_h(\hat{d}_h) \sigma_c j_h - o(1), \end{aligned}$$

dove $j_h = |\hat{e}_h| |\bar{u}'_h|_{\hat{e}_h}$ (2). Siano $M_h = \max \{d_h(\hat{x}_h^r), d_h(\hat{x}_h^l)\}$ e $m_h = \min \{d_h(\hat{x}_h^r), d_h(\hat{x}_h^l)\}$. Dal fatto che $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è decrescente e lipschitziana (osserviamo che $|a'| \leq 2$ in $[0, 1]$), abbiamo che

$$a_h(\hat{d}_h) \geq a(M_h) \geq a(m_h) - 2(M_h - m_h).$$

Poichè, da (2.9), $d_h(\hat{x}_h^r) - d_h(\hat{x}_h^l) = o(1)$ per $h \rightarrow 0$ e j_h è limitato uniformemente in h , otteniamo che

$$\int_{\hat{e}_h} f(\bar{u}'_h, a_h(\hat{d}_h)) dx \geq a(m_h) \sigma_c j_h - o(1). \quad (2.12)$$

Consideriamo il termine $\frac{G_c}{2} \int_{I_h} \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d'_h|^2 dx$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{G_c}{2} \int_{I_h} \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d'_h|^2 dx &\geq \min \left\{ \frac{G_c}{2} \int_{I_h} \frac{1}{\epsilon_h} w_h^2 + \epsilon_h |w'_h|^2 dx : w_h \in \mathbb{P}_h^1, \right. \\ &\quad \left. w_h(\hat{x}_h^l) = w_h(\hat{x}_h^r) = m_h, w_h(x_h^\pm) = d_h(x_h^\pm) \right\}. \end{aligned}$$

Utilizzando il cambio di variabile $x = \epsilon_h y$, per ogni $w_h \in \mathbb{P}_h^1$ tale che $w_h(\hat{x}_h^l) = w_h(\hat{x}_h^r) = m_h$ e $w_h(x_h^\pm) = d_h(x_h^\pm)$, vale che

$$\begin{aligned} \int_{x_h^-}^{x_h^+} \frac{1}{\epsilon_h} w_h^2(x) + \epsilon_h |w'_h(x)|^2 dx &= \int_{x_h^-/\epsilon_h}^{x_h^+/\epsilon_h} \left(\frac{1}{\epsilon_h} w_h^2(\epsilon_h y) + \epsilon_h \left| \frac{1}{\epsilon_h} (w_h(\epsilon_h y))' \right|^2 \right) \epsilon_h dy \\ &= \int_{x_h^-/\epsilon_h}^{x_h^+/\epsilon_h} z_h^2(y) + |z'_h(y)|^2 dy, \end{aligned}$$

dove $z_h(y) = w_h(\epsilon_h y)$ per ogni $y \in [x_h^-/\epsilon_h, x_h^+/\epsilon_h]$. In particolare $z_h(\hat{x}_h^l/\epsilon_h) = z_h(\hat{x}_h^r/\epsilon_h) = m_h$ e $z_h(x_h^\pm/\epsilon_h) = d_h(x_h^\pm)$. Inoltre, abbiamo che $z_h \in \mathbb{P}_h^1$, dove con \mathbb{P}_h^1 indichiamo lo spazio delle funzioni lineari a tratti sulla mesh \mathcal{T}_h , ottenuta riscaldando \mathcal{T}_h per il fattore $\frac{1}{\epsilon_h}$

²Osserviamo che $j_h = |\hat{e}_h| |\bar{u}'_h|_{\hat{e}_h} = |\bar{u}_h(\hat{x}_h^r) - \bar{u}_h(\hat{x}_h^l)| \leq 2K + \frac{\sigma_c}{E_0} 4\delta$. Infatti, $\bar{u}_h(\hat{x}_h^l) = u_h(x_h^-) + \int_{x_h^-}^{\hat{x}_h^l} \bar{u}'_h dx$, da cui $|\bar{u}_h(\hat{x}_h^l)| \leq K + \frac{\sigma_c}{E_0} 2\delta$, e $\bar{u}_h(\hat{x}_h^r) = \bar{u}_h(x_h^+) - \int_{\hat{x}_h^r}^{x_h^+} \bar{u}'_h dx = u_h(x_h^+) - \int_{\hat{x}_h^r}^{x_h^+} \bar{u}'_h dx$, da cui $|\bar{u}_h(\hat{x}_h^r)| \leq K + \frac{\sigma_c}{E_0} 2\delta$. Allora, $|\bar{u}_h(\hat{x}_h^r) - \bar{u}_h(\hat{x}_h^l)| \leq |\bar{u}_h(\hat{x}_h^r)| + |\bar{u}_h(\hat{x}_h^l)| \leq 2K + \frac{\sigma_c}{E_0} 4\delta$.

e definita su $[x_h^-/\epsilon_h, x_h^+/\epsilon_h]$. Allora,

$$\frac{G_c}{2} \int_{I_h} \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d'_h|^2 dx \geq \min \left\{ \frac{G_c}{2} \int_{x_h^-/\epsilon_h}^{x_h^+/\epsilon_h} z_h^2 + |z'_h|^2 dx : z_h \in \mathbb{P}_h^1, \right. \\ \left. z_h(\hat{x}_h^l/\epsilon_h) = z_h(\hat{x}_h^r/\epsilon_h) = m_h, z_h(x_h^\pm/\epsilon_h) = d_h(x_h^\pm) \right\}. \quad (2.13)$$

Per ogni $z_h \in \mathbb{P}_h^1$, consideriamo l'estensione $\tilde{z}_h : \left[\frac{x_h^-}{\epsilon_h} - 1, \frac{x_h^+}{\epsilon_h} + 1 \right] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\tilde{z}_h(x) = \begin{cases} z_h(x_h^-/\epsilon_h) \left(x - \frac{x_h^-}{\epsilon_h} + 1 \right) & \text{se } x \in \left[\frac{x_h^-}{\epsilon_h} - 1, \frac{x_h^-}{\epsilon_h} \right], \\ z_h(x) & \text{se } x \in \left[\frac{x_h^-}{\epsilon_h}, \frac{x_h^+}{\epsilon_h} \right], \\ z_h(x_h^+/\epsilon_h) \left(\frac{x_h^+}{\epsilon_h} + 1 - x \right) & \text{se } x \in \left[\frac{x_h^+}{\epsilon_h}, \frac{x_h^+}{\epsilon_h} + 1 \right]. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\int_{x_h^+/\epsilon_h}^{x_h^+/\epsilon_h+1} \tilde{z}_h^2 + |\tilde{z}'_h|^2 dx = z_h^2(x_h^+/\epsilon_h) \int_{x_h^+/\epsilon_h}^{x_h^+/\epsilon_h+1} \left(\frac{x_h^+}{\epsilon_h} + 1 - x \right)^2 + 1 dx \\ = z_h^2(x_h^+/\epsilon_h) \int_0^1 (1-y)^2 + 1 dy = \frac{4}{3} z_h^2(x_h^+/\epsilon_h) = \frac{4}{3} d_h^2(x_h^+).$$

Poichè $d_h(x_h^+) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$, $\int_{x_h^+/\epsilon_h}^{x_h^+/\epsilon_h+1} \tilde{z}_h^2 + |\tilde{z}'_h|^2 dx = o(1)$ per $h \rightarrow 0$. Analogamente,

$\int_{x_h^-/\epsilon_h-1}^{x_h^-/\epsilon_h} \tilde{z}_h^2 + |\tilde{z}'_h|^2 dx = o(1)$ per $h \rightarrow 0$. Quindi, abbiamo che

$$\int_{x_h^-/\epsilon_h}^{x_h^+/\epsilon_h} z_h^2 + |z'_h|^2 dx = \int_{x_h^-/\epsilon_h-1}^{x_h^+/\epsilon_h+1} \tilde{z}_h^2 + |\tilde{z}'_h|^2 dx - o(1). \quad (2.14)$$

Per $R > 0$, introduciamo l'energia definita da $K_R(z) = \int_{(0,R)} z^2 + |z'|^2 dx$ ed indichiamo con $z_{R,h}$ la soluzione del seguente problema di minimo:

$$z_{R,h} = \operatorname{argmin} \{ K_R(z) : z \in H^1(0, R), z(0) = m_h, z(R) = 0 \}.$$

Siano $R_h^+ = \frac{x_h^+}{\epsilon_h} + 1 - \frac{\hat{x}_h^r}{\epsilon_h}$, $R_h^- = \frac{\hat{x}_h^l}{\epsilon_h} - \frac{x_h^-}{\epsilon_h} + 1$ e $\tilde{R}_h = \max\{R_h^+, R_h^-\}$. Osserviamo che 3

$$K_{\tilde{R}_h}(z_{\tilde{R}_h,h}) \leq K_{R_h^\pm}(z_{R_h^\pm,h}).$$

³Infatti, supponiamo che $R_h^+ \geq R_h^-$. Definiamo $\tilde{z}_{R_h^-,h} : [0, R_h^+] \rightarrow \mathbb{R}$ come $\tilde{z}_{R_h^-,h}(x) = z_{R_h^-,h}(x)$ se $x \in [0, R_h^-]$ e $\tilde{z}_{R_h^-,h}(x) = 0$ in $[R_h^-, R_h^+]$. Allora, $\tilde{z}_{R_h^-,h} \in H^1(0, R_h^+)$, $\tilde{z}_{R_h^-,h}(0) = m_h$ e $\tilde{z}_{R_h^-,h}(R_h^+) = 0$. Quindi, $K_{R_h^+}(z_{R_h^+,h}) \leq K_{R_h^+}(\tilde{z}_{R_h^-,h}) = K_{R_h^-}(z_{R_h^-,h})$.

Quindi,

$$\begin{aligned}
\int_{x_h^-/\epsilon_h-1}^{x_h^+/\epsilon_h+1} \tilde{z}_h^2 + |\tilde{z}'_h|^2 dx &\geq \int_{\hat{x}_h^r/\epsilon_h}^{x_h^+/\epsilon_h+1} \tilde{z}_h^2 + |\tilde{z}'_h|^2 dx + \int_{x_h^-/\epsilon_h-1}^{\hat{x}_h^l/\epsilon_h} \tilde{z}_h^2 + |\tilde{z}'_h|^2 dx \\
&= \int_0^{R_h^+} \tilde{z}_h^2(x + \hat{x}_h^r/\epsilon_h) + |\tilde{z}'_h(x + \hat{x}_h^r/\epsilon_h)|^2 dx \\
&\quad + \int_{-R_h^-}^0 \tilde{z}_h^2(x + \hat{x}_h^l/\epsilon_h) + |\tilde{z}'_h(x + \hat{x}_h^l/\epsilon_h)|^2 dx \\
&\geq K_{R_h^+}(z_{R_h^+,h}) + \int_0^{R_h^-} \tilde{z}_h^2(-x + \hat{x}_h^l/\epsilon_h) + |\tilde{z}'_h(-x + \hat{x}_h^l/\epsilon_h)|^2 dx \\
&\geq K_{R_h^+}(z_{R_h^+,h}) + K_{R_h^-}(z_{R_h^-,h}) \geq 2K_{\tilde{R}_h}(z_{\tilde{R}_h,h}) \geq 2m_h^2,
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dallo studio del problema di profilo ottimo⁴. Combinando le disuguaglianze (2.13) e (2.14), otteniamo che

$$\frac{G_c}{2} \int_{I_h} \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d'_h|^2 dx \geq G_c m_h^2 - o(1). \quad (2.15)$$

Sommando le disuguaglianze (2.12) e (2.15),

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{e}_h} f(\bar{u}'_h, a_h(\hat{d}_h)) dx + \frac{G_c}{2} \int_{I_h} \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d'_h|^2 dx &\geq a(m_h) \sigma_c j_h + G_c m_h^2 - o(1) \\
&\geq \phi(j_h) - o(1).
\end{aligned}$$

In particolare, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_h(u_h, d_h, I_h) &= \int_{I_h} f(u'_h, a_h(d_h)) dx + \frac{G_c}{2} \int_{I_h} \frac{1}{\epsilon_h} d_h^2 + \epsilon_h |d'_h|^2 dx \\
&\geq \int_{I_h \setminus \hat{e}_h} f(\bar{u}'_h, a_h(d_h)) dx + \phi(j_h) - o(1).
\end{aligned}$$

Poniamo $\hat{e}_h = [\hat{x}_h^-, \hat{x}_h^+]$ e definiamo la funzione $\hat{u}_h : I_h \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\hat{u}_h(x) = \begin{cases} \bar{u}_h(x) & \text{se } x \in I_h \setminus \hat{e}_h, \\ \bar{u}_h(\hat{x}_h^-) \chi_{[\hat{x}_h^-, \hat{x}_h)} + \bar{u}_h(\hat{x}_h^+) \chi_{[\hat{x}_h, \hat{x}_h^+]} & \text{se } x \in \hat{e}_h, \end{cases} \quad (2.16)$$

⁴Procediamo come nella nota precedente. Consideriamo l'estensione $\tilde{z}_{\tilde{R}_h,h} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\tilde{z}_{\tilde{R}_h,h}(x) = z_{\tilde{R}_h,h}(x)$ se $x \in [0, \tilde{R}_h]$ e 0 altrove. Allora, $\tilde{z}_{\tilde{R}_h,h} \in H^1(\mathbb{R}_+)$ e $\tilde{z}_{\tilde{R}_h,h}(0) = m_h$. Dallo studio del problema di profilo ottimo segue che $K_{\tilde{R}_h}(z_{\tilde{R}_h,h}) = \int_{\mathbb{R}^+} \tilde{z}_{\tilde{R}_h,h}^2 + |\tilde{z}'_{\tilde{R}_h,h}|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^+} (m_h e^{-x})^2 + |(m_h e^{-x})'|^2 dx = m_h^2$.

dove $\hat{x}_h \in (\hat{x}_h^-, \hat{x}_h^+)$. Dalla definizione di \hat{u}_h e di $j_h = |\hat{e}_h| |\bar{u}'_h| = |[\![\hat{u}_h]\!]|$, segue che

$$\mathcal{F}_h(u_h, d_h, I_h) \geq \int_{I_h} f(\hat{u}'_h, a_h(d_h)) dx + \phi(|[\![\hat{u}_h]\!]|) - o(1).$$

Osserviamo che in $I_h \setminus \hat{e}_h$ abbiamo che $|\hat{u}'_h| = |\bar{u}'_h| \leq a_h(\hat{d}_h) \frac{\sigma_c}{E_0} \leq \frac{\sigma_c}{E_0}$. Per il Lemma [2.2.3](#),

$$f(\hat{u}'_h, a_h(d_h)) \geq f(\hat{u}'_h, 1) - \tilde{C} |\hat{u}'_h| |1 - a_h(d_h)| \geq f(\hat{u}'_h, 1) - C'.$$

Da questo, concludiamo che

$$\mathcal{F}_h(u_h, d_h, I_h) \geq \int_{I_h} f(\hat{u}'_h, 1) dx + \phi(|[\![\hat{u}_h]\!]|) - o(1) - C'\delta.$$

Infine, possiamo ripetere lo stesso ragionamento per ogni $x_i \in J_u^t$, con $i = 1, \dots, N^t$. Per ogni $i = 1, \dots, N^t$, definiamo $x_{i,h}^\pm$ in modo analogo a x_h^\pm e poniamo $I_h^i = [x_{i,h}^-, x_{i,h}^+]$. Indichiamo con

$$J_{u,h}^{t,\delta} = \bigcup_{i=1}^{N^t} I_h^i$$

e definiamo la funzione \hat{u}_h in ogni intervallo I_h^i come in [\(2.16\)](#). Sommando sugli $i = 1, \dots, N^t$, otteniamo che

$$\mathcal{F}_h(u_h, d_h, J_{u,h}^{t,\delta}) \geq \int_{J_{u,h}^{t,\delta}} f(\hat{u}'_h, 1) dx + \sum_{i=1}^{N^t} \phi(|[\![\hat{u}_h(\hat{x}_{i,h})]\!]|) - o(1) - C'\delta. \quad (2.17)$$

Fuori dai punti di salto. Poichè $d_h \rightarrow 0$ q.o. in I , per il Teorema di Severini-Egorov $d_h \rightarrow 0$ quasi uniformemente in I , cioè, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $I_\epsilon \subset I$ tale che $|I_\epsilon| < \epsilon$ e $d_h \rightarrow 0$ uniformemente in $I \setminus I_\epsilon$ per $h \rightarrow 0$. Consideriamo l'insieme $I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)$. Dalla convergenza uniforme, per ogni $\gamma > 0$ esiste $h_{\gamma,\epsilon} > 0$ tale che $\|d_h\|_{L^\infty(I \setminus I_\epsilon)} \leq \gamma$ per ogni

$h < h_{\gamma, \epsilon}$ ⁵. Quindi, per ogni $h < h_{\gamma, \epsilon}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h(u_h, d_h, I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)) &\geq \int_{I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)} f(u'_h, a_h(d_h)) \, dx \\ &\geq \int_{I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)} f(u'_h, a(\gamma)) \, dx. \end{aligned}$$

Dalla convessità di $f(\cdot, r)$ per ogni $r \geq 0$, segue che

$$\begin{aligned} \int_{I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)} f(u'_h, a(\gamma)) \, dx &\geq \int_{I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)} a(\gamma) \sigma_c |u'_h| \, dx - \int_{I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)} a^2(\gamma) \frac{\sigma_c^2}{2E_0} \, dx \\ &\geq a(\gamma) \sigma_c \int_{I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)} |u'_h| \, dx - \frac{\sigma_c^2}{2E_0} \left| I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon) \right|. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Da questo, $\sup_{h < h_{\gamma, \epsilon}} \|u'_h\|_{L^1(I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon))} \leq \frac{C + \frac{\sigma_c^2}{2E_0} |I|}{a(\gamma) \sigma_c}$, cioè u'_h è limitata in $L^1(I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon))$

(osserviamo che per ogni $\gamma < 1/2$, $\frac{C + \frac{\sigma_c^2}{2E_0} |I|}{a(\gamma) \sigma_c} < \frac{C + \frac{\sigma_c^2}{2E_0} |I|}{a(1/2) \sigma_c}$, cioè, per γ sufficientemente piccolo la costante di limitatezza è indipendente da ϵ e da γ). Per il Lemma 2.2.3, abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h(u_h, d_h, I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)) &\geq \int_{I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)} f(u'_h, a(\gamma)) \, dx \quad (2.19) \\ &\geq \int_{I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)} f(u'_h, 1) \, dx - \tilde{C} |1 - a(\gamma)| \int_{I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)} |u'_h| \, dx \\ &\geq \int_{I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon)} f(u'_h, 1) \, dx - C' |1 - a(\gamma)|. \end{aligned}$$

Definiamo $\hat{u}_h = u_h$ in $I \setminus J_{u,h}^{t,\delta}$. Allora, sommando (2.17) e (2.19), otteniamo che per ogni $\epsilon > 0$, $\gamma > 0$, definitivamente per $h \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h(u_h, d_h) &\geq \mathcal{F}_h(u_h, d_h, I \setminus I_\epsilon) \\ &\geq \int_{I \setminus I_\epsilon} f(\hat{u}'_h, 1) \, dx + \sum_{i=1}^{N^t} \phi(|\llbracket \hat{u}_h(\hat{x}_{i,h}) \rrbracket|) - o(1) - C\delta - C'|1 - a(\gamma)| \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\geq \mathcal{G}(\hat{u}_h, I \setminus I_\epsilon) - o(1) - C\delta - C'|1 - a(\gamma)|, \quad (2.21)$$

⁵Osserviamo che I_ϵ non è necessariamente un'unione di elementi della mesh, quindi per avere che $a_h(d_h) \geq a(\gamma)$ in $I \setminus I_\epsilon$, scegliamo $h_{\gamma, \epsilon}$ come segue. Dalla convergenza uniforme in $I \setminus I_\epsilon$ esiste $h_{\gamma, \epsilon}^1 > 0$ tale che $\|d_h\|_{L^\infty(I \setminus I_\epsilon)} \leq \gamma/2$ per ogni $h < h_{\gamma, \epsilon}^1$. Inoltre, da (2.9), esiste h_2 tale che per ogni $h < h_2$ e per ogni elemento $e_h \in \mathcal{T}_h$, $|d_h(x_h^r) - d_h(x_h^l)| \leq \gamma/2$. Poniamo $h_{\gamma, \epsilon} = \min\{h_{\gamma, \epsilon}^1, h_2\}$. In questo modo, per ogni $h < h_{\gamma, \epsilon}$, abbiamo che $a_h(d_h)(x) \geq a(\gamma)$ per ogni $x \in I \setminus I_\epsilon$. Infatti, se $x \in e_h \subset I \setminus I_\epsilon$, allora $a_h(d_h)(x) \geq a(\gamma)$ perchè $h < h_{\gamma, \epsilon} \leq h_{\gamma, \epsilon}^1$. Se $e_h \cap I_\epsilon \neq \emptyset$, a meno di rinominare i nodi di e_h , poichè $d_h \in \mathbb{P}_h^1$, possiamo supporre che $d_h(x_h^l) \leq \gamma/2$. Allora, $|d_h(x_h^r)| \leq |d_h(x_h^r) - d_h(x_h^l)| + |d_h(x_h^l)| \leq \gamma$. In particolare, $d_h|_{e_h} \leq \gamma$, da cui $a_h(d_h)(x) \geq a(\gamma)$.

dove \mathcal{G} è definito come in (2.24).

Liminf. Osserviamo che per ogni $\epsilon > 0$, $\sup_h \|\hat{u}_h\|_{BV(I \setminus I_\epsilon)} < +\infty$. Infatti, $\|\hat{u}_h\|_{L^\infty(I)} \leq K + \frac{\sigma_c}{E_0} 2\delta^6$, da cui $\|\hat{u}_h\|_{L^1(I)} \leq 2L\|\hat{u}_h\|_{L^\infty(I)}$. Inoltre,

$$\begin{aligned} D\hat{u}_h &= u'_h \chi_{I \setminus J_{u,h}^{t,\delta}} + \bar{u}'_h \chi_{J_{u,h}^{t,\delta} \setminus \bigcup_{i=1}^{N^t} \hat{e}_{i,h}} + \sum_{i=1}^{N^t} [\hat{u}_h(\hat{x}_{i,h})] \delta_{\hat{x}_{i,h}} \\ &= u'_h \chi_{I \setminus J_{u,h}^{t,\delta}} + \bar{u}'_h \chi_{J_{u,h}^{t,\delta} \setminus \bigcup_{i=1}^{N^t} \hat{e}_{i,h}} + \sum_{i=1}^{N^t} (\bar{u}_h(\hat{x}_{i,h}^+) - \bar{u}_h(\hat{x}_{i,h}^-)) \delta_{\hat{x}_{i,h}}. \end{aligned}$$

Per definizione di \bar{u}'_h (2.10), $\|\bar{u}'_h \chi_{J_{u,h}^{t,\delta} \setminus \bigcup_{i=1}^{N^t} \hat{e}_{i,h}}\|_{L^1(I)} \leq \frac{\sigma_c}{E_0} 2L$. Per le stime fatte precedentemente, per ogni $i = 1, \dots, N^t$, $|\bar{u}_h(\hat{x}_{i,h}^+) - \bar{u}_h(\hat{x}_{i,h}^-)| \leq 2K + \frac{\sigma_c}{E_0} 4\delta$, da cui

$$|D^j \hat{u}_h|(I) = \sum_{i=1}^{N^t} |\bar{u}_h(\hat{x}_{i,h}^+) - \bar{u}_h(\hat{x}_{i,h}^-)| \leq N^t (2K + \frac{\sigma_c}{E_0} 4\delta).$$

Infine, da (2.18), u'_h è limitata in $L^1(I \setminus (J_{u,h}^{t,\delta} \cup I_\epsilon))$. Quindi, per il Teorema 1.1.3, esiste una sottosuccessione di \hat{u}_h (che non rinominiamo) ed esiste $u_{t,\delta} \in BV(I \setminus I_\epsilon)$ tale che $\hat{u}_h \xrightarrow{*} u_{t,\delta}$ in $BV(I \setminus I_\epsilon)$. Per definizione di \hat{u}_h , abbiamo che $u_{t,\delta} = u$ in $I \setminus J_u^{t,\delta}$, dove $J_u^{t,\delta} = \lim_{h \rightarrow 0} J_{u,h}^{t,\delta} = \bigsqcup_{x \in J_u^t} [x - \delta, x + \delta]$. Infatti, poichè $u_h \rightarrow u$ in $L^1(I)$ ed $\hat{u}_h \rightarrow u_{t,\delta}$ in $L^1(I)$, con $u, u_{t,\delta} \in L^\infty(I)$, otteniamo che

$$\begin{aligned} u_h \chi_{I \setminus J_{u,h}^{t,\delta}} &\rightarrow u \chi_{I \setminus J_u^{t,\delta}} \quad \text{in } L^1(I), \text{ per } h \rightarrow 0, \\ u_h \chi_{I \setminus J_{u,h}^{t,\delta}} &= \hat{u}_h \chi_{I \setminus J_{u,h}^{t,\delta}} \rightarrow u_{t,\delta} \chi_{I \setminus J_u^{t,\delta}} \quad \text{in } L^1(I), \text{ per } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Per l'unicità del limite in $L^1(I)$, concludiamo che $u_{t,\delta} = u$ in $I \setminus J_u^{t,\delta}$. Per ogni $x_i \in J_u^{t,\delta}$, indichiamo con $I_i = [x_i - \delta, x_i + \delta]$. Allora, passando eventualmente a sottosuccessioni, per ogni $i = 1, \dots, N^t$, esiste $\hat{x}_i = \lim_{h \rightarrow 0} \hat{x}_{i,h} \in I_i$ punto di salto di $u_{t,\delta}$ tale che

$$| [u_{t,\delta}(\hat{x}_i)] | \geq |u(x_i^+) - u(x_i^-)| - \frac{\sigma_c}{E_0} 2\delta.$$

Infatti, da (2.11), abbiamo che

$$|\hat{u}_h(\hat{x}_{i,h}^+) - \hat{u}_h(\hat{x}_{i,h}^-)| = |\hat{e}_{i,h}| \left| \bar{u}'_h|_{\hat{e}_{i,h}} \right| \geq |u_h(x_{i,h}^+) - u_h(x_{i,h}^-)| - \frac{\sigma_c}{E_0} 2\delta,$$

⁶Questo segue dalla definizione di \hat{u}_h . Infatti, $\hat{u}_h = u_h$ in $I \setminus J_{u,h}^{t,\delta}$ e $\|u_h\|_\infty \leq K$. Inoltre, per ogni I_h^i , con $i = 1, \dots, N^t$, $\|\bar{u}_h\|_{L^\infty(I_h^i)} \leq K + \frac{\sigma_c}{E_0} 2\delta$. Infatti, se $x \in I_h^i$ e $x \leq \hat{x}_{i,h}^-$, allora $|\bar{u}_h(x)| \leq |u_h(x_{i,h}^-)| + \int_{x_{i,h}^-}^x |\bar{u}'_h| dr \leq K + 2\delta \frac{\sigma_c}{E_0}$; se $x \geq \hat{x}_{i,h}^+$, allora $\bar{u}_h(x) = \bar{u}_h(x_{i,h}^+) - \int_x^{x_{i,h}^+} \bar{u}'_h dr = u_h(x_{i,h}^+) - \int_x^{x_{i,h}^+} \bar{u}'_h dr$, da cui $|\bar{u}_h(x)| \leq K + \frac{\sigma_c}{E_0} 2\delta$.

dove,

$$|u_h(x_{i,h}^+) - u_h(x_{i,h}^-)| - \frac{\sigma_c}{E_0} 2\delta \rightarrow |u(x_i^+) - u(x_i^-)| - \frac{\sigma_c}{E_0} 2\delta \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

Inoltre, poichè $x_i^\pm = x_i \pm \delta$ ed $u \in BV(I)$, esistono $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} u(x_i \pm \delta) = u^\pm(x_i)$. In particolare,

$$|u(x_i^+) - u(x_i^-)| \rightarrow |[u(x_i)]| \quad \text{per } \delta \rightarrow 0. \quad (2.22)$$

Consideriamo il $\liminf_{h \rightarrow 0}$ in entrambi i membri della disuguaglianza (2.20). Sia $\bar{\mathcal{G}}$ l'inviluppo semicontinuo inferiore di \mathcal{G} , definito in (2.25). Per il Lemma 2.3.1, abbiamo che $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{F}$, quindi

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}_h(u_h, d_h) &\geq \liminf_{h \rightarrow 0} \mathcal{G}(\hat{u}_h, I \setminus I_\epsilon) - C\delta - C'|1 - a(\gamma)| \\ &\geq \liminf_{h \rightarrow 0} \bar{\mathcal{G}}(\hat{u}_h, I \setminus I_\epsilon) - C\delta - C'|1 - a(\gamma)| \\ &\geq \bar{\mathcal{G}}(u_{t,\delta}, I \setminus I_\epsilon) - C\delta - C'|1 - a(\gamma)| \\ &= \mathcal{F}(u_{t,\delta}, I \setminus I_\epsilon) - C\delta - C'|1 - a(\gamma)|, \end{aligned}$$

per ogni $t, \delta, \epsilon, \gamma > 0$. Passando all'estremo superiore rispetto a γ ed ϵ , otteniamo che

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}_h(u_h, d_h) \geq \mathcal{F}(u_{t,\delta}) - C\delta.$$

Poichè $u_{t,\delta} = u$ in $I \setminus J_u^{t,\delta}$, scriviamo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_{t,\delta}) &= \mathcal{F}(u_{t,\delta}, I \setminus J_u^{t,\delta}) + \mathcal{F}(u_{t,\delta}, J_u^{t,\delta}) \\ &\geq \mathcal{F}(u, I \setminus J_u^{t,\delta}) + \sum_{i=1}^{N^t} \phi(|[u_{t,\delta}(\hat{x}_i)]|). \end{aligned}$$

Da (2.22),

$$|[u_{t,\delta}(\hat{x}_i)]| \geq |u(x_i^+) - u(x_i^-)| - \frac{\sigma_c}{E_0} 2\delta \rightarrow |[u(x_i)]| \quad \text{per } \delta \rightarrow 0.$$

Inoltre, $I \setminus J_u^{t,\delta} \nearrow I \setminus J_u^t$ per $\delta \rightarrow 0$. Da questo, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{F}(u, I \setminus J_u^{t,\delta}) = \mathcal{F}(u, I \setminus J_u^t)$. Infatti:

- per il Teorema di convergenza dominata,

$$\int_{I \setminus J_u^{t,\delta}} f(u', 1) dx = \int_I f(u', 1) \chi_{I \setminus J_u^{t,\delta}} dx \rightarrow \int_I f(u', 1) \chi_{I \setminus J_u^t} dx = \int_{I \setminus J_u^t} f(u', 1) dx,$$

- per la proprietà di continuità delle misure, $\sigma_c |D^c u|(I \setminus J_u^{t,\delta}) \rightarrow \sigma_c |D^c u|(I \setminus J_u^t)$,
- per il Teorema di convergenza monotona, $\sum_{J_u \setminus J_u^{t,\delta}} \phi(|[u]|) \rightarrow \sum_{J_u \setminus J_u^t} \phi(|[u]|)$.

Allora, per $\delta \rightarrow 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\liminf_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}_h(u_h, d_h) &\geq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left(\mathcal{F}(u, I \setminus J_u^{t, \delta}) + \sum_{i=1}^{N^t} \phi(|\llbracket u_{t, \delta}(\hat{x}_i) \rrbracket|) \right) \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{F}(u, I \setminus J_u^{t, \delta}) + \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^{N^t} \phi(|\llbracket u_{t, \delta}(\hat{x}_i) \rrbracket|) \right) \\
&\geq \mathcal{F}(u, I \setminus J_u^t) + \sum_{i=1}^{N^t} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left(\phi(|\llbracket u_{t, \delta}(\hat{x}_i) \rrbracket|) \right) \\
&\geq \mathcal{F}(u, I \setminus J_u^t) + \sum_{x \in J_u^t} \phi(|\llbracket u(x) \rrbracket|).
\end{aligned}$$

Inoltre, $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{F}(u, I \setminus J_u^t) = \mathcal{F}(u, I \setminus J_u)$ e $\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{J_u^t} \phi(|\llbracket u \rrbracket|) = \sum_{J_u} \phi(|\llbracket u \rrbracket|)$. Infatti:

- poichè J_u è al più numerabile, $\int_{I \setminus J_u^t} f(u', 1) dx = \int_I f(u', 1) dx = \int_{I \setminus J_u} f(u', 1) dx$,
- per la proprietà di continuità delle misure, $\sigma_c |D^c u|(I \setminus J_u^t) \rightarrow \sigma_c |D^c u|(I \setminus J_u)$,
- poichè $\sum_{J_u} \phi(|\llbracket u \rrbracket|) < +\infty$, $\sum_{J_u \setminus J_u^t} \phi(|\llbracket u \rrbracket|) \rightarrow 0$,
- per la definizione di serie a termini positivi, $\sum_{J_u^t} \phi(|\llbracket u \rrbracket|) \rightarrow \sum_{J_u} \phi(|\llbracket u \rrbracket|)$.

Quindi, considerando il limite per $t \rightarrow 0$, otteniamo che

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}_h(u_h, d_h) \geq \mathcal{F}(u, I \setminus J_u) + \sum_{J_u} \phi(|\llbracket u \rrbracket|) = \mathcal{F}(u),$$

cioè la tesi. □

Lemma 2.2.2. *Siano f definita come in [\(2.3\)](#) e $s(r) := r \frac{\sigma_c}{E_0}$ il valore di soglia. Siano $r_i \in [0, 1]$ per $i = 1, \dots, n$ tali che $r_n = \min_{i=1, \dots, n} r_i$. Siano $s_i \in \mathbb{R}$ tali che $|s_i| \geq s(r_n)$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$ e siano $a_i > 0$ per $i = 1, \dots, n$. Allora vale la seguente disuguaglianza:*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n a_i f(s_i, r_i) &\geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i f(s(r_n) \text{sign}(s_i), r_i) \\
&\quad + a_n f\left(\frac{1}{a_n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i (s_i - s(r_n) \text{sign}(s_i)) + a_n s_n \right), r_n\right).
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Poniamo $a_n S := \sum_{i=1}^{n-1} a_i (s_i - s(r_n) \text{sign}(s_i)) + a_n s_n$. La tesi è equivalente a dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \left(f(s_i, r_i) - f(s(r_n) \text{sign}(s_i), r_i) \right) \geq a_n (f(S, r_n) - f(s_n, r_n)).$$

Dalla definizione (2.3), abbiamo che

$$f(s, r) = \begin{cases} \frac{1}{2}E_0s^2 & \text{se } |s| \leq s(r), \\ r\sigma_c s - r^2 \frac{\sigma_c^2}{2E_0} & \text{se } s > s(r), \\ -r\sigma_c s - r^2 \frac{\sigma_c^2}{2E_0} & \text{se } s < -s(r), \end{cases}$$

e

$$\partial_s f(s, r) = \begin{cases} E_0s & \text{se } |s| \leq s(r), \\ r\sigma_c & \text{se } s > s(r), \\ -r\sigma_c & \text{se } s < -s(r). \end{cases} \quad (2.23)$$

Poichè $f(\cdot, r_n) \in C^1(\mathbb{R})$ e $|\partial_s f(s, r_n)| \leq r_n \sigma_c$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, r_n)$ è lipschitziana e

$$\begin{aligned} a_n |f(S, r_n) - f(s_n, r_n)| &\leq a_n r_n \sigma_c |S - s_n| \leq r_n \sigma_c \left| \sum_{i=1}^{n-1} a_i (s_i - s(r_n) \operatorname{sign}(s_i)) \right| \\ & r_n \sigma_c \sum_{i=1}^{n-1} a_i |(s_i - s(r_n) \operatorname{sign}(s_i))| \leq r_n \sigma_c \sum_{i=1}^{n-1} a_i (|s_i| - s(r_n)). \end{aligned}$$

Inoltre, da (2.23), la mappa $r \mapsto \partial_s f(s, r)$ è crescente per $s \geq 0$. Quindi, dal fatto che $r_i \geq r_n$ e $f(\cdot, r_i)$ è una funzione pari, per ogni $i = 1, \dots, n-1$, otteniamo che

$$\begin{aligned} f(s_i, r_i) - f(s(r_n) \operatorname{sign}(s_i), r_i) &= f(|s_i|, r_i) - f(s(r_n), r_i) = \int_{s(r_n)}^{|s_i|} \partial_s f(s, r_i) ds \\ &\geq \int_{s(r_n)}^{|s_i|} \partial_s f(s, r_n) ds = r_n \sigma_c (|s_i| - s(r_n)). \end{aligned}$$

Allora,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} a_i \left(f(s_i, r_i) - f(s(r_n) \operatorname{sign}(s_i), r_i) \right) &\geq r_n \sigma_c \sum_{i=1}^{n-1} a_i (|s_i| - s(r_n)) \\ &\geq a_n (f(S, r_n) - f(s_n, r_n)), \end{aligned}$$

da cui abbiamo la tesi. \square

Lemma 2.2.3. *Sia f definita come in (2.3). Allora, esiste $C > 0$ tale che per ogni $r \in [0, 1]$ vale la seguente disuguaglianza:*

$$f(s, 1) - f(s, r) \leq C |s| |1 - r| \quad \text{per ogni } s \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Poniamo $s(r) := r \frac{\sigma_c}{E_0}$. Osserviamo che $0 \leq s(r) \leq s(1)$ e che, poichè $f(\cdot, 1)$ e $f(\cdot, r)$ sono funzioni pari, possiamo dimostrare la disuguaglianza per gli $s \geq 0$.

Se $0 \leq s \leq s(r)$ abbiamo che $f(s, 1) = f(s, r)$ e la disuguaglianza è verificata. Per $s > s(r)$ scriviamo

$$f(s, 1) - f(s, r) = \int_{s(r)}^s f'(z, 1) - f'(z, r) dz = \int_{s(r)}^s f'(z, 1) - f'(s(r), 1) dz,$$

infatti, $f(s(r), 1) = f(s(r), r)$ e, da (2.23), $f'(z, r) = r\sigma_c = f'(s(r), 1) = E_0s(r)$ per ogni $z \geq s(r)$. Se $s(r) \leq s \leq s(1)$ abbiamo che $f'(z, 1) = E_0z$ per ogni $s(r) \leq z \leq s(1)$, quindi

$$\begin{aligned} f(s, 1) - f(s, r) &= \int_{s(r)}^s E_0(z - s(r)) dz = \frac{1}{2}E_0(s - s(r))^2 \leq \frac{1}{2}E_0(s - s(r))(s(1) - s(r)) \\ &= \frac{1}{2}E_0(s - s(r))\left(\frac{\sigma_c}{E_0} - r\frac{\sigma_c}{E_0}\right) = \frac{1}{2}\sigma_c(s - s(r))(1 - r) \leq C|s||1 - r|. \end{aligned}$$

Per $s > s(1)$, scriviamo

$$f(s, 1) - f(s, r) = \int_{s(r)}^{s(1)} f'(z, 1) - f'(s(r), 1) dz + \int_{s(1)}^s f'(z, 1) - f'(s(r), 1) dz.$$

Dal caso precedente, per il primo integrale abbiamo che

$$\int_{s(r)}^{s(1)} f'(z, 1) - f'(s(r), 1) dz \leq \frac{1}{2}\sigma_c(s(1) - s(r))|1 - r| \leq \frac{1}{2}\sigma_c(s - s(r))|1 - r|.$$

Consideriamo il secondo integrale. Per ogni $z \geq s(1)$, $f'(z, 1) = \sigma_c = E_0s(1)$, quindi

$$\begin{aligned} \int_{s(1)}^s f'(z, 1) - f'(s(r), 1) dz &= \int_{s(1)}^s E_0(s(1) - s(r)) dz = E_0(s - s(1))(s(1) - s(r)) \\ &= E_0(s - s(1))\left(\frac{\sigma_c}{E_0} - r\frac{\sigma_c}{E_0}\right) = \sigma_c(s - s(1))(1 - r). \end{aligned}$$

Combinando le due disuguaglianze precedenti, concludiamo che

$$f(s, 1) - f(s, r) \leq C|1 - r|(s - s(r)) \leq C|1 - r||s|,$$

dove $C = \frac{3}{2}\sigma_c$. □

2.3 Semicontinuità inferiore del Γ -limite

Ricordiamo le definizioni delle funzioni $f(\cdot, 1)$ e ϕ : per ogni $s \in \mathbb{R}$,

$$f(s, 1) = \begin{cases} \frac{1}{2}E_0s^2 & \text{se } |s| \leq \frac{\sigma_c}{E_0}, \\ \sigma_c|s| - \frac{\sigma_c^2}{2E_0} & \text{se } |s| > \frac{\sigma_c}{E_0}, \end{cases} \quad \phi(s) = \frac{G_c\sigma_c|s|}{G_c + \sigma_c|s|}.$$

Poniamo $f(s) := f(s, 1)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ ed introduciamo le funzioni $\phi^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f^\infty : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite da

$$\begin{aligned} \phi^0(s) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi(ts)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G_c \sigma_c t |s|}{(G_c + \sigma_c t |s|)t} = \sigma_c |s|, \\ f^\infty(s) &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(ts)}{t} = \sigma_c |s| = \begin{cases} 0 & \text{se } s = 0 \\ \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_c t |s| - \frac{\sigma_c^2}{2E_0}}{t} = \sigma_c |s| & \text{se } s \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Consideriamo il funzionale ausiliario $\mathcal{G} : L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$, definito come

$$\mathcal{G}(u) = \begin{cases} \int_I f(u') \, dx + \sum_{J_u} \phi(\llbracket u \rrbracket) & \text{se } u \in SBV(I), \\ +\infty & \text{se } u \in L^1(I) \setminus SBV(I). \end{cases} \quad (2.24)$$

L'involuppo semicontinuo inferiore di \mathcal{G} ha la seguente forma (la dimostrazione è riportata in [\[BBBF96\]](#)):

$$\bar{\mathcal{G}}(u) = \begin{cases} \int_I g(u') \, dx + \sum_{J_u} h(\llbracket u \rrbracket) + \int_I g^\infty(dD^c u) & \text{se } u \in BV(I), \\ +\infty & \text{se } u \in L^1(I) \setminus BV(I), \end{cases} \quad (2.25)$$

dove g è l'inf-convoluzione di f e ϕ^0 , cioè, per ogni $s \in \mathbb{R}$,

$$g(s) = f \nabla \phi^0(s) = \min \{ f(s-r) + \phi^0(r) : r \in \mathbb{R} \}, \quad (2.26)$$

$$h(s) = \min \left\{ H(v) := \int_0^1 f^\infty(v') \, dx + \sum_{J_v} \phi(\llbracket v \rrbracket) : v \in SBV(0, 1), v(0) = 0, v(1) = s \right\}, \quad (2.27)$$

e

$$g^\infty(s) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(st)}{t}. \quad (2.28)$$

Lemma 2.3.1. *Le funzioni g ed h presenti nella rappresentazione integrale di $\bar{\mathcal{G}}$ sono tali che:*

$$g(s) = f(s) \quad \text{per ogni } s \in \mathbb{R}, \quad (2.29)$$

$$h(s) = \phi(s) \quad \text{per ogni } s \in \mathbb{R}. \quad (2.30)$$

Da cui, $g^\infty(s) = \sigma_c |s|$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Fissiamo $s \in \mathbb{R}$. Dimostriamo l'uguaglianza [\(2.29\)](#), cioè, per definizione

di g , che

$$f(s-r) + \phi^0(r) \geq f(s) = f(s-0) + \phi^0(0) \quad \text{per ogni } r \in \mathbb{R}.$$

Poichè f è convessa e di classe $C^1(\mathbb{R})$, vale che

$$f(s-r) \geq f(s) + f'(s)(s-r-s) = f(s) - f'(s)r \quad \text{per ogni } r \in \mathbb{R},$$

cioè $f(s-r) + f'(s)r \geq f(s)$. Poichè $\phi^0(r) \geq f'(s)r$, infatti

$$f'(s) = \begin{cases} E_0 s & \text{se } |s| \leq \frac{\sigma_c}{E_0}, \\ \sigma_c & \text{se } s > \frac{\sigma_c}{E_0}, \\ -\sigma_c & \text{se } s < -\frac{\sigma_c}{E_0} \end{cases} \quad \text{e } \phi^0(r) = \sigma_c |r|,$$

otteniamo che $f(s-r) + \phi^0(r) \geq f(s)$ per ogni $r \in \mathbb{R}$, cioè la tesi.

Dimostriamo l'uguaglianza (2.30). Consideriamo $s \geq 0$. Il caso $s < 0$ è trattato allo stesso modo. Facciamo le seguenti osservazioni:

- Per ogni $v \in SBV(0,1)$ tale che $v(0) = 0$ e $v(1) = s$, definiamo v^* come il troncamento

$$v^*(x) = \max\{0, \min\{v(x), s\}\} \quad \text{per ogni } x \in (0,1).$$

Allora $v^* \in SBV(0,1)$ ed inoltre

$$|v'| \geq |(v^*)'| \text{ q.o. in } (0,1), \quad J_v \supset J_{v^*}, \quad |[v(x)]| \geq |[v^*(x)]| \quad \forall x \in J_v.$$

Da queste proprietà otteniamo che

$$H(v) = \sigma_c \int_0^1 |v'| dx + \sum_{J_v} \phi([v]) \geq \sigma_c \int_0^1 |(v^*)'| dx + \sum_{J_{v^*}} \phi([v^*]) = H(v^*);$$

- Per ogni $v \in SBV(0,1)$ tale che $v(0) = 0$ e $v(1) = s$, consideriamo \hat{v} l'inviluppo monotono crescente di v , dove

$$\hat{v}(x) = \int_0^x dv^+ \quad \text{per ogni } x \in (0,1).$$

Allora $\hat{v} \in SBV(0,1)$ ed inoltre

$$|v'| \geq |\hat{v}'| \text{ q.o. in } (0,1), \quad J_v \supset J_{\hat{v}}, \quad |[v(x)]| \geq |[\hat{v}(x)]| \quad \forall x \in J_v.$$

Da queste proprietà otteniamo che

$$H(v) = \sigma_c \int_0^1 |v'| dx + \sum_{J_v} \phi(\llbracket v \rrbracket) \geq \sigma_c \int_0^1 |\hat{v}'| dx + \sum_{J_{\hat{v}}} \phi(\llbracket \hat{v} \rrbracket) = H(\hat{v}).$$

Allora, per ogni v in $SBV(0, 1)$ tale che $v(0) = 0$ e $v(1) = s$, abbiamo che

$$H(v) \geq H(v^*) \geq H(\hat{v}^*),$$

quindi, per la definizione (2.27),

$$h(s) = \min \left\{ H(v) : v \in SBV(0, 1), v(0) = 0, v(1) = s, 0 \leq v \leq s, v \text{ non decrescente} \right\},$$

dove $H(v) = \int_0^1 f^\infty(v') dx + \sum_{J_v} \phi(\llbracket v \rrbracket) = \sigma_c \int_0^1 |v'| dx + \sum_{J_v} \phi(\llbracket v \rrbracket)$. Indichiamo con v la funzione che minimizza il funzionale H , con $v \in SBV(0, 1)$, v non decrescente, $v(0) = 0$, $v(1) = s$ e $0 \leq v \leq s$. Dimostriamo che v ha al più un punto di salto, cioè che

$$\#J_v = 1.$$

Supponiamo per assurdo che $N := \#J_v > 1$. Poichè $\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente concava e $\phi(0) = 0$, allora $\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente sub-additiva⁷, quindi

$$\sum_{i=1}^N \phi(\llbracket v \rrbracket) > \phi\left(\sum_{i=1}^N \llbracket v \rrbracket\right).$$

Consideriamo la funzione $\bar{v} \in SBV(0, 1)$ tale che $\bar{v}(0) = 0$, $\bar{v}(1) = s$ e $D\bar{v} = v' + \left(\sum_{i=1}^N \llbracket v \rrbracket\right) \delta_{x_0}$, dove $x_0 \in (0, 1)$ (osserviamo che possiamo ottenere una tale \bar{v} concentrando tutti i salti di v nel punto x_0). Allora,

$$H(v) = \sigma_c \int_0^1 |v'| dx + \sum_{i=1}^N \phi(\llbracket v \rrbracket) > \sigma_c \int_0^1 |v'| dx + \phi\left(\sum_{i=1}^N \llbracket v \rrbracket\right) = H(\bar{v}).$$

Questo contraddice la minimalità di v , quindi $\#J_v = 1$ ⁸. Dimostriamo che v è costante a

⁷Se $x = y = 0$, allora la disuguaglianza di sub-additività è verificata. Siano $x > 0$ ed $y \geq 0$. Scriviamo $x = \frac{x}{x+y}(x+y) + \frac{y}{x+y}(0)$. Poichè ϕ è strettamente concava ed x una combinazione convessa di $x+y$ e 0 , $\phi(x) > \frac{x}{x+y}\phi(x+y) + \frac{y}{x+y}\phi(0)$. Allo stesso modo, $\phi(y) > \frac{y}{y+x}\phi(x+y) + \frac{x}{y+x}\phi(0)$. Allora, sommando le disuguaglianze precedenti ed usando che $\phi(0) = 0$, otteniamo che $\phi(x) + \phi(y) > \phi(x+y)$.

⁸Osserviamo che questi passaggi valgono anche nel caso in cui supponiamo per assurdo che $\#J_v = +\infty$. Infatti,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi(\llbracket v(x_i) \rrbracket) = \phi(\llbracket v(x_1) \rrbracket) + \sum_{i=2}^{\infty} \phi(\llbracket v(x_i) \rrbracket) \geq \phi(\llbracket v(x_1) \rrbracket) + \phi\left(\sum_{i=2}^{\infty} \llbracket v(x_i) \rrbracket\right) > \phi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \llbracket v(x_i) \rrbracket\right),$$

tratti con un unico salto di ampiezza s . Siano $0 \leq a < b \leq 1$ ed assumiamo per assurdo che $v|_{(a,b)}$ sia continua e non costante. In particolare,

$$v|_{(a,b)} \in \operatorname{argmin} \left\{ H|_{(a,b)}(w) : w \in SBV(a,b), w(a^+) = v(a^+), w(b^-) = v(b^-) \right\},$$

dove $H|_{(a,b)}(w) := \int_a^b f^\infty(w') dx + \sum_{J_w} \phi(\llbracket w \rrbracket)$ ⁹. Consideriamo la funzione $\tilde{v} \in SBV(a,b)$, definita come

$$\tilde{v}(x) = v(a^+) + (v(b^-) - v(a^+))\chi_{[x_0,b)}, \quad x \in (a,b),$$

per $x_0 \in (a,b)$. Allora, poichè $\phi(s) < \sigma_c s$ per ogni $s > 0$, abbiamo che

$$H|_{(a,b)}(v|_{(a,b)}) = \sigma_c \int_a^b v' dx = \sigma_c (v(b^-) - v(a^+)) > \phi(v(b^-) - v(a^+)) = H|_{(a,b)}(\tilde{v}).$$

Questo contraddice la minimalità di $v|_{(a,b)}$. Allora, sostituendo questa funzione v nella definizione di h , otteniamo che

$$h(s) = H(v) = \phi(s).$$

□

Dal Lemma 2.3.1 segue che

$$\bar{\mathcal{G}}(u) = \begin{cases} \int_I f(u') dx + \sum_{J_u} \phi(\llbracket u \rrbracket) + \int_I f^\infty(dD^c u) & \text{se } u \in BV(I), \\ +\infty & \text{se } u \in L^1(I) \setminus BV(I), \end{cases}$$

dove

$$\int_I f^\infty(dD^c u) = \int_I f^\infty\left(\frac{dD^c u}{d|D^c u|}\right) d|D^c u| = \sigma_c \int_I \left| \frac{dD^c u}{d|D^c u|} \right| d|D^c u| = \sigma_c |D^c u|(I).$$

dove, nella prima disuguaglianza abbiamo considerato il limite per $N \rightarrow \infty$ nella disuguaglianza di sub-additività che vale per ogni $N \in \mathbb{N}$ e nella seconda disuguaglianza abbiamo usato la stretta sub-additività per $N = 2$.

⁹Infatti, se esistesse una funzione w tale che $H|_{(a,b)}(w) < H|_{(a,b)}(v|_{(a,b)})$, la funzione

$$\tilde{w} = \begin{cases} w & \text{in } (a,b), \\ v & \text{altrove,} \end{cases}$$

sarebbe tale che $H(v) > H(\tilde{w})$. Questo è assurdo per la minimalità di v .

Allora, per ogni $u \in L^1(I)$,

$$\tilde{\mathcal{F}}(u) = \bar{\mathcal{G}}(u) = \begin{cases} \int_I f(u') dx + \sum_{J_u} \phi(\llbracket u \rrbracket) + \sigma_c |D^c u|(I) & \text{se } u \in BV(I), \\ +\infty & \text{se } u \in L^1(I) \setminus BV(I). \end{cases}$$

Questo dimostra che il funzionale limite $\tilde{\mathcal{F}}$, definito in (2.5), è semicontinuo inferiormente.

Osservazione 2.3.1. Sia $u \in BV(I)$ e sia $u_k \in U$ la successione definita nella Proposizione 2.1.2. Allora, dalla semicontinuità inferiore di $\tilde{\mathcal{F}}$, otteniamo che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(u_k) = \mathcal{F}(u)$.

2.4 Generalizzazioni

Estendiamo il Teorema 2.0.1, considerando una funzione $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ più generale. Sia $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funzione lipschitziana e decrescente, tale che

$$a(0) = 1, \quad a(1) = 0 \quad \text{e} \quad a(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in [0, 1].$$

Sostituendo tale a alla funzione $d \mapsto (1-d)^2$ nello studio del problema di profilo ottimo, otteniamo la funzione $\phi_a : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definita da

$$\phi_a(s) = \min \left\{ a(z)\sigma_c s + G_c z^2 : z \in [0, 1] \right\} \quad \text{per ogni } s \geq 0. \quad (2.31)$$

Per ogni $s \geq 0$, poniamo $g_s(z) := a(z)\sigma_c s + G_c z^2$ ed osserviamo che, per il Teorema di Weierstrass, esiste il minimo della funzione $[0, 1] \ni z \mapsto g_s(z)$. Indichiamo con z_s un punto di minimo. La funzione ϕ_a verifica le seguenti proprietà:

- $\phi_a(s) \geq 0$ per ogni $s \geq 0$;
- $\phi_a(0) = 0$. Infatti, $g_0(z) = G_c z^2$ e $\min \{G_c z^2 : z \in [0, 1]\} = 0$;
- ϕ_a è concava. Siano $s_1, s_2 \geq 0$ e $t \in (0, 1)$. Poniamo $z_* := z_{ts_1+(1-t)s_2}$. Allora,

$$\begin{aligned} \phi_a(ts_1 + (1-t)s_2) &= g_{ts_1+(1-t)s_2}(z_*) = a(z_*)\sigma_c (ts_1 + (1-t)s_2) + G_c z_*^2 \\ &= t(a(z_*)\sigma_c s_1 + G_c z_*^2) + (1-t)(a(z_*)\sigma_c s_2 + G_c z_*^2) \\ &= tg_{s_1}(z_*) + (1-t)g_{s_2}(z_*) \geq t\phi_a(s_1) + (1-t)\phi_a(s_2); \end{aligned}$$

- ϕ_a è crescente. Infatti, ϕ_a è concava e $\phi_a(s) \geq 0$ per ogni $s \geq 0$;
- $\phi_a(s) \leq \sigma_c s$ per ogni $s \geq 0$. Infatti, $\phi_a(s) \leq g_s(0) = \sigma_c s$;

- $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi_a(s)}{s} = \sigma_c$. Per la disuguaglianza precedente, abbiamo che

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi_a(s)}{s} \leq \limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\sigma_c s}{s} = \sigma_c.$$

Inoltre, osserviamo che $\lim_{s \rightarrow 0^+} z_s = 0$. Infatti, $\phi_a(s) = a(z_s)\sigma_c s + G_c z_s^2 \leq \sigma_c s$, da cui $G_c z_s^2 \leq \sigma_c s - a(z_s)\sigma_c s \leq \sigma_c s$, quindi

$$0 \leq \liminf_{s \rightarrow 0^+} G_c z_s^2 \leq \limsup_{s \rightarrow 0^+} G_c z_s^2 \leq \lim_{s \rightarrow 0^+} \sigma_c s = 0.$$

Allora, poichè a è una funzione continua e $a(0) = 1$,

$$\liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi_a(s)}{s} = \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{a(z_s)\sigma_c s + G_c z_s^2}{s} \geq \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{a(z_s)\sigma_c s}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} a(z_s)\sigma_c = \sigma_c.$$

Da questo otteniamo che

$$\sigma_c \leq \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi_a(s)}{s} \leq \limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi_a(s)}{s} \leq \sigma_c,$$

cioè la tesi;

- ϕ_a è una funzione continua. Infatti, poichè $\phi_a : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è concava, $\phi_a : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è continua. Inoltre, dal fatto che $\lim_{s \rightarrow 0^+} z_s = 0$, otteniamo che

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \phi_a(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} (a(z_s)\sigma_c s + G_c z_s^2) = 0 = \phi_a(0),$$

cioè ϕ_a è continua da destra nel punto 0.

- $\lim_{s \rightarrow +\infty} \phi_a(s) = G_c$. Per ogni $s \geq 0$, $\phi_a(s) \leq g_s(1) = G_c$, da cui,

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \phi_a(s) \leq G_c.$$

Inoltre, osserviamo che $\lim_{s \rightarrow +\infty} z_s = 1$. Infatti, $\phi_a(s) = a(z_s)\sigma_c s + G_c z_s^2 \leq G_c$, da cui, per ogni $s > 0$, $a(z_s) \leq \frac{G_c}{\sigma_c s}$. Quindi, $a(z_s) \rightarrow 0$ per $s \rightarrow +\infty$. Poichè a è decrescente e si annulla solo nel punto 1, otteniamo che $z_s \rightarrow 1$ per $s \rightarrow +\infty$. Allora,

$$\liminf_{s \rightarrow +\infty} \phi_a(s) \geq \lim_{s \rightarrow +\infty} G_c z_s^2 = G_c.$$

Da questo otteniamo che

$$G_c \leq \liminf_{s \rightarrow +\infty} \phi_a(s) \leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} \phi_a(s) \leq G_c,$$

cioè la tesi.

Definiamo $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ come l'estensione pari della funzione ϕ_a . Possiamo generalizzare il Teorema [2.0.1](#) come segue:

Teorema 2.4.1. *Sia $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funzione lipschitziana e decrescente, tale che*

$$a(0) = 1, \quad a(1) = 0 \quad e \quad a(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in [0, 1].$$

Sia $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ l'estensione pari della funzione $\phi_a : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, definita da

$$\phi_a(s) = \min \left\{ a(z)\sigma_c s + G_c z^2 : z \in [0, 1] \right\} \quad \text{per ogni } s \geq 0.$$

Allora, $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è concava, $\phi(0) = 0$, $\phi(s) \leq \sigma_c |s|$ per ogni $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi(s)}{s} = \sigma_c \quad e \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \phi(s) = G_c.$$

Inoltre, sia I un intervallo aperto e limitato e siano $\tilde{\mathcal{F}}_h : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$ definiti come in [\(2.4\)](#). Sia $\tilde{\mathcal{F}} : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$ definito come

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, d) = \begin{cases} \mathcal{F}(u) & \text{se } u \in BV(I), d = 0 \text{ q.o. in } I, \|u\|_\infty \leq K, \\ +\infty & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove

$$\mathcal{F}(u) = \int_I f(u', 1) dx + \sigma_c |D^c u|(I) + \sum_{J_u} \phi(\llbracket u \rrbracket).$$

Allora, $\tilde{\mathcal{F}}_h$ Γ -converge a $\tilde{\mathcal{F}}$ per $h \rightarrow 0$.

Dimostrazione. Le proprietà di ϕ seguono dalle proprietà dimostrate per la funzione ϕ_a . Inoltre, per dimostrare che $\tilde{\mathcal{F}}_h$ Γ -converge a $\tilde{\mathcal{F}}$ per $h \rightarrow 0$, possiamo ripetere le stesse dimostrazioni della [Proposizione 2.1.1](#), [Proposizione 2.1.2](#), [Proposizione 2.2.1](#) e [Lemma 2.3.1](#), sostituendo la funzione $d \mapsto (1 - d)^2$ con a ed utilizzando la funzione ϕ ottenuta da ϕ_a . In particolare,

- nella [Proposizione 2.1.1](#) (disuguaglianza del lim sup) utilizziamo le ipotesi $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua e $a(0) = 1$;
- nella [Proposizione 2.1.2](#) (risultato di densità) utilizziamo la disuguaglianza $\phi(s) \leq \sigma_c s$ per ogni $s \geq 0$;
- nella [Proposizione 2.2.1](#) (disuguaglianza del lim inf) utilizziamo il fatto che $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è decrescente e lipschitziana;

- nel Lemma [2.3.1](#) (dimostrazione della semicontinuità inferiore di $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{G}}$) utilizziamo le seguenti proprietà di ϕ : $\phi|_{[0,+\infty)}$ è concava, $\phi(0) = 0$, $\phi(s) \leq \sigma_c s$ per ogni $s \geq 0$ e

$$\phi^0(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi(ts)}{t} = \sigma_c |s| \quad \text{per ogni } s \in \mathbb{R}.$$

Infatti, se $s = 0$, $\phi^0(0) = 0$. Altrimenti, se $s \neq 0$,

$$\phi^0(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi(ts)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\phi(t|s|)}{t} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\phi(y)}{y/|s|} = \sigma_c |s|.$$

□

Riportiamo alcuni esempi di energie coesive $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, ottenute da particolari funzioni $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ come sopra.

Esempio 2.4.1 (Energia coesiva di Dugdale). Consideriamo la funzione $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da $a(z) = 1 - z^3$ ed osserviamo che a soddisfa le ipotesi del Teorema [2.4.1](#). Allora,

$$\phi_a(s) = \min\{\sigma_c s, G_c\} \quad \text{per ogni } s \geq 0,$$

dove la mappa $[0, +\infty) \ni s \mapsto \min\{\sigma_c s, G_c\}$ è detta energia coesiva di Dugdale. Infatti, se $s \geq 0$ ed è tale che $\sigma_c s \leq G_c$, otteniamo che

$$g_s(z) = (1 - z^3)\sigma_c s + G_c z^2 \geq (1 - z^3)\sigma_c s + \sigma_c s z^2 = \sigma_c s(1 - z^3 + z^2) \geq \sigma_c s$$

per ogni $z \in [0, 1]$. Poichè $g_s(0) = \sigma_c s$, abbiamo che $\phi_a(s) = \min\{g_s(z) : z \in [0, 1]\} = \sigma_c s$. Inoltre, se $s \geq 0$ ed è tale che $\sigma_c s > G_c$, otteniamo che

$$g_s(z) = (1 - z^3)\sigma_c s + G_c z^2 \geq (1 - z^3)G_c + G_c z^2 = G_c(1 - z^3 + z^2) \geq G_c$$

per ogni $z \in [0, 1]$. Poichè $g_s(1) = G_c$, abbiamo che $\phi_a(s) = G_c$. Definiamo $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ come l'estensione pari di ϕ_a .

Esempio 2.4.2. Consideriamo la funzione $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definita da $a(z) = 1 - z$ ed osserviamo che a soddisfa le ipotesi del Teorema [2.4.1](#). Allora,

$$\phi_a(s) = \begin{cases} \sigma_c s \left(1 - \frac{\sigma_c s}{4G_c}\right) & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{2G_c}{\sigma_c}, \\ G_c & \text{se } s > \frac{2G_c}{\sigma_c}. \end{cases}$$

Infatti, per ogni $s \geq 0$, $g_s(z) = (1 - z)\sigma_c s + G_c z^2 = G_c z^2 - \sigma_c s z + \sigma_c s$ (osserviamo che g_s è una funzione quadratica convessa, dove il punto di minimo è $\bar{z} = \frac{\sigma_c s}{2G_c}$). Se

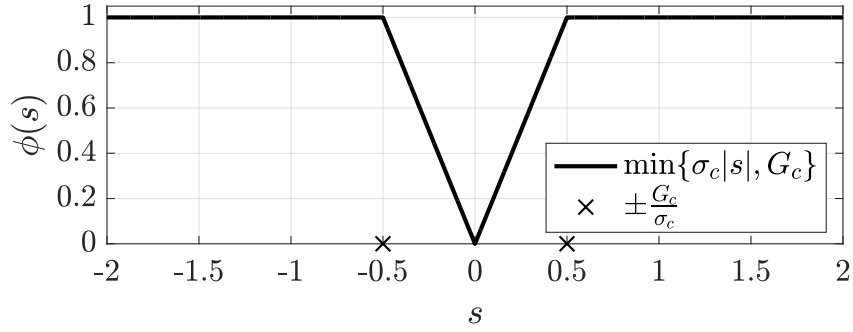


Figura 2.3: Grafico dell'energia coesiva di Dugdale ϕ , dove $\phi(s) = \min\{\sigma_c |s|, G_c\}$, con dati $G_c = 1$ e $\sigma_c = 2$.

$\bar{z} = \frac{\sigma_c s}{2G_c} \in [0, 1]$, cioè se

$$0 \leq s \leq \frac{2G_c}{\sigma_c},$$

allora $z_s = \bar{z}$ e

$$\phi_a(s) = g_s(z_s) = \left(1 - \frac{\sigma_c s}{2G_c}\right) \sigma_c s + G_c \frac{\sigma_c^2 s^2}{4G_c^2} = \sigma_c s \left(1 - \frac{\sigma_c s}{4G_c}\right).$$

Se $\bar{z} > 1$, cioè se $s > \frac{2G_c}{\sigma_c}$, allora $z_s = 1$ e $\phi_a(s) = g_s(1) = G_c$. Definiamo $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ come l'estensione pari di ϕ_a .

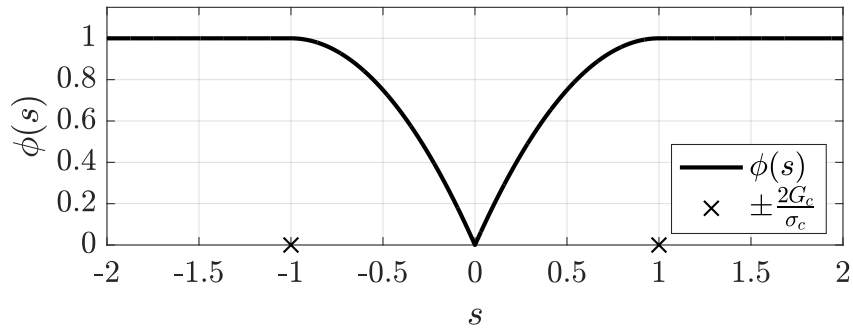


Figura 2.4: Grafico dell'energia coesiva ϕ , definita nell'Esempio [2.4.2](#), con dati $G_c = 1$ e $\sigma_c = 2$.

Possiamo generalizzare ulteriormente il Teorema [2.4.1](#), imponendo delle condizioni al bordo per u_h e d_h nella definizione di $\tilde{\mathcal{F}}_h$. In particolare, definiamo $\tilde{\mathcal{F}}_h : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow$

$[0, +\infty]$ come

$$\tilde{\mathcal{F}}_h(u_h, d_h) = \begin{cases} \mathcal{F}_h(u_h, d_h) & \text{se } u_h, d_h \in \mathbb{P}_h^1, \|u_h\|_\infty \leq K, d_h \in [0, 1], \\ u_h = g, d_h = 0 \text{ in } \partial I = \{\pm L\}, \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (2.32)$$

dove $\mathcal{F}_h(u_h, d_h)$ è definito come in (2.2) e $K \geq \|g\|_\infty$. Otteniamo il seguente teorema:

Teorema 2.4.2. *Sia $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funzione lipschitziana e decrescente, tale che*

$$a(0) = 1, \quad a(1) = 0 \quad \text{e} \quad a(x) > 0 \text{ per ogni } x \in [0, 1).$$

Sia $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ l'estensione pari della funzione $\phi_a : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, definita da

$$\phi_a(s) = \min \left\{ a(z)\sigma_c s + G_c z^2 : z \in [0, 1] \right\} \quad \text{per ogni } s \geq 0.$$

Allora, $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è concava, $\phi(0) = 0$, $\phi(s) \leq \sigma_c |s|$ per ogni $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi(s)}{s} = \sigma_c \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \phi(s) = G_c.$$

Inoltre, sia I un intervallo aperto e limitato e siano $\tilde{\mathcal{F}}_h : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$ definiti come in (2.32). Sia $\tilde{\mathcal{F}} : L^1(I) \times L^1(I) \rightarrow [0, +\infty]$ definito come

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, d) = \begin{cases} \mathcal{F}(u) & \text{se } u \in BV(I), d = 0 \text{ q.o. in } I, \|u\|_\infty \leq K, \\ +\infty & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \int_I f(u', 1) dx + \sigma_c |D^c u|(I) + \sum_{J_u} \phi(\llbracket u \rrbracket) \\ &\quad + \phi(g(L) - u(L^-)) + \phi(u(-L^+) - g(-L)). \end{aligned}$$

Allora, $\tilde{\mathcal{F}}_h$ Γ -converge a $\tilde{\mathcal{F}}$ per $h \rightarrow 0$.

Bibliografia

- [AFP00] L. Ambrosio, N. Fusco e D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford University Press, 2000.
- [B98] A. Braides. *Approximation of free-discontinuity problems*. Vol. 1694. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998, pp. xii+149.
- [BBBF96] A.C. Barroso, G. Bouchitté, G. Buttazzo e I. Fonseca. “Relaxation in BV of energies involving bulk and surface energy contributions”. In: *Arch. Rational Mech. Anal* 135 (1996), pp. 107–173.
- [DOT16] G. Dal Maso, G. Orlando e R. Toader. “Fracture models for elasto-plastic materials as limits of gradient damage models coupled with plasticity: the antiplane case”. In: *Calc. Var. Partial Differential Equations* 55.3 (2016), Art. 45, 39.
- [MNVD26] E. Maggiorcelli, M. Negri, F. Vicentini e L. De Lorenzis. “ Γ -convergence for a phase-field cohesive energy”. In: *Mechanics of Materials* 215 (2026), p. 105606.