

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA



UNIVERSITÀ
DI PAVIA

Il problema di ottimizzazione vettoriale e la sua
scalarizzazione: applicazioni all'economia del
benessere

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Relatore:

Prof. Marco Veneroni

Correlatore:

Prof.ssa Elena Molho

Tesi di Laurea di:

Ludovica Negri

Matricola 545485

Anno Accademico 2024-2025

Riassunto

La presente tesi analizza il problema dell'ottimizzazione vettoriale e le tecniche di scalarizzazione, con particolare attenzione alle applicazioni nell'ambito dell'economia del benessere. Dopo aver introdotto i principali strumenti matematici — quali coni, convessità, relazioni d'ordine e nozioni di minimalità — il lavoro si concentra sul concetto di efficienza paretiana e sulle condizioni di esistenza delle soluzioni efficienti nei problemi multiobiettivo. Successivamente, vengono esaminate tecniche di scalarizzazione, sia lineari sia adattive, evidenziandone il ruolo nel ricondurre problemi vettoriali a problemi scalari più trattabili. In questo ambito, un risultato centrale è rappresentato dal teorema di Arrow, Barankin e Blackwell, che, sotto opportune ipotesi, permette di caratterizzare i punti Pareto-efficienti tramite funzionali lineari, mostrando come essi possano essere ottenuti come soluzioni di problemi di ottimizzazione scalare pesata. La scalarizzazione emerge così non solo come tecnica operativa, ma come strumento teorico per comprendere la struttura delle soluzioni efficienti.

Nell'ultima parte della tesi tali strumenti vengono applicati all'analisi dell'economia del benessere. In particolare, viene discusso il ruolo delle funzioni di benessere sociale e il loro legame con l'efficienza paretiana, alla luce dei due teoremi fondamentali dell'economia del benessere. Tali risultati mostrano, sotto opportune ipotesi di convessità e completezza dei mercati, la profonda relazione tra equilibrio competitivo ed efficienza paretiana.

Indice

I Fondamenti matematici	7
1 Coni, convessità e strutture d'ordine	9
1.1 Coni	9
1.1.1 Base di un cono	14
1.2 Convessità	18
1.2.1 Chiusura	22
1.2.2 Limitatezza	25
1.2.3 Compattezza	27
1.3 Separazione per insiemi convessi	28
1.3.1 Separazione convesso-cono	29
1.4 Relazioni binarie	30
1.5 Coni di preferenza - relazioni coniche	32
2 Minimalità conica	37
2.1 Definizioni di minimalità	37
2.1.1 Casi paretiani	42
2.1.2 Minimalità propria	43
2.1.3 Coni dilatati di Henig e minimalità propria	43
2.2 Relazioni tra le diverse tipologie di minimi	45
2.3 Condizioni di esistenza dei minimi	48
3 Problemi di ottimizzazione vettoriale ed efficienza	51
3.1 Problemi di ottimizzazione vettoriale	51
3.2 Efficienza	52
3.2.1 Il caso paretiano	56
3.2.2 Efficienza propria	57
3.3 Condizioni di esistenza delle soluzioni efficienti	58
4 Scalarizzazione	61
4.1 Scalarizzazioni lineari	62
4.2 Scalarizzazioni adattive	65
4.2.1 Pascoletti-Serafini	65
5 Il teorema di Arrow, Barankin e Blackwell	69
5.1 Esempio introduttivo	69
5.2 Enunciato	71

II Economia del benessere e applicazioni	77
6 Fondamenti dell'economia del benessere	79
6.1 Teoria della scelta sociale ed economia del benessere	79
6.2 Strumenti economici	80
6.3 Legame con gli strumenti matematici	83
6.4 Funzione di benessere sociale	83
6.4.1 Proprietà della funzione di benessere sociale	85
6.4.2 Caso di Bentham	86
6.4.3 Caso di Rawls e Nietzsche	87
7 Teoremi fondamentali e ottimalità sociale	91
7.1 I teoremi fondamentali	91
7.1.1 I° teor. fondamentale economia del benessere	91
7.1.2 II° teor. fondamentale economia del benessere	92
7.1.3 Interpretazione	93
7.1.4 Scatola di Edgeworth	94
7.2 Il ruolo della convessità	96
7.3 Il ruolo del teorema di ABB	97
Conclusioni	101
Bibliografia	103

Parte I

Fondamenti matematici

Capitolo 1

Coni, convessità e strutture d'ordine

La nozione di ordinamento in uno spazio vettoriale è fondamentale per descrivere relazioni di preferenza tra elementi e per formalizzare concetti di minimalità e ottimizzazione. In particolare, i coni convessi forniscono uno strumento naturale per introdurre ordinamenti parziali in \mathbb{R}^n , generalizzando l'idea di confronto componente per componente e permettendo di definire direzioni di miglioramento.

Questo capitolo è dedicato allo studio delle proprietà geometriche dei coni e della loro interazione con la struttura convessa degli insiemi, ponendo le basi per la definizione di ordini parziali e di punti minimali. Verranno introdotti i concetti chiave di ordinamento conico, interno, duale e polarità, che saranno essenziali per lo sviluppo teorico dei capitoli successivi sulla minimalità, sull'efficienza e sulle tecniche di scalarizzazione.

Per lo sviluppo di questo capitolo si è preso spunto principalmente dai testi di: Dinh The Luc, (1988) *Theory of Vector Optimization* [1] e Yoshikazu Sawaragi, Hirotaka Nakayama & Tetsuzo Tanino, (1985) *Theory of Multiobjective Optimization* [2]; integrando risultati classici di analisi convessa e teoria dei coni con un approccio sistematico alle strutture d'ordine.

1.1 Coni

Definizione 1.1 (Insieme convesso). Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se, per ogni coppia di punti $x, y \in X$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X.$$

Si noti che se X è convesso allora l'interno topologico dell'insieme X , indicato con $\text{int}(X)$, è convesso.

Definizione 1.2 (Cono). Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *cono* se

$$x \in C \Rightarrow \lambda x \in C \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Notiamo che un cono C è convesso se e solo se

$$x, y \in C, \alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in C.$$

Dato il cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce il cono *opposto* come

$$-C = \{-c \mid c \in C\}.$$

$-C$ è ottenuto riflettendo il cono C rispetto all'origine.

Definizione 1.3 (Cono puntato e cono acuto). Un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *puntato* se

$$C \cap (-C) = \{0\},$$

cioè se per ogni $x \in C \setminus \{0\}$ vale $-x \notin C$.

Il cono C si dice *acuto* se la sua chiusura \overline{C} è puntata.

Osservazione 1.4. Sia C un cono, C è puntato se:

- non contiene rette passanti per l'origine;
- non contiene alcun sottospazio non banale;
- $-x \notin C$ quando $x \in C$.

Un cono acuto di \mathbb{R}^n è sempre puntato. I due concetti coincidono se C è chiuso.

Definizione 1.5 (Cono corretto). Sia C un cono convesso, C è corretto se

$$\overline{C} + (C \setminus (C \cap -C)) \subseteq C.$$

Proposizione 1.6. [1, Prop 1.4] C è corretto se vale una delle seguenti:

1. C è chiuso;
2. $C \setminus (C \cap -C)$ è aperto non vuoto;

Dimostrazione. Il primo caso è ovvio, perché se C è chiuso allora $\overline{C} = C$ e quindi

$$\overline{C} + (C \setminus (C \cap -C)) \subseteq C.$$

Supponiamo ora che $C \setminus (C \cap -C)$ sia aperto e non vuoto. Poiché questo insieme è contenuto in C , esiste un punto $x \in C$ e una palla aperta centrata in x interamente contenuta in C . Per definizione, questo significa che $x \in \text{int}(C)$, quindi $\text{int}(C) \neq \emptyset$.

Inoltre, poiché $C \setminus (C \cap -C)$ è aperto e contenuto in C , si ha

$$C \setminus (C \cap -C) \subseteq \text{int}(C).$$

D'altra parte, se $x \in \text{int}(C)$ allora anche $-x \in C$, quindi $x \notin C \cap (-C)$, cioè

$$\text{int}(C) \subseteq C \setminus (C \cap -C).$$

Da queste due inclusioni otteniamo

$$\text{int}(C) = C \setminus (C \cap -C).$$

Pertanto

$$\bar{C} + (C \setminus (C \cap -C)) = \bar{C} + \text{int}(C) \subseteq C,$$

da cui segue che C è corretto. \square

Esempio 1.7. Qui sotto sono riportati alcuni esempi di coni:

- (i) Consideriamo in \mathbb{R}^n l'ortante non negativo

$$\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n\};$$

è: convesso, puntato, acuto e corretto.

- (ii) L'insieme $\{0\}$ è un cono, che chiameremo cono banale;

- (iii) l'insieme

$$\{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$$

è un cono puntato ma non acuto, si veda la figura [2.5](#);

- (iv) qualsiasi semispazio omogeneo chiuso è un cono corretto, ma non è puntato.

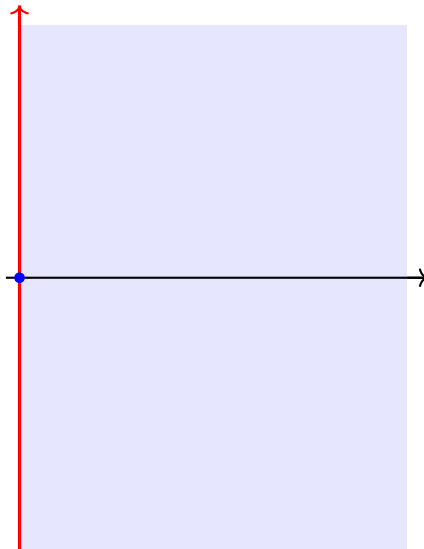


Figura 1.1: La figura è riferita all'esempio [1.7](#)-iii. Il blu rappresenta il cono $\{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$, il rosso rappresenta la frontiera dell'insieme che unita all'insieme dà la chiusura.

Esempio 1.8 (Cono lessicografico in \mathbb{R}^2). Si definisce il *cono lessicografico* in \mathbb{R}^2 come

$$C_{\text{lex}}^2 := \{0\} \cup \{d \in \mathbb{R}^2 \mid \exists i \in \{1, 2\} \text{ tale che } d_i > 0 \text{ e } d_j = 0 \ \forall j < i\}.$$

Il cono lessicografico è: puntato, non corretto, non acuto, né chiuso né aperto.

Il cono lessicografico in \mathbb{R}^2 rappresenta una gerarchia tra le componenti: la prima componente ha priorità assoluta rispetto alla seconda. Questo significa che, nella comparazione tra due vettori, ciò che conta prima di tutto è la componente “più significativa”, e solo se questa è uguale si considera la successiva.

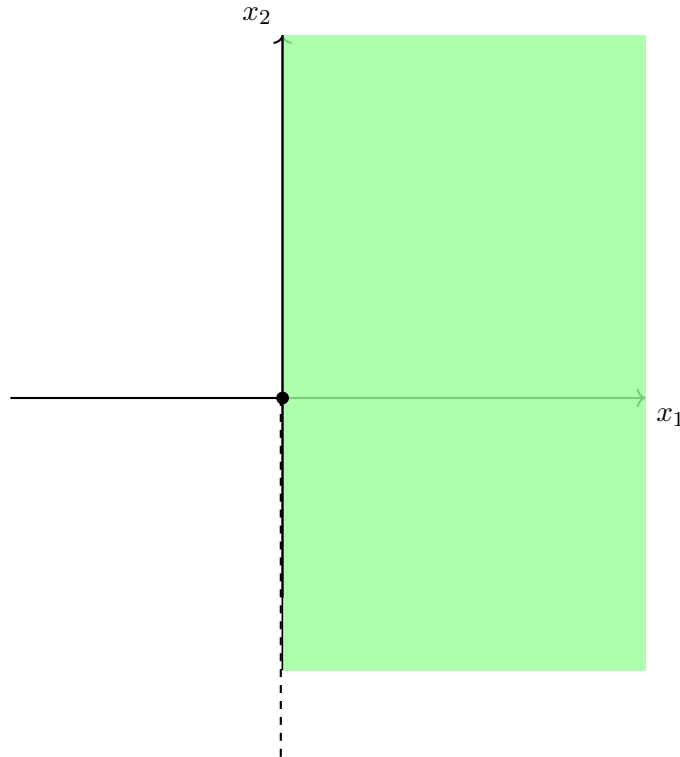


Figura 1.2: Cono lessicografico in \mathbb{R}^2

Segue la dimostrazione del fatto che il cono lessicografico non è corretto.

Proposizione 1.9. *Il cono lessicografico in \mathbb{R}^2 ,*

$$C_{\text{lex}}^2 := \{0\} \cup \{d \in \mathbb{R}^2 \mid \exists i \in \{1, 2\} : d_i > 0 \text{ e } d_j = 0 \ \forall j < i\},$$

non è corretto.

Dimostrazione. Si ha

$$\overline{C_{\text{lex}}^2} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}, \quad C_{\text{lex}}^2 \cap (-C_{\text{lex}}^2) = \{0\}.$$

Pertanto

$$C_{\text{lex}}^2 \setminus (C_{\text{lex}}^2 \cap -C_{\text{lex}}^2) = C_{\text{lex}}^2 \setminus \{0\}.$$

Prendiamo

$$d = (0, -1) \in \overline{C_{\text{lex}}^2}, \quad u = (0, 1/2) \in C_{\text{lex}}^2 \setminus \{0\}.$$

Allora

$$d + u = (0, -1/2) \notin C_{\text{lex}}^2.$$

Ne segue che

$$\overline{C_{\text{lex}}^2} + (C_{\text{lex}}^2 \setminus (C_{\text{lex}}^2 \cap -C_{\text{lex}}^2)) \not\subseteq C_{\text{lex}}^2,$$

cioè il cono lessicografico non è corretto. \square

Definizione 1.10. [2] def 2.1.5] Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme, il suo *polare* è definito come:

$$X^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \ \forall y \in X\};$$

il *polare stretto* è definito come:

$$X^{\text{so}} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle > 0 \ \forall y \in X, y \neq 0\}.$$

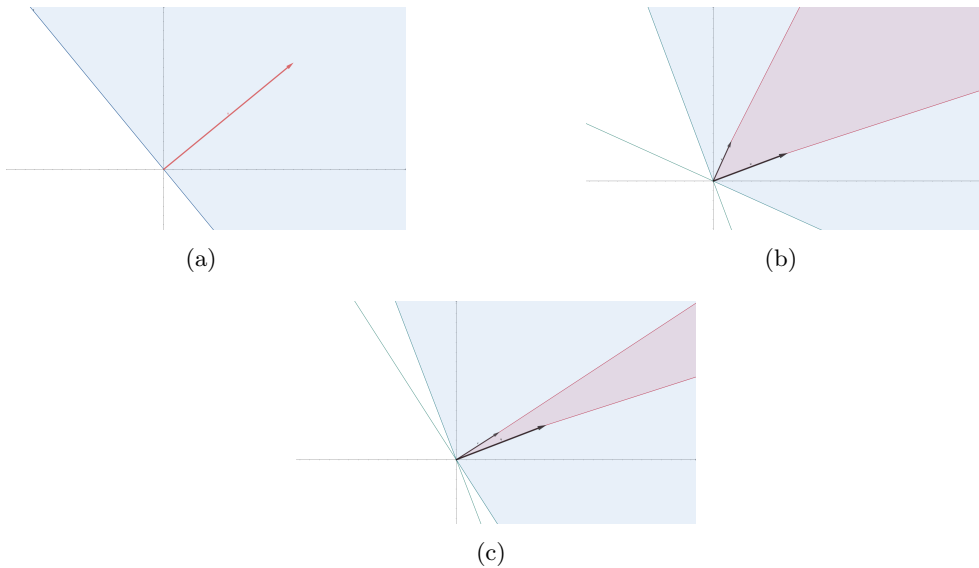


Figura 1.3: Polari dei coni

Nella figura [1.3] abbiamo alcuni esempi di polari. Nella figura [1.3(a)] si evidenzia il polare di un vettore; le figure [1.3(b)] e [1.3(c)] mostrano il polare di due coni di ampiezza diversa.

Proposizione 1.11. [2] Prop 2.1.5] Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora:

1. Il polare X° è un cono convesso chiuso
2. Il cono strettamente polare X^{so} è un cono convesso

3. Se C è un cono convesso non vuoto, $C^{\circ\circ} = \overline{C}$

Proposizione 1.12. [2, Prop 2.1.7] Sia C un cono in \mathbb{R}^n . Allora:

1. $\text{int}(C^\circ) \neq \emptyset$ se e solo se C è acuto.
2. se C è acuto, $\text{int}(C)^\circ = (\overline{C})^{\circ\circ}$.

1.1.1 Base di un cono

Nel contesto dello studio dei coni convessi, risulta utile introdurre un concetto che permetta di rappresentare in modo univoco gli elementi di un cono attraverso una sezione opportuna.

Definizione 1.13 (Generatore e base). Dato un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$, diciamo che $B \subseteq \mathbb{R}^n$ genera il cono C , e scriviamo $C = \text{cone}(B)$ se:

$$C = \{tb : b \in B, t \geq 0\}.$$

Inoltre, se $0 \notin B$ e per ogni $c \in C$, $c \neq 0$, sono unici $b \in B, t > 0$ tali che $c = tb$, allora diciamo che B è una *base* di C .

Osservazione 1.14. [1, Rem 1.6] Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora C possiede una base convessa, chiusa e limitata se e solo se C è *puntato* e chiuso.

Esempio 1.15. Seguono alcuni casi particolari per analizzare l'osservazione [1.14]:

1. Si consideri

$$C = \{(x, y) \mid y \geq |x|\};$$

C è chiuso e puntato. Considero l'insieme

$$B = \{(x, 1) \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

che è facilmente verificabile sia una base di C , è un segmento quindi convesso, chiuso e limitato.

2. Si consideri

$$C = \{(x, y) \mid y > |x|\} \cup \{(0, 0)\};$$

C è puntato ma non chiuso. Una sua base è

$$B = \{(x, 1) \mid |x| < 1\}$$

in questo caso B è limitato e convesso ma non è chiuso. *La mancanza del bordo del cono si riflette nella base.*

Definizione 1.16 (Inviluppo convesso). L'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti un dato sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *inviluppo convesso* di X . Useremo la notazione

$$\text{Conv}(X)$$

per indicarlo.

Definizione 1.17 (Insieme convesso finitamente generato). Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *convesso finitamente generato* se esiste un insieme finito di vettori $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che

$$X = \text{Conv}\{a_1, \dots, a_m\} = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right\}.$$

(Cioè insieme delle combinazioni lineari convesse di un numero finito di generatori).

Osservazione 1.18. Se X può essere espresso come

$$X = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i, \alpha_i \geq 0 \forall i \right\}.$$

Allora X è detto *cono convesso finitamente generato* e $\{a_1, \dots, a_n\}$ è detto *insieme dei generatori* del cono.

Esempio 1.19. Consideriamo in \mathbb{R}^2 l'insieme di punti

$$a_1 = (0, 0), \quad a_2 = (1, 0), \quad a_3 = (0, 1), \quad a_4 = (1, 1).$$

Allora l'involuppo convesso di questi punti è

$$\text{Conv}\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \left\{ \sum_{i=1}^4 \alpha_i a_i \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1 \right\} = [0, 1] \times [0, 1],$$

cioè il quadrato unitario. Pertanto $X = [0, 1] \times [0, 1]$ è un insieme convesso finitamente generato.

I vettori

$$b_1 = (1, 0), \quad b_2 = (0, 1), \quad b_3 = (1, 1),$$

sono i generatori di

$$\text{cone}\{b_1, b_2, b_3\} = \left\{ \sum_{i=1}^3 \alpha_i b_i \mid \alpha_i \geq 0 \right\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\} = \text{cone}\{b_1, b_2\},$$

cioè il primo quadrante.

Quindi in un unico esempio si collegano i concetti di involuppo convesso, insieme convesso finitamente generato e cono convesso finitamente generato.

Definizione 1.20 (Insieme poliedrale). Un insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *poliedrale* se è l'intersezione di un numero finito di semispazi lineari di \mathbb{R}^n .

In \mathbb{R}^2 , un insieme poliedrale si riduce a un *poligono*. In \mathbb{R}^3 , un insieme poliedrale si riduce a un *poliedro*.

Proposizione 1.21. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e compatto. Allora X è poliedrale se e solo se è l'involuppo convesso di un insieme finito di punti.

Esempio 1.22. Considero l'insieme

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \geq 0, x + 2y \leq 3, y \geq -1\}.$$

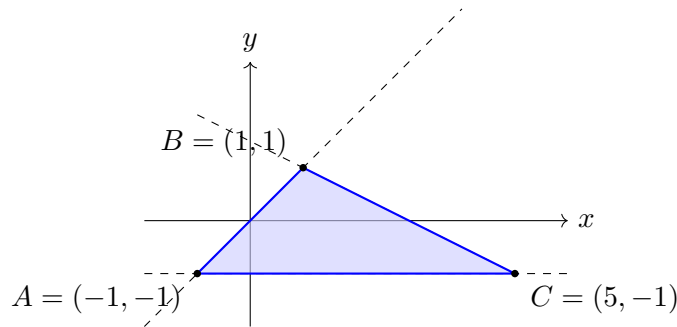
L'insieme X è definito come intersezione *finita di tre semispazi affini*, quindi è un poliedro convesso (poligono, in questo caso). I vertici sono:

$$\begin{aligned} A &= (-1, -1), \\ B &= (1, 1), \\ C &= (5, -1). \end{aligned}$$

L'insieme X può quindi essere rappresentato come

$$X = \text{Conv}\{A, B, C\},$$

ed è quindi finitamente generato da *tre punti*.



Proposizione 1.23. [2, Prop 2.1.13] Il polare di un insieme poliedrale convesso è ancora poliedrale.

Proposizione 1.24. [2, Cor 2.1.1] Se X_1 e X_2 sono insiemi convessi poliedrali in \mathbb{R}^n , allora $X_1 + X_2$ è poliedrale.

Definizione 1.25 (Cono poliedrale). Sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme finito, allora definiamo il *cono poliedrale* come $\text{Cone}(\text{Conv}(B))$.

Esempio 1.26. Sia

$$B = \{(1, 0), (1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

$$\text{Conv}(B) = \{\lambda(1, 0) + (1 - \lambda)(1, 1) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Calcolando otteniamo

$$\lambda(1, 0) + (1 - \lambda)(1, 1) = (\lambda + (1 - \lambda), 0 + (1 - \lambda)) = (1, 1 - \lambda),$$

quindi

$$\text{Conv}(B) = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}.$$

Il cono poliedrale generato da B è

$$\text{Cone}(\text{Conv}(B)) = \{\alpha(x, y) \mid \alpha \geq 0, (x, y) \in \text{Conv}(B)\}.$$

Sostituendo la forma di $\text{Conv}(B)$:

$$\text{Cone}(\text{Conv}(B)) = \{\alpha(1, y) \mid \alpha \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Ponendo $u = \alpha$ e $v = \alpha y$, si ottiene

$$u \geq 0, \quad 0 \leq v \leq u,$$

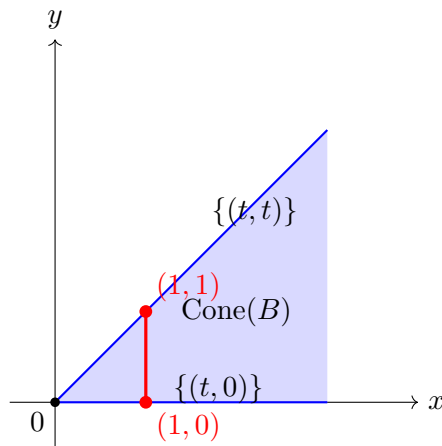
da cui

$$\text{Cone}(\text{Conv}(B)) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \geq 0, 0 \leq v \leq u\}.$$

Geometricamente, questo cono è delimitato dalle semirette $\{(t, 0) \mid t \geq 0\}$ e $\{(t, t) \mid t \geq 0\}$.

Poiché B è finito, il cono è finitamente generato:

$$\text{Cone}(\text{Conv}(B)) = \text{Cone}\{(1, 0), (1, 1)\}.$$



Osservazione 1.27 (Osservazioni generali sui poliedri e sui coni poliedrali). Le proposizioni precedenti mostrano come la struttura convessa finitamente generata sia estremamente stabile rispetto alle operazioni fondamentali della teoria dei coni e degli insiemi poliedrali.

In particolare:

- Un insieme convesso è poliedrale se e solo se può essere descritto come convesso finitamente generato;
- L'operazione di polare preserva la poliedralità, così come la somma di poliedri convessi;

- Un cono poliedrale può essere costruito a partire da un insieme finito di vettori generanti.

Queste osservazioni permettono di collegare la nozione di *cono finitamente generato* con quella di *cono poliedrale*, introducendo in modo naturale gli strumenti di rappresentazione.

Dal punto di vista dell'ottimizzazione vettoriale, i coni poliedrali sono particolarmente rilevanti perché la loro struttura è completamente determinata da un numero finito di raggi estremi. Questo permette di ridurre l'analisi di problemi potenzialmente infiniti allo studio di un insieme finito di direzioni fondamentali.

1.2 Convessità

Definizione 1.28. Siano $Y, C \subseteq \mathbb{R}^n$. Si definisce la *somma* di Y e C l'insieme

$$Y + C := \{y + c \mid y \in Y, c \in C\}.$$

Se C è un cono, l'insieme $Y + C$ è detto *ombra conica* di Y rispetto a C .

Definizione 1.29 (Convessità conica). Dato un insieme X e un cono convesso C in \mathbb{R}^n , X è detto *C -convesso* se $X + C$ è un insieme convesso.

Esempio 1.30. Consideriamo il segmento obliquo

$$Y := \{(x, 1 - x) : 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

che va da $(0, 1)$ a $(1, 0)$, e il cono

$$C := \mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0\}.$$

La somma conica di Y e C è

$$Y + C := \{y + c : y \in Y, c \in C\}.$$

Ogni punto della somma ha la forma

$$(a, b) = (x, 1 - x) + (u, v) = (x + u, 1 - x + v),$$

con $0 \leq x \leq 1, u \geq 0, v \geq 0$.

Ne segue che

$$a = x + u \geq x \geq 0, \quad b = 1 - x + v \geq 1 - x \geq 0,$$

e inoltre

$$a + b = (x + u) + (1 - x + v) = 1 + u + v \geq 1.$$

Pertanto

$$Y + C = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0, b \geq 0, a + b \geq 1\}.$$

Geometricamente, $Y + C$ corrisponde all'ortante positivo tagliato dalla retta $a + b = 1$: tutti i punti dell'ortante che stanno sopra o sulla retta sono inclusi. In particolare, l'insieme è convesso e chiuso.

Osservazione 1.31. Si noti che se al segmento

$$Y = \{(x, 1 - x) : 0 \leq x \leq 1\}$$

fossero stati aggiunti due piccoli segmenti verticali agli estremi, ad esempio $(0, 1) \rightarrow (0, 2)$ e $(1, 0) \rightarrow (1, 1)$, rendendo così l'insieme non convesso, allora la somma con il cono

$$C = \mathbb{R}_+^2$$

avrebbe riempito le piccole discontinuità e l'insieme risultante $Y + C$ sarebbe convesso.

Esempio 1.32. Sia

$$Y = \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 1) \mid 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

e sia

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x, x \geq 0\}.$$

L'insieme Y non è convesso, essendo unione di due segmenti paralleli distinti. Calcoliamo la somma conica:

$$Y + C = (\{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\} + C) \cup (\{(x, 1) \mid 0 \leq x \leq 1\} + C).$$

Per il primo addendo si ottiene:

$$\{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\} + C = \{(x, y) \mid y \geq x - 1, y \geq 0\}.$$

Per il secondo addendo si ottiene:

$$\{(x, 1) \mid 0 \leq x \leq 1\} + C = \{(x, y) \mid y \geq x, y \geq 1\}.$$

Poiché il secondo insieme è contenuto nel primo, si ha:

$$Y + C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x - 1, y \geq 0\}.$$

Quindi Y è un insieme non convesso ma C -convesso, cioè:

$$Y + C \text{ è convesso.}$$

Geometricamente, la somma conica riempie il gap tra i due segmenti di Y , producendo una regione convessa.

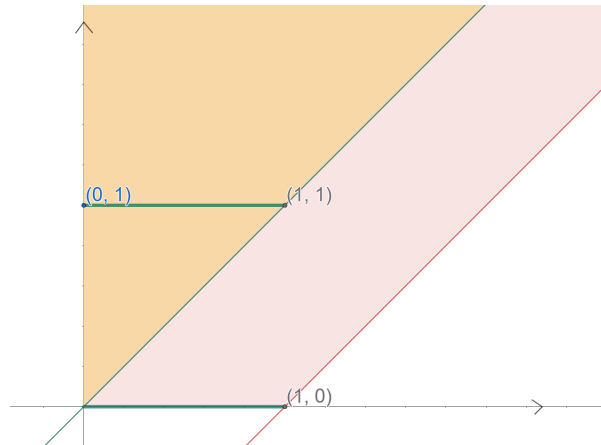


Figura 1.4: In verde i segmenti che compongono Y , in arancio l'insieme C , l'ombra conica $Y + C$ è composta dall'area arancio e quella rossa.

Definizione 1.33. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso. L'insieme Y si dice *ordinato rispetto al cono C* se è dotato della relazione

$$y \preceq_C y' \iff y' - y \in C,$$

per ogni $y, y' \in Y$.

Definizione 1.34. Siano $Y, C \subseteq \mathbb{R}^n$. L'insieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *C -stabile* se

$$Y + C \subseteq Y.$$

Si nota che l'insieme Y nell'esempio [1.32](#) non è C -stabile.

Proposizione 1.35. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono non vuoto. Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è C -stabile, allora

$$Y + C = Y.$$

Dimostrazione. Poiché Y è C -stabile, vale

$$Y + C \subseteq Y.$$

Essendo C un cono non vuoto, esiste $x \in C$ e quindi, per $\lambda = 0$,

$$0 = 0 \cdot x \in C.$$

Ne segue che, per ogni $y \in Y$,

$$y = y + 0 \in Y + C,$$

da cui

$$Y \subseteq Y + C.$$

Combinando le due inclusioni si ottiene

$$Y + C = Y.$$

□

Di seguito si elencano alcune proprietà fondamentali della somma conica e degli insiemi ordinati da un cono.

Proposizione 1.36. *Siano $Y, C \subseteq \mathbb{R}^n$, valgono le seguenti proprietà:*

1. *Se Y e C sono convessi, allora $Y + C$ è convesso.*
2. *Se C è un cono, allora $(Y + C) + C = Y + C$.*
3. *Se $Y_1 \subseteq Y_2$, allora $Y_1 + C \subseteq Y_2 + C$.*
4. *Se $C_1 \subseteq C_2$, allora $Y + C_1 \subseteq Y + C_2$.*
5. *Se $0 \in C$; in particolare se C è un cono, allora $Y \subseteq Y + C$.*

Dimostrazione. Dimostriamo le cinque proprietà una per una.

1. **Convessità della somma di convessi:** Siano $y_1 + c_1, y_2 + c_2 \in Y + C$ con $y_1, y_2 \in Y$ e $c_1, c_2 \in C$. Per ogni $\lambda \in [0, 1]$, consideriamo

$$\lambda(y_1 + c_1) + (1 - \lambda)(y_2 + c_2) = (\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) + (\lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2).$$

Poiché Y e C sono convessi, $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in Y$ e $\lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2 \in C$. Pertanto la combinazione convessa appartiene a $Y + C$, e quindi $Y + C$ è convesso.

2. Consideriamo $(Y + C) + C$. Per definizione,

$$\begin{aligned} (Y + C) + C &= \{(y + c_1) + c_2 \mid y \in Y, c_1 \in C, c_2 \in C\} \\ &= \{y + (c_1 + c_2) \mid y \in Y, c_1, c_2 \in C\}. \end{aligned}$$

Poiché C è un cono convesso, $c_1 + c_2 \in C$ per ogni $c_1, c_2 \in C$, quindi $(Y + C) + C = Y + C$.

3. **Monotonia rispetto all'insieme:** Se $Y_1 \subseteq Y_2$, allora ogni elemento $y_1 + c \in Y_1 + C$ ha $y_1 \in Y_1 \subseteq Y_2$, quindi $y_1 + c \in Y_2 + C$. Pertanto $Y_1 + C \subseteq Y_2 + C$.
4. **Monotonia rispetto al cono:** Se $C_1 \subseteq C_2$, allora ogni elemento $y + c_1 \in Y + C_1$ con $c_1 \in C_1$ appartiene anche a $Y + C_2$, perché $c_1 \in C_2$. Quindi $Y + C_1 \subseteq Y + C_2$.
5. **Inclusione di Y se $0 \in C$:** Se $0 \in C$, allora per ogni $y \in Y$ si ha $y + 0 = y \in Y + C$. Pertanto $Y \subseteq Y + C$.

□

Le seguenti proprietà descrivono il comportamento della convessità rispetto alla somma conica.

Proposizione 1.37. Se $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sono convessi e C è un cono convesso, allora

$$(Y_1 + Y_2) + C = (Y_1 + C) + Y_2.$$

Proposizione 1.38. Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è un cono convesso non vuoto, allora $Y + C$ è il più piccolo insieme convesso e C -stabile che contiene Y .

Dimostrazione. Procediamo in tre passi.

Passo 1: $Y + C$ è convesso. Poiché Y e C sono convessi, la loro somma $Y + C$ è convessa.

Passo 2: $Y + C$ è C -stabile. Poiché C è un cono, vale $C + C = C$. Pertanto

$$(Y + C) + C = Y + (C + C) = Y + C,$$

da cui segue

$$(Y + C) + C \subseteq Y + C,$$

ossia $Y + C$ è C -stabile.

Passo 3: Minimalità. Sia $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e C -stabile tale che $Y \subseteq Z$. Mostriamo che $Y + C \subseteq Z$.

Sia $y + c \in Y + C$, con $y \in Y$ e $c \in C$. Poiché $Y \subseteq Z$, si ha $y \in Z$. Essendo Z C -stabile, vale $Z + C \subseteq Z$, e quindi

$$y + c \in Z.$$

Ne segue che $Y + C \subseteq Z$.

Pertanto $Y + C$ è contenuto in ogni insieme convesso e C -stabile che contiene Y , e quindi è il più piccolo insieme con tali proprietà. \square

1.2.1 Chiusura

Definizione 1.39. Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. La *chiusura* di Y , denotata con \bar{Y} , è il più piccolo insieme chiuso che contiene Y .

Definizione 1.40. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso. Si dice che un insieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è *chiuso rispetto al cono C* se l'insieme $Y + C$ è chiuso.

Si riportano ora alcune proprietà fondamentali della chiusura in relazione alla somma conica.

Osservazione 1.41. In generale, la somma di un insieme chiuso con un cono convesso chiuso non è necessariamente chiusa se l'insieme non è convesso.

Esempio 1.42. Mostriamo un controesempio per chiarire l'osservazione precedente. Sia

$$C := \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\},$$

cioè l'ortante non negativo, che è un cono convesso e chiuso. Sia inoltre

$$Y := \{(x, -1/x) : x > 0\} \cup \{(0, 0)\},$$

che è chiuso ma non convesso. Dalla definizione di somma conica segue che

$$Y + C = \{y + c : y \in Y, c \in C\}.$$

Consideriamo separatamente i due casi dei punti di Y :

- Se $y = (0, 0)$, allora

$$(0, 0) + C = C = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0\}.$$

- Se $y = (x, -1/x)$ con $x > 0$, allora

$$(x, -1/x) + C = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq x, v \geq -1/x\}.$$

Unendo tutte queste “strisce” per $x > 0$, otteniamo che per ogni $u > 0$ è possibile raggiungere qualsiasi $v \in \mathbb{R}$.

Pertanto, la somma completa è

$$Y + C = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, v) : v \geq 0\}.$$

Consideriamo ora la chiusura $\overline{Y + C}$. Per ogni $b \in \mathbb{R}$ si ha

$$(0, b) = \lim_{a \rightarrow 0^+} (a, b) \in \overline{Y + C},$$

quindi la chiusura contiene l'intera verticale $x = 0$, in particolare il semiasse negativo delle ordinate.

Pertanto, prendendo un punto qualsiasi del semiasse negativo, ad esempio $(0, -1)$, otteniamo

$$(0, -1) \notin Y + C, \quad (0, -1) \in \overline{Y + C}.$$

Ciò mostra che $Y + C$ non è chiuso.

Proposizione 1.43. *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso tale che $\text{int } C \neq \emptyset$. Allora per ogni insieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ vale*

$$Y + \text{int } C \subseteq \text{int}(Y + C).$$

Dimostrazione. Sia $x \in Y + \text{int } C$. Allora esistono $y \in Y$ e $c \in \text{int } C$ tali che

$$x = y + c.$$

Poiché $c \in \text{int } C$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$B_\varepsilon(c) \subseteq C.$$

Segue che

$$x + B_\varepsilon(0) = y + (c + B_\varepsilon(0)) = y + B_\varepsilon(c) \subseteq Y + C.$$

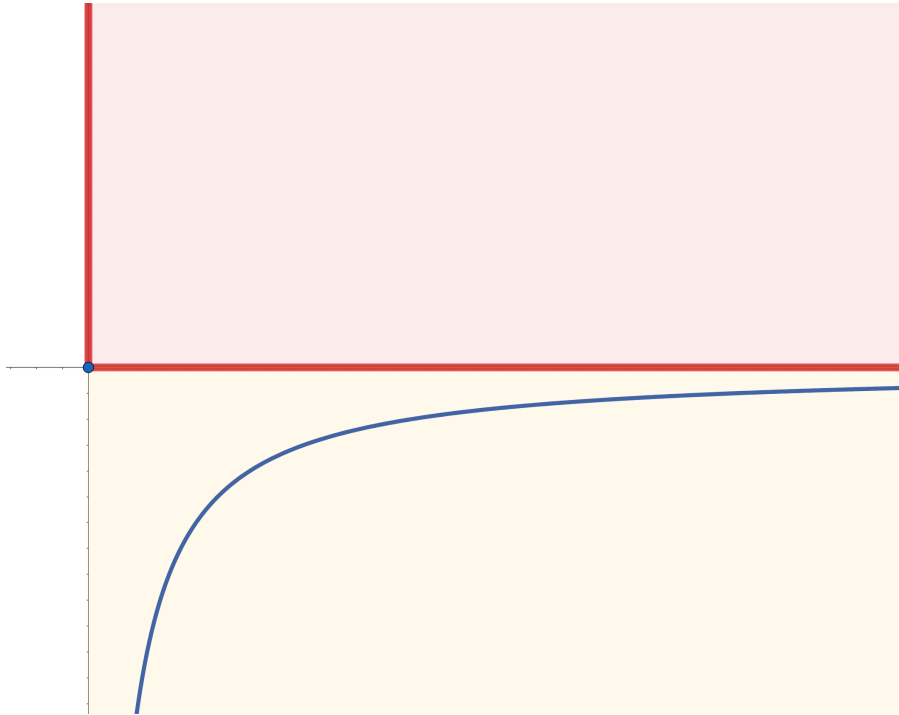


Figura 1.5: In Rosso l'ortante non negativo, in blu l'insieme Y , in giallo il contributo che, unito all'insieme C compone $Y + C$.

Pertanto esiste un intorno aperto di x contenuto in $Y + C$, e quindi

$$x \in \text{int}(Y + C).$$

Questo conclude la dimostrazione. \square

Applichiamo la proposizione usando gli insiemi dell'esempio [1.42](#). Calcoliamo anzitutto $Y + \text{int } C$. Per definizione,

$$Y + \text{int } C = \{y + c : y \in Y, c \in \text{int } C\}.$$

Se $y = (0, 0)$, allora

$$(0, 0) + \text{int } C = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0\}.$$

Se invece $y = (x, -1/x)$ con $x > 0$, si ha

$$(x, -1/x) + (a, b) = (x + a, -1/x + b), \quad a > 0, b > 0,$$

ossia

$$u > x, \quad v > -1/x.$$

Pertanto, considerando tutti i punti di Y e sommando $\text{int } C$, otteniamo

$$Y + \text{int } C = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}.$$

Ne consegue che l'interno di $Y + C$ è

$$\text{int}(Y + C) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v \in \mathbb{R}\},$$

Concludiamo quindi che

$$Y + \text{int } C = \text{int}(Y + C).$$

Proposizione 1.44. *Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso, allora anche \bar{Y} è convesso.*

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in \bar{Y}$ e sia $\lambda \in [0, 1]$. Esistono successioni $(x_1^k), (x_2^k) \subseteq Y$ tali che

$$x_1^k \rightarrow x_1, \quad x_2^k \rightarrow x_2.$$

Poiché Y è convesso, per ogni k si ha

$$\lambda x_1^k + (1 - \lambda)x_2^k \in Y.$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$ e usando la continuità delle operazioni lineari, si ottiene

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \bar{Y}.$$

Pertanto \bar{Y} è convesso. □

1.2.2 Limitatezza

Definizione 1.45. Un insieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *limitato* se esiste una palla chiusa $B_M(0)$ centrata nell'origine tale che

$$Y \subseteq B_M(0).$$

Definizione 1.46. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso. Un insieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *C-limitato inferiormente* se esiste $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$Y \subseteq y_0 + C.$$

Definizione 1.47. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso. Un insieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *C-limitato superiormente* se esiste $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$Y \subseteq y_0 + (-C).$$

Esempio 1.48. 1. Sia $C = \mathbb{R}_+^2 := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0\}$ l'ortante non negativo di \mathbb{R}^2 e sia

$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq -2\}.$$

Posto $y_0 := (1, -2)$, si ha

$$y_0 + C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq -2\}.$$

Pertanto risulta $Y = y_0 + C$ e, in particolare, $Y \subseteq y_0 + C$. Ne segue che l'insieme Y è C -limitato inferiormente.

2. Sia $C = \mathbb{R}_+^2 := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0\}$ e sia

$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}.$$

Per ogni $y_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$y_0 + C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq a, y \geq b\}.$$

Poiché Y contiene punti con x arbitrariamente negativi, non esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$x \geq a \quad \text{per ogni } (x, -x) \in Y.$$

Di conseguenza, per nessun $y_0 \in \mathbb{R}^2$ si verifica $Y \subseteq y_0 + C$, e quindi l'insieme Y non è C -limitato inferiormente.

3. Sia

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\},$$

che è un cono convesso. Consideriamo l'insieme

$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x| - 3\}.$$

Ponendo $y_0 := (0, -3)$, si ottiene

$$y_0 + C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x| - 3\} = Y.$$

In particolare, $Y \subseteq y_0 + C$, pertanto Y è C -limitato inferiormente.

4. Sia

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\}.$$

Consideriamo l'insieme

$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -|x|\}.$$

Per ogni $y_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$y_0 + C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq b + |x - a|\}.$$

Affinché $Y \subseteq y_0 + C$ fosse vera, si dovrebbe avere

$$-|x| \geq b + |x - a| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tale disuguaglianza non può essere soddisfatta, poiché il membro di destra tende a $+\infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$, mentre il membro di sinistra tende a $-\infty$. Pertanto non esiste $y_0 \in \mathbb{R}^2$ con $Y \subseteq y_0 + C$, e quindi Y non è C -limitato inferiormente. Y è C -limitato superiormente.

Osservazione 1.49. Se esiste $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Y \subseteq y_0 + C$, ovvero se esiste una traslazione di C che contiene Y , allora Y è C -limitato inferiormente.

Se $Y \subseteq C$, allora Y è C -limitato inferiormente, poiché basta prendere $y_0 = 0$ e si ha $Y \subseteq 0 + C$.

Viceversa, se esiste una direzione $d \in \mathbb{R}^n$ tale che $d \notin C$ e un punto $y \in Y$ con $y + td \in Y$ per ogni $t \geq 0$, allora non esiste $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $Y \subseteq y_0 + C$. Infatti, in tal caso Y fugge in una direzione esterna al cono C , e nessuna traslazione di C può contenere l'insieme Y .

Le seguenti proposizioni descrivono la limitatezza in relazione alla struttura conica.

Proposizione 1.50. *Se Y è limitato e C è un cono non banale, allora $Y + C$ non è limitato.*

Proposizione 1.51. *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso chiuso. Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è C -limitato inferiormente, allora anche la sua chiusura \bar{Y} è C -limitata inferiormente.*

Dimostrazione. Poiché Y è C -limitato inferiormente, esiste $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$Y \subseteq y_0 + C.$$

Passando alla chiusura si ottiene

$$\bar{Y} \subseteq \overline{y_0 + C}.$$

Essendo C chiuso, anche $y_0 + C$ è chiuso, e dunque

$$\overline{y_0 + C} = y_0 + C.$$

Segue che $\bar{Y} \subseteq y_0 + C$, ossia \bar{Y} è C -limitato inferiormente. \square

1.2.3 Compattezza

Definizione 1.52. Un insieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *compatto* se è chiuso e limitato.

Definizione 1.53. [2] def 3.2.4] Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono. Un insieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *C -compatto* se per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ l'insieme

$$(y - \text{cl}(C)) \cap Y$$

è compatto.

Questa definizione implica che Y sia chiuso e C -limitato inferiormente.

Osservazione 1.54. La terminologia “compatto rispetto al cono C ” va intesa in senso conico e non topologico: essa significa che l'insieme è chiuso e limitato inferiormente rispetto all'ordine indotto dal cono C , ma non implica la compattezza nel senso euclideo.

L'insieme Y definito nell'esempio [1.48].1 è un caso di insieme compatto rispetto al cono.

Proposizione 1.55. Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso chiuso. Allora

$$Y + C \text{ è chiuso.}$$

Dimostrazione. Sia $(x_k) \subseteq Y + C$ una successione convergente, $x_k \rightarrow x$. Per ogni k , scriviamo $x_k = y_k + c_k$ con $y_k \in Y$ e $c_k \in C$.

Poiché Y è compatto, esiste una sottosuccessione $y_{k_j} \rightarrow y \in Y$. Allora $c_{k_j} = x_{k_j} - y_{k_j} \rightarrow x - y$. Poiché C è chiuso, $x - y \in C$. Pertanto $x = y + (x - y) \in Y + C$, e $Y + C$ è chiuso. \square

1.3 Separazione per insiemi convessi

Dopo aver analizzato le proprietà geometriche di insiemi convessi e coni considerati singolarmente, introduciamo ora i teoremi di separazione, che consentono di descrivere la posizione relativa di due insiemi convessi tramite iperpiani. Tali risultati svolgeranno un ruolo centrale nello studio delle condizioni di ottimalità e delle tecniche di scalarizzazione.

Definizione 1.56 (Iperpiano). Un sottoinsieme $H \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *iperpiano* se può essere scritto come

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x^* \rangle = \beta\},$$

dove $x^* \in \mathbb{R}^n$, $x^* \neq 0$, e $\beta \in \mathbb{R}$. In questo caso, il vettore x^* è detto *normale* all'iperpiano H .

Definizione 1.57 (Semispazi chiusi). Ai due insiemi

$$H^+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x^* \rangle \geq \beta\}, \quad H^- := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x^* \rangle \leq \beta\}$$

si dà il nome di *semispazi chiusi* associati a H .

Definizione 1.58 (Separazione di insiemi). Siano $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi non vuoti. Un iperpiano H si dice *separatore* di X_1 e X_2 se

$$X_1 \subseteq H^-, \quad X_2 \subseteq H^+.$$

Si dice che H separa *debolmente* X_1 e X_2 se, inoltre vale,

$$X_1 \not\subseteq H \quad \text{oppure} \quad X_2 \not\subseteq H.$$

Si dice che H separa *fortemente* X_1 e X_2 se esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$X_1 + \varepsilon\mathbb{B} \subseteq H^+, \quad X_2 + \varepsilon\mathbb{B} \subseteq H^-,$$

dove \mathbb{B} è la palla chiusa unitaria in \mathbb{R}^n .

Teorema 1.59 (Teorema di separazione debole). Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi convessi non vuoti e disgiunti. Allora esiste un iperpiano

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = b\}, \quad a \neq 0,$$

che separa debolmente A e B , cioè

$$A \subseteq H^-, \quad B \subseteq H^+.$$

Teorema 1.60 (Teorema di separazione forte). *Siano X_1 e X_2 due insiemi non vuoti, disgiunti e convessi. Se X_1 è compatto e X_2 è chiuso, allora esiste un iperpiano che separa X_1 e X_2 fortemente.*

Esempio 1.61. Si considerino in \mathbb{R}^2 i due insiemi

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}, \quad B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -1\}.$$

Entrambi gli insiemi sono convessi, chiusi e disgiunti. L'iperpiano

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{1}{2}\}$$

li separa fortemente, poiché esiste $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ tale che

$$A + \varepsilon\mathbb{B} \subseteq \{y \geq -\frac{1}{2}\}, \quad B + \varepsilon\mathbb{B} \subseteq \{y \leq -\frac{3}{2}\}.$$

Invece, se si considerano

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}, \quad B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -1/x, x > 0\},$$

allora esiste un iperpiano che separa debolmente A e B (ad esempio $H = \{y = 0\}$), ma non esiste separazione forte, poiché B si avvicina arbitrariamente ad A per $x \rightarrow +\infty$.

1.3.1 Separazione connesso–cono

Poiché un cono convesso è, in particolare, un insieme convesso, è naturale chiedersi se i teoremi di separazione per coppie di insiemi convessi possano essere applicati direttamente al caso in cui uno dei due insiemi sia un cono. In questa sottosezione discutiamo in che senso tale approccio sia legittimo e quali siano, invece, i suoi limiti strutturali.

Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso. Se X e C sono disgiunti, allora il teorema di separazione debole per insiemi convessi è immediatamente applicabile, in quanto non richiede ulteriori ipotesi topologiche.

In questo senso, la separazione connesso–cono può essere vista come un caso particolare della separazione connesso–convesso: esiste un iperpiano che separa debolmente X e C . Questo risultato è puramente geometrico e non dipende dalla struttura conica di C , se non attraverso la sua convessità.

La situazione cambia radicalmente quando si considera la separazione forte. I teoremi classici di separazione forte richiedono tipicamente che uno degli insiemi sia compatto e l'altro chiuso. Tuttavia, un cono convesso non è mai compatto, a meno che non sia ridotto al solo punto 0.

Di conseguenza, anche quando X e C sono disgiunti e convessi, non è in generale possibile ottenere una separazione forte applicando direttamente il teorema

1.60.

Un'ulteriore difficoltà deriva dal fatto che, nel caso convesso–cono, la disgiunzione tra X e C non è sempre la condizione più rilevante dal punto di vista geometrico. Spesso è più naturale considerare insiemi come $X + C$ o $X - C$, che incorporano esplicitamente la struttura conica. Anche in questo caso, tuttavia, tali insiemi risultano convessi ma mai compatti, ad eccezione del caso banale, rendendo nuovamente inapplicabili i teoremi di separazione forte nella loro forma classica.

1.4 Relazioni binarie

Introduciamo ora il concetto di relazione binaria, strumento fondamentale per formalizzare confronti e ordinamenti tra elementi di un insieme.

Definizione 1.62 (Relazione binaria). Sia E un insieme. Una *relazione binaria* su E è un sottoinsieme $\mathcal{R} \subseteq E \times E$. Se $(x, y) \in \mathcal{R}$, si dice che x è *in relazione* con y e si scrive $x \mathcal{R} y$.

La relazione \mathcal{R} si dice *completa* se per ogni $x, y \in X$ vale

$$(x, y) \in \mathcal{R} \text{ oppure } (y, x) \in \mathcal{R} \text{ (o entrambi).}$$

Se la relazione non è completa, allora esistono $x, y \in E$ tali che

$$(x, y) \notin \mathcal{R} \text{ e } (y, x) \notin \mathcal{R}.$$

In questo caso si dice che x e y *non sono in relazione* (o sono *incomparabili*) rispetto a \mathcal{R} .

Questa situazione è distinta dall'*indifferenza*, che si verifica quando

$$(x, y) \in \mathcal{R} \text{ e } (y, x) \in \mathcal{R}.$$

Definizione 1.63. Sia R una relazione binaria su un insieme E .

- \mathcal{R} si dice *riflessiva* se per ogni $x \in E$ vale $(x, x) \in \mathcal{R}$;
- \mathcal{R} si dice *irriflessiva* se per ogni $x \in E$ vale $(x, x) \notin \mathcal{R}$;
- \mathcal{R} si dice *simmetrica* se per ogni $x, y \in E$, da $(x, y) \in \mathcal{R}$ segue $(y, x) \in \mathcal{R}$;
- \mathcal{R} si dice *asimmetrica* se per ogni $y, z \in E$ da $(y, z) \in \mathcal{R}$ si ha $(z, y) \notin \mathcal{R}$;
- \mathcal{R} si dice *antisimmetrica* se per ogni $y, z \in E$, da $(z, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$ segue $y = z$ per ogni $y, z \in E$;
- \mathcal{R} si dice *transitiva* se per ogni $x, y, z \in E$, da $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}$ segue $(x, z) \in \mathcal{R}$;
- \mathcal{R} si dice *negativamente transitiva* se per ogni $y, z, w \in E$, da $(y, z) \notin \mathcal{R}$ e $(z, w) \notin \mathcal{R}$ segue $(y, w) \notin \mathcal{R}$;
- \mathcal{R} si dice *debolmente connessa* se da $y \neq z$ segue $(y, z) \in \mathcal{R}$ o $(z, y) \in \mathcal{R}$.

Esempio 1.64. Sia $E = \mathbb{R}^2$.

•

$$\mathcal{R}_A : (x_1, x_2) \mathcal{R}_A (y_1, y_2) \iff x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2.$$

Interpretazione: x è preferito a y se la somma delle componenti è maggiore (utilità additiva). Proprietà: riflessiva, transitiva, completa, non antisimmetrica.

•

$$\mathcal{R}_B : (x_1, x_2) \mathcal{R}_B (y_1, y_2) \iff x_1 \geq y_1 \text{ e } x_2 \geq y_2.$$

Interpretazione: x domina y se è migliore in entrambe le componenti (ordine parziale). Proprietà: riflessiva, transitiva, antisimmetrica, non completa (es. $(1, 2)$ e $(2, 1)$ incomparabili).

•

$$\mathcal{R}_C : (x_1, x_2) \mathcal{R}_C (y_1, y_2) \iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Interpretazione: x e y sono alla stessa distanza dall'origine (indifferenza geometrica). Proprietà: riflessiva, simmetrica, transitiva, non completa.

Definizione 1.65 (Preordine e relazione d'ordine). Una relazione binaria \mathcal{R} su un insieme E è detta:

- *preordine* se \mathcal{R} è riflessiva e transitiva;
- *relazione d'ordine* se \mathcal{R} è un preordine e inoltre vale l'antisimmetria.

Esempio 1.66. Sia $X = \mathbb{R}^2$. L'ordine lessicografico è definito dalla relazione:

$$(x_1, x_2) \preceq_{\text{lex}} (y_1, y_2) \iff (x_1 < y_1) \text{ oppure } (x_1 = y_1 \text{ e } x_2 \leq y_2).$$

- **Riflessività:** per ogni (x_1, x_2) vale $x_1 = x_1$ e $x_2 \leq x_2$, quindi $(x_1, x_2) \preceq_{\text{lex}} (x_1, x_2)$.
- **Transitività:** se $(x_1, x_2) \preceq_{\text{lex}} (y_1, y_2)$ e $(y_1, y_2) \preceq_{\text{lex}} (z_1, z_2)$, allora:
 - se $x_1 < y_1$ allora $x_1 < z_1$ oppure $x_1 = y_1$ (impossibile), quindi $(x_1, x_2) \preceq_{\text{lex}} (z_1, z_2)$;
 - se $x_1 = y_1$ e $x_2 \leq y_2$, allora $y_1 < z_1$ oppure $y_1 = z_1$ e $y_2 \leq z_2$, da cui segue $(x_1, x_2) \preceq_{\text{lex}} (z_1, z_2)$.
- **Antisimmetria:** se $(x_1, x_2) \preceq_{\text{lex}} (y_1, y_2)$ e $(y_1, y_2) \preceq_{\text{lex}} (x_1, x_2)$ allora necessariamente $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$, dunque $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.
- **Completezza:** per ogni $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ si ha $x_1 < y_1$, oppure $x_1 > y_1$, oppure $x_1 = y_1$; nel primo caso vale $(x_1, x_2) \preceq_{\text{lex}} (y_1, y_2)$, nel secondo vale $(y_1, y_2) \preceq_{\text{lex}} (x_1, x_2)$, nel terzo si confrontano le seconde componenti.

Quindi \preceq_{lex} è un ordine totale su \mathbb{R}^2 .

Un ordine di preferenze su un insieme di scelte E descrive il comportamento di un agente nella scelta tra elementi di E .

Definizione 1.67 (Relazione di preferenza). Sia E un insieme di alternative. Una *relazione di preferenza* su E è una relazione binaria $\succeq \subseteq E \times E$ che è:

- *riflessiva*: per ogni $x \in E$, $(x, x) \in \succeq$;
- *transitiva*: per ogni $x, y, z \in E$, da $(x, y) \in \succeq$ e $(y, z) \in \succeq$ segue $(x, z) \in \succeq$;
- *completa*: per ogni $x, y \in E$, vale $(x, y) \in \succeq$ oppure $(y, x) \in \succeq$ (o entrambi).

Data una relazione di preferenza \succeq , introduciamo le seguenti notazioni derivate:

$$y \succ z \quad \text{se } y \succeq z \text{ e non } z \succeq y \quad (\text{preferenza stretta}),$$

$$y \sim z \quad \text{se } y \succeq z \text{ e } z \succeq y \quad (\text{indifferenza}).$$

In particolare, $y \succeq z$ si interpreta come *preferenza debole*, ossia che z non è strettamente preferito a y .

Una relazione di preferenza è dunque un preordine completo.

Data una relazione di preferenza \succ (o \succeq), è naturale cercare funzioni $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ che la rappresentino, cioè tali che

$$y \succ z \iff u(y) > u(z).$$

Definizione 1.68 (Funzione di preferenza). Sia \succ una relazione di preferenza su un insieme E . Una funzione $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *funzione di preferenza* (o *funzione di utilità che rappresenta* \succ) se

$$y \succ z \iff u(y) > u(z), \quad \forall y, z \in E.$$

1.5 Coni di preferenza - relazioni coniche

Una *struttura algebrica* su un insieme X è data da una collezione di operazioni definite su X che soddisfano opportune proprietà assiomatiche. Nel caso di uno spazio vettoriale reale V , tali operazioni sono la somma vettoriale e la moltiplicazione per scalari reali.

Una relazione binaria \succeq su uno spazio vettoriale reale V si dice *compatibile con la struttura algebrica* se è invariante per traslazioni e coerente con la moltiplicazione per scalari non negativi, ossia se per ogni $x, y, z \in V$ e per ogni $\lambda \geq 0$ valgono

$$x \succeq y \implies x + z \succeq y + z, \quad x \succeq y \implies \lambda x \succeq \lambda y.$$

Nel seguito adotteremo la convenzione secondo cui $y' \succeq y$ indica che y' è almeno tanto preferito quanto y ; pertanto, un vettore $y' - y$ appartenente al cono C rappresenta una direzione di miglioramento. I coni forniscono una caratterizzazione naturale di tali relazioni: dato un cono $C \subseteq V$, l'ordinamento definito da

$$y \succeq_C y' \iff y - y' \in C. \quad (1.1)$$

è automaticamente compatibile con la struttura vettoriale. Viceversa, ogni relazione d'ordine compatibile con le operazioni di somma e di moltiplicazione per scalari non negativi può essere rappresentata mediante un cono opportuno. Per questo motivo, i coni costituiscono lo strumento ottimale per introdurre e studiare relazioni d'ordine negli spazi vettoriali reali.

In questa formulazione, il cono C cattura le direzioni lungo le quali il vettore degli obiettivi può aumentare senza diminuire la preferenza. I coni convessi sono spesso utilizzati per definire strutture di dominanza, useremo :

- $y \preceq_C y'$ per $y, y' \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $y' - y \in C$ per un cono convesso $C \in \mathbb{R}^n$;
- $y \prec_C y'$ significa che $y' - y \in C$ ma $y - y' \notin C$.

Proposizione 1.69. *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono puntato. Allora*

$$y \prec y' \text{ se e solo se } y' - y \in C \setminus \{0\}$$

Dimostrazione. Supponiamo $y' - y \in C \setminus \{0\}$, allora non può valere $y - y' \in C$, poiché ciò implicherebbe che $y' - y \in C \cap (-C)$ con $y' - y \neq 0$, in contraddizione con la proprietà di essere puntato di C . Ne segue che $y \prec_C y'$. Viceversa, se $y \prec_C y'$, per definizione si ha $y' - y \in C$ e $y - y' \notin C$. In particolare, $y' - y \neq 0$, poiché se fosse $y' - y = 0$ allora anche $y - y' = 0$ appartenerrebbe a C , contraddicendo la definizione di dominanza stretta. Pertanto $y' - y \in C \setminus \{0\}$. Si conclude quindi che, quando C è puntato, vale l'equivalenza

$$y \prec_C y' \iff y' - y \in C \setminus \{0\}.$$

□

Osservazione 1.70. Un esempio fondamentale di relazione d'ordine indotta da un cono è dato dall'ortante non negativo \mathbb{R}_+^n . In questo caso, la relazione risultante coincide con l'ordine componente per componente (o ordine paretiano): per $x, y \in \mathbb{R}^n$ si pone

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Questa relazione esprime il fatto che y domina x in ciascuna componente, ed è alla base di numerose applicazioni, in particolare nell'ambito dell'ottimizzazione multiobiettivo.

Di seguito sono elencate alcune relazioni tra coni e ordini (alcune già viste ma comunque riportate qui sotto):

1. **Riflessività della relazione d'ordine conica.** Vale sempre, perché $0 \in C$ per definizione di cono.

$$y - y = 0 \in C \implies y \preceq_C y.$$

2. **Antisimmetria dell'ordine.** L'ordine \preceq_C è antisimmetrico se e solo se C è puntato, cioè

$$C \cap (-C) = \{0\}.$$

Infatti, se $y_1 \preceq_C y_2$ e $y_2 \preceq_C y_1$, allora

$$y_2 - y_1 \in C, \quad y_1 - y_2 \in C,$$

quindi $y_2 - y_1 \in C \cap (-C)$ e dunque $y_1 = y_2$.

3. **Transitività dell'ordine.** La relazione \preceq_C è transitiva se C è chiuso rispetto all'addizione, cioè

$$C + C \subseteq C.$$

Infatti, se

$$y_2 - y_1 \in C \quad \text{e} \quad y_3 - y_2 \in C,$$

allora

$$(y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) = y_3 - y_1 \in C,$$

da cui $y_1 \preceq_C y_3$.

4. **Ordine totale.** L'ordine \preceq_C è totale (cioè per ogni y_1, y_2 è comparabile almeno una direzione) *se e solo se* $C \cup (-C) = \mathbb{R}^m$.

Esempio 1.71. Sia $C = \mathbb{R}_+^2$. Allora

$$(x_1, y_1) \preceq_C (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2.$$

Prendiamo i punti

$$a = (1, 3), \quad b = (2, 2), \quad c = (3, 4).$$

Si verifica facilmente che

$$a - b = (-1, 1) \notin C, \quad b - a = (1, -1) \notin C,$$

quindi a e b sono incomparabili rispetto a \preceq_C . Invece

$$c - a = (2, 1) \in C, \quad c - b = (1, 2) \in C,$$

quindi $a \preceq_C c$ e $b \preceq_C c$. Poiché C è puntato, anche $a \prec_C c$ e $b \prec_C c$.

Esempio 1.72. Sia

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\}.$$

Per $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ definiamo

$$u \preceq_C v \iff v - u \in C \iff v_2 - u_2 \geq |v_1 - u_1|.$$

Prendiamo i punti

$$a = (0, 0), \quad b = (1, 1), \quad c = (2, 1).$$

Si ha

$$b - a = (1, 1) \in C,$$

quindi $a \prec_C b$.

Invece

$$c - a = (2, 1) \notin C,$$

quindi $a \not\prec_C c$. Analogamente,

$$c - b = (1, 0) \notin C, \quad b - c = (-1, 0) \notin C$$

quindi b e c sono incomparabili rispetto a \preceq_C .

Esempio 1.73. Sia

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}.$$

Allora per $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$,

$$u \preceq_C v \iff v - u \in C \iff v_2 \geq u_2.$$

Si osservi che C non è puntato. Infatti $C \cap (-C) \neq \{0\}$ (poiché contiene tutti i vettori della forma $(x, 0)$).

Prendiamo i punti

$$a = (0, 1), \quad b = (10, 1), \quad c = (0, 2).$$

Si ha

$$a \preceq_C b, \quad b \preceq_C a,$$

quindi a e b sono equivalenti rispetto a \preceq_C , pur essendo distinti. Invece

$$a \prec_C c,$$

poiché $c_2 > a_2$.

Questo esempio mostra che se il cono non è puntato, la relazione \prec_C non definisce un ordine parziale, perché non è antisimmetrica.

Capitolo 2

Minimalità conica

Nel contesto dell'ottimizzazione vettoriale, la nozione classica di minimo di una funzione reale non è più sufficiente a descrivere un problema in cui l'obiettivo è multidimensionale. Infatti, quando la funzione obiettivo assume valori in uno spazio vettoriale, non esiste in generale un unico elemento che sia “migliore” rispetto a tutti gli altri in senso assoluto: i punti non sono confrontabili in modo totale. Per questo motivo, la teoria dell'ottimizzazione vettoriale introduce relazioni d'ordine parziali, tipicamente indotte da coni convessi, che consentono di formalizzare un concetto di preferenza tra vettori.

Il passaggio fondamentale consiste nel sostituire l'ordinamento totale su \mathbb{R} con un ordinamento parziale su \mathbb{R}^n definito tramite un cono C .

La presenza di un ordinamento parziale rende necessario distinguere diverse tipologie di minimi: non basta più parlare di un punto che minimizza tutte le componenti, poiché tale punto può non esistere, oppure può esistere ma non essere robusto rispetto a perturbazioni o a estensioni dell'ordinamento. Da qui nascono concetti come minimo debole, minimo (Pareto), minimo proprio (Henig) e minimo ideale.

Il presente capitolo è dedicato proprio alla formalizzazione di questi concetti e alle relazioni che li collegano, ponendo le basi per la successiva trattazione del problema di ottimo vettoriale e delle tecniche di scalarizzazione.

Per lo sviluppo di questo capitolo si è preso spunto dal testo di J. Jahn (2011) *Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions* [4] sfruttando principalmente il capitolo 4.

2.1 Definizioni di minimalità

L'idea di *minimalità rispetto a un cono* generalizza il concetto di minimo in un ordinamento lineare alle situazioni in cui l'ordine è indotto da un cono. Parleremo di *punto dominato* rispetto a un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se, dato $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ e $y \in Y$, esiste un punto $y' \in Y$, con $y' \neq y$, tale che

$$y' - y \in C.$$

In tal caso diremo che y' domina y rispetto all'ordine indotto da C .

Definizione 2.1. [4, def 4.1] Sia S un sottoinsieme non vuoto di uno spazio lineare parzialmente ordinato con cono d'ordine C .

1. Un elemento $\bar{x} \in S$ si dice *elemento minimale* dell'insieme S se

$$(\{\bar{x}\} - C) \cap S \subset \{\bar{x}\} + C.$$

2. Un elemento $\bar{x} \in S$ si dice *elemento massimale* dell'insieme S se

$$(\{\bar{x}\} + C) \cap S \subset \{\bar{x}\} - C.$$

L'insieme degli elementi minimali è denotato da $\min_C Y$. Se il cono d'ordine C è puntato, allora le inclusioni qui sopra possono essere sostituite dalle seguenti equazioni insiemistiche:

$$(\{\bar{x}\} - C) \cap S = \{\bar{x}\} \quad (\text{ovvero: } x \leq_C \bar{x}, x \in S \Rightarrow x = \bar{x}),$$

$$(\{\bar{x}\} + C) \cap S = \{\bar{x}\} \quad (\text{ovvero: } \bar{x} \leq_C x, x \in S \Rightarrow x = \bar{x}).$$

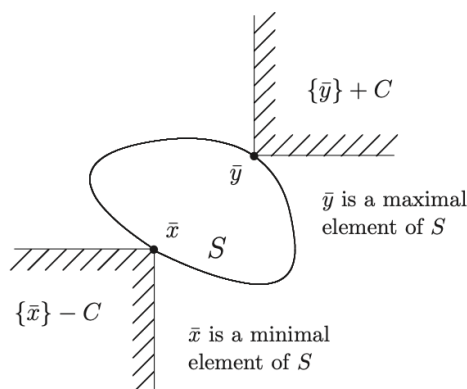


Figura 2.1: Elemento minimo e massimo di un insieme S [4, Fig 4.1]

Osservazione 2.2. Le definizioni di massimalità possono essere ridotte a quelle di minimalità considerando il cono opposto. In particolare, un elemento $\bar{x} \in S$ è massimale rispetto al cono C se e solo se è minimale rispetto al cono $-C$.

Proposizione 2.3. [4, lemma 4.7] Sia S un sottoinsieme non vuoto di uno spazio lineare parzialmente ordinato con cono d'ordine C .

1. Se il cono d'ordine C è puntato, allora ogni elemento minimale dell'insieme $S + C$ è anche un elemento minimale dell'insieme S .
2. Ogni elemento minimale dell'insieme S è anche un elemento minimale dell'insieme $S + C$.

In alcune situazioni si è interessati a un elemento di un insieme che funge da estremo inferiore di tale insieme. Un elemento ottimale di questo tipo è detto *fortemente minimale*.

Definizione 2.4. Sia S un sottoinsieme non vuoto di uno spazio lineare parzialmente ordinato con cono d'ordine C . Un elemento $\bar{x} \in S$ si dice *fortemente minimale* per l'insieme S se

$$S \subset \{\bar{x}\} + C \quad (\text{ovvero: } \bar{x} \leq_C x \text{ per ogni } x \in S)$$

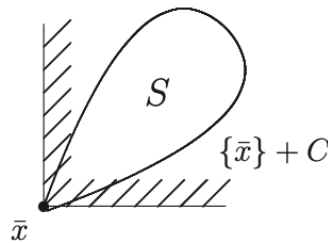


Figura 2.2: Elementi fortemente minimali di un insieme S . [4] fig. 4.2]

Definizione 2.5 (Punto ideale). Sia S un sottoinsieme non vuoto di uno spazio lineare parzialmente ordinato con cono d'ordine C . Un punto $\tilde{x} \in X$ si dice *punto ideale* di S se

$$S \subset \tilde{x} + C.$$

Il punto \tilde{x} non è necessariamente un elemento di S .

Proposizione 2.6. Sia S un sottoinsieme non vuoto di uno spazio lineare parzialmente ordinato con cono d'ordine C , e sia \tilde{x} un punto ideale di S . Se $\tilde{x} \in S$, allora \tilde{x} è un elemento fortemente minimale di S nel senso della Definizione 2.4.

Definizione 2.7. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme non vuoto di X con cono d'ordine C , $\text{int}C \neq \emptyset$.

Un elemento $\bar{x} \in S$ si dice *debolmente minimale* per l'insieme S se

$$(\{\bar{x}\} - \text{int}C) \cap S = \emptyset.$$

L'insieme degli elementi debolmente minimali è denotato da $\min_C^W Y$

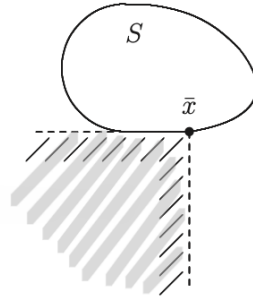


Figura 2.3: Elementi debolmenti minimali di un insieme S . L'area grigia corrisponde a $\{\bar{x} - \text{int}C\}$. [4] fig 4.4]

Proposizione 2.8. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto e sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono d'ordine con $\text{int}C \neq \emptyset$. Allora ogni elemento minimale di S è anche debolmente minimale.*

Dimostrazione. Sia $\bar{x} \in S$ un elemento minimale. Supponiamo per assurdo che \bar{x} non sia debolmente minimale. Allora esiste $y \in S$ tale che

$$y \in \{\bar{x}\} - \text{int}C,$$

cioè esiste $c \in \text{int}C$ tale che

$$y = \bar{x} - c.$$

Poiché $\text{int}C \subseteq C$, segue che $c \in C$ e quindi

$$y \in (\{\bar{x}\} - C) \cap S.$$

Dalla minimalità di \bar{x} si ha allora

$$y \in \{\bar{x}\} + C,$$

ossia esiste $c' \in C$ tale che

$$y = \bar{x} + c'.$$

Confrontando le due espressioni di y , otteniamo

$$\bar{x} - c = \bar{x} + c' \quad \Rightarrow \quad -c = c' \quad \Rightarrow \quad c + c' = 0.$$

Poiché $c \in \text{int}C$ e $c' \in C$, si ha $c + c' \in \text{int}C$. Ne segue che $0 \in \text{int}C$, il che è impossibile.

Pertanto, deve essere

$$(\{\bar{x}\} - \text{int}C) \cap S = \emptyset,$$

ossia \bar{x} è debolmente minimale. \square

Esempio 2.9. Sia

$$C = \mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

e sia $Y \subset \mathbb{R}^2$ definito da

$$Y = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 3)\}.$$

L'ordine indotto dal cono C è dato da

$$y' \preceq_C y \iff y'_1 \leq y_1 \text{ e } y'_2 \leq y_2.$$

Minimi rispetto a C . I punti che non sono dominati da alcun altro punto di Y sono

$$(1, 3), (2, 2), (3, 1).$$

Pertanto

$$\min_C Y = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}.$$

Minimi deboli rispetto a C . Poiché

$$\text{int } C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\},$$

un punto y è minimo debole se non esiste $y' \in Y$ tale che

$$y - y' \in \text{int } C.$$

Nel caso del punto $(2, 3)$, pur essendo dominato da $(1, 3)$, si ha

$$(2, 3) - (1, 3) = (1, 0) \notin \text{int } C.$$

Inoltre nessun punto di Y migliora strettamente entrambe le componenti di $(2, 3)$.

Quindi $(2, 3)$ è minimo debole ma non minimo.

Ne segue che

$$\min_C^W Y = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 3)\}.$$

Si osserva dunque che

$$\min_C Y \subsetneq \min_C^W Y.$$

Esempio 2.10. Consideriamo il cono

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq |x_1|\}.$$

L'ordine indotto è

$$y' \preceq_C y \iff y - y' \in C \iff y_2 - y'_2 \geq |y_1 - y'_1|,$$

e l'interno del cono è

$$\text{int } C = \{(x_1, x_2) : x_2 > |x_1|\}.$$

Dato l'insieme di punti

$$Y = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (0, 2)\}.$$

Minimi rispetto a C . Un punto è minimo se non è dominato da alcun altro punto di Y . Il punto $(0, 0)$ non è dominato da nessun altro punto, quindi è minimo. Gli altri punti:

$$(-1, 1), (1, 1), (0, 2)$$

sono tutti dominati da $(0, 0)$, perché

$$(-1, 1) - (0, 0) = (-1, 1) \in C, \quad (1, 1) - (0, 0) = (1, 1) \in C, \quad (0, 2) - (0, 0) = (0, 2) \in C.$$

Dunque

$$\min_C Y = \{(0, 0)\}.$$

Minimi deboli rispetto a C . Il punto $(0, 0)$ rispetta la condizione di minimo. Per gli altri punti, ad eccezione di $(0, 2) = (0, 2) - (0, 0)$, sono tutti minimi deboli.

Dunque

$$\min_C^W Y = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}.$$

Questo esempio mostra chiaramente la differenza tra *minimo* e *minimo debole*: il minimo è un sottoinsieme dei minimi deboli.

2.1.1 Casi paretiani

Le definizioni di *minimo* e *minimo debole* rispetto a un cono $C \subseteq \mathbb{R}^n$ prendono il nome di *minimo di Pareto* e *minimo debole di Pareto* nel caso in cui il cono sia l'ortante non negativo

$$C = \mathbb{R}_+^n,$$

cioè quando l'ordine indotto coincide con l'ordine componente per componente come visto in [1.70](#).

Nell'esempio [2.9](#) il cono è l'ortante positivo, l'ordine indotto coincide con l'ordine componente per componente, e quindi le nozioni di minimo (rispettivamente minimo debole) rispetto al cono coincidono esattamente con quelle di minimo di Pareto (rispettivamente minimo debole di Pareto).

Proposizione 2.11. *Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto e sia $C = \mathbb{R}_+^n$. Se $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ è un punto ideale minimale di S , allora \tilde{x} è un punto minimale di Pareto per S .*

Dimostrazione. Poiché \tilde{x} è un punto ideale di S , per definizione si ha

$$S \subseteq \tilde{x} + \mathbb{R}_+^n,$$

ossia per ogni $y \in S$ esiste $c \in \mathbb{R}_+^n$ tale che

$$y = \tilde{x} + c.$$

In particolare, segue che $\tilde{x} \leq y$ (ordinamento componente per componente) per ogni $y \in S$.

Supponiamo ora per assurdo che \tilde{x} non sia minimale di Pareto. Allora esiste $y \in S$, $y \neq \tilde{x}$, tale che

$$y \leq \tilde{x}.$$

Dalle due relazioni $\tilde{x} \leq y$ e $y \leq \tilde{x}$ segue che $y = \tilde{x}$, il che contraddice l'ipotesi $y \neq \tilde{x}$.

Pertanto, non esiste alcun $y \in S$ con $y \neq \tilde{x}$ tale che $y \leq \tilde{x}$, cioè \tilde{x} è un punto minimale di Pareto per S . \square

2.1.2 Minimalità propria

Definizione 2.12. [2] def 3.1.6] Sia $S \subseteq \mathbb{R}^p$. L' *inviluppo conico* (*projecting cone*), indicato con $P(S)$, è l'insieme di tutti gli h della forma $h = \alpha y$, con α un numero reale non negativo e $y \in S$. $P(S)$ è noto anche come *cono generato* da S secondo le definizioni di [1.13].

Definizione 2.13. [2] def 3.1.7] Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x^* \in S$ è detto un *minimo proprio in senso di Benson* se

$$\overline{P(S + C - x^*)} \cap (-C) = \{0\}.$$

Nella figura [2.4] si vede graficamente la definizione appena introdotta.

2.1.3 Coni dilatati di Henig e minimalità propria

Nel contesto dell'ottimizzazione vettoriale, la nozione di minimo (Pareto) risulta spesso troppo debole, in quanto non garantisce stabilità rispetto a perturbazioni dell'ordinamento indotto dal cono. Per ovviare a questa difficoltà, Henig introduce una nozione di minimalità più restrittiva, basata sull'idea di considerare ordini conici leggermente più ampi di quello originario.

A tale scopo, è necessario introdurre la nozione di *cono dilatato* associato a un cono dato.

Definizione 2.14 (Cono dilatato di Henig). Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso con $\text{int } C \neq \emptyset$. Si dice che un cono convesso $C' \subseteq \mathbb{R}^n$ è un *cono dilatato di Henig* di C se

$$C \setminus \{0\} \subseteq \text{int } C'.$$

L'insieme di tutti i coni dilatati di Henig di C è denotato da $\mathcal{H}(C)$.

Definizione 2.15 (Minimo proprio di Henig). Siano $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ e $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso con $\text{int } C \neq \emptyset$. Un punto $y \in Y$ si dice *minimo proprio di Henig* di Y rispetto al cono C se esiste un cono dilatato $C' \in \mathcal{H}(C)$ tale che

$$y \in \min_{C'} Y.$$

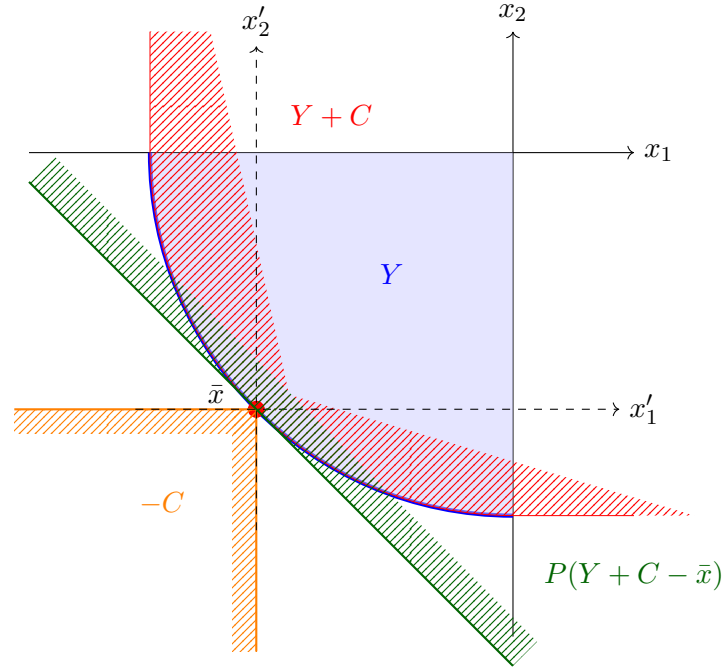


Figura 2.4: Punto propriamente minimale per Benson. Considero un insieme Y come in figura e valuto il punto \bar{x} . Costruisco l'ombra conica $Y + C$ riferendomi agli assi x'_1, x'_2 , rossa in figura. Costruisco l'involucro conico dell'ombra conica $P(Y + C - \bar{x})$ in verde in figura. Applico la definizione [2.13](#).

L'insieme dei minimi propri di Henig è denotato da $\min_C^H Y$.

Osservazione 2.16. La definizione precedente formalizza l'idea di una minimalità robusta: un punto è minimo proprio di Henig se rimane minimo anche rispetto a un ordinamento conico più ampio di quello originario.

Teorema 2.17. [\[2\]](#) *teorema 3.1.2]* Sia C cono chiuso e acuto. Allora la minimalità di Henig è equivalente a quella di Benson [\(2.13\)](#).

Esempio 2.18. Consideriamo il cono

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq |x_1|\}$$

e l'insieme di punti

$$Y = \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}.$$

Con il cono C , tutti i punti di Y sono *minimi deboli*, perché nessun punto li migliora strettamente all'interno del cono. Tuttavia, il concetto di *minimo di Henig* introduce un cono leggermente più ampio. Ad esempio, consideriamo il cono dilatato

$$C' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0.9|x_1|\} \in \mathcal{H}(C).$$

Con il cono dilatato C' :

- Il punto $(0,0)$ rimane *minimo di Henig*, cioè robusto rispetto a piccole perturbazioni dell'ordinamento.
- Gli altri punti $(-1,-1)$, $(1,1)$, $(2,2)$ non sono più minimali.

Questo esempio mostra chiaramente la forza della minimalità di Henig: il vertice è un punto forte, robusto, mentre i punti ai lati diventano non minimali se si considera un ordinamento leggermente più ampio.

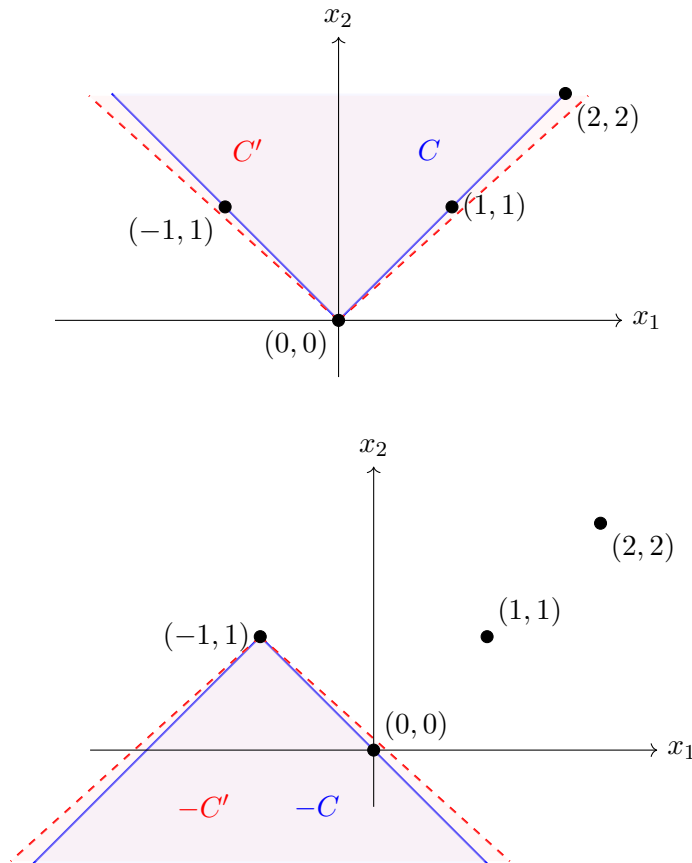


Figura 2.5: rappresentazione dell'esempio [2.18](#).

2.2 Relazioni tra le diverse tipologie di minimi

Teorema 2.19. *Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto e sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso con $\text{int}C \neq \emptyset$. Allora valgono le inclusioni*

$$\min_C^H Y \subseteq \min_C Y \subseteq \min_C^W Y,$$

dove

- $\min_C^H Y$ denota l'insieme dei minimi propri di Henig;
- $\min_C Y$ denota l'insieme dei minimi (forti; di Pareto, nel caso $C = \mathbb{R}_n^+$);

- $\min_C^W Y$ denota l'insieme dei minimi deboli.

Dimostrazione. 1. Inclusione $\min_C^H Y \subseteq \min_C Y$.

Sia $y \in \min_C^H Y$. Per definizione di minimo proprio di Henig, esiste un cono $C' \in \mathcal{H}(C)$ tale che

$$y \in \min_{C'} Y,$$

ossia

$$(\{y\} - C') \cap Y \subseteq \{y\} + C'. \quad (2.1)$$

Per la definizione della famiglia $\mathcal{H}(C)$ si ha

$$C \subseteq C'. \quad (2.2)$$

Da (2.2) segue che

$$\{y\} - C \subseteq \{y\} - C' \quad \text{e} \quad \{y\} + C \subseteq \{y\} + C'.$$

Intersecando con Y :

$$(\{y\} - C) \cap Y \subseteq (\{y\} - C') \cap Y.$$

Applicando (2.1):

$$(\{y\} - C) \cap Y \subseteq \{y\} + C'.$$

Sia $z \in (\{y\} - C) \cap Y$. Allora esistono $c \in C$ e $c' \in C'$ tali che

$$z = y - c = y + c'.$$

Poiché $C \subseteq C'$, segue che $c \in C'$, quindi $c + c' \in C'$. Dalla precedente uguaglianza otteniamo $c + c' = 0$. Ma C' è un cono di ordine, quindi $C' \cap (-C') = \{0\}$, da cui $c = c' = 0$. Quindi $z = y$, e quindi

$$(\{y\} - C) \cap Y \subseteq \{y\} \subseteq \{y\} + C.$$

Per definizione, $y \in \min_C Y$. Pertanto,

$$\min_C^H Y \subseteq \min_C Y.$$

2. Inclusione $\min_C Y \subseteq \min_C^W Y$.

Sia $y \in \min_C Y$, ossia

$$(\{y\} - C) \cap Y \subseteq \{y\} + C.$$

Poiché $\text{int } C \subseteq C$, segue che

$$\{y\} - \text{int } C \subseteq \{y\} - C.$$

Supponiamo per assurdo che esista $z \in (\{y\} - \text{int } C) \cap Y$. Allora esiste $c \in \text{int } C$ tale che

$$z = y - c.$$

Dalla precedente inclusione $z \in (\{y\} - C) \cap Y$, quindi da $y \in \min_C Y$ segue che esiste $c' \in C$ tale che

$$z = y + c'.$$

Confrontando le due espressioni per z , otteniamo

$$y - c = y + c' \Rightarrow -c = c' \Rightarrow c + c' = 0.$$

Ma $c \in \text{int } C$ e $c' \in C$, quindi $c + c' \in \text{int } C$, il che è impossibile perché $0 \notin \text{int } C$. Contraddizione.

Pertanto

$$(\{y\} - \text{int } C) \cap Y = \emptyset,$$

cioè $y \in \min_C^W Y$. Quindi

$$\min_C Y \subseteq \min_C^W Y.$$

Combinando i due risultati otteniamo la catena di inclusioni desiderata:

$$\min_C^H Y \subseteq \min_C Y \subseteq \min_C^W Y.$$

□

Teorema 2.20. *Se l'insieme $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è di cardinalità finita allora i minimi sono minimi propri.*

Il prossimo esempio mostra un caso in cui ogni elemento minimale è anche debolmente minimale per l'insieme S .

Esempio 2.21. [4] esempio 4.15]

Si consideri l'insieme

$$S := \left\{ (x_1, x_2) \in [0, 2] \times [0, 2] \mid x_2 \geq 1 - \sqrt{1 - (x_1 - 1)^2} \text{ per } x_1 \in [0, 1] \right\}$$

in $X := \mathbb{R}^2$, con il cono di ordinamento naturale

$$C := \mathbb{R}_+^2.$$

Non esistono elementi fortemente minimali dell'insieme S .

L'insieme $\min_C S$ di tutti gli elementi minimali di S è dato da

$$\min_C S = \left\{ (x_1, 1 - \sqrt{1 - (x_1 - 1)^2}) \mid x_1 \in [0, 1] \right\}.$$

L'insieme $\min_C^P S$ di tutti gli elementi propriamente minimali di S è

$$\min_C^P S = M \setminus \{(0, 1), (1, 0)\}.$$

L'insieme $\min_C^W S$ di tutti gli elementi debolmente minimali di S è

$$\min_C^W S = \min_C S \cup \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \in (1, 2]\} \cup \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (1, 2]\}.$$

Di conseguenza,

$$\min_C^P S \subsetneq \min_C S \subsetneq \min_C^W S.$$

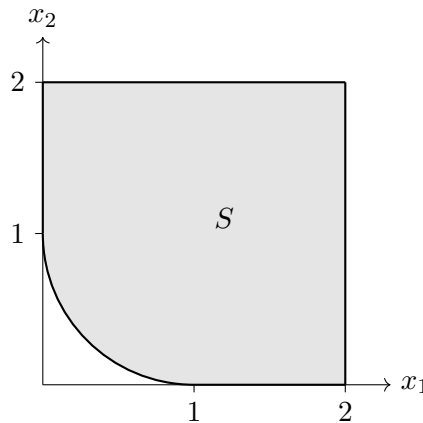


Figura 2.6: Figura relativa all'esempio [2.21](#)

2.3 Condizioni di esistenza dei minimi

Teorema 2.22 (Esistenza di minimi propri di Henig). [\[8\]](#) Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto e compatto. Sia inoltre $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono convesso chiuso con $\text{int } C \neq \emptyset$. Allora l'insieme dei minimi propri di Henig è non vuoto, cioè

$$\min_C^H Y \neq \emptyset.$$

Come conseguenza delle relazioni di inclusione tra le diverse nozioni di minimalità [2.19](#) e del teorema di esistenza dei minimi di Henig, si deduce immediatamente l'esistenza anche degli altri tipi di punti minimali considerati.

Esempio 2.23. Si consideri la figura [2.7](#) con cono $C = \mathbb{R}_+^2$. Per il teorema [2.17](#) i punti propriamente minimali per Benson sono i punti Henig minimali. La frontiera minimale è composta dall'arco di curva che collega \hat{y}_3 a \hat{y}_1 compresi gli estremi, se invece consideriamo gli estremi esclusi si tratta della frontiera dei punti propriamente minimali. I punti, di tipo \hat{y}_2 sono punti di debole minimalità. In questo caso l'unico punto ideale è il punto $(0, 0)$.

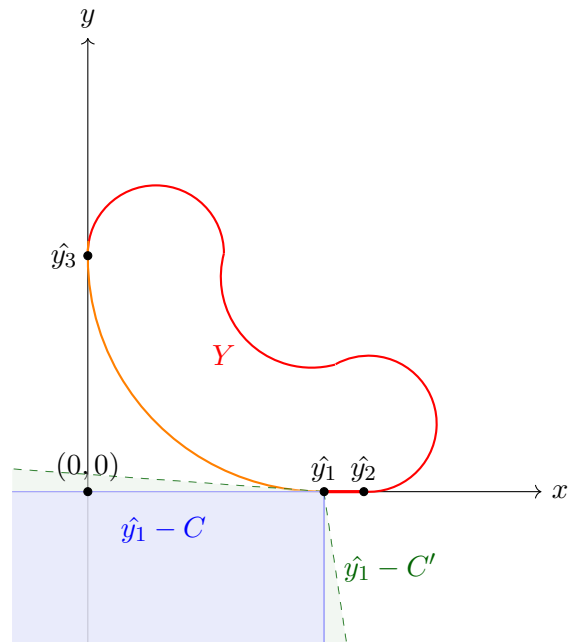


Figura 2.7: Insieme non convesso e discussione dei punti minimali. In Blu la valutazione della minimalità del punto \hat{y}_1 , in verde la valutazione della minimalità di Henig di \hat{y}_1 .

Capitolo 3

Problemi di ottimizzazione vettoriale ed efficienza

Per lo sviluppo di questa trattazione si è fatto riferimento principalmente a Yoshikazu Sawaragi, Hirotaka Nakayama & Tetsuzo Tanino, (1985) *Theory of Multiobjective Optimization* [2], integrando i concetti con risultati classici di teoria dei coni e degli ordinamenti parziali.

3.1 Problemi di ottimizzazione vettoriale

Nei problemi di ottimizzazione classica si considera una funzione obiettivo a valori reali e il concetto di soluzione ottima è definito rispetto all'ordinamento di \mathbb{R} . In numerosi contesti applicativi, tuttavia, la qualità di una decisione non può essere descritta da un singolo criterio, ma richiede la considerazione simultanea di più obiettivi, spesso tra loro in conflitto.

Questo tipo di situazioni conduce naturalmente allo studio dei *problemi di ottimizzazione vettoriale*, nei quali la funzione obiettivo assume valori in uno spazio vettoriale reale di dimensione maggiore di uno. In tale contesto, l'assenza di un ordinamento totale rende necessario adottare nozioni alternative di ottimalità; una di queste sfrutta le relazioni d'ordine parziale indotte da coni convessi.

Sia quindi $X \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme non vuoto, detto *insieme delle decisioni*, e sia

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione vettoriale, detta *funzione obiettivo*. Fissato un cono convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, si considera sull'immagine $f(X)$ la relazione d'ordine indotta da C , definita dall'equazione [1.1], come

$$y \preceq_C y' \iff y' - y \in C.$$

Il problema di ottimizzazione vettoriale associato a f e C consiste nello studio dei punti di X la cui immagine tramite f risulta minimale rispetto a tale relazione d'ordine.

Come abbiamo già accennato, il concetto di soluzione ottimale nei problemi di

ottimizzazione multiobiettivo non è banale e, di per sé, può risultare discutibile. In questa sezione consideriamo il problema di ottimizzazione multiobiettivo

$$(P) \quad \min_C \{f(x) : x \in X\}$$

Indichiamo con

$$Y = f(X) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$$

l'insieme dei valori obiettivo associati agli elementi ammissibili.

3.2 Efficienza

Come osservato nella sezione precedente, il problema di ottimizzazione vettoriale

$$\min_C f(x), \quad x \in X,$$

può essere ricondotto allo studio dei punti minimali dell'insieme dei valori obiettivo

$$Y = f(X) \subseteq \mathbb{R}^n$$

rispetto all'ordinamento conico indotto da C .

In questo contesto, la nozione di *efficienza* non costituisce un concetto distinto da quello di minimalità, bensì una sua riformulazione nel linguaggio delle preferenze e della dominanza. Infatti, le definizioni che seguono sull'efficienza possono essere ricondotte a quelle sulla minimalità considerando come funzione f l'identità su X .

Definizione 3.1. [2, def 2.3.3] Sia Y un insieme nello spazio obiettivo \mathbb{R}^n e sia \prec un'ordine di preferenza su Y . Un elemento $\hat{y} \in Y$ è detto *efficiente* se non esiste un elemento $y \in Y$ tale che $y \prec \hat{y}$. L'insieme degli elementi efficienti è denotato con

$$\mathcal{E}(Y, \prec) = \{\hat{y} \in Y : \nexists y \in Y \text{ tale che } y \prec \hat{y}\}.$$

Nel caso in cui la relazione di preferenza sia indotta da un cono convesso e puntato $C \subseteq \mathbb{R}^n$, ossia

$$y \prec_C y' \iff y' - y \in C \setminus \{0\},$$

la nozione di efficienza coincide esattamente con quella di minimo di Y rispetto a C . In particolare,

$$\mathcal{E}(Y, \prec_C) = \min_C Y.$$

Di conseguenza, un punto $\hat{x} \in X$ si dice *soluzione efficiente* del problema di ottimizzazione vettoriale se la sua immagine $\hat{y} = f(\hat{x})$ è un punto minimale di Y rispetto a C , ovvero se

$$\nexists x \in X \text{ tale che } f(x) \prec_C f(\hat{x}).$$

L'insieme delle soluzioni efficienti nello spazio delle decisioni sarà indicato con

$$\mathcal{E}(X, f, C) = \{\hat{x} \in X : f(\hat{x}) \in \min_C Y\}.$$

In modo equivalente, si può descrivere la preferenza attraverso la cosiddetta *struttura di dominanza* [5], definita da

$$D(y) := \{d \in \mathbb{R}^n : y \prec y + d\} \cup \{0\}.$$

In termini di struttura di dominanza, un punto $\hat{y} \in Y$ è efficiente se e solo se non esiste $y \in Y$, con $y \neq \hat{y}$, tale che

$$\hat{y} \in y + D(y).$$

Definizione 3.2. [2, def 2.3.3'] Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^p$ e sia $D(\cdot)$ una struttura di dominanza, l'insieme degli elementi efficienti è definito come

$$\mathcal{E}(Y, D) = \{\hat{y} \in Y \mid \nexists y, y \neq \hat{y} \text{ tale che } \hat{y} \in y + D(y)\}.$$

L'insieme $\mathcal{E}(Y, D)$ è detto *insieme efficiente*.

Nel caso particolare in cui la relazione di preferenza sia indotta da un cono C , si ha $D(y) = C$ per ogni $y \in Y$, e la condizione di efficienza si riduce alla forma geometrica

$$(Y - \hat{y}) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset,$$

che esprime l'assenza di direzioni di miglioramento ammissibili a partire da \hat{y} .

Definizione 3.3. [2, def 3.1.1]

Un punto $\hat{x} \in X$ si dice *soluzione efficiente* del problema di ottimizzazione multiobiettivo (P) rispetto alla struttura di dominanza D se

$$f(\hat{x}) \in \mathcal{E}(Y, D),$$

cioè se non esiste $x \in X$ tale che

$$f(\hat{x}) \in f(x) + D(f(x)) \quad \text{e} \quad f(x) \neq f(\hat{x})$$

(ossia tale che $f(\hat{x}) \in f(x) + D(f(x)) \setminus \{0\}$).

La seguente proposizione è immediata.

Proposizione 3.4. [2, prop 3.1.1]

Date due strutture di dominanza D_1 e D_2 , si dice che D_1 è inclusa in D_2 se

$$D_1(y) \subseteq D_2(y) \quad \text{per ogni } y \in Y.$$

In questo caso,

$$\mathcal{E}(Y, D_1) \supseteq \mathcal{E}(Y, D_2).$$

Molti casi interessanti di soluzioni efficienti si ottengono quando C è un'applicazione punto-insieme costante il cui valore è un cono (convesso) costante.

In tali casi, identifichiamo l'applicazione (struttura di dominanza) con il cono C stesso.

Allora $\hat{x} \in X$ è una soluzione efficiente del problema (P) se e solo se non esiste $x \in X$ tale che

$$f(\hat{x}) - f(x) \in C \setminus \{0\};$$

ossia, \hat{x} è efficiente se e solo se

$$(f(X) - f(\hat{x})) \cap (-C) = \{0\}.$$

Proposizione 3.5. [2] prop 3.1.2] Sia C un cono non vuoto, allora

$$\mathcal{E}(Y, C) \supset \mathcal{E}(Y + C, C).$$

L'uguaglianza vale se C è puntato e convesso.

Esempio 3.6. Nel seguente esempio mostriamo l'essenzialità della convessità del cono C . Siano

$$Y = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 = x_2 \leq 1\}$$

e

$$C = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 2x_1 \geq 0\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 2x_2 \geq 0\},$$

che è puntato ma non convesso. Allora $(1, 1) \in \mathcal{E}(Y, C)$. Tuttavia,

$$(1, 1) = (0, 0) + \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(\frac{1}{2}, 1\right) \in Y + C + C.$$

Quindi $(1, 1) \notin \mathcal{E}(Y + C, C)$

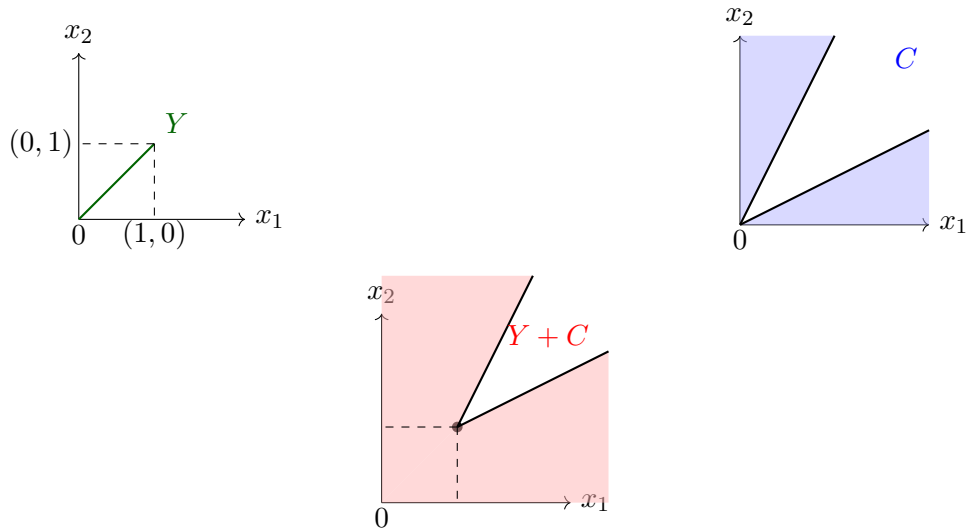


Figura 3.1: $\mathcal{E}(Y, C) \not\subset \mathcal{E}(Y + C, C)$

Proposizione 3.7. [2, prop 3.1.3] Siano Y_1, Y_2 due insiemi in \mathbb{R}^n e sia D una struttura di dominanza costante (ad esempio un cono costante). Allora

$$\mathcal{E}(Y_1 + Y_2, D) \subset \mathcal{E}(Y_1, D) + \mathcal{E}(Y_2, D)$$

Proposizione 3.8. [2, prop 3.1.4] Sia Y un insieme in \mathbb{R}^p , C un cono e α un numero reale positivo. Allora,

$$\mathcal{E}(\alpha Y, C) = \alpha \mathcal{E}(Y, C)$$

Come già visto la nozione di soluzione efficiente può essere ottenuta trasferendo il concetto di minimo dallo spazio degli obiettivi allo spazio delle decisioni tramite la funzione f .

Definizione 3.9 (Soluzione efficiente). Un punto $\bar{x} \in X$ si dice *soluzione efficiente* del problema di ottimizzazione vettoriale se $f(\bar{x})$ è un punto minimale di $f(X)$ rispetto a C , cioè se

$$f(\bar{x}) \in \min_C(f(X)).$$

Equivalentemente, $\bar{x} \in X$ è efficiente se non esiste $x \in X$ tale che

$$f(x) \preceq_C f(\bar{x}) \quad \text{e} \quad f(x) \neq f(\bar{x}).$$

Dal punto di vista concettuale, si può quindi interpretare l'insieme delle soluzioni efficienti come la controimmagine, tramite f , dell'insieme dei punti minimali di $f(X)$:

$$\mathcal{E}(X, f, C) := f^{-1}(\min_C(f(X))).$$

In molte applicazioni risulta utile considerare una nozione più debole di efficienza, ottenuta sostituendo il cono C con il suo interno.

Definizione 3.10 (Soluzione debolmente efficiente). Sia (X, f, C) un problema di ottimizzazione vettoriale e sia \min_C^W l'insieme dei punti minimali deboli secondo la definizione [2.7]

Un punto $\bar{x} \in X$ si dice *soluzione debolmente efficiente* se $f(\bar{x})$ è un minimo debole di $f(X)$ rispetto a C , ossia se

$$f(\bar{x}) \in \min_C^W(f(X)).$$

Equivalentemente, $\bar{x} \in X$ è debolmente efficiente se non esiste $x \in X$ tale che

$$f(x) - f(\bar{x}) \in \text{int } C.$$

Definiamo l'insieme dei punti debolmente efficienti come

$$\mathcal{E}^w(X, f, C) := f^{-1}(\min_C^w(f(X))).$$

Equivalentemente,

$$(f(\bar{x}) - \text{int } C) \cap f(X) = \emptyset.$$

Questa definizione esprime il fatto che non esiste alcun punto $x \in X$ il cui valore obiettivo sia *strettamente migliore* di $f(\bar{x})$ secondo l'ordinamento indotto dal cono C . Geometricamente, non è possibile trovare un punto x tale che la differenza $f(x) - f(\bar{x})$ appartenga all'*interno del cono* C .

È immediato osservare che ogni soluzione efficiente è anche debolmente efficiente, mentre il viceversa non vale in generale.

3.2.1 Il caso paretiano

Come nel caso della minimalità, anche la nozione di efficienza ammette un caso particolare detto *paretiano*, corrispondente alla scelta dell'ortante non negativo come cono d'ordine.

Si consideri dunque un problema multiobiettivo

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad X \subseteq \mathbb{R}^m,$$

con cono d'ordine $C = \mathbb{R}_+^p$. In questo caso, i concetti di minimo e minimo debole rispetto a C coincidono con quelli di *minimo di Pareto* e *minimo debole di Pareto*.

Una soluzione $\bar{x} \in X$ si dice *Pareto-efficiente* se $f(\bar{x})$ è minimale rispetto a C , cioè non esiste $x \in X$ tale che $f(x) \leq f(\bar{x})$ componente per componente e $f(x) \neq f(\bar{x})$. Analogamente, \bar{x} si dice *debolmente Pareto-efficiente* se $f(\bar{x})$ è minimo debole rispetto a C , ossia non esiste $x \in X$ tale che $f(x) < f(\bar{x})$ componente per componente.

Questa osservazione mostra come le soluzioni Pareto-efficienti siano casi particolari delle soluzioni efficienti definite tramite coni generali.

Il concetto di frontiera, o *frontiera di Pareto*, rappresenta un importante strumento per l'analisi delle soluzioni efficienti.

Definizione 3.11. Sia (X, f) un problema multiobiettivo con ordine componente per componente definito dall'ortante positivo. La frontiera di Pareto nello spazio degli obiettivi è l'insieme dei punti minimali di Pareto:

$$\mathcal{F}_P := \min_{\mathbb{R}_+^p}(f(X)),$$

mentre la frontiera di Pareto debole è definita come

$$\mathcal{F}_P^W := \min_{\mathbb{R}_+^p}^W(f(X)).$$

Le soluzioni Pareto-efficienti e debolmente Pareto-efficienti nello spazio decisionale corrispondono alle controimmagini tramite f della frontiera di Pareto nello spazio degli obiettivi:

$$\mathcal{E}(X, f, \mathbb{R}_+^p) = f^{-1}(\mathcal{F}_P), \quad \mathcal{E}^W(X, f, \mathbb{R}_+^p) = f^{-1}(\mathcal{F}_P^W).$$

Geometricamente, ogni soluzione efficiente corrisponde a un punto sulla frontiera di Pareto, che rappresenta geometricamente i valori obiettivo che non possono essere migliorati simultaneamente componente per componente.

3.2.2 Efficienza propria

La definizione di soluzione efficiente può risultare troppo permissiva quando esistono punti che migliorano l'obiettivo di \bar{x} in maniera arbitrariamente piccola lungo alcune direzioni del cono C . Per superare questa limitazione, si introducono concetti di *efficienza propria*, che restringono l'insieme delle soluzioni efficienti a quelle che non ammettono miglioramenti infinitesimi secondo l'ordinamento indotto da C , garantendo così maggiore regolarità e robustezza delle soluzioni.

In termini generali, una soluzione efficiente si dice *propria* se non ammette trade-off illimitati tra le componenti della funzione obiettivo. Le diverse definizioni di efficienza propria (ad esempio secondo Henig o Geoffrion) formalizzano questo concetto imponendo ulteriori condizioni di limitatezza o di separazione conica nello spazio degli obiettivi.

Definizione 3.12 (Soluzione propriamente efficiente secondo Henig). [2, def 3.1.8]

Un punto $\bar{x} \in X$ si dice *soluzione propriamente efficiente secondo Henig* per il problema (P) se

$$f(\bar{x}) \in \mathcal{E}(Y, C')$$

con $C' \in \mathcal{H}(C)$

Si osserva immediatamente che ogni soluzione propriamente efficiente secondo Henig è anche efficiente in senso classico, mentre il viceversa non vale in generale.

La nozione di efficienza di Geoffrion rafforza il concetto di soluzione efficiente introducendo un vincolo sui trade-off tra le componenti della funzione obiettivo. Un *trade-off* in un problema multiobiettivo è una situazione in cui migliorare un obiettivo richiede necessariamente di peggiorarne almeno un altro, rappresenta dunque il compromesso tra obiettivi concorrenti.

Definizione 3.13 (Soluzione propriamente efficiente di Geoffrion). [2, def 3.1.9]

Sia (P) un problema multiobiettivo e sia $C = \mathbb{R}_+^n$ il cono d'ordine. Un punto $\bar{x} \in X$ si dice *soluzione propria di Geoffrion* per il problema (P) rispetto al cono $C = \mathbb{R}_+^n$ se è efficiente e se esiste un numero reale $M > 0$ tale che, per ogni i e per ogni $x \in X$ con

$$f_i(x) \prec_C f_i(\bar{x}) \quad \text{esiste almeno un } j \text{ tale che} \quad f_j(\bar{x}) \prec_C f_j(x)$$

e

$$\frac{f_i(\bar{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\bar{x})} \leq M.$$

Osservazione 3.14. La condizione sui rapporti limita l'entità dei peggioramenti ammessi in una componente rispetto ai miglioramenti in un'altra. Una soluzione

propria di Geoffrion non può essere migliorata indefinitamente in una direzione sacrificando arbitrariamente un'altra. Questa definizione è quindi una formalizzazione dei concetti di minimalità propria e trade-off controllati già introdotti con i coni dilatati di Henig.

Definizione 3.15. Sia X un insieme e C un cono d'ordinamento. Si definisce l'insieme delle *soluzioni propriamente minimali* come

$$\mathcal{P}(X, C) := \{x \in X : x \text{ è una soluzione propriamente efficiente}\}.$$

L'obiettivo di queste definizioni è selezionare punti efficienti con un comportamento più regolare, evitando miglioramenti arbitrariamente grandi in alcune direzioni (trade-off illimitati) e garantendo robustezza rispetto a perturbazioni dell'ordine.

In questo quadro concettuale:

- Le soluzioni proprie di Henig si basano su un approccio geometrico, considerando coni dilatati rispetto al cono originale di dominanza.
- Le soluzioni proprie di Geoffrion adottano un approccio quantitativo, limitando i rapporti tra peggioramenti e miglioramenti nelle componenti della funzione obiettivo.

Entrambe le nozioni forniscono formalmente punti che possono essere considerati *propriamente minimali*, ossia robusti rispetto ai trade-off e coerenti con l'intuizione di minimalità propria.

3.3 Condizioni di esistenza delle soluzioni efficienti

Come osservato, le soluzioni efficienti del problema di ottimizzazione vettoriale (X, f, C) sono definite come

$$\mathcal{E}(X, f, C) := f^{-1}(\min_C(f(X))).$$

Poiché, per definizione, ogni elemento di $f(X)$ ammette almeno una controimmagine in X , si ha la seguente equivalenza:

$$\min_C(f(X)) \neq \emptyset \iff \mathcal{E}(X, f, C) \neq \emptyset.$$

Infatti, se $y^* \in \min_C(f(X))$, allora esiste $x^* \in X$ tale che $f(x^*) = y^*$, e quindi $x^* \in \mathcal{E}(X, f, C)$. Viceversa, se $x^* \in \mathcal{E}(X, f, C)$, allora $f(x^*) \in \min_C(f(X))$.

Pertanto, il problema dell'esistenza di soluzioni efficienti si riduce interamente all'esistenza di punti minimali dell'insieme $f(X)$ rispetto all'ordine conico indotto da C .

Proposizione 3.16 (Esistenza di soluzioni efficienti). *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto e compatto, e sia*

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$$

una funzione continua. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^p$ un cono convesso chiuso e puntato. Allora esistono soluzioni efficienti di (X, f, C) , ovvero

$$\mathcal{E}(X, f, C) \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. Poiché X è compatto e f è continua, l'insieme $f(X) \subseteq \mathbb{R}^p$ è compatto. Applicando il Teorema di esistenza dei punti minimali (2.22), sappiamo che $f(X)$ ammette almeno un punto minimale rispetto all'ordine indotto da C . Per definizione, ogni punto $\bar{x} \in X$ tale che $f(\bar{x})$ è minimale è una soluzione efficiente. Pertanto, $\mathcal{E}(X, f, C)$ è non vuoto. \square

Questo risultato mostra come l'esistenza di soluzioni efficienti sia una conseguenza diretta dell'esistenza di punti minimali nello spazio degli obiettivi. In particolare:

- Se $f(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso, convesso e limitato inferiormente rispetto al cono C , allora esistono sempre minimi propri di Henig. Di conseguenza, esistono anche soluzioni propriamente efficienti secondo Henig.
- Se $f(X)$ è compatto e C è convesso e puntato, allora esistono soluzioni efficienti classiche (cioè punti minimi rispetto a C).

Teorema 3.17. [2] *Teorema 3.2.3] Sia $C \subseteq \mathbb{R}^p$ un cono convesso e acuto. Se $Y \subseteq \mathbb{R}^p$ è non vuoto e C -compatto, allora*

$$\mathcal{E}(Y, C) \neq \emptyset.$$

Esempio 3.18. [2] *esempio 3.2.2] Sia $C = \mathbb{R}_+^2$.*

1. Sia

$$Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq 1, y_1 < 0, y_2 < 0\}.$$

Y è \mathbb{R}_+^2 -compatto ma non \mathbb{R}_+^2 -chiuso.

$$\mathcal{E}(Y, \mathbb{R}_+^2) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 = 1, y_1 < 0, y_2 < 0\}.$$

2. Sia

$$Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 y_2 = 1, y_1 < 0\}.$$

Y è \mathbb{R}_+^2 -compatto e \mathbb{R}_+^2 -chiuso.

$$\mathcal{E}(Y, \mathbb{R}_+^2) = Y.$$

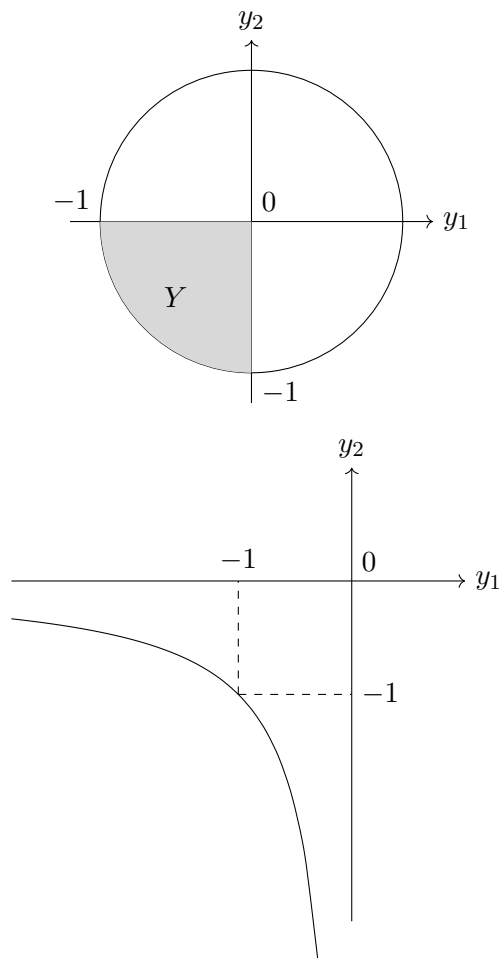


Figura 3.2: Figure relative all'esempio [3.18](#).

Capitolo 4

Scalarizzazione

Come visto nei problemi di ottimizzazione multiobiettivo, l'assenza di un ordinamento totale nello spazio degli obiettivi rende difficile confrontare direttamente i valori di $f(x)$ e individuare un unico punto ottimo. Per ovviare a questa difficoltà, è possibile ricorrere alle *scalarizzazioni*, ovvero a trasformazioni che associano a ogni punto $x \in X$ un singolo valore reale, preservando in qualche modo la struttura di preferenza tra soluzioni. Per lo sviluppo di questo capitolo si è preso spunto dai lavori di J. Jahn (2011), *Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions* [4], sfruttando principalmente il Capitolo 5, e da G. Eichfelder (2009), *Scalarizations for adaptively solving multi-objective optimization problems* [7].

Nell'analisi dei problemi di ottimizzazione multiobiettivo, le scalarizzazioni rappresentano uno strumento fondamentale per trasformare un problema vettoriale in un problema mono obiettivo più trattabile.

In linea generale, la scelta del tipo di scalarizzazione dipende dalle proprietà dell'insieme degli obiettivi e delle decisioni:

- Nel *caso convesso*, in cui sia l'insieme delle decisioni X sia l'immagine obiettivo $f(X)$ sono convessi, le *scalarizzazioni lineari* sono sufficienti. Grazie alla convessità, ogni soluzione efficiente può essere ottenuta come minimo di una combinazione lineare positiva delle componenti della funzione obiettivo.
- Nel *caso non convesso*, invece, le scalarizzazioni lineari non garantiscono di raggiungere tutte le soluzioni efficienti. In questi contesti si ricorre a *scalarizzazioni adattive*, come *Pascoletti – Serafini* che consente di trattare efficacemente anche insiemi obiettivi non convessi e di individuare punti della frontiera minimale non accessibili linearmente.

Le due sottosezioni successive sviluppano questi approcci in dettaglio: prima il caso convesso con scalarizzazioni lineari, poi il caso generale non convesso con scalarizzazioni adattive.

4.1 Scalarizzazioni lineari

Sia (X, f, C) un problema di ottimizzazione multiobiettivo con

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad X \subseteq \mathbb{R}^m,$$

sia $C \subseteq \mathbb{R}^p$ un cono convesso, chiuso e puntato, e siano $C^{s\circ}$ e C° rispettivamente il polare stretto e il polare come da definizione [1.10](#).

Supponiamo inoltre che X e che $f(X)$ siano convessi.

Definizione 4.1 (Scalarizzazione lineare). Data una funzione vettoriale f e un vettore di pesi $w \in C^\circ$, definiamo la funzione di *scalarizzazione lineare* associata a w come

$$\varphi_w(x) := w^\top f(x), \quad x \in X.$$

Il problema multiobiettivo può quindi essere trasformato nel seguente problema scalare:

$$\min_{x \in X} w^\top f(x), \quad w \in C^\circ.$$

Nel caso bidimensionale $p = 2$, scrivendo $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, il problema diventa

$$\min_{x \in X} w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x), \quad w \in C^\circ.$$

Dal punto di vista geometrico, nel piano degli obiettivi (f_1, f_2) , i livelli della funzione scalare sono descritti dalle rette

$$w_1 y_1 + w_2 y_2 = \alpha,$$

dove $y = f(x)$.

Risolvendo rispetto a y_2 si ottiene il fascio di rette

$$y_2 = -\frac{w_1}{w_2} y_1 + \frac{\alpha}{w_2}. \quad (4.1)$$

La ricerca del minimo corrisponde quindi a traslare [4.1](#) parallelamente a sé stessa fino a ottenere l'intersezione con $f(X)$ per cui α è minimo.

Il valore del rapporto $\frac{w_1}{w_2}$ dipende dalla scelta del vettore di pesi w . In particolare, con $C = \mathbb{R}_+^n$:

- se $w \in C^\circ$, sono ammessi anche pesi nulli, per cui il fascio di rette può includere rette parallele agli assi;
- se $w \in C^{s\circ}$, tutti i pesi sono strettamente positivi e quindi $\frac{w_1}{w_2} > 0$; il coefficiente angolare delle rette di livello è quindi strettamente negativo.

Questa distinzione è rilevante nello studio delle *soluzioni efficienti e debolmente efficienti* del problema multiobiettivo.

L'idea fondamentale della scalarizzazione lineare è che, sotto opportune ipotesi di convessità, ogni minimo della funzione φ_w su X corrisponde a una soluzione efficiente del problema (X, f, C) . Inoltre, variando il vettore di pesi w , è possibile generare diverse soluzioni efficienti appartenenti al fronte minimale.

Definizione 4.2 (Argomento del minimo (arg min)). Sia X un insieme e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. Si definisce l'*argomento del minimo* di g su X come

$$\arg \min_{x \in X} g(x) := \{ \bar{x} \in X \mid g(\bar{x}) \leq g(x), \forall x \in X \}.$$

Geometricamente, arg min è l'insieme di tutti i punti in X che realizzano il valore minimo di g .

Teorema 4.3. [4, teor 5.4] Sia (X, f, C) un problema di ottimizzazione multi-obiettivo con

$$X \subseteq \mathbb{R}^m, \quad f : X \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

e sia $C \subseteq \mathbb{R}^p$ un cono convesso, chiuso e puntato. Supponiamo che X e $f(X)$ siano convessi.

Allora, per ogni elemento debolmente minimale $\bar{x} \in X$ rispetto a C , esiste un vettore di pesi $w \in C^\circ \setminus \{0\}$ tale che la scalarizzazione lineare associata

$$\varphi_w(x) := w^\top f(x)$$

è minimizzata in \bar{x} su X , cioè

$$\varphi_w(\bar{x}) \leq \varphi_w(x) \quad \forall x \in X.$$

Osservazione 4.4. Ogni punto minimale è soluzione di un problema di ottimizzazione scalare lineare.

Dimostrazione. Sia $\bar{x} \in X$ un punto minimale rispetto al cono C , cioè non esiste $x \in X$ tale che

$$f(x) - f(\bar{x}) \in -C \setminus \{0\}.$$

Consideriamo l'insieme

$$f(X) + C \subseteq \mathbb{R}^p.$$

Poiché X e $f(X)$ sono convessi, $f(X) + C$ è convesso e ha interno non vuoto.

Dalla minimalità di \bar{x} segue

$$(f(\bar{x}) - C) \cap (f(X) + C) = \{f(\bar{x})\}.$$

Applicando il teorema di separazione convessa tra il punto $f(\bar{x})$ e il convesso $f(X) + C$, otteniamo un vettore di pesi

$$w \in C^\circ \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^p$$

e un numero reale α tali che

$$w^\top (f(\bar{x}) - c_1) \leq \alpha \leq w^\top (f(x) + c_2) \quad \forall x \in X, \quad c_1, c_2 \in C.$$

Poiché C è un cono, ponendo $c_1 = c_2 = 0$ otteniamo

$$w^\top f(\bar{x}) \leq w^\top f(x) \quad \forall x \in X,$$

cioè

$$\varphi_w(\bar{x}) \leq \varphi_w(x) \quad \forall x \in X.$$

Pertanto \bar{x} minimizza la scalarizzazione lineare φ_w associata a w , come volevamo dimostrare. \square

Teorema 4.5. [4] teor 5.6] Sia (X, f, C) un problema di ottimizzazione multi-obiettivo come sopra, e sia $C^{s\circ}$ il polare stretto di C .

Un elemento $\bar{x} \in X$ è minimale rispetto a C se e solo se è soluzione di tutte le scalarizzazioni lineari associate a $w \in C^{s\circ}$, cioè

$$\bar{x} \in \bigcap_{w \in C^{s\circ}} \operatorname{argmin}_{x \in X} \varphi_w(x),$$

ossia

$$\varphi_w(\bar{x}) \leq \varphi_w(x) \quad \forall x \in X, \quad \forall w \in C^{s\circ}.$$

Caso paretiano In questo paragrafo verrà considerato $C = \mathbb{R}_+^n$.

Teorema 4.6 (Equivalenza tra minimi lineari e soluzioni efficienti). Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ convesso e compatto, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ convessa componente per componente, e sia $w \in C^\circ \setminus \{0\}$. Allora ogni punto $\bar{x} \in X$ che minimizza la funzione lineare di scalarizzazione

$$\bar{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in X} w^\top f(x)$$

è una soluzione efficiente di (X, f, C) .

Osservazione 4.7 (Completezza nel caso convesso - Pareto). Sia (X, f, C) un problema multiobiettivo con $X \subseteq \mathbb{R}^m$ convesso, f convessa componente per componente e $C = \mathbb{R}_+^p$. Allora ogni soluzione Pareto-efficiente può essere ottenuta come minimo di una scalarizzazione lineare

$$\bar{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in X} w^\top f(x)$$

per un opportuno vettore di pesi $w \in \mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}$.

Osservazione 4.8 (Collegamento geometrico con la frontiera di Pareto). Geometricamente, variando i pesi w su $\mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}$ si generano diversi minimi della funzione scalare $\varphi_w(x) = w^\top f(x)$, che corrispondono a punti differenti della frontiera di Pareto \mathcal{F}_P .

Pertanto, in contesti convessi, le scalarizzazioni lineari permettono di *tracciare tutta la frontiera di Pareto* dell'insieme $f(X)$.

Osservazione 4.9 (Polare stretto e punti propriamente/debolmente efficienti). Nel caso convesso, è importante distinguere il tipo di polare del cono utilizzato nei pesi della scalarizzazione lineare:

- **Punti propriamente efficienti:** si ottengono minimizzando

$$\varphi_w(x) = w^\top f(x), \quad w \in C^{s\circ} \setminus \{0\},$$

dove C^{so} è il polare stretto del cono C . Tutti i pesi sono strettamente positivi rispetto al cono, il fascio di rette ha pendenza strettamente negativa in tutte le direzioni, e il punto individuato è propriamente efficiente.

- **Punti debolmente efficienti:** si ottengono minimizzando la stessa funzione φ_w con

$$w \in C^\circ \setminus \{0\},$$

dove C° è il polare standard del cono. Qui si ammettono componenti nulle nei pesi, quindi il fascio di rette può includere rette parallele agli assi, e il punto ottenuto è solo debolmente efficiente.

Esempio 4.10. Riprendendo ora l'insieme descritto nella figura [2.7](#) la scalarizzazione lineare si occupa di risolvere il problema:

$$\min_{y \in Y} w_1 x_i + w_2 y_i$$

con $w_1, w_2 > 0$ ovvero $(w_1, w_2) \in C^{so}$ (il polare stretto). Nell'esempio per trovare i punti \hat{y}_1, \hat{y}_2 ho bisogno di avere il peso $w_1 = 0$, ovvero $(w_1, w_2) \in C^\circ$. Il prossimo capitolo avrà la funzione di presentare il teorema di Arrow, Barankin e Blackwell che ha come una delle sue conseguenze il fatto che, punti come \hat{y}_3 e \hat{y}_1 nell'esempio visto, appartengono alla chiusura topologica dei minimi ricavati tramite scelta di pesi strettamente positivi.

4.2 Scalarizzazioni adattive

In problemi multiobiettivo non convessi, le tradizionali scalarizzazioni lineari potrebbero non essere sufficienti per generare tutti i punti debolmente o propriamente efficienti. Per affrontare questa limitazione, si introducono le *scalarizzazioni adattive*, nelle quali la funzione scalare è definita a partire dall'insieme immagine $f(X)$, da un punto di riferimento $a \in \mathbb{R}^p$ e da una direzione d associata al cono d'ordine C . Tali scalarizzazioni permettono di individuare punti efficienti anche in contesti non convessi, e la loro geometria può essere interpretata tramite *coni traslati* lungo la direzione scelta.

4.2.1 Pascoletti–Serafini

Per risolvere il problema di ottimizzazione multi-obiettivo formuliamo un problema di ottimizzazione scalare dipendente da parametri e lo risolviamo per una varietà di parametri. Il nostro interesse si concentra sulla scalarizzazione introdotta da Pascoletti e Serafini, denominata $(SP(a, r))$, che è definita da

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{soggetto a} \quad & a + tr - f(x) \in C, \\ & t \in \mathbb{R}, \\ & x \in X. \end{aligned} \tag{P-S}$$

con parametri $a, r \in \mathbb{R}^m$. Il cono di ordinamento $-C$ viene traslato lungo la retta $a + tr$, con $t \in \mathbb{R}$, nella direzione $-r$ a partire dal punto a finché l'insieme

$$(a + tr - C) \cap f(X)$$

si riduce all'insieme vuoto. [7] Il valore più piccolo di t per il quale vale $(a + tr - C) \cap f(X) \neq \emptyset$ è il valore minimo di (P-S).

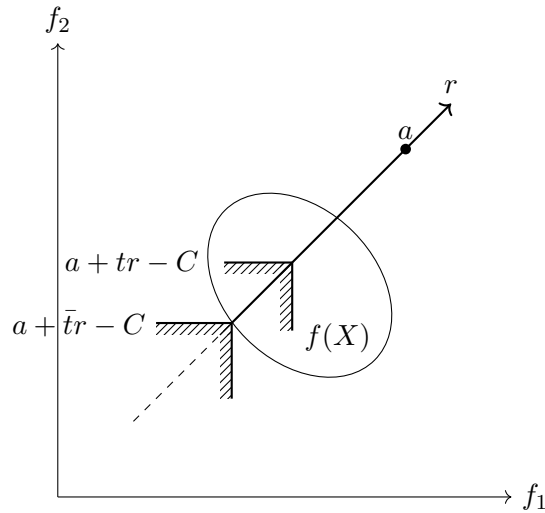


Figura 4.1: Visualizzazione del problema di Pascoletti–Serafini. Cono $C = \mathbb{R}_+^2$.

La figura 4.2.1 mostra il caso di un insieme convesso $f(X)$ e di come lavora graficamente la scalarizzazione di Pascoletti – Serafini nel caso di un cono $C = \mathbb{R}_+^2$.

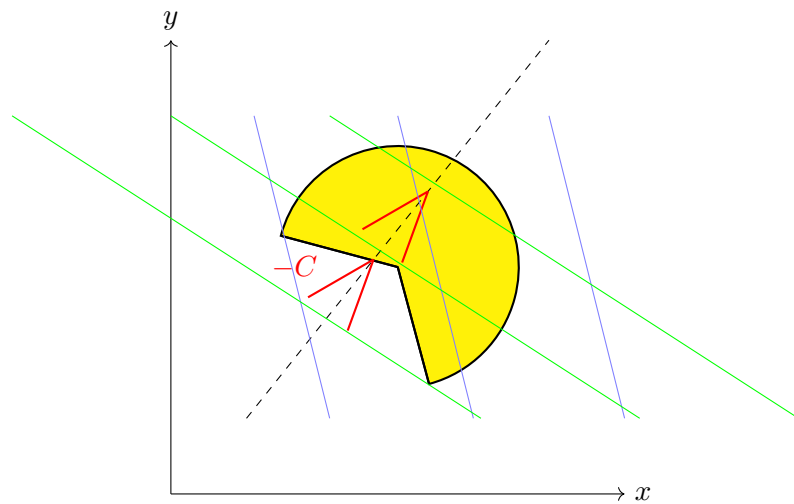


Figura 4.2: Figura Pac-Man, insieme non convesso. Pascoletti – Serafini vs lineari.

La figura [4.2.1](#) presenta un insieme non convesso. Sono presenti due fasci di rette a rappresentare le scalarizzazioni lineari. In rosso sono presenti le scalarizzazioni Pascoletti – Serafini, è facile notare come alcuni punti siano raggiungibili solo attraverso quest'ultima tecnica.

Capitolo 5

Il teorema di Arrow, Barankin e Blackwell

Il teorema di Kenneth Arrow, Edward Barankin e David Blackwell [6] si colloca tra i risultati classici che hanno contribuito alla formalizzazione moderna dell'ottimizzazione vettoriale e dell'analisi delle decisioni multiobiettivo. Nato nell'ambito della teoria statistica della decisione e dell'economia matematica a metà del Novecento, esso mette in relazione il concetto di efficienza (o ottimalità paretiana) con la possibilità di rappresentare soluzioni efficienti attraverso problemi scalari associati.

Storicamente, il risultato si inserisce nel più ampio sviluppo della teoria della dualità e dei metodi di separazione per insiemi convessi, fornendo una caratterizzazione delle soluzioni efficienti mediante strumenti funzionali lineari. Tale collegamento ha avuto un ruolo centrale nello sviluppo successivo della teoria dell'ottimizzazione multiobiettivo, influenzandone sia l'impostazione teorica sia le applicazioni.

5.1 Esempio introduttivo

Prima di presentare formalmente il risultato, introduciamo un esempio che ne illustra il significato geometrico nel contesto dell'ottimizzazione vettoriale. Osserviamo che, fino a questo punto della tesi, abbiamo trattato le scalarizzazioni come problemi di minimizzazione. Qui introduciamo la massimizzazione solo per ragioni di coerenza con la rappresentazione economica: nelle applicazioni pratiche, ad esempio nello studio di frontiere di produzione o di utilità, è più naturale formulare il problema come massimizzazione di combinazioni lineari pesate delle componenti.

Esempio 5.1. Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme rappresentato in figura [5.1]. L'insieme U è chiuso e convesso. La convessità di U consente di ridurre lo studio delle soluzioni efficienti alle sole scalarizzazioni lineari, poiché, come visto nei capitoli precedenti, nel caso convesso tali scalarizzazioni φ_w sono sufficienti a caratterizzare i punti Pareto efficienti, allo stesso modo delle scalarizzazioni adattive.

Il sottoinsieme della frontiera di U evidenziato in rosso e giallo è costituito da vettori che massimizzano opportune combinazioni lineari pesate delle loro componenti, ossia che ottimizzano φ_w per qualche vettore di pesi $w \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$.

Teorema 5.2. [15, prop. 3.45] *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e convesso, e sia $C = \mathbb{R}_+^n$ il cono che induce l'ordine paretiano. Allora, ogni vettore $u \in U$ Pareto efficiente rispetto a C massimizza una combinazione lineare pesata delle sue componenti, cioè esiste un vettore di pesi $w \in C \setminus \{0\}$ tale che*

$$u \in \arg \max_{v \in U} \varphi_w(v).$$

Osservazione 5.3. Il viceversa non vale in generale: non ogni massimo di una combinazione lineare pesata delle componenti di un vettore è necessariamente efficiente rispetto all'ordine conico.

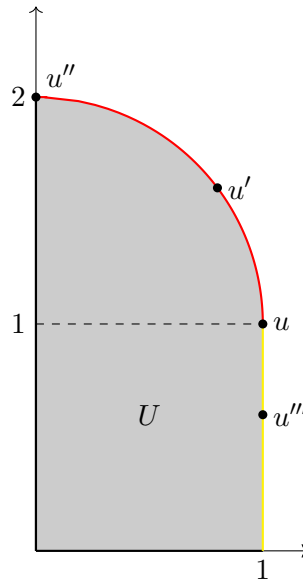


Figura 5.1: Ottimi paretiani e massimi di somme pesate

Tornando all'esempio, si osserva che i punti del tipo u''' , appartenenti al segmento verticale evidenziato in giallo, massimizzano la combinazione lineare corrispondente al vettore dei pesi $w = (1, 0)$, che seleziona esclusivamente la seconda componente. Tuttavia tali punti non sono efficienti rispetto all'ordine conico standard.

Per garantire che le soluzioni ottenute tramite scalarizzazione siano efficienti è sufficiente richiedere che il vettore dei pesi sia strettamente positivo. Tuttavia, imponendo $w > 0$, non tutti i punti efficienti di U possono essere ottenuti come soluzioni di un problema di massimizzazione lineare. In figura si osserva infatti che i punti u'' e u sono efficienti ma non possono essere ottenuti come massimi di alcuna combinazione lineare con pesi strettamente positivi. I punti che invece non presentano tale situazione sono quelli tipo u' , ovvero appartenenti all'arco rosso.

In questo contesto interviene il teorema di Arrow, Barankin e Blackwell, il quale afferma che i punti efficienti possono essere ottenuti come limiti di soluzioni di problemi scalarizzati. Per esempio, il punto u'' può essere visto come limite di una successione di vettori che massimizzano combinazioni lineari pesate con pesi strettamente positivi del tipo $(1, \frac{1}{n})$ al tendere di n all'infinito.

5.2 Enunciato

Il teorema nasce in un contesto molto più ampio rispetto a quello trattato in questa tesi. Ne esistono diverse versioni, qui riportiamo quella originale [6].

Teorema 5.4 (Arrow–Barankin–Blackwell [6]). *Sia $S \subset \mathbb{R}^k$ un insieme convesso e chiuso. Sia*

$$A := \{s \in S \mid \nexists t \in S : t_i \leq s_i \ \forall i = 1, \dots, k, \ t \neq s\}$$

l'insieme dei punti ammissibili, e sia

$$P := \left\{ p \in \mathbb{R}^k : p_i > 0, \sum_{i=1}^k p_i = 1 \right\}.$$

Per ogni $p \in P$, definiamo

$$B(p) := \left\{ s \in S : (p, s) = \min_{t \in S} (p, t) \right\}, \quad B := \bigcup_{p \in P} B(p)$$

l'insieme dei punti supportati.

Allora

$$B \subseteq A \subseteq \overline{B}.$$

Se inoltre S è l'involuppo convesso di un insieme finito di punti, esiste un insieme finito $p_1, \dots, p_N \in P$ tale che

$$B = \bigcup_{j=1}^N B(p_j),$$

e pertanto

$$B = A = \overline{B}.$$

Osservazione 5.5. La notazione appena introdotta è quella originale dell'articolo. Nella tesi si è lavorato in \mathbb{R}^k dotato dell'ordine parziale indotto dal cono \mathbb{R}_+^k ; in questo contesto, l'insieme $S \subseteq \mathbb{R}^k$ è assunto convesso e chiuso.

La condizione

$$\nexists t \in S \text{ tale che } t_i \leq s_i \ \forall i = 1, \dots, k, \quad t \neq s$$

equivale a dire che s è minimale rispetto all'ordine paretiano, ossia s è un punto Pareto efficiente. Pertanto, l'insieme A coincide con l'insieme dei punti efficienti introdotto nei capitoli precedenti.

I vettori $p \in P$ rappresentano i pesi utilizzati nelle scalarizzazioni lineari. In particolare, il prodotto scalare (p, s) coincide con la funzione di scalarizzazione lineare già introdotta nei capitoli precedenti, ossia

$$(p, s) = \varphi_p(s).$$

Pertanto, l'insieme $B(p)$ può essere riscritto come

$$B(p) = \{s \in S : \varphi_p(s) = \arg \min_{t \in S} \varphi_p(t)\},$$

cioè l'insieme delle soluzioni ottime del problema scalare associato al peso p . L'insieme B rappresenta i punti supportati, ossia quelli ottenibili tramite scalarizzazione lineare con pesi strettamente positivi.

Dimostrazione. (I - Caso: S limitato) Supponiamo innanzitutto che S sia limitato. Se $s \in S$, $s \notin A$, esiste un $t \in S$ tale che $t_i \leq s_i$ per ogni i e $t \neq s$. Allora $(p, t) < (p, s)$ per ogni $p \in P$, cosicché $s \notin B$. Quindi $B \subset A$.

Per mostrare che $A \subset \overline{B}$, sia $a \in A$. Possiamo ottenere $a = (0, 0, \dots, 0)$ mediante una traslazione del sistema di coordinate. Per ogni ε , $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{k}$, sia $P(\varepsilon)$ l'insieme dei $p \in P$ tali che $p_i \geq \varepsilon$ per $i = 1, \dots, k$.

Per ogni due insiemi convessi chiusi e limitati R, S nello spazio \mathbb{R}^k , esistono vettori $r^* \in R$, $s^* \in S$ tali che

$$(r^*, s) \geq (r^*, s^*) \geq (r, s^*) \quad \text{per ogni } r \in R, s \in S.$$

L'esistenza di tali vettori è garantita da [9].

Applichiamo questo risultato a $P(\varepsilon), S$, ottenendo $p(\varepsilon) \in P(\varepsilon)$, $s(\varepsilon) \in S$ tali che

$$(p(\varepsilon), s) \geq (p(\varepsilon), s(\varepsilon)) \geq (p, s(\varepsilon))$$

per ogni $p \in P(\varepsilon)$, $s \in S$, e si noti che $(p(\varepsilon), s(\varepsilon)) \leq (p(\varepsilon), a) = 0$.

Scegliamo una successione $\varepsilon_n \rightarrow 0$ per cui $s(\varepsilon_n) \rightarrow s^*$, $s^* \in S$. Per ogni $p \in P$,

$$(p, s(\varepsilon_n)) \leq 0$$

per n sufficientemente grande, quindi $(p, s^*) \leq 0$. Ne segue che $s_i^* \leq 0$ per ogni i e, poiché $a = (0, \dots, 0)$ è ammissibile, si ha $s^* = a$. Infine $s(\varepsilon_n) \in B(p(\varepsilon_n)) \subset B$, quindi $a \in \overline{B}$.

(II - Caso: S non limitato) Per S non limitato, utilizziamo il seguente

Lemma. Sia $C \subset \mathbb{R}^k$ un insieme convesso, sia $s_0 \in C$ e sia N un intorno di s_0 . Se s_0 minimizza (p, s) per $s \in C \cap N$. Allora s_0 minimizza (p, s) per $s \in C$.

Dimostrazione (lemma). Supponiamo che esista $s_1 \in C$ tale che $(p, s_1) < (p, s_0)$. Sia

$$s_2 = \alpha s_0 + (1 - \alpha) s_1, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Allora $s_2 \in C$ e $(p, s_2) < (p, s_0)$. Ma per α sufficientemente piccolo, $s_2 \in N$, il che contraddice l'ipotesi. \square

Sia S un insieme convesso chiuso qualsiasi, e a un punto ammissibile di S . Sia N un intorno chiuso di a . Allora a è ammissibile in $S \cap N$ e

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

dove s_n minimizza (p_n, s) per $s \in S \cap N$ per qualche $p_n \in P$. Allora, per il lemma, s_n minimizza (p_n, s) per $s \in S$ per lo stesso p_n .

(Caso - III: S inviluppo convesso di un insieme finito di punti) Supponiamo ora che S sia determinato da un insieme finito s_1, \dots, s_m . Un sottoinsieme U di $\{s_1, \dots, s_m\}$ si dirà *utilizzabile* se esiste un $p \in P$ tale che $U \subset B(p)$. Siano U_1, \dots, U_N i sottoinsiemi utilizzabili e p_1, \dots, p_N i corrispondenti elementi di P tali che $U_j \subset B(p_j)$. Sia $s \in B$, diciamo $s \in B(p)$, e

$$s = \sum_{i=1}^m \lambda_i s_i.$$

Se U è l'insieme degli s_i per cui $\lambda_i > 0$, allora $U \subset B(p)$, poiché $(p, s_i) > \min_{t \in S}(p, t)$ per $s_i \in U$ implicherebbe

$$(p, s) = \sum \lambda_i (p, s_i) > \min_{t \in S}(p, t),$$

assurdo. Quindi U è utilizzabile, diciamo $U = U_j$. Allora $s \in B(p_j)$ e

$$B = \bigcup_{j=1}^N B(p_j).$$

□

Tornando ora all'esempio introduttivo e applicando il teorema appena enunciato, possiamo concludere che i punti di tipo u' e u''' , che risultavano raggiungibili tramite scalarizzazioni solo imponendo nullo il peso di una componente, possono essere ottenuti considerando la chiusura topologica dell'insieme dei punti propriamente minimali.

Osservazione 5.6. In dimensione $k = 2$ ogni punto Pareto efficiente ammette sempre una retta di supporto con pesi positivi, per cui l'insieme dei punti supportati coincide con quello dei punti efficienti: $A = B$.

Esempio 5.7. Mostriamo tramite un esempio [6] che, in dimensione $k = 3$, l'insieme dei punti Pareto efficienti può non essere chiuso e non coincidere con l'insieme delle soluzioni ottenute tramite scalarizzazione.

Consideriamo l'insieme

$$U = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, 0 < x, y < 1\},$$

che rappresenta un arco di circonferenza nel piano $z = 1$, contenuto nel primo quadrante. Sia inoltre

$$e = (1, 0, 0),$$

e definiamo S come l'involuppo convesso di U ed e , cioè

$$S = \text{conv}(U \cup \{e\}).$$

Geometricamente, S può essere visto come un insieme convesso che unisce l'arco U (situato nel piano $z = 1$) al punto e (situato nel piano $z = 0$).

Osserviamo innanzitutto che il punto

$$f = (1, 0, 1) \in S$$

non è Pareto efficiente. Infatti, è possibile trovare punti di S che migliorano almeno una coordinata senza peggiorare le altre.

Consideriamo ora un punto generico dell'arco

$$s_0 = (x_0, y_0, 1) \in U, \quad x_0, y_0 > 0.$$

Intuitivamente, tali punti si trovano sulla frontiera dell'insieme nel piano $z = 1$ e non possono essere migliorati simultaneamente nelle prime due coordinate.

Si può mostrare che esiste un vettore di pesi

$$w_0 = (u_0, v_0, 0), \quad u_0 > 0, \quad v_0 > 0, \quad u_0 + v_0 = 1,$$

tale che s_0 minimizza il funzionale lineare

$$\varphi_{w_0}(s) = (w_0, s)$$

su S , almeno tra i punti con terza coordinata fissata. Questo corrisponde geometricamente al fatto che esiste una retta di supporto all'arco U nel punto s_0 . Per tenere conto anche della terza coordinata, consideriamo una piccola perturbazione del vettore dei pesi:

$$w = (1 - \varepsilon)w_0 + \varepsilon(0, 0, 1), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

In questo modo si assegna un peso piccolo ma positivo anche alla coordinata z . Si verifica allora che, per ε sufficientemente piccolo, il punto s_0 continua a minimizzare il funzionale

$$\varphi_w(s) = (w, s)$$

su tutto l'insieme S . Ne segue che

$$s_0 \in B,$$

cioè s_0 è ottenibile tramite scalarizzazione.

D'altra parte, il punto $e = (1, 0, 0)$ è Pareto efficiente. Infatti, non esiste alcun punto di S che lo domini componente per componente: ogni altro punto di S ha infatti terza coordinata strettamente positiva.

Tuttavia, e non può essere ottenuto come soluzione di un problema di scalarizzazione, cioè

$$e \notin B.$$

In conclusione, in questo esempio si ha

$$A \neq B,$$

e quindi, a differenza del caso bidimensionale, non tutti i punti Pareto efficienti possono essere ottenuti tramite scalarizzazione. Questo fenomeno è tipico degli spazi di dimensione almeno 3 e riflette una geometria più complessa della frontiera efficiente.

Esiste anche una versione non convessa, che non verrà trattata in questa tesi. Nel caso non convesso, il teorema di Arrow–Barankin–Blackwell afferma che ogni punto efficiente può essere approssimato come limite di punti supportati, ottenuti tramite combinazioni lineari dei criteri con pesi strettamente positivi, anche se l'insieme dei punti supportati potrebbe non coincidere con l'insieme dei punti efficienti. La caratterizzazione dei punti efficienti tramite scalarizzazioni lineari esiste ancora in senso topologico, ma non tutti i minimi possono essere rappresentati esattamente senza considerare chiusure o limiti di successioni.

Nei prossimi capitoli verrà chiarita l'importanza di questi risultati nel caso in cui il problema di ottimizzazione considerato sia un problema di economia del benessere.

Parte II

**Economia del benessere e
applicazioni**

Capitolo 6

Fondamenti dell'economia del benessere

Valutare il benessere di una collettività significa chiedersi: come possiamo confrontare e combinare le vite e le preferenze di molte persone in una sola misura significativa? Questa domanda ha guidato filosofi ed economisti per secoli, portando a diverse concezioni di giustizia, equità e utilità sociale.

In questo capitolo esploreremo due approcci classici e influenti: la visione utilitaristica di *Jeremy Bentham*, sviluppata tra la fine del XVIII e l'inizio del XIX secolo (in particolare con l'opera *An Introduction to the Principles of Morals and Legislation*, 1789), che misura il benessere come somma delle felicità individuali, e l'approccio di *John Rawls*, elaborato nel XX secolo (soprattutto con *A Theory of Justice*, 1971), che pone l'attenzione sul miglioramento della posizione dei meno avvantaggiati.

Per lo sviluppo di questo capitolo si fa riferimento principalmente a Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston & Jerry R. Green (1995) *Microeconomic Theory* [10] e Hal R. Varian (1992) *Microeconomic Analysis* [14].

6.1 Teoria della scelta sociale ed economia del benessere

L'economia del benessere si propone di valutare e confrontare diverse configurazioni economiche dal punto di vista del benessere collettivo. Il suo obiettivo principale è fornire criteri normativi per giudicare l'efficienza e, più in generale, la desiderabilità sociale di allocazioni alternative delle risorse. A tal fine, essa utilizza strumenti analitici che consentono di aggregare le informazioni individuali in una valutazione complessiva, rendendo possibile il confronto tra esiti economici differenti. In questo contesto, un ruolo centrale è svolto dalle funzioni di benessere sociale e, più in generale, dalle funzioni di aggregazione, che permettono di sintetizzare gli obiettivi in un unico criterio decisionale. La *teoria della scelta sociale* e l'*economia del benessere* affrontano il problema della valutazione collettiva da prospettive concettualmente diverse. La differenza fondamentale risiede nel tipo di informazione utilizzata: la teoria della scelta sociale opera su preferenze ordinali, mentre l'economia del benessere richiede

una struttura più ricca, basata su rappresentazioni numeriche delle preferenze che consentono operazioni di aggregazione.

L'economia del benessere non aggrega direttamente relazioni di preferenza, ma utilizza rappresentazioni delle preferenze individuali tramite funzioni di utilità, che vengono poi aggregate mediante funzioni di benessere sociale. Tali funzioni possono essere interpretate come una classe particolare di scalarizzazioni e permettono di ricondurre la valutazione del benessere collettivo a un problema di ottimizzazione scalare di un problema vettoriale rispetto all'ordine paretiano indotto dal cono \mathbb{R}_+^n .

In questa tesi non verrà trattata la teoria della scelta sociale. Si ricorda tuttavia che il suo risultato conclusivo più rilevante è il teorema di impossibilità di Arrow [11], che mostra l'impossibilità di costruire una regola di scelta sociale che soddisfi simultaneamente un insieme di condizioni considerate desiderabili.

6.2 Strumenti economici

Al fine di poter discutere i risultati economici è necessario presentare alcuni strumenti introduttivi. Si consideri un'economia con I consumatori e L beni. Per ciascun consumatore $i = 1, \dots, I$, si definiscono le seguenti grandezze:

- Un *insieme di consumo* $X_i \subset \mathbb{R}^L$.
- Un *paniere di consumo o allocazione individuale*:

$$x_i = (x_{i1}, \dots, x_{iL}) \in \mathbb{R}^L$$

L'*allocazione globale* è:

$$x = (x_1, \dots, x_I) \in \mathbb{R}_+^{I \times L}$$

L'*allocazione* viene modificata ad ogni scambio.

- Le risorse iniziali di beni nell'economia, ossia le *dotazioni iniziali*, sono $\omega_i \in \mathbb{R}_+^L$ e la *dotazione aggregata* è:

$$\omega = \sum_{i=1}^I \omega_i.$$

- Le preferenze del consumatore i sono rappresentate da una *funzione di utilità*

$$u_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$$

- Il *vettore di prezzi* è indicato con

$$p = (p_1, \dots, p_L) \in \mathbb{R}_+^L$$

- Il *livello di ricchezza* del consumatore i è

$$W_i \in \mathbb{R}_+,$$

ossia il valore monetario delle risorse di cui dispone ai prezzi p , che determina il vincolo di bilancio

$$p \cdot x_i \leq W_i.$$

I dati fondamentali dell'economia per un consumatore sono dunque riassunti da (X_i, u_i, ω_i) .

Osservazione 6.1 (Differenza tra paniere, dotazione e allocazione). In un'economia di I consumatori e L beni, è utile distinguere tre concetti fondamentali:

- **Dotazione individuale** $\omega_i \in \mathbb{R}_+^L$: indica la quantità di ciascun bene che il consumatore i possiede inizialmente.
- **Paniere di consumo** $x_i \in \mathbb{R}_+^L$: rappresenta la quantità di ciascun bene che il consumatore i effettivamente consuma, dopo eventuali scambi. In altre parole, il paniere è l'*allocazione individuale*.
- **Allocazione globale** $x = (x_1, \dots, x_I) \in \mathbb{R}_+^{I \cdot L}$: è l'insieme di tutti i panieri dei consumatori, cioè la distribuzione complessiva dei beni in tutta l'economia.

Definizione 6.2. [10, 16.B.1] Un'*allocazione* $x = (x_1, \dots, x_I)$ consiste nella specificazione di un vettore di consumo $x_i \in X_i$ per ogni consumatore $i = 1, \dots, I$

Un'allocazione x è detta *realizzabile* se rispetta il *vincolo di scarsità aggregata*, cioè

$$\sum_{i=1}^I x_{il} \leq \sum_{i=1}^I \omega_{il}, \quad \forall l = 1, \dots, L;$$

L'eccesso di domanda aggregata si annulla se:

$$\sum_{i=1}^I x_{il} = \sum_{i=1}^I \omega_{il}, \quad \forall l = 1, \dots, L;$$

Definizione 6.3 (Economia di puro scambio). Un'economia è un'*economia di puro scambio* se:

- lo spazio di consumo per il consumatore i è

$$X_i = \mathbb{R}_+^L \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, I.$$

- la dotazione aggregata è

$$\omega = \sum_{i=1}^I \omega_i$$

ovvero tutte le risorse sono già assegnate e l'unico modo di ottenere benessere è scambiare le dotazioni esistenti.

Inoltre, le allocazioni devono rispettare la risorsa totale disponibile:

$$\sum_{i=1}^I x_i = \sum_{i=1}^I \omega_i = \omega.$$

In altre parole, i beni non possono essere creati o distrutti: gli scambi possono solo ridistribuire le dotazioni iniziali.

Definizione 6.4 ([10], Def 16.B.3.). Un'allocazione x^* e un vettore dei prezzi $p^* = (p_1, \dots, p_L)$ costituiscono un *equilibrio walrasiano* (o *concorrenziale*) se:

- (i) x^* è realizzabile;
- (ii) Per ogni i , x_i^* è soluzione del problema di massimizzazione:

$$\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i) \text{ tale che } p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot \omega_i.$$

- (iii) l'eccesso di domanda aggregata si annulla, ovvero

$$\sum_i x_i^* = \omega$$

Definizione 6.5. [10, def 16.C.1] Una funzione di utilità u_i sull'insieme dei consumi $X_i \subset \mathbb{R}_+^L$ è *localmente non sazia* (LNS) se, per ogni $x_i \in X_i$ e ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $x' \in X_i$ tale che $\|x' - x\| \leq \varepsilon$ e $u_i(x') > u_i(x)$.

La norma $\|\cdot\|$ è intesa come la distanza euclidea tra due punti.

Osservazione 6.6 (Conseguenze della Non Sazietà Locale). L'ipotesi di Non Sazietà Locale (LNS) implica che, se x_i^* risolve il problema di massimizzazione dell'utilità del consumatore i ,

$$\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i) \text{ tale che } p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i,$$

allora il vincolo di bilancio è soddisfatto con uguaglianza, cioè:

$$p \cdot x_i^* = p \cdot \omega_i.$$

Infatti, se esistesse un paniere x_i tale che $p \cdot x_i < p \cdot \omega_i$, la LNS garantirebbe l'esistenza di un paniere x'_i arbitrariamente vicino a x_i e strettamente preferito, ancora accessibile, in contraddizione con l'ottimalità di x_i^* .

Ne segue che ogni paniere ottimo esaurisce interamente il vincolo di bilancio.

Inoltre, dall'ottimalità di x_i^* segue che, per ogni paniere $x_i \in X_i$ tale che $u_i(x_i) \geq u_i(x_i^*)$, deve valere necessariamente

$$p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*.$$

Questa proprietà riflette la monotonicità implicita indotta dalla LNS e risulta fondamentale nell'analisi dell'equilibrio walrasiano.

6.3 Legame con gli strumenti matematici

La teoria dei coni, e in particolare dei coni di preferenza, fornisce la struttura matematica necessaria per formalizzare gli ordinamenti sui vettori di utilità. Questo consente poi di collegare i criteri di benessere sociale alle nozioni di minimalità, efficienza e frontiera di Pareto già introdotte nel contesto di ottimizzazione vettoriale.

Osservazione 6.7 (Preferenze dei consumatori). D'ora in avanti si assume che ogni consumatore $i \in I$ sia dotato di una relazione di preferenza \succeq_i definita sull'insieme delle alternative X , la quale si intende completa e transitiva.

Le preferenze dei consumatori sono rappresentate mediante funzioni di utilità.

Definizione 6.8 (Funzione di utilità). Sia $X \subseteq \mathbb{R}^L$ e sia $i \in I$ un consumatore. Una funzione $u_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *funzione di utilità* del consumatore i se per ogni coppia di alternative $x, y \in X$ vale:

$$x \succeq_i y \iff u_i(x) \geq u_i(y),$$

dove \succeq_i denota la relazione di preferenza del consumatore i . Si assume implicitamente che le preferenze siano complete e transitive.

Per alcuni risultati sarà necessario che le funzioni di utilità abbiano delle proprietà specifiche:

- la *continuità* garantisce che piccoli cambiamenti nei panieri comportino piccoli cambiamenti nell'utilità.
- Una funzione di utilità $u : X \subseteq \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *quasi-concava* se:

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\} \quad \forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Questa proprietà, associata alle funzioni di utilità, implica che gli insiemi di sopra livello sono convessi. Ciò garantisce una buona struttura dei problemi di scelta del consumatore (esistenza e regolarità delle soluzioni) ed è fondamentale per l'analisi dell'equilibrio generale.

- Una funzione di utilità $u : X \subseteq \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *concava* se:

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y) \quad \forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Questa proprietà implica quasi-concavità, ma in più garantisce utilità marginale decrescente. Ciò rafforza le proprietà di unicità e stabilità delle soluzioni nei problemi di scelta del consumatore e nell'equilibrio generale.

6.4 Funzione di benessere sociale

Nel contesto dell'economia del benessere, il *policy maker* (o *pianificatore sociale*) rappresenta un decisore collettivo incaricato di selezionare, all'interno di un

insieme di alternative socialmente ammissibili, quelle ritenute preferibili secondo un criterio di valutazione aggregata. Da un punto di vista formale, il suo ruolo non è quello di un agente economico dotato di preferenze individuali, bensì quello di un operatore di scelta che induce un ordinamento (parziale o totale) sull'insieme degli esiti sociali, tipicamente rappresentati da vettori di utilità o di allocazioni. Dal punto di vista matematico, il ruolo del policy maker è associabile a diversi strumenti decisionali. Egli può intervenire attraverso: la scelta del cono delle preferenze sociali, la definizione dei pesi nelle scalarizzazioni lineari e la selezione della direzione e dei livelli di riferimento nelle scalarizzazioni di Pascoletti-Serafini. Tali strumenti determinano quali allocazioni saranno considerate efficienti o preferibili secondo criteri di benessere sociale.

In termini matematici, il policy maker può essere modellizzato come un funzionale di valutazione o, più in generale, come una regola di scelta sociale che associa a ogni insieme di alternative un sottoinsieme di esiti ritenuti efficienti o ottimali.

In questa sezione assumiamo che il policy maker disponga di un criterio esplicito e coerente per svolgere il suo compito. In particolare, assumiamo che tale criterio sia rappresentato da una funzione di benessere sociale.

Definizione 6.9. [10, 22.C] Date u_1, \dots, u_l funzione di utilità, definiamo la *funzione di benessere sociale SWF* associata come:

$$W : U \subseteq \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$W(u) = W(u_1, \dots, u_l)$$

che aggrega le utilità individuali in utilità della società.

Si può immaginare che $W(u)$ rifletta i giudizi sulla distribuzione in base alla decisione del policy maker.

Definizione 6.10. [10, 22.C.1] Data dunque una certa funzione di benessere sociale $W(\cdot)$ e un insieme di utilità $U \subset \mathbb{R}^l$ il *problema del policy maker* è:

$$\text{Max } W(u_1, \dots, u_l) \text{ tale che } (u_1, \dots, u_l) \in U.$$

Un vettore di utilità che risolve il problema indicato qui sopra è detto *ottimo sociale*.

Definizione 6.11 (Vettore utilità di un'alternativa). Sia X l'insieme delle alternative sociali e $I = \{1, \dots, i\}$ l'insieme degli agenti. Siano inoltre date le funzioni di utilità individuali $u_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, I$. Per ogni alternativa $x \in X$, definiamo il *vettore di utilità* corrispondente a x come

$$u(x) := (u_1(x), u_2(x), \dots, u_I(x)) \in \mathbb{R}^I.$$

Il *pianificatore sociale* è un decisore centrale che sceglie le allocazioni dei beni per massimizzare il benessere collettivo della società, tenendo conto delle dotazioni iniziali e delle preferenze dei consumatori.

Formalmente, dato un insieme di consumatori I con utilità $u_i(x_i)$ e dotazioni

ω_i , il problema del pianificatore sociale consiste nel risolvere:

$$\max_{(x_1, \dots, x_I) \in \mathcal{F}} W(u_1(x_1), \dots, u_I(x_I)),$$

dove $\mathcal{F} = \{(x_1, \dots, x_I) \mid \sum_{i=1}^I x_i \leq \sum_{i=1}^I \omega_i\}$ è l'insieme delle allocazioni realizzabili e W è la funzione di benessere sociale.

6.4.1 Proprietà della funzione di benessere sociale

Presentiamo ora alcune proprietà che potrebbero essere soddisfatte da una funzione di benessere sociale.

- *Non paternalismo*, proprietà secondo cui il giudizio sociale deve riflettere esclusivamente le preferenze degli individui coinvolti, il policy maker non altera le preferenze individuali e rispetta le scelte degli agenti.
- *Proprietà paretiana*, ovvero rispettare l'ordine di preferenza degli individui, diremo che per $W(\cdot)$ vale la proprietà paretiana se è crescente, ovvero:

$$u_i(x) \geq u_i(y) \forall i \implies W(x) > W(y).$$

Inoltre diciamo che $W(\cdot)$ è *strettamente paretiana*, se è strettamente crescente, ovvero:

$$u'_i \geq u_i \forall i \text{ e } u'_i > u_i \text{ per almeno un } i \implies W(u') \geq W(u).$$

Se $W(u)$ è strettamente paretiana allora la soluzione al problema del policy maker è necessariamente un ottimo paretiano. Se la funzione di benessere sociale è crescente (proprietà paretiana), allora ogni ottimo del pianificatore è debolmente Pareto efficiente.

- *Simmetria*, proprietà che garantisce che tutti gli agenti siano allo stesso livello,

$$W(u_1, \dots, u_n) = W(u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(n)}) \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \pi \in S_n$$

S_n è il gruppo delle permutazioni di $\{1, \dots, n\}$.

- *Concavità*.

Osservazione 6.12. La concavità di una funzione di benessere sociale $W(\cdot)$ può essere interpretata come una forma di *avversione alle disuguaglianze*. Infatti, se W è concava e $W(u) = W(u')$, allora

$$W\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u'\right) \geq W(u),$$

con disuguaglianza stretta se $u \neq u'$ e W è strettamente concava. In altre parole, combinare due allocazioni di utilità in media non riduce il benessere sociale e, se la concavità è stretta, lo aumenta. Ciò evidenzia che redistribuire

utilità verso una maggiore equità (senza modificare la media complessiva) può incrementare o almeno mantenere il benessere sociale.

Se l'utility possibility set è convesso e simmetrico e la funzione di benessere sociale è simmetrica e strettamente concava, allora il pianificatore sociale seleziona un'allocazione egualitaria di utilità, che è necessariamente Pareto-efficiente in quanto soluzione di un problema di massimizzazione su un insieme di allocazioni fattibili.

Nella prossima sezione analizzeremo alcuni approcci classici alla valutazione del benessere sociale.

6.4.2 Caso di Bentham

Il caso Benthamiano che prende il nome dall'economista e filosofo Bentham (1748-1832), noto anche come caso utilitaristico, rappresenta l'approccio classico all'ottimizzazione del benessere sociale, basato sulla somma delle utilità individuali. Bentham aveva infatti suggerito che il benessere di una collettività era la somma del benessere dei singoli individui. L'obiettivo qui è massimizzare la felicità collettiva. Maggior bene per il maggior numero.

Definizione 6.13. Una funzione di benessere sociale $W(\cdot)$ è detta *puramente utilitaristica* (o *Benthamiana*) se è della forma:

$$W(\cdot) = \sum_i u_i \quad (\text{caso non simmetrico: } W(\cdot) = \sum_i \beta_i u_i).$$

La critica pone luce sul fatto che i sacrifici individuali siano accettati per raggiungere il bene collettivo e non viene considerata la distribuzione del benessere.

Nel caso particolare di una società formata da due individui, la funzione di benessere sociale di Bentham può essere rappresentata graficamente mediante una mappa di *curve di isobenessere*, ciascuna associata a un livello costante di benessere sociale [13]. Ogni curva contiene tutte le combinazioni di utilità (u_1, u_2) che producono lo stesso valore della SWF.

- Nel caso simmetrico, con pesi uguali, le curve di isobenessere sono rette di equazione

$$u_2 = W - u_1,$$

dove W è il livello di benessere sociale.

- Nel caso non simmetrico, con pesi $\beta_1, \beta_2 > 0$, le rette di isobenessere diventano

$$u_2 = \frac{W - \beta_1 u_1}{\beta_2}.$$

Un approccio alternativo consiste nel dare maggiore attenzione agli individui che stanno peggio, assumendo che incrementi di utilità di un individuo generino incrementi decrescenti del benessere sociale. Formalmente, ciò si traduce

nell'utilizzare funzioni concave delle utilità individuali, ad esempio:

$$W(u) = \sum_i \log u_i \quad \text{o} \quad W(u) = \sum_i u_i^{\alpha_i}, \quad 0 < \alpha_i < 1.$$

Queste funzioni concave implicano che le utilità dei diversi individui non sono perfettamente sostituibili: aumentare l'utilità di un individuo non compensa completamente la perdita di un altro, e la SWF non è simmetrica rispetto agli individui.

6.4.3 Caso di Rawls e Nietzsche

Il caso estremo in cui meritano maggiore considerazione gli individui che stanno peggio corrisponde alla funzione di benessere *Rawlsiana*, dal filosofo statunitense John Rawls (1921-2002).

Definizione 6.14. Una funzione di benessere sociale $W(\cdot)$ è detta *Rawlsiana* se

$$W(u) = \min\{u_1, \dots, u_n\}.$$

Questa SWF concava implica forti effetti egualitari: la priorità assoluta è il miglioramento della posizione del membro più svantaggiato della società. In particolare, se $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ ha tutte le componenti uguali e si trova sulla frontiera di Pareto, allora u è un ottimo Rawlsiano. Sotto condizioni standard (monotonicità), l'ottimo Rawlsiano è Pareto efficiente.

Nel caso di una società formata da due individui, le curve di isobenessere della SWF Rawlsiana assumono la forma L-shaped (vedi Figura 6.1). Notiamo che se l'individuo 1 è quello che sta peggio, incrementi dell'utilità dell'individuo 2 (passaggio da A a B) non modificano il benessere sociale.

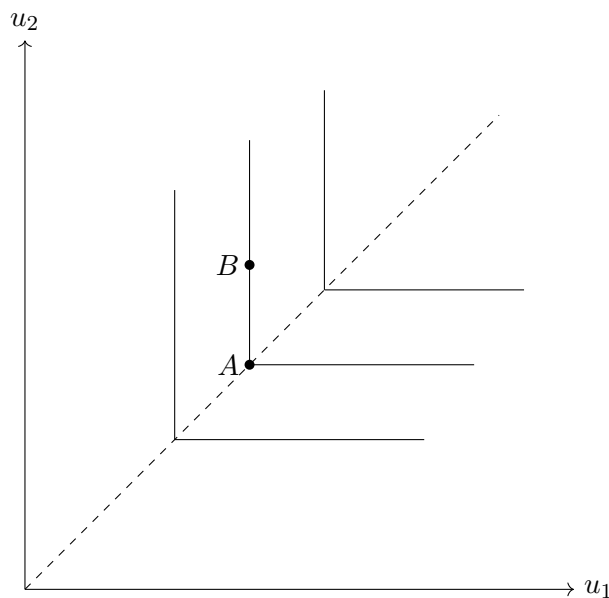


Figura 6.1: Curve di isobenessere nel caso Rawlsiano in \mathbb{R}^2 .

SWF Nietzscheana

Il caso opposto a quello di Rawls considera come riferimento per il benessere sociale l'individuo che sta meglio. Questa funzione, detta *Nietzscheana*, da Nietzsche (1844-1900), implica che la società si concentri esclusivamente sul membro più avvantaggiato.

Definizione 6.15. Una funzione di benessere sociale $W(\cdot)$ è detta *Nietzscheana* se

$$W(u) = \max\{u_1, \dots, u_n\}.$$

In una rappresentazione grafica per due individui, le curve di isobenessere della SWF Nietzscheana sarebbero l'opposto delle curve Rawlsiane: il benessere sociale aumenta solo se migliora l'individuo più avvantaggiato. Questi due casi estremi evidenziano il ruolo centrale della scelta dei pesi e della funzione di aggregazione nella definizione di giustizia sociale.

L'efficienza paretiana è definita rispetto all'ordine conico indotto dal cono positivo. Le funzioni di benessere sociale rappresentano scalarizzazioni del problema vettoriale. Il criterio utilitarista corrisponde a scalarizzazioni lineari con pesi strettamente positivi. Nel caso convesso, ogni punto propriamente Pareto-efficiente può essere ottenuto come soluzione di un problema di massimizzazione di una funzione di benessere sociale benthamiana, attraverso un'opportuna scelta dei pesi. Inoltre, per il teorema di Arrow–Barankin–Blackwell, ogni punto Pareto efficiente appartiene alla chiusura dell'insieme dei punti propriamente efficienti e può essere rappresentato tramite iperpiani di supporto. Il criterio rawlsiano invece utilizza una scalarizzazione non lineare basata sul minimo delle utilità e seleziona il punto della frontiera Pareto che massimizza l'utilità dell'individuo peggiore.

Sintesi Dal punto di vista geometrico, le curve di isobenessere delle funzioni di benessere sociale assumono un ruolo chiave nell'individuare le allocazioni Pareto-efficienti nello spazio delle utilità. Nel caso utilitaristico, con pesi $w_i > 0$, la funzione di benessere sociale è definita come

$$W_{\text{util}}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n w_i u_i,$$

e le relative curve di isobenessere

$$\mathcal{J}_c^{\text{util}} = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n w_i u_i = c\}$$

sono iperpiani nello spazio delle utilità. Geometricamente, queste curve coincidono con quelle determinate dalle scalarizzazioni lineari del problema vettoriale delle utilità: la massimizzazione di W_{util} seleziona quindi un punto di tangenza tra l'insieme delle utilità raggiungibili e un iperpiano di supporto, fornendo così una chiara interpretazione - che vedremo dopo - del ruolo del teorema di Arrow–Barankin–Blackwell nel caso convesso.

Nel caso rawlsiano, la funzione di benessere sociale è invece definita tramite il minimo delle utilità individuali:

$$W_{\text{Rawls}}(u_1, \dots, u_n) = \min_{i=1, \dots, n} u_i.$$

Le curve di isobenessere soddisfano

$$\mathcal{J}_c^{\text{Rawls}} = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : \min_i u_i = c\},$$

e nel caso bidimensionale assumono la caratteristica forma $a L$. Geometricamente, esse individuano i punti dello spazio delle utilità che massimizzano l'utilità dell'individuo peggiore. Si può osservare come questo approccio corrisponda a una particolare scalarizzazione di tipo Pascoletti–Serafini, in cui la direzione lungo cui si scorre l'insieme delle utilità è $\mathbf{d} = (1, 1, \dots, 1)$, e il cono di ordine è quello positivo $K = \mathbb{R}_+^n$. In questo senso, la scalarizzazione rawlsiana rappresenta una ricerca lungo la diagonale equa dello spazio delle utilità, selezionando un punto specifico della frontiera Pareto.

Capitolo 7

Teoremi fondamentali e ottimalità sociale

7.1 I teoremi fondamentali

Il concetto di efficienza paretiana, introdotto nell'ambito dell'ottimizzazione vettoriale come nozione di minimalità rispetto a un ordine indotto da un cono, assume come visto un ruolo centrale anche nella teoria economica. In particolare, esso rappresenta il criterio fondamentale con cui valutare l'efficienza delle allocazioni in un'economia con più individui e più obiettivi.

In questo contesto si collocano i due teoremi fondamentali dell'economia del benessere, che stabiliscono un collegamento tra il concetto di efficienza paretiana e il funzionamento dei mercati competitivi. Essi mostrano, sotto opportune ipotesi, come l'equilibrio di mercato sia strettamente legato alle allocazioni efficienti e costituiscono quindi uno dei principali punti di contatto tra l'analisi matematica dell'ottimizzazione vettoriale e le applicazioni economiche.

La ragione per cui gli economisti sono interessati a valutare la Pareto-efficienza delle allocazioni risiede nella stretta relazione tra *equilibri concorrenziali* e *allocazioni Pareto efficienti*. Questa corrispondenza è formalizzata nei cosiddetti *due teoremi fondamentali dell'economia del benessere*.

7.1.1 I° teor. fondamentale economia del benessere

Il primo teorema fondamentale dell'economia del benessere stabilisce le condizioni sotto le quali qualsiasi equilibrio di prezzo con trasferimenti, e in particolare qualsiasi equilibrio walrasiano, costituisce un ottimo paretiano. Per le economie di mercato competitive, esso fornisce una conferma formale e molto generale della proprietà della “mano invisibile” del mercato, enunciata da Adam Smith, secondo cui individui che perseguono egoisticamente il proprio interesse finiscono per promuovere, in modo non intenzionale, il benessere collettivo. La non sazietà locale [6.5](#) delle preferenze è la principale condizione richiesta per ottenere tale risultato.

Teorema 7.1. *Sia (x^*, p^*) un equilibrio Walrasiano in un'economia di puro scambio. Se per ogni consumatore $i \in \{1, \dots, I\}$ la funzione di utilità $u_i(x_i)$ soddisfa l'ipotesi di non sazietà locale, allora l'allocazione x^* è Pareto efficiente.*

Il teorema afferma che non esiste alcuna allocazione realizzabile $y = (y_1, \dots, y_I)$ tale che:

$$u_i(y_i) \geq u_i(x_i^*) \quad \forall i \in \{1, \dots, I\}$$

$$u_j(y_j) > u_j(x_j^*) \quad \text{per almeno un } j \in \{1, \dots, I\}.$$

7.1.2 II° teor. fondamentale economia del benessere

Il secondo teorema fondamentale dell'economia del benessere fornisce le condizioni sotto le quali un'allocazione ottima nel senso di Pareto può essere ottenuta come equilibrio di prezzo con trasferimenti. È il teorema inverso del primo teorema dell'economia del benessere, nel senso che ci dice che, sotto specifiche ipotesi, è possibile ottenere qualsiasi allocazione ottima nel senso di Pareto desiderata come equilibrio di mercato, utilizzando un appropriato schema di distribuzione del patrimonio.

Il secondo teorema è più delicato del primo. Anzitutto viene definito il concetto di *quasiequilibrio di prezzo con trasferimenti*, un indebolimento della nozione di equilibrio di prezzo con trasferimenti. Si dimostra che se tutte le preferenze sono convesse, qualsiasi allocazione ottima nel senso di Pareto può essere ottenuta come quasiequilibrio di prezzo con trasferimenti. Il secondo passaggio consiste nel fornire condizioni sufficienti affinché un quasiequilibrio di prezzo diventi un equilibrio vero e proprio.

Questa divisione del lavoro è conveniente perché il primo passaggio è molto generale e isola il ruolo centrale della convessità, mentre le assunzioni per il secondo passaggio tendono a essere più specifiche, spesso adattate ai particolari del modello considerato.

Definizione 7.2. [10, def. 16.D.1] Data un'economia di puro scambio specificata da

$$\{(X_i, \succ_i)\}_{i=1}^I$$

con dotazione iniziale aggregata $\omega \in \mathbb{R}_+^L$, un'allocazione $x^* = (x_1^*, \dots, x_I^*)$ e un vettore di prezzi $p = (p_1, \dots, p_L) \geq 0$ costituiscono un *quasiequilibrio di prezzo con trasferimenti* se esiste una dotazione (W_1, \dots, W_I) tale che:

1. Per ogni consumatore i , se $x_i \succ_i x_i^*$ allora

$$p \cdot x_i \geq W_i.$$

2. Per ogni consumatore i ,

$$p \cdot x_i^* \leq W_i.$$

3. I mercati sono in equilibrio:

$$\sum_{i=1}^I x_i^* = \omega.$$

Questo teorema stabilisce che (sotto ipotesi di convessità) ogni ottimo di Pareto può essere decentralizzato come un equilibrio di mercato.

Teorema 7.3. *Sia $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$ un'allocazione Pareto-efficiente (con $x_i^* > 0$) in un'economia in cui la dotazione aggregata è $\omega = \sum_{i=1}^m x_i^*$. Se, per ogni consumatore $i \in \{1, \dots, m\}$:*

1. *L'insieme di consumo X_i è convesso,*
2. *La funzione di utilità $u_i(x_i)$ è continua e quasi-concava,*
3. *La funzione di utilità $u_i(x_i)$ soddisfa la non sazietà locale,*

allora esiste un vettore dei prezzi non nullo $p^ \in \mathbb{R}_+^L \setminus \{0\}$ tale che x^* può essere supportato come un equilibrio Walrasiano con trasferimenti. Ovvero, se si redistribuiscono le dotazioni iniziali in modo tale che la nuova ricchezza di ogni consumatore sia $W_i = p^* \cdot x_i^*$, allora per ogni consumatore i , x_i^* risolve:*

$$\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i) \quad \text{s.t.} \quad p^* \cdot x_i \leq W_i$$

7.1.3 Interpretazione

Un'allocazione propriamente Pareto-efficiente x^* (sotto opportune ipotesi di convessità) può essere vista come la soluzione di un problema di massimizzazione di una funzione del benessere sociale lineare. Siano $w_i > 0$ i pesi sociali strettamente positivi per gli m agenti, e siano L i beni dell'economia. Il problema di ottimizzazione vincolata sui beni è:

$$\begin{cases} \max_x \sum_{i=1}^m w_i u_i(x_i) \\ \text{tale che} \quad \sum_{i=1}^m x_{il} \leq \omega_l \quad \forall l = 1, \dots, L \\ x_{il} \geq 0 \quad \forall i, l \end{cases}$$

dove ω_l è la dotazione totale disponibile del bene l .

Per risolvere questo problema, costruiamo la funzione Lagrangiana. Associamo un moltiplicatore $p_l \geq 0$ a ciascun vincolo di risorsa del bene l . Il vettore dei moltiplicatori $p = (p_1, \dots, p_L)$ assumerà il ruolo di vettore dei prezzi ombra dei singoli beni. I *prezzi ombra* sono i moltiplicatori di Lagrange associati ai vincoli di risorsa in un problema di ottimizzazione; essi rappresentano il valore marginale di un bene, ossia l'incremento del benessere sociale derivante da un aumento unitario della sua dotazione. In equilibrio competitivo, tali prezzi coincidono con i prezzi di mercato.

$$\mathcal{L}(x, p) = \sum_{i=1}^m w_i u_i(x_i) + \sum_{l=1}^L p_l \left(\omega_l - \sum_{i=1}^m x_{il} \right)$$

Assumiamo per semplicità che ogni consumatore consumi quantità strettamente positive di ogni bene ($x_{il}^* > 0$). In questo caso, per il teorema di Kuhn-Tucker,

le derivate parziali della Lagrangiana rispetto a ciascuna variabile di scelta x_{il} valutate nell'ottimo devono annullarsi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{il}} = w_i \frac{\partial u_i(x_i^*)}{\partial x_{il}} - p_l^* = 0 \quad \forall i, \forall l$$

Riscrivendo questa condizione in forma vettoriale per il consumatore i , otteniamo la relazione fondamentale:

$$w_i \nabla u_i(x_i^*) = p^* \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (7.1)$$

Interpretazione Geometrica ed Economica

1) **Allineamento dei gradienti:** Poiché p^* è lo stesso per tutti gli agenti, 7.1 ci dice che, in un ottimo di Pareto, i gradienti delle funzioni di utilità di tutti gli agenti $\nabla u_i(x_i^*)$ sono collineari. Puntano tutti nella stessa direzione (quella del vettore dei prezzi p^*), modulati unicamente dallo scalare w_i .

2) **Saggio marginale di sostituzione (SMS):** Se prendiamo il rapporto tra le condizioni di primo ordine per due beni k e l per lo stesso consumatore i , il peso sociale w_i si semplifica:

$$\frac{\frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}}}{\frac{\partial u_i}{\partial x_{il}}} = \frac{p_k^*}{p_l^*}$$

Questo dimostra che il saggio marginale di sostituzione (il rapporto tra le utilità marginali dei due beni) è identico per tutti gli agenti e coincide con il rapporto dei prezzi ombra.

3) **Ruolo dei pesi della scalarizzazione lineare:** Possiamo esplicitare il vettore dei prezzi come $p^* = w_i \nabla u_i(x_i^*)$. L'iperpiano separatore identificato nel Secondo Teorema dell'economia del benessere (il piano tangente alle curve di indifferenza) ha esattamente p^* come vettore normale. I pesi w_i della scalarizzazione fungono da "fattori di scala" per convertire le utilità marginali che rappresentano preferenze soggettive dei consumatori nei prezzi di mercato, che sono un elemento oggettivo, uguale per tutti.

Quindi i prezzi in economia emergono naturalmente come i moltiplicatori associati al vincolo di scarsità delle risorse fisiche durante l'ottimizzazione della funzione di benessere con vincolo sulle risorse. In molte dimostrazioni elementari, ci si accontenta di pesi non-negativi ($w \geq 0$). Tuttavia, matematicamente, se alcuni $w_i = 0$, la condizione di ottimalità $w_i \nabla u_i = p$ implicherebbe $p = 0$ (prezzi nulli), il che è economicamente privo di senso nel caso di beni scarsi. Il Teorema di Arrow, Barankin e Blackwell, garantendo la densità dei punti con $w > 0$ rispetto ai punti Pareto ottimali, assicura che i punti di Pareto siano "vicini" a quelli compatibili con un sistema di prezzi strettamente positivi, rendendo il modello economico robusto.

7.1.4 Scatola di Edgeworth

La scatola di Edgeworth rappresenta uno strumento efficace per analizzare in modo intuitivo i teoremi fondamentali dell'economia del benessere.

Consideriamo un'economia di puro scambio con due consumatori, A e B , e due beni. Sia $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y) \in \mathbb{R}_+^2$ la dotazione totale dei beni.

La scatola di Edgeworth è il rettangolo $[0, \Omega_x] \times [0, \Omega_y]$, in cui ogni punto rappresenta un'allocatione dei beni tra i due consumatori. Il sistema di riferimento del consumatore A ha origine nell'angolo in basso a sinistra, mentre quello del consumatore B ha origine nell'angolo in alto a destra. Le preferenze dei consumatori sono rappresentate mediante le rispettive curve di indifferenza.

Lo scambio ha inizio da una dotazione iniziale, detta *dotazione*, indicata con $\omega = \omega_A = (\omega_{x,A}, \omega_{y,A})$ per il consumatore A , mentre il consumatore B dispone di $\omega_B = (\Omega_x - \omega_{x,A}, \Omega_y - \omega_{y,A})$.

Poiché vi sono due soli beni, il sistema dei prezzi può essere descritto mediante un unico rapporto $p = \frac{p_x}{p_y}$, che rappresenta il tasso di scambio tra i beni.

Data la dotazione iniziale ω , si definisce la *linea di bilancio* come l'insieme delle allocationi ottenibili tramite scambi a prezzi dati:

$$p_x x + p_y y = p_x \omega_{x,A} + p_y \omega_{y,A}.$$

Geometricamente, essa è una retta passante per ω con pendenza $-\frac{p_x}{p_y}$. Ad esempio *do un X in cambio di $2Y$* sarà graficamente visibile come una retta di pendenza $-\frac{1}{2}$. Un'allocatione è un candidato equilibrio se appartiene a una linea di bilancio e se, al tempo stesso, le curve di indifferenza dei due consumatori sono tangenti. In tal caso vale la condizione

$$MRS_A = MRS_B = \frac{p_x}{p_y}.$$

Il *saggio marginale di sostituzione* (MRS) misura il tasso al quale un consumatore è disposto a sostituire un bene con un altro mantenendo invariato il livello di utilità. Formalmente, nel caso di utilità differenziabile $u(x_1, x_2)$, esso è dato dal rapporto tra le utilità marginali:

$$MRS(x_1, x_2) = \frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2},$$

e coincide con il coefficiente angolare (in valore assoluto) della tangente alla curva di indifferenza nel punto considerato.

L'equilibrio competitivo appartiene dunque all'intersezione tra la linea di bilancio e l'insieme dei punti in cui le curve di indifferenza sono tangenti.

L'insieme delle allocationi Pareto-efficienti è costituito dai punti della scatola in cui le curve di indifferenza dei due consumatori sono tangenti. Tale insieme prende il nome di *frontiera di Pareto* (o *contract curve*). I punti della frontiera di Pareto rappresentano gli ottimi del problema di ottimizzazione vettoriale associato alle utilità dei due consumatori. Tuttavia, non tutti questi punti sono necessariamente equilibri competitivi: un equilibrio richiede inoltre che esista una linea di bilancio comune tangente alle curve di indifferenza nel punto considerato.

Il *primo teorema fondamentale dell'economia del benessere* afferma che ogni equilibrio competitivo è Pareto efficiente, ossia appartiene alla frontiera di Pa-

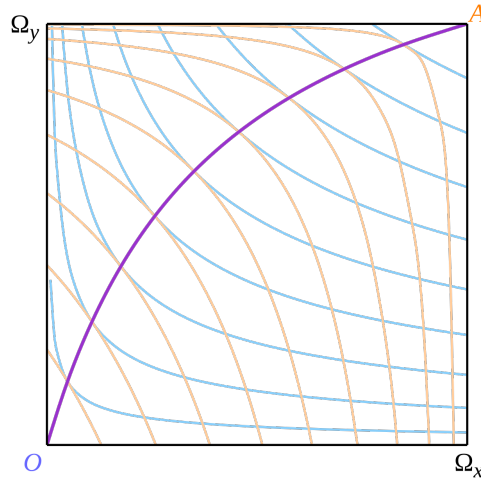


Figura 7.1: Insieme di Pareto, linea viola, ottenuta come unione dei punti di tangenza tra due curve di indifferenza. [16]

reto.

Il *secondo teorema fondamentale dell'economia del benessere* stabilisce invece che, sotto opportune ipotesi di convessità, ogni allocazione Pareto efficiente può essere realizzata come equilibrio competitivo a partire da una opportuna redistribuzione delle dotazioni iniziali.

In particolare, modificando la dotazione iniziale ω mediante trasferimenti adeguati, è possibile ottenere qualsiasi punto della frontiera di Pareto come equilibrio di mercato.

7.2 Il ruolo della convessità

Nel modello di economia del benessere, la convessità delle preferenze rappresenta un'ipotesi di grande utilità pratica. Essa garantisce che le preferenze degli individui e le allocazioni ammissibili siano sufficientemente regolari, permettendo di combinare diverse scelte in modo coerente senza uscire dalla regione ammissibile.

Grazie a questa proprietà, è possibile utilizzare la tecnica della scalarizzazione lineare delle utilità individuali per valutare il benessere collettivo. In altre parole, la convessità assicura che combinazioni di allocazioni possibili producano risultati analizzabili e comparabili, rendendo più semplice lo studio di problemi di ottimizzazione del benessere.

Quando lo spazio delle allocazioni non possiede questa proprietà, le scalarizzazioni lineari potrebbero non essere sufficienti per individuare tutte le allocazioni efficienti. In questi casi diventa necessario ricorrere a strumenti più sofisticati, come le scalarizzazioni adattive, per esplorare correttamente l'insieme dei possibili miglioramenti.

In assenza di convessità, possono esistere allocazioni Pareto-efficienti che non

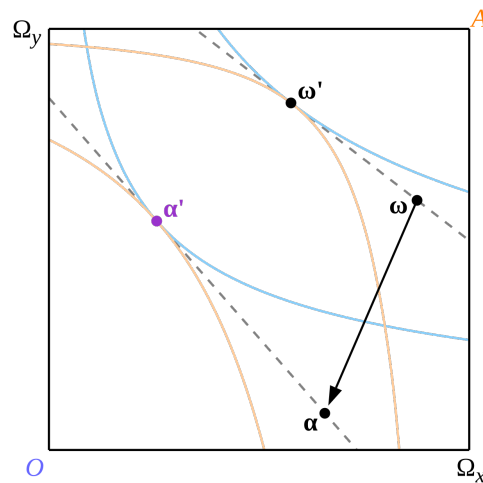


Figura 7.2: Sia ω la dotazione iniziale e ω' l'equilibrio concorrenziale corrispondente. Se l'allocazione α' è socialmente preferibile, essa può essere raggiunta tramite un'opportuna redistribuzione delle dotazioni iniziali. È sufficiente spostarsi da ω a un punto α sulla retta di bilancio associata ai prezzi di equilibrio; il mercato condurrà poi l'economia verso α' . Questo risultato, rappresentato nella scatola di Edgeworth, illustra il Secondo Teorema Fondamentale dell'Economia del Benessere. [16]

sono soluzioni di alcuna scalarizzazione lineare, poiché non esiste un iperpiano di supporto che le separi dall'insieme delle allocazioni migliorative

7.3 Il ruolo del teorema di ABB

Dopo aver presentato il teorema di *Arrow, Barankin e Blackwell (ABB)* dal punto di vista matematico, ne analizziamo ora le implicazioni economiche. L'obiettivo è mostrare come tale risultato stabilisca una corrispondenza tra *allocazioni Pareto-efficienti* e *funzioni di benessere sociale* ottenute tramite scalarizzazioni lineari.

Riprendiamo l'esempio introduttivo [5.1]. In termini economici, esso può essere interpretato come l'insieme delle utilità ottenibili da due individui al variare delle allocazioni. La frontiera superiore di U rappresenta l'insieme delle allocazioni Pareto-efficienti, ossia quelle per cui non è possibile migliorare la condizione di un individuo senza peggiorare quella dell'altro.

Il teorema di Arrow, Barankin e Blackwell non afferma che ogni punto Pareto-efficiente sia ottenibile esattamente tramite scalarizzazione lineare, ma che tali punti possono essere approssimati arbitrariamente bene da soluzioni associate a pesi strettamente positivi.

Il teorema suggerisce che, pur essendo restrittive, le funzioni di benessere sociale utilitariste sono sufficientemente ricche da approssimare qualsiasi allocazione efficiente, rendendole uno strumento operativo rilevante nell'analisi economica. Le scalarizzazioni lineari considerate assumono qui il significato di funzioni di

benessere sociale utilitariste, nelle quali le utilità individuali vengono aggregate mediante pesi non negativi. Come osservato, la scelta dei pesi è cruciale:

- Se i pesi sono *strettamente positivi*, le soluzioni della scalarizzazione corrispondono a punti *propriamente minimali*, ossia a punti appartenenti alla frontiera di Pareto.
- Se invece uno dei pesi è nullo, la scalarizzazione può selezionare punti *debolmente minimali*, che non appartengono necessariamente alla frontiera Pareto-efficiente.

Un peso nullo equivale, dal punto di vista normativo, a escludere completamente un individuo dalla valutazione del benessere sociale.

Dal punto di vista economico, questa distinzione è rilevante. I punti debolmente minimali risultano poco significativi, poiché corrispondono a situazioni in cui è possibile migliorare almeno la situazione di un individuo senza alcun peggioramento per nessun altro.

Al contrario, i punti propriamente minimali rappresentano allocazioni con rapporti di trade off limitati e costituiscono l'oggetto di interesse dell'analisi del benessere.

In questo contesto emerge il ruolo centrale del teorema di Arrow, Barankin e Blackwell: esso garantisce che ogni punto Pareto-efficiente possa essere ottenuto come limite di soluzioni di problemi di scalarizzazione lineare con pesi strettamente positivi.

Il teorema fornisce quindi una giustificazione teorica all'uso delle funzioni di benessere sociale utilitariste come strumento per selezionare allocazioni efficienti, chiarendo al contempo i limiti della scalarizzazione lineare quando non si impongono condizioni adeguate sui pesi.

Esempio 7.4. La figura [7.3](#) rappresenta una situazione simile a quella dell'esempio [5.1](#). Il segmento rosso rappresenta i punti propriamente minimali, estremi esclusi. I punti u^4, u sono punti minimali; i segmenti, giallo e verde, rappresentano invece punti debolmente minimali. L'analisi della figura evidenzia come l'interpretazione economica dei punti debolmente minimali risulti problematica. In particolare, nel segmento verde si osserva un insieme di alternative in cui, a parità di utilità per l'agente u_1 , corrispondono variazioni (anche rilevanti) dell'utilità per l'agente u_2 ; in modo speculare, nel segmento giallo avviene l'opposto. Pur non essendo impossibile attribuire un significato economico a tali configurazioni, esse descrivono situazioni poco realistiche e difficilmente riscontrabili in contesti economici concreti.

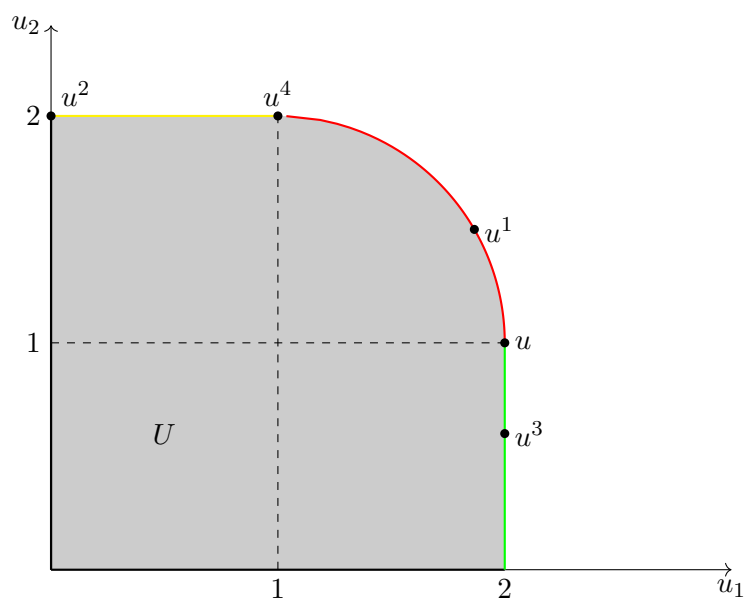


Figura 7.3: Utilità di u_1 e u_2 in un'economia di puro scambio con due soli agenti.

Conclusioni

Il lavoro sviluppato in questa tesi nasce dall'esigenza di comprendere come affrontare in modo rigoroso problemi decisionali caratterizzati dalla presenza simultanea di più criteri. In questo contesto, l'ottimizzazione vettoriale si è rivelata non soltanto un'estensione naturale dell'ottimizzazione classica, ma soprattutto un cambiamento di prospettiva: l'idea stessa di ottimo perde la sua unicità e lascia spazio a una nozione più articolata, fondata su relazioni di dominanza e strutture d'ordine parziale.

La prima parte della trattazione ha messo in evidenza come tale cambiamento sia profondamente radicato nella geometria dei coni convessi. Attraverso lo studio delle loro proprietà e delle relazioni che essi inducono, è stato possibile formalizzare in modo preciso concetti come minimalità ed efficienza. In particolare, è emerso chiaramente come la nozione di efficienza paretiana non sia un semplice compromesso tra criteri, ma una conseguenza naturale dell'impossibilità di confrontare in modo totale vettori multidimensionali.

Un aspetto che ha assunto un ruolo centrale è quello della scalarizzazione. A prima vista, essa potrebbe apparire come un ritorno al caso scalare; tuttavia, l'analisi svolta mostra come si tratti piuttosto di uno strumento di collegamento, che permette di tradurre un problema complesso in una forma più trattabile senza perdere, sotto opportune condizioni, l'informazione essenziale. In questo senso, il teorema di Arrow–Barankin–Blackwell rappresenta un punto di sintesi particolarmente significativo, poiché chiarisce in quali casi l'efficienza può essere ricondotta alla massimizzazione di una funzione di utilità.

La seconda parte della tesi ha permesso di osservare come questi strumenti trovino una naturale applicazione nell'economia del benessere. Ciò che emerge è che concetti come efficienza paretiana e funzioni di benessere sociale non sono soltanto costruzioni economiche, ma possono essere letti come manifestazioni di una struttura matematica più profonda. In particolare, i teoremi fondamentali dell'economia del benessere risultano più trasparenti se interpretati attraverso il linguaggio dell'ottimizzazione vettoriale, che ne mette in luce le ipotesi essenziali e i limiti.

Un elemento che appare rilevante, anche alla luce del percorso svolto, è il ruolo della convessità. Molti dei risultati ottenuti, sia in ambito matematico sia economico, dipendono in modo cruciale da tale ipotesi. Questo suggerisce che una parte significativa della teoria poggia su condizioni strutturali forti, la cui violazione apre scenari più complessi e meno trattabili, ma anche potenzialmente più aderenti alla realtà.

Proprio in questa direzione si collocano i possibili sviluppi futuri del lavoro.

Sarebbe interessante, ad esempio, approfondire il caso non convesso, in cui l'insieme dei punti efficienti può assumere una struttura molto più irregolare, oppure considerare contesti dinamici o in presenza di incertezza. Un ulteriore sviluppo potrebbe riguardare l'aspetto computazionale, con lo studio di metodi numerici per l'individuazione di soluzioni efficienti in problemi concreti.

In conclusione, il percorso affrontato ha evidenziato come l'ottimizzazione vettoriale fornisca un linguaggio unificante per lo studio di problemi complessi, in cui entrano in gioco più criteri e più punti di vista. Più che offrire risposte definitive, essa permette di comprendere meglio la natura dei compromessi e dei limiti intrinseci ai processi decisionali, mostrando come la matematica possa contribuire non solo a risolvere problemi, ma anche a chiarire le strutture concettuali che li sottendono.

Bibliografia

Fonti per la parte di fondamenti matematici:

- [1] Dinh The Luc. *Theory of Vector Optimization*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 319. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg, 1988.
- [2] Yoshikazu Sawaragi, Hirotaka Nakayama & Tetsuzo Tanino. *Theory of Multiobjective Optimization*. Elsevier (Mathematics in Science and Engineering, vol. 176), 1985.
- [3] M. M. Mäkelä & Y. Nikulin. *On Cone Characterizations of Strong and Lexicographic Optimality in Convex Multiobjective Optimization*. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 143 (3), 2009, pp. 519–538.
- [4] J. Jahn. *Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [5] P.L. Yu. *Cone Convexity, Cone Extreme Points and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiple Objectives*. J. Optim. Theory Appl., 14, 319–377, 1974.
- [6] K. J. Arrow, E. W. Barankin & D. Blackwell. Admissible points of convex sets. In: H. W. Kuhn & A. W. Tucker (Eds.), *Contributions to the Theory of Games*, Vol. II, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953, pp. 87–91.
- [7] Gabriele Eichfelder. *Scalarizations for adaptively solving multi-objective optimization problems* Computational Optimization and Applications, Riedrich-Alexander univeritat Erlangen- Nurnberg , November 2009.
- [8] M.I. Henig. *Proper Efficiency with Respect to Cones*. Journal of Optimization Theory and Applications, 36(3), 387–407, 1982.
- [9] John von Neumann. *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. Mathematische Annalen, 1928.

Fonti per la parte di economia del benessere:

- [10] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston & Jerry R. Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.

- [11] K. J. Arrow. *A Difficulty in the Concept of Social Welfare*. Journal of Political Economy, 58(4), 328–346, 1950.
- [12] Yeon-Koo Che, Jinwoo Kim, Fuhito Kojima & Christopher Thomas Ryan. “Near” *Weighted Utilitarian Characterizations of Pareto Optima*. Econometrica, Vol. 92, No. 1, pp. 141–165, January 2024.
- [13] Roberto Cellini. *Politica Economica: Introduzione ai Modelli Fondamentali*. McGraw-Hill, Milano, 2004.
- [14] Hal R. Varian. *Microeconomic Analysis*. 3rd edition, W. W. Norton & Company, New York, 1992.
- [15] Truman F. Bewley. *General Equilibrium, Overlapping Generations Models, and Optimal Growth Theory*. Harvard University Press, 2009.
- [16] Wikipedia contributors. *Edgeworth box*. Wikipedia. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Edgeworth_box.

